



# TEORI PELUANG

Joni Wilson Sitopu, Nanang, Johni S Pasaribu, Abdul Baist,  
Farida Daniel, Mohammad Ridho'i, Nur Fitriyah Indraswari,  
I Made Suarsana, Eva Nur Ramadhani, Soleman Saidi,  
Ahmad Choirul Anam, Hanna Hilyati Aulia

ISBN 978-623-198-395-4



9 786231 983954

# **TEORI PELUANG**

**Joni Wilson Sitopu  
Nanang  
Johni S Pasaribu  
Abdul Baist  
Farida Daniel  
Mohammad Ridhoi  
Fitriyah Indraswari  
I Made Suarsana  
Eva Nur Ramadhani  
Soleman Saidi  
Ahmad Choirul Anam  
Hanna Hilyati Aulia**



**PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI**

# TEORI PELUANG

**Penulis :**

Joni Wilson Sitopu  
Nanang  
Johni S Pasaribu  
Abdul Baist  
Farida Daniel  
Mohammad Ridhoi  
Fitriyah Indraswari  
I Made Suarsana  
Eva Nur Ramadhani  
Soleman Saidi  
Ahmad Choirul Anam  
Hanna Hilyati Aulia

**ISBN : 978-623-198-395-4**

**Editor :** Ari Yanto, M.Pd

**Penyunting :** Tri Putri Wahyuni, S.Pd

**Desain Sampul dan Tata Letak :** Atyka Trianisa, S.Pd

**Penerbit :** PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

**Redaksi :**

Jl. Pasir Sebelah No. 30 RT 002 RW 001  
Kelurahan Pasie Nan Tigo Kecamatan Koto Tengah  
Padang Sumatera Barat

Website : [www.globaleksekuatifteknologi.co.id](http://www.globaleksekuatifteknologi.co.id)

Email : [globaleksekuatifteknologi@gmail.com](mailto:globaleksekuatifteknologi@gmail.com)

Cetakan pertama, Juni 2023

Hak cipta dilindungi undang-undang  
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk  
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

## KATA PENGANTAR

Puji serta syukur penulis panjatkan atas kehadiran Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan berkat, nikmat, dan karunia-Nya dalam penyelesaian buku ini. Buku Teori Peluang ini sengaja ditulis untuk digunakan sebagai referensi bagi para pembaca dan mahasiswa. Selain itu, buku ini memberikan permasalahan berupa contoh soal dan pemecahan masalah, sehingga diharapkan dapat membantu memberikan wawasan dan pemahaman yang lebih baik dari sebelumnya. Sedangkan dari segi kedalaman dan ketajaman materi, penulis tetap mengharapakan pembaca untuk membuka teks aslinya dan lebih banyak waktu untuk diskusi dan latihan soal.

Secara detail pembahasan buku ini meliputi, Konsep teori peluang, Aksioma, Probabilitas, Probabilitas kejadian kondisional dan kejadian indenpenden, Ekspektasi matematik, Distribusi uniform diskrit dan bernouli, Distribusi binomial, Distribusi geometric, Distribusi hipergeometrik, Distribusi poisson, Distribusi uniform kontinu dan eksponensial, Distribusi normal.

Materi pokok tersebut dikemas sedemikian rupa sehingga setelah mengikuti kegiatan pembelajaran dengan buku ini, mahasiswa diharapkan mampu memahami buku teori peluang terkini dengan baik dan benar secara utuh.

Akhir kata, penulis sampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyelesaian buku ini. Penulis juga menyadari bahwa di dalam pembuatan buku ini masih banyak kekurangan, untuk itu penulis menerima saran dan kritik yang sifatnya membangun. Mudah-mudahan buku Teori Peluang ini memberikan banyak manfaat.

Padang, Juni 2023

Penulis

## DAFTAR ISI

|                                                 |           |
|-------------------------------------------------|-----------|
| <b>KATA PENGANTAR .....</b>                     | <b>i</b>  |
| <b>DAFTAR ISI .....</b>                         | <b>ii</b> |
| <b>DAFTAR GAMBAR .....</b>                      | <b>v</b>  |
| <b>DAFTAR TABEL .....</b>                       | <b>vi</b> |
| <b>BAB 1 KONSEP TEORI PELUANG .....</b>         | <b>1</b>  |
| 1.1 Pendahuluan.....                            | 1         |
| 1.2 Ruang Sampel, Kejadian Dan Peluang .....    | 2         |
| 1.2.2 Kejadian ( <i>Events</i> ).....           | 5         |
| 1.2.3 Peluang Suatu Kejadian .....              | 5         |
| 1.3 Peluang Bersyarat .....                     | 12        |
| 1.3.1 Kejadian-Kejadian Yang Saling Bebas ..... | 14        |
| 1.3.2 Kejadian-Kejadian Yang Saling Lepas.....  | 14        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                             | 16        |
| <b>BAB 2 AKSIOMA PELUANG .....</b>              | <b>17</b> |
| 2.1 Ruang Kejadian/Ruang kejadian .....         | 17        |
| 2.2 Kejadian .....                              | 17        |
| 2.3 Jenis-jenis Kejadian.....                   | 18        |
| 2.4 Operasi Kejadian .....                      | 18        |
| 2.5 Hukum-hukum Operasi Kejadian.....           | 21        |
| 2.6 Peluang .....                               | 21        |
| 2.7 Proposisi Peluang .....                     | 23        |
| 2.8 Peluang berdasarkan Keyakinan.....          | 24        |
| 2.9 Latihan .....                               | 25        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                             | 26        |
| <b>BAB 3 PROBABILITAS .....</b>                 | <b>27</b> |
| 3.1 Pendahuluan.....                            | 27        |
| 3.2 Kebutuhan teori Probabilitas.....           | 28        |
| 3.3 Ruang sampel dan peristiwa.....             | 31        |
| 3.4 Himpunan.....                               | 32        |
| 3.5 Ruang setara hingga .....                   | 33        |
| 3.6 Peristiwa pelengkap.....                    | 36        |

|                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.7 Peristiwa saling terpisah .....                                         | 38         |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                         | 45         |
| <b>BAB 4 PROBABILITAS KEJADIAN KONDISIONAL DAN KEJADIAN INDEPENDEN.....</b> | <b>47</b>  |
| 4.1 Probabilitas Kondisional .....                                          | 47         |
| 4.2 Kejadian Independen .....                                               | 56         |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                         | 64         |
| <b>BAB 5 EKSPEKTASI MATEMATIKA.....</b>                                     | <b>65</b>  |
| 5.1 Pengertian Ekspektasi Matematika .....                                  | 65         |
| 5.2 Mean .....                                                              | 69         |
| 5.3 Variansi .....                                                          | 70         |
| 5.4 Kovariansi dan Korelasi .....                                           | 74         |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                         | 83         |
| <b>BAB 6 DISTRIBUSI UNIFORM DISKRIT DAN BERNOULLI .....</b>                 | <b>85</b>  |
| 6.1 Pendahuluan.....                                                        | 85         |
| 6.2 Distribusi Uniform Diskrit.....                                         | 85         |
| 6.3 Distribusi Bernoulli.....                                               | 91         |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                         | 95         |
| <b>BAB 7 DISTRIBUSI BINOMIAL.....</b>                                       | <b>97</b>  |
| 7.1 Pendahuluan.....                                                        | 97         |
| 7.2 Perumusan Distribusi Binomial .....                                     | 98         |
| 7.3 Ekspektasi Matematika .....                                             | 100        |
| 7.4 Varians .....                                                           | 102        |
| 7.5 Menghitung Distribusi Binomial Berbantuan<br>Microsoft Excel .....      | 104        |
| 7.6 Contoh Soal.....                                                        | 107        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                         | 109        |
| <b>BAB 8 DISTRIBUSI GEOMETRIK.....</b>                                      | <b>111</b> |
| 8.1 Pendahuluan.....                                                        | 111        |
| 8.2 Distribusi Geometrik.....                                               | 112        |
| 8.3 Aplikasi Distribusi Geometrik .....                                     | 118        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                         | 122        |



|                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>BAB 9 DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK .....</b>                        | <b>123</b> |
| 9.1 Definisi .....                                                  | 123        |
| 9.2 Probabilitas Kumulatif Hipergeometrik.....                      | 127        |
| 9.3 Rata-rata dan Varians Hipergeometrik.....                       | 128        |
| 9.4 Distribusi Hipergeometrik Multivariat .....                     | 130        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                 | 132        |
| <b>BAB 10 DISTRIBUSI POISSON .....</b>                              | <b>133</b> |
| 10.1 Pendahuluan.....                                               | 133        |
| 10.2 Distribusi Poisson dan Proses Poisson.....                     | 133        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                 | 140        |
| <b>BAB 11 DISTRIBUSI UNIFORM KONTINU DAN<br/>EKSPONENSIAL .....</b> | <b>145</b> |
| 11.1 Pendahuluan.....                                               | 145        |
| 11.2 Distribusi Uniform Kontinu .....                               | 146        |
| 11.3 Distribusi Uniform Kontinu .....                               | 150        |
| 11.4 Distribusi Eksponensial .....                                  | 153        |
| 11.5 Hubungan Distribusi Ekponensial dan Poisson.....               | 155        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                 | 159        |
| <b>BAB 12 DISTRIBUSI NORMAL .....</b>                               | <b>161</b> |
| 12.1 Pendahuluan.....                                               | 161        |
| 12.2 Distribusi Normal Standar.....                                 | 161        |
| 12.3 Distribusi Normal Random .....                                 | 164        |
| 12.3.1 Penerapan Distribusi Normal .....                            | 169        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                 | 172        |
| <b>BIODATA PENULIS</b>                                              |            |

## DAFTAR GAMBAR

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Gambar 1.1.</b> Tree Diagram For Three-Child Families.....                               | 4   |
| <b>Gambar 1.2.</b> Diagram Venn $A^c$ .....                                                 | 6   |
| <b>Gambar 1.3.</b> Diagram Venn $A \cap B$ .....                                            | 8   |
| <b>Gambar 1.4.</b> Diagram Venn $A \cup B$ .....                                            | 10  |
| <b>Gambar 3.1.</b> Contoh diagram Venn .....                                                | 33  |
| <b>Gambar 3.2.</b> Ruang sampel dan peristiwa.....                                          | 34  |
| <b>Gambar 3.3.</b> Contoh <i>mutually exclusive events</i> .....                            | 39  |
| <b>Gambar 6.1.</b> Histogram pada pengambilan kelereng .....                                | 88  |
| <b>Gambar 11.1.</b> Distribusi Gamma.....                                                   | 154 |
| <b>Gambar 11.2.</b> Distribusi Eksponensial (Distribusi gamma<br>dengan $\alpha = 1$ )..... | 155 |
| <b>Gambar 12.1.</b> PDF dari Distribusi Normal Standar.....                                 | 162 |
| <b>Gambar 12.2.</b> Fungsi $\Phi$ (CDF normal standar).....                                 | 164 |
| <b>Gambar 12.3.</b> PDF dari distribusi normal.....                                         | 166 |
| <b>Gambar 12.4.</b> Grafik daerah $P(Z \leq a)$ .....                                       | 167 |
| <b>Gambar 12.5.</b> Grafik daerah $P(Z \geq a)$ .....                                       | 168 |
| <b>Gambar 12.6.</b> Grafik daerah $P(a \leq Z \leq b)$ .....                                | 168 |

## DAFTAR TABEL

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabel 7.1.</b> Probabilitas Pelemparan Sebuah Uang<br>Logam Sebanyak 3 Kali ..... | 98  |
| <b>Tabel 9.1.</b> Distribusi hipergeometrik contoh 9.1 .....                         | 126 |
| <b>Tabel 11.1.</b> Distribusi Probabilitas peubah acak $x$ .....                     | 146 |



# BAB 1

## KONSEP TEORI PELUANG

*Oleh Joni Wilson Sitopu*

### 1.1 Pendahuluan

Kita dapat melihat bahwa pada dasarnya teori peluang hanyalah dapat direduksi menjadi perhitungan, hal ini membuat kita menghargai dengan tepat apa yang dirasakan oleh pikiran yang masuk akal melalui semacam naluri, seringkali tanpa dapat menjelaskannya. Dalam kehidupan sehari-hari bahwa sains ini, yang berasal dari perhitungan, harus menjadi objek terpenting pengetahuan manusia. Misalkan sebuah organisasi independen pemungutan suara mewancarai 2000 pemilih untuk memperkirakan proporsi semua pemilih yang mendukung masalah obligasi tertentu. Kita memperkirakan proporsi dari 2000 pemilih dalam survei yang mendukung mendekati proporsi semua pemilih yang mendukung, tapi ini tidak harus benar. Ada tingkat random yang terkait dengan hasil survei. Jika hasil survei adalah sangat mungkin mendekati proporsi sebenarnya, maka kita yakin dengan hasil survei. Jika tidak terlalu mungkin mendekati proporsi populasi, maka kita mungkin tidak akan menganggap hasil survei terlalu serius. Kemungkinan bahwa survei Proporsi yang mendekati proporsi populasi menentukan keyakinan kita terhadap hasil survey. Untuk alasan itu, kita ingin dapat menghitung kemungkinan itu.

Dalam statistika inferensi, konsep teori peluang berperan sangat penting. Peluang adalah nilai yang menunjukkan seberapa besar kemungkinan terjadinya suatu peristiwa (*event*). Peluang menjadi alat ukur dari tingkat kemungkinan terjadinya suatu peristiwa atau kejadian yang acak. Nilai dari peluang adalah

bilangan real antara 0 – 1. Nilai 0 pada peluang memiliki arti bahwa kejadian yang diamati tidak mungkin terjadi, dan nilai 1 memiliki arti kejadian tersebut pasti terjadi. (dalam Nazariah, Noviyanti.,dkk., (2022)).

## **1.2 Ruang Sampel, Kejadian Dan Peluang**

### **1.2.1 Ruang Sampel**

Peluang terjadinya suatu kejadian adalah nilai yang menunjukkan seberapa besar kemungkinan kejadian itu akan terjadi. Misalnya, peluang yang sedikit, kemungkinan terjadinya kejadian itu sangat kecil.

Konsep peluang berhubungan dengan pengertian percobaan yang menghasilkan hasil yang tidak pasti. Artinya percobaan yang dilakukan atau diulang-ulang dalam keadaan yang sama dapat memberikan hasil yang berbeda-beda.

Misalnya eksperimen acak dengan melemparkan sebuah dadu, suatu percobaan yang semua hasil yang mungkin bisa terjadi, tetapi yang hasil sebenarnya pada percobaan tertentu dari percobaan tidak dapat diprediksi dengan pasti.

### **Definisi**

Suatu kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Suatu kejadian dikatakan terjadi pada suatu percobaan-percobaan tertentu jika hasil yang diamati merupakan suatu unsur himpunan .

Himpunan semua hasil yang mungkin dalam suatu percobaan (percobaan statistik) disebut ruang sampel, dilambangkan dengan  $S$ . Setiap elemen dari  $S$  disebut titik sampel.

### **Contoh**

Misalkan sebuah dadu dilemparkan satu kali dan kita dapat melihat banyaknya mata dadu yang tampak/muncul. Kita dapat menentukan ruang sampelnya, dadu mempunyai 6 sisi, dan masing-masing sisi bermata 1, 2, 3, 4, 5 dan 6. Himpunan semua

hasil yang mungkin dari pelemparan tersebut adalah : {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Jadi ruang sampelnya :  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

### **Contoh**

Buatlah ruang sampel untuk percobaan yang terdiri dari pelemparan sebuah dadu. Tentukan ruang sampel dari kejadian bilangan genap dan bilangan yang lebih besar dari dua.

**Solusi**

Hasilnya dapat diberi label sesuai dengan jumlah titik di bagian atas dadu. Maka ruang sampelnya adalah himpunan  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Hasil yang genap adalah 2, 4, dan 6, sehingga kejadian dilemparnya bilangan genap adalah himpunan  $\{2, 4, 6\}$  atau ditulis  $E = \{2, 4, 6\}$ .

Demikian pula kejadian angka yang lebih besar dari dua adalah himpunan  $T = \{3, 4, 5, 6\}$ .

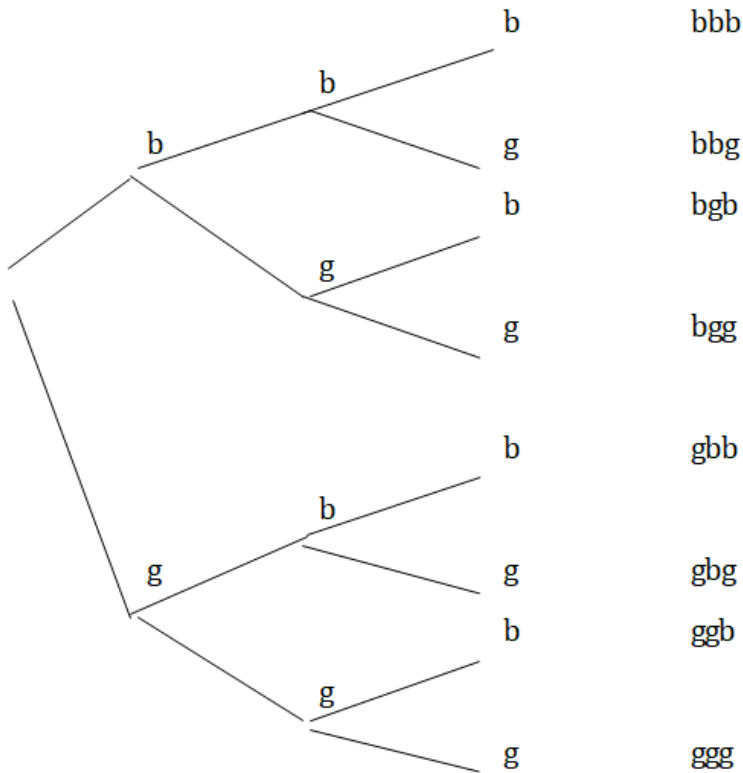
### **Contoh**

Buatlah diagram pohon ruang sampel yang menggambarkan semua keluarga dengan tiga anak menurut jenis kelamin anak-anak sehubungan dengan tahun kelahiran.

### **Solusi**

Dua dari hasilnya adalah dua laki-laki lalu satu perempuan, yang mungkin kita nyatakan bbg, dan seorang perempuan lalu dua laki-laki, yang akan kita menunjukkan gbb.

Diagram pohon ditunjukkan pada Gambar 1.2 yang memberikan pendekatan yang sistematis.



**Gambar 1.1.** Tree Diagram For Three-Child Families

Keterangan diagram adalah sebagai berikut ;

Ada dua kemungkinan untuk anak pertama, laki-laki atau perempuan, jadi kita menggambar dua segmen garis yang keluar dari titik awal, satu diakhiri dengan anak laki-laki dan yang lainnya diakhiri dengan perempuan. Untuk masing-masing dari dua kemungkinan untuk anak pertama, ada dua kemungkinan untuk anak kedua, laki-laki atau perempuan, jadi dari masing-masing dan kita menggambar dua ruas garis, satu ruas diakhiri dengan b dan satu lagi dengan g. Untuk masing-masing dari empat titik akhir

dalam diagram ada dua kemungkinan untuk anak ketiga, jadi kita ulangi prosesnya sekali lagi. Segmen garis disebut cabang pohon. Titik akhir kanan dari setiap cabang disebut node. Simpul di paling kanan adalah simpul terakhir; untuk masing-masing ada hasil yang sesuai, seperti yang ditunjukkan pada gambar 1.2. Dari diagram pohon itu mudah untuk membaca delapan hasil percobaan, jadi ruang sampelnya adalah, membaca dari atas ke bawah simpul akhir dalam pohon, yaitu ;  $S = \{bbb,bbg,bgb,bgg,gbg,ggg\}$ .

### 1.2.2 Kejadian (*Events*)

Sebuah himpunan bagian (subset) dari ruang sampel disebut kejadian (*event*). Dalam statistika, pengertian kejadian ini diperluas dengan memasukkan unsur-unsur kesempatan atau peluang atas terjadinya suatu kejadian yang didasarkan pada hasil sebuah percobaan atau eksperimen yang dilakukan secara berulang-ulang.

#### **Contoh :**

- (a). Dalam percobaan melempar sebuah dadu, munculnya dadu bermata genap yaitu  $\{ 2, 4, 6 \}$  dan sebuah kejadian; muncul dadu bermata prima yaitu  $\{ 2, 3 \}$  juga sebuah kejadian.
- (b). Dalam percobaan melempar dua koin, muncul muka koin sama yaitu  $\{AA, GG\}$  adalah sebuah kejadian.

### 1.2.3 Peluang Suatu Kejadian

Peluang disebut juga probabilitas, dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) peluang diartikan kesempatan atau kebolehjadian. Peluang didefinisikan kemungkinan terjadinya suatu kejadian. Dalam kehidupan sehari-hari peluang bisa disebut dengan kemungkinan, kesempatan, atau perkiraan. Peluang suatu kejadian dapat digunakan untuk membantu dalam pengambilan keputusan. (dalam Nur Hasanah, Yunita Oktavia Wulandari, Joni Wilson Sitopu, dkk., (2022))

Misalkan  $S$  adalah ruang sampel untuk suatu percobaan sehingga setiap titik sampel memiliki peluang yang sama untuk muncul. Jika  $A$  adalah kejadian di  $S$ , maka peluang  $A$ , dituliskan dengan  $P(A)$ , didefinisikan sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Dengan  $n(A)$  kardinalitas  $A$  dan  $n(S)$  disebut kardinalitas  $S$ .

Karena  $A \subseteq S$ , maka  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

Jika  $P(A) = 0$ , kejadian  $A$  disebut kemustahilan dan jika  $P(A) = 1$ , kejadian  $A$  disebut kepastian.

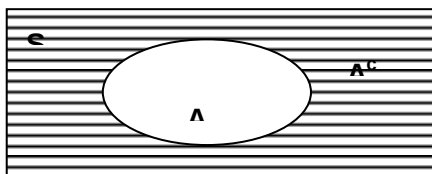
### 1.2.3.1. Komplemen

#### Definisi komplemen

Komplemen himpunan  $A$  (ditulis  $A'$  atau  $A^c$  atau  $\bar{A}$ ) adalah himpunan semua anggota semesta yang bukan anggota  $A$ . (dalam Lulut Alfaris, Yenny Anggreini Sarumaha, Joni Wilson Sitopu, dkk., (2022))

Dengan notasi pembentuk himpunan, ditulis:

$$A^c = \{x \mid x \in S \wedge x \notin A\}$$



**Gambar 1.2.** Diagram Venn  $A^c$

Komplemen suatu kejadian  $A$  dalam ruang sampel  $S$ , dilambangkan  $A^c$ , adalah kumpulan semua hasil di  $S$  yang bukan anggota himpunan  $A$ .

Misalkan  $A^c$  adalah komplemen kejadian  $A$  dalam ruang sampel  $S$ . Karena  $A^c \cup A = S$ , dan  $A^c \cap A = \emptyset$ , maka

$$P(A^c) + P(A) = 1, \text{ ekuivalen dengan } P(A^c) = 1 - P(A)$$

### **Contoh :**

Tentukan peluang bahwa setidaknya satu kepala akan muncul dalam lima lemparan koin.

### **Solusi**

Identifikasi hasil dengan daftar lima hs dan ts, seperti tthtt dan hthtt. Meskipun untuk mendaftar semuanya, tidak sulit untuk menghitungnya. Untuk menggunakan dan melakukan diagram pohon, ada dua pilihan untuk lemparan pertama. Untuk masing-masing ada dua pilihan untuk lemparan kedua, maka  $2 \times 2 = 4$  hasil untuk dua lemparan. Untuk masing-masing dari empat hasil, ada dua kemungkinan untuk lemparan ketiga, jadi  $4 \times 2 = 8$  hasil untuk tiga lemparan. Demikian pula, ada hasil untuk empat lemparan dan akhirnya hasil untuk lima lemparan.

Misalkan O menunjukkan peristiwa muncul setidaknya satu kepala. Ada banyak cara untuk mendapatkan setidaknya satu kepala, tetapi untuk melakukan gagal hanya satu : semua ekor. Jadi meskipun sulit untuk membuat daftar semua hasil yang membentuk O, mudah untuk menulis  $O^c = \{ttttt\}$ . Karena ada 32 hasil yang kemungkinannya sama, masing-masing memiliki probabilitas  $1/32$ , jadi  $P(O^c) = 1/32$ , maka  $P\{O\} = 1 - 1/32 = 0,97$  atau sekitar 97% peluang.

### **1.2.3.2. Irisan dari kejadian**

#### **Definisi Irisan :**

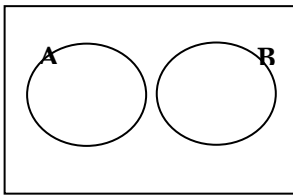
Irisan dua himpunan A dan B (ditulis  $A \cap B$ ) adalah himpunan semua anggota A yang juga menjadi anggota B.

Dengan notasi pembentuk himpunan, ditulis:

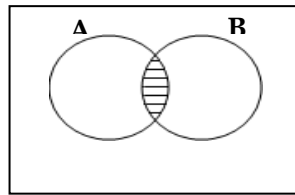
$$A \cap B = \{x/x \in A, \text{ dan } x \in B\} \text{ atau}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}. \quad (\text{Robert R. Stoll, (1979)})$$

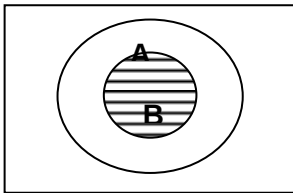
Beberapa kemungkinan diagram Venn dari  $A \cap B$  adalah:



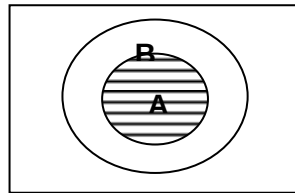
$A \cap B$



$A \cap B$



$A \cap B$



$A \cap B$

**Gambar 1.3.** Diagram Venn  $A \cap B$

Hal ini sesuai dengan kombinasi deskripsi dari dua kejadian menggunakan kata "dan." Artinya peristiwa  $A \cap B$  terjadi berarti bahwa pada percobaan tertentu dari eksperimen baik A dan B terjadi A.

Misalkan A dan B adalah dua kejadian dalam ruang sampel S. Karena  $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ , maka

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

### Contoh :

Sebuah dadu dilempar.

1. Tentukan probabilitas bahwa angka yang dilempar adalah genap dan lebih besar dari dua.
2. Misalkan dadu telah dimuat sehingga  $p(1)=1/12$ ,  $p(6)=3/12$ , dan empat hasil lainnya memiliki kemungkinan

yang sama satu sama lain. Tentukan peluang bahwa angka yang dilempar adalah genap dan lebih besar dari dua.

### Solusi

Dalam kedua kasus, ruang sampelnya adalah  $S=\{1,2,3,4,5,6\}$  dan kejadian yang dimaksud adalah irisan  $E \cap T = \{4,6\}$  dari contoh sebelumnya.

1. Karena pelemparan dadu yang sama, maka semua hasil kemungkinannya sama, jadi dengan menghitung kita memiliki  $(E \cap T) = \frac{2}{6}$ .
2. Informasi probabilitas dari enam hasil yang kita miliki sejauh ini adalah

| Hasil | 1      | 2   | 3   | 4   | 5   | 6      |
|-------|--------|-----|-----|-----|-----|--------|
| P     | $1/12$ | $p$ | $p$ | $p$ | $p$ | $3/12$ |

Karena  $P(1) + P(6) = 1/12 + 3/12 = 4/12 = 1/3$

$P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 - 1/3 = 2/3$

Jadi  $4p = 2/3$ . Khususnya  $P(4) = 1/6$ , sehingga

$P(E \cap T) = P(4) + P(6) = 1/6 + 3/12 = 5/12$

Definisi: saling eksklusif

Kejadian A dan B saling lepas (tidak dapat keduanya terjadi sekaligus) jika tidak memiliki elemen yang sama.

Agar A dan B tidak memiliki hasil yang sama berarti persis bahwa A dan B tidak mungkin terjadi pada percobaan tunggal dari percobaan acak. Ini memberikan aturan berikut:

Definisi: Aturan Probabilitas untuk Kejadian Saling Lepas

Kejadian A dan B saling lepas jika dan hanya jika  $P(A \cap B) = 0$ .

Setiap kejadian A dan pelengkapanya  $A^c$  saling lepas, tetapi A dan B dapat saling lepas tanpa saling melengkapi.

### 1.2.3.3. Gabungan dari kejadian

#### Definisi gabungan:

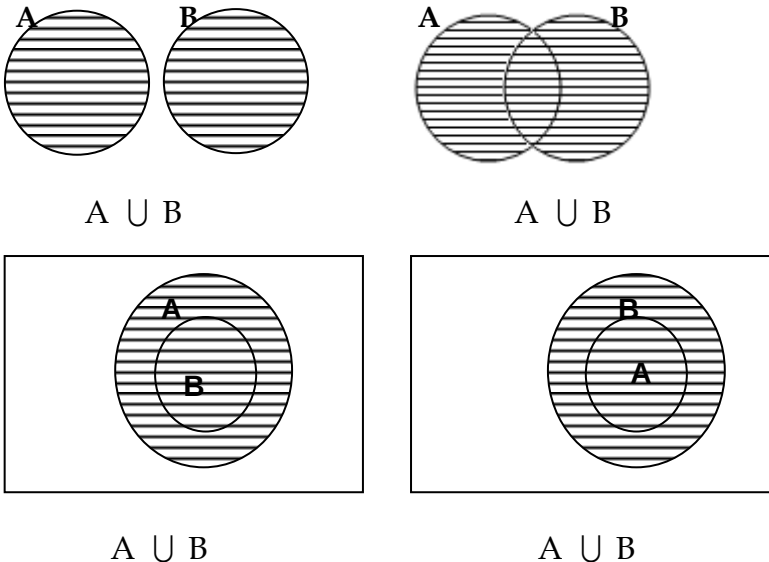
Gabungan dua himpunan A dan B (ditulis  $(A \cup B)$ ) adalah himpunan semua anggota A atau B atau anggota kedua-duanya. (Robert R. Stoll, (1979)).

Dengan notasi pembentuk himpunan, ditulis:  $\Lambda$

$(A \cup B) = \{x/x \in A \text{ atau } x \in B\}$ , atau

$(A \cup B) = \{x/x \in A \vee x \in B\}$ .

Beberapa kemungkinan diagram Venn dari  $A \cup B$  adalah:



**Gambar 1.4.** Diagram Venn  $A \cup B$

Gabungan kejadian A dan B dilambangkan  $A \cup B$ , adalah kumpulan semua hasil yang merupakan anggota dari salah satu himpunan A dan B, atau keduanya. Itu sesuai dengan menggabungkan deskripsi dari dua kejadian menggunakan kata atau.

Mengatakan bahwa peristiwa  $A \cup B$  terjadi berarti bahwa pada percobaan tertentu dari eksperimen tersebut, A atau B terjadi (atau keduanya terjadi).

Misalkan A dan B adalah dua kejadian dalam ruang sampel S. Karena  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ , maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jika kejadian A dan B saling lepas, atau  $A \cap B = \emptyset$ , maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

### Contoh :

Dua dadu yang dilemparkan bersamaan. Tentukan peluang dari kejadian berikut:

1. Kedua dadu menunjukkan angka empat
2. Setidaknya satu dadu menunjukkan angka empat

### Solusi

Seperti halnya dengan pelemparan dua koin yang sama, agar ruang sampel memiliki kemungkinan hasil yang sama, kita harus membuat daftar hasil seolah-olah kita dapat membedakan kedua dadu. Kita dapat membayangkan bahwa salah satunya berwarna merah dan yang lainnya berwarna hijau. Kemudian hasil apa pun dapat diberi label sebagai sepasang angka seperti pada tampilan berikut, di mana angka pertama di pasangan adalah jumlah titik di sisi atas dadu I (baris) dan angka kedua dalam pasangan adalah jumlah titik di atas muka dadu II (kolom).

| II \ I | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1      | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 |
| 2      | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 |
| 3      | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 |
| 4      | 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 |
| 5      | 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 |
| 6      | 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 |

1. Ada kemungkinan hasil yang sama, di mana tepat satu sama dengan dua angka, jadi peluang sepasang angka adalah  $1/36$
2. Dari tabel tersebut kita dapat melihat bahwa ada 11 pasang yang sesuai dengan peristiwa yang dimaksud: enam pasang pada baris keempat (yang dadu I menunjukkan empat) ditambah lima pasang tambahan selain pasangan, sudah dihitung, di kolom keempat (II adalah empat), jadi jawabannya adalah  $11/36$ . Untuk melihat bagaimana rumus memberikan angka yang sama, misalkan  $A_G$  menyatakan kejadian dadu I bernilai empat dan  $A_B$  menyatakan kejadian dadu II menghasilkan angka empat. Maka dengan menghitung kita mendapatkan:  $P(A_G) = 6/36$  dan  $P(A_B) = 6/36$ . Karena  $A_G \cap A_B = \{44\}$ ,  $P(A_G \cap A_B) = 1/36$ .

Jadi dengan Aturan Probabilitas Aditif kita dapatkan:

$$P(A_G \cup A_B) = P(A_G) + P(A_B) - P(A_G \cap A_B) = 6/36 + 6/36 - 1/36 = 11/36$$

### 1.3 Peluang Bersyarat

Misalkan sebuah dadu dilempar dan kita diminta untuk menentukan peluang hasilnya adalah lima. Ada enam kemungkinan hasil yang sama, yaitu  $1/6$ . Tetapi misalkan sebelum kita memberikan jawaban, kita diberi informasi tambahan bahwa nomor tersebut dilemparkan. Karena hanya ada tiga angka ganjil yang mungkin, salah satunya adalah lima, kita pasti akan merevisi perkiraan kita dari kemungkinan angka lima dilemparkan dari  $1/6$  menjadi  $1/3$ .

Secara umum, peluang yang direvisi bahwa peristiwa A telah terjadi, dengan mempertimbangkan memperhitungkan informasi tambahan bahwa peristiwa B lain pasti terjadi pada percobaan percobaan ini, disebut peluang bersyarat dari A diberikan B dan dilambangkan dengan  $P(A|B)$ . Artinya suatu

kejadian dapat bergantung pada terjadi atau tidaknya suatu kejadian lain.

### Definisi peluang bersyarat

Peluang bersyarat dari A diberikan B, dilambangkan  $P(A|B)$ , adalah peluang bahwa peristiwa A telah terjadi dalam percobaan percobaan acak yang diketahui bahwa peristiwa B pasti terjadi. Itu dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ jika } P(B) > 0$$

Peluang bersyarat kejadian B jika diberikan kejadian A, dilambangkan dengan  $P(B|A)$ , didefinisikan sebagai berikut:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ jika } P(A) > 0.$$

### Contoh :

Sebuah dadu dilempar.

- Tentukan peluang bahwa angka yang dilemparkan adalah lima, atau ganjil.
- Tentukan peluang bahwa angka yang dilemparkan adalah ganjil, yaitu lima

### Solusi

Ruang sampel percobaan ini adalah himpunan  $S = \{1,2,3,4,5,6\}$  yang terdiri dari enam hasil yang kemungkinannya sama. Misalkan F menyatakan kejadian dilempar lima dan O menyatakan kejadian dilempar bilangan ganjil, sehingga  $F = 5$  dan  $O = 1,3,5$ .

- Dengan menggunakan persamaan :

$$P\left(\frac{F}{O}\right) = \frac{P(F \cap O)}{P(O)}$$

$$F \cap O = 5, \quad P(F \cap O) = \frac{1}{6}$$

$$O = \{1,3,5\} = 3, \quad P(O) = 3/6$$

$$\text{Maka } P(F/O) = 1/6 / 3/6 = 1/3$$

b. Dengan menggunakan persamaan:

$$P\left(\frac{O}{F}\right) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)}$$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$P(O \cap F) = \frac{1}{6}$$

Jadi

$$P\left(\frac{O}{F}\right) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1$$

### 1.3.1 Kejadian-Kejadian Yang Saling Bebas

Suatu kejadian B dikatakan independen (bebas) dari kejadian A jika peluang terjadinya B tidak terpengaruh oleh terjadi atau tidaknya kejadian A, atau jika peluang dari B sama dengan peluang bersyarat dari B dengan syarat A, yaitu :  $P(B) = P(B/A)$

Dari rumus peluang bersyarat :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ dan } P(B/A) = P(B)$$

$$\text{Maka } P(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\text{Jadi } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

#### Definisi :

Kejadian-kejadian A dan B dikatakan saling bebas/independen, jika  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Jika  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ , maka A dan B dikatakan dependen (saling bergantung).

### 1.3.2 Kejadian-Kejadian Yang Saling Lepas

Untuk membedakan antara dua kejadian bebas dan dua kejadian saling lepas. Secara verbal, dua kejadian dikatakan saling bebas jika terjadinya kejadian pertama, misalkan A, tidak dipengaruhi oleh kejadian kedua, misalnya B. Secara peluang dinyatakan dengan  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Sedang dua kejadian

dikatakan saling asing jika dua kejadian itu, misalnya A dan B tidak memiliki titik persekutuan atau  $A \cap B = \emptyset$  dan peluang dinyatakan dengan  $P(A \cap B) = 0$  atau  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Lipschutz Seymour. 1974. *Theory and Problems of Probability*. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company.
- Lulut Alfaris, Yenny Anggreini Sarumaha, Joni Wilson Sitopu, dkk., 2022. *Logika Dan Struktur Diskrit*. PT Global Eksekutif Teknologi. Padang Sumatera Barat.
- Nazariah, Noviyanti, Dita Kurniawati, Roni Priyanda, Khairul Alim, Joni Wilson Sitopu, Joko Sabtohadhi, Nurul Hidayah, P.A. 2022. *Statistik Dasar*. 1st edn, *statistik dasar*. 1st edn. PT Get Press.
- Nazariah, Nur Hasanah, Yunita Oktavia Wulandari, Joni Wilson Sitopu, Cynthia Tri Octavianti, Rifka Agustianti, Abd. Haris, Lulut Alfaris, Mesak Ratuanik, Jan Setiawan, Nuryami, Rintis Rizkia Pangestika, I.M. 2022. 'KONSEP DASAR MATEMATIKA', in *PT. GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI*.
- Robert R. Stoll. 1979. *Set Theory and Logic*. Cleveand State University. Dover Publications, Inc. New York.
- Soeryadi. 1983. *Pendahuluan Teori Kemungkinan dan Statistika*. Bandung: ITB.

# BAB 2

## AKSIOMA PELUANG

*Oleh Nanang*

### 2.1 Ruang Kejadian/Ruang kejadian

#### 1. Notasi:

Himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan dinotasikan atau dilambangkan dengan huruf **S**.

#### 2. Contoh:

- a. Percobaan pelemparan sebuah dadu bersisi enam, apabila sisi-sisinya diberi angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, maka ruang kejadiannya adalah:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- b. Sebuah percobaan pelemparan dua koin yang bersisikan Angka (A) atau Gambar (G) dan pengamatan pada sisi mana yang muncul, ruang kejadiannya adalah  $S = \{GG, GA, AG, AA\}$ . Dimana G melambangkan yang muncul adalah Gambar sedangkan A melambangkan yang muncul adalah Angka.

### 2.2 Kejadian

#### 1. Definisi:

Suatu himpunan bagian dari ruang kejadian disebut Kejadian.

#### 2. Contoh:

- a. Kejadian terambilnya kartu hati dari seperangkat kartu bridge (berisi 52 helai kartu) dapat dinyatakan sebagai  $A = \{\text{hati}\}$  yang merupakan himpunan bagian dari ruang kejadian  $S = \{\text{hati, sekop, klaver, wajik}\}$ . Kejadian B yaitu terambilnya kartu merah,  $B = \{\text{hati, wajik}\}$ .

- b. Pada percobaan pelemparan 2 koin,  $E = \{GG, GA\}$  adalah kejadian bahwa pada koin pertama muncul Gambar. Sedangkan kejadian  $F = \{GA, AA\}$  adalah kejadian pada koin kedua muncul Angka

## 2.3 Jenis-jenis Kejadian

### 1. Definisi:

- a. **Kejadian Sederhana:** adalah suatu kejadian yang dapat dinyatakan sebagai suatu himpunan yang hanya terdiri dari satu titik kejadian.
- b. **Kejadian majemuk:** adalah suatu kejadian yang dapat dinyatakan sebagai gabungan dari beberapa kejadian sederhana.

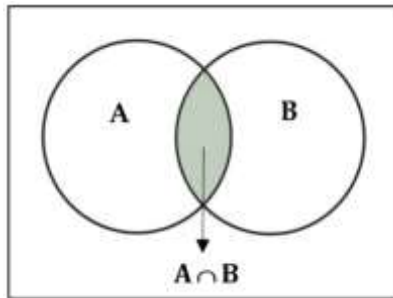
### 2. Contoh:

- a. Pada contoh pelemparan dua koin dengan  $S = \{GG, GA, AG, AA\}$ , kejadian munculnya Gambar pada koin pertama dan Gambar pada koin kedua adalah kejadian sederhana yang dapat dilambangkan dengan  $A = \{GG\}$ .
- b. Kejadian munculnya Gambar pada koin pertama adalah kejadian majemuk yang dapat dilambangkan dengan  $B = \{GG, GA\}$ .

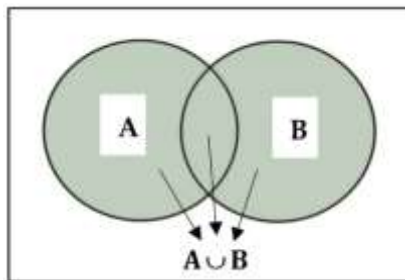
## 2.4 Operasi Kejadian

### 1. Definisi:

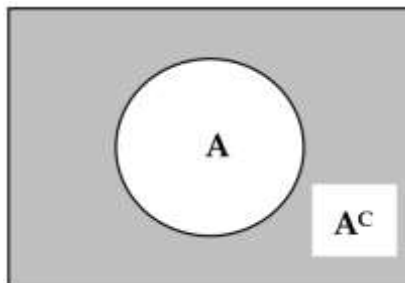
- a. **Irisan dua kejadian ( $A \cap B$ )** adalah kejadian yang mengandung semua unsur persekutuan kejadian A dan kejadian B.



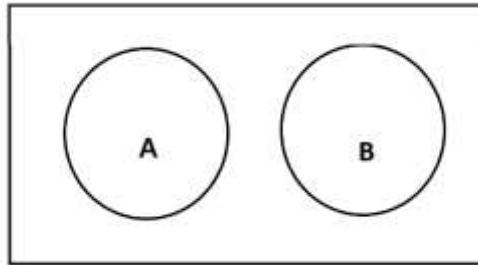
- b. **Gabungan dua kejadian ( $A \cup B$ )** adalah kejadian yang mencakup semua unsur atau anggota A atau B atau keduanya.



- c. **Komplemen suatu kejadian ( $A^c$ )** adalah himpunan semua anggota S yang bukan anggota A.



- d. Dua kejadian A dan B dikatakan **saling terpisah** atau ***mutually exclusive*** bila  $A \cap B = \emptyset = \{ \}$ , artinya A dan B tidak mempunyai unsur persekutuan.



## 2. Contoh:

- Misalkan kejadian A pelemparan dadu yang muncul angka kurang dari 6, yaitu:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  dan kejadian B pelemparan dadu yang muncul angka genap, yaitu  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ; maka kejadian  $A \cap B = \{2, 4\}$ .
- Bila R adalah himpunan semua pembayar pajak dan S adalah himpunan semua orang yang berusia di atas 65 tahun, maka  $R \cap S$  adalah himpunan semua pembayar pajak yang berusia di atas 65 tahun.
- Jika kejadian  $A = \{2, 3, 5, 8\}$  dan kejadian  $B = \{3, 6, 8\}$ , maka kejadian  $A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ .
- Jika kejadian  $M = \{x \mid 3 < x < 9\}$  dan kejadian  $N = \{y \mid 5 < y < 12\}$ , maka kejadian  $M \cup N = \{z \mid 3 < z < 12\}$ .
- Misalkan ruang kejadian  $S = \{\text{buku, anjing, rokok, uang logam, peta, perang}\}$ . Jika kejadian  $A = \{\text{anjing, perang, buku, rokok}\}$ , maka kejadian  $A^c = \{\text{uang logam, peta}\}$ .

- f. Misalkan K adalah kejadian terambilnya kartu merah dari seperangkat kartu *bridge* dan S adalah ruang kejadiannya yang berupa seluruh kartu tersebut, maka  $K^c$  adalah kejadian terambilnya kartu bukan merah, yang berarti juga terambilnya kartu hitam.
- g. Misalkan kejadian A munculnya angka dadu genap dan B kejadian munculnya angka dadu ganjil pada pelemparan sebuah dadu, maka:  $A \cap B = \emptyset = \{ \}$ .

## 2.5 Hukum-hukum Operasi Kejadian

1. Hukum komutatif:

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

2. Hukum Asosiatif:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Hukum Distributif:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

4. Hukum De Morgan:

$$\left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c \qquad \left( \bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c$$

## 2.6 Peluang

1. **Definisi:**

Dalam term frekuensi relatif

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{n}$$

Keterangan:

$P(E)$  = peluang kejadian E

$n(E)$  = banyaknya kejadian E

$n$  = banyak percobaan

## 2. Aksioma Peluang:

Misalkan sebuah percobaan dengan ruang kejadian S. Untuk setiap kejadian E dari ruang kejadian S diasumsikan  $P(E)$  terdefinisi dan memenuhi tiga aksioma berikut :

Aksioma 1 :  $0 \leq P(E) \leq 1$

Aksioma 2 :  $P(S) = 1$

Aksioma 3 : Untuk barisan kejadian yang saling lepas (*mutually eksklusif*)  $E_1, E_2, \dots$  (yaitu kejadian kejadian dimana  $E_i \cap E_j = \emptyset$  di mana  $i \neq j$ ),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

dimana  $P(E)$  adalah peluang kejadian E

## 3. Contoh:

- Dalam percobaan pelemparan koin, jika kita mengasumsikan bahwa peluang munculnya Gambar dan Angka sama besar, maka  $P(\{G\}) = P(\{A\}) = \frac{1}{2}$ . Tetapi jika kita mengasumsikan bahwa koin tersebut tidak setimbang sehingga peluang munculnya Gambar adalah dua kali peluang muncul Angka, maka  $P(\{G\}) = \frac{2}{3}$  dan  $P(\{A\}) = \frac{1}{3}$
- Jika sebuah dadu bermata 6 dilemparkan dan misalkan peluang munculnya tiap sisi adalah sama, maka  $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ . Dari

aksioma 3, kita akan dapat mengetahui peluang kejadian munculnya mata dadu genap adalah:

$$\begin{aligned} P(\{2,4,6\}) &= P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) \\ &= 1/6 + 1/6 + 1/6 \\ &= 3/6 \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

## 2.7 Proposisi Peluang

### 1. Proposisi:

- $P(E^c) = 1 - P(E)$
- Jika  $E \subset F$ , maka  $P(E) \leq P(F)$
- $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
- $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) =$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \dots \\ &(-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_r}) \\ &+ \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \end{aligned}$$

Penjumlahan:  $P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_r})$  diambil dari semua himpunan bagian berukuran  $r$  yang mungkin dari himpunan  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Diasumsikan bahwa semua hasil dalam ruang kejadian mempunyai peluang terjadi yang sama.

Misalkan suatu percobaan dengan ruang kejadian terbatas,  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ , maka diasumsikan:

$$P\{1\} = P\{2\} = \dots = P\{N\}$$

sehingga  $P(\{i\}) = 1/N$  dan  $P(E) =$  banyaknya titik dalam  $E$  / banyaknya titik dalam  $S$ .

## 2. Contoh:

- a. Misalkan  $P = \{a, i, u, e, o\}$  dan  $R$  adalah  $\{b, c, d, f, g\}$ , maka  $P \cap R = \emptyset$ .  $P$  dan  $R$  adalah dua kejadian yang saling terpisah atau *mutually exclusive*.
- b. Pada percobaan pelemparan dadu bermata 6,  $A$  adalah kejadian munculnya mata dadu genap dan  $B$  adalah kejadian munculnya mata dadu 3.  $A$  dan  $B$  adalah dua kejadian yang *mutually exclusive*.
- c. Dalam pelemparan dua koin, ruang kejadiannya adalah  $\{GG, GA, AG, AA\}$ . Sehingga masing – masing titik kejadian memiliki peluang  $\frac{1}{4}$  untuk terjadi. Peluang terjadinya kejadian  $A$  yaitu munculnya Gambar pada koin pertama  $\frac{2}{4}$  karena kejadian  $A$  mengandung dua titik kejadian.
- d. Dalam kejadian pelemparan dua dadu, terdapat 36 titik kejadian dalam ruang contohnya sehingga masing-masing titik kejadian mempunyai peluang  $\frac{1}{36}$  untuk terjadi. Kejadian  $C$  yaitu kejadian penjumlahan mata dadu yang keluar adalah tujuh mengandung 6 titik kejadian yaitu  $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)$  dan  $(6, 1)$ . Sehingga peluang kejadian  $C$  adalah  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

## 2.8 Peluang berdasarkan Keyakinan

1. Definisi berdasar term ukuran keyakinan: peluang merupakan ukuran keyakinan seseorang pada pernyataan yang dinyatakan olehnya.
2. Bersifat sangat subyektif dan dipengaruhi oleh pengetahuan dan pengalaman orang yang menyatakan peluang tersebut.

## 2.9 Latihan

1. Sebuah koin dilempar tiga kali dan sisi apa yang muncul diamati (Gambar atau Angka).
  - a. Daftarkan ruang kejadiannya.
  - b. Daftarkan unsur yang menyusun kejadian A = kejadian muncul sedikitnya dua Gambar, kejadian B = kejadian muncul Gambar pada dua koin pertama dan C = kejadian muncul Angka pada pelemparan terakhir.
2. Dari 5 orang laki-laki dan 4 orang perempuan akan dipilih 3 orang sebagai wakil dari suatu partai yang akan dikirim untuk menghadiri suatu konferensi. Berapa peluang yang terpilih:
  - a. Ketiganya laki-laki.
  - b. Ketiganya perempuan.
  - c. 1 laki-laki dan 2 perempuan

## **DAFTAR PUSTAKA**

- Abadyo dan Permadi, Hendro. 2000. Metode Statistik. Malang: IMESTEP-JICA.
- Abadyo dan Permadi, Hendro. 2000. Teori dan Aplikasi Statistika dan Probabilitas. Malang: IMESTEP-JICA.
- Bhattacharyya G.K and Johnson, R. 1985. Statistic Principles and Methods. New York: J. Wiley.
- Budiyono. 2009. Statistika Untuk Penelitian. Surakarta: Sebelas Maret University Press.
- Djarwanto, Ps. 1986. Soal dan Jawab Statistik. Yogyakarta: Liberty.
- Herryanto, N. 2003. Teori Peluang Diskrit. Bandung: CV. Armico.
- Suryadi. 1980. Pendahuluan Teori Kemungkinan dan Statistika. Bandung: IKIP Bandung.
- Soejoeti, Z and Soebanar. 1988. Inferensi Bayesian. Jakarta: Karunika, Universitas Terbuka.
- Walpole, R.E. 1986. Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan. Bandung: ITB.

# BAB 3

## PROBABILITAS

*Oleh Johani S Pasaribu*

### 3.1 Pendahuluan

Bab ini memperkenalkan konsep dasar dari keseluruhan mata kuliah, yaitu probabilitas. Kita membahas mengapa probabilitas diperkenalkan sebagai konsep ilmiah dan bagaimana hal itu telah diformalkan secara matematis dalam model probabilitas. Berikut ini dikembangkan beberapa hasil matematika dasar yang terkait dengan model probabilitas.

Secara historis, kata probabilitas dikaitkan dengan kata Latin 'probo' dan kata bahasa Inggris, probe dan probable. Dalam bahasa lain, kata yang digunakan dalam pengertian matematis ini memiliki arti yang kurang lebih seperti masuk akal. Pada zaman kuno, konsep probabilitas muncul dalam masalah perjudian yang berkaitan dengan menang atau kalahnya suatu permainan. Itu dimulai dengan dokter terkenal, ahli matematika dan penjudi, Gerolamo Cardano (1501-1576) yang menjadi Profesor dan Ketua matematika di Universitas Bologna di Italia. Selama abad ke-15, pendekatan pragmatis terhadap masalah peluang dengan dadu dimulai di Italia. Selama waktu itu, referensi pada permainan untung-untungan lebih banyak, tetapi tidak ada saran tentang cara menghitung probabilitas kejadian. Cardano menulis manual singkat, *Liber de Ludo Aleae* (Permainan Peluang) yang berisi perlakuan matematis pertama tentang probabilitas yang berhubungan dengan masalah ekspektasi (atau rata-rata) matematis, penambahan probabilitas, tabel frekuensi untuk melempar dadu,  $n$  keberhasilan dalam  $n$  percobaan independen, dan hukum bilangan besar. Namun, karyanya menarik sedikit

perhatian dan tidak memberikan perkembangan teori probabilitas yang nyata. Manual Cardano diterbitkan pada 1633 sekitar satu abad kemudian. Dalam manual yang diterbitkan ini, Cardano memperkenalkan gagasan probabilitas  $p$  antara 0 dan 1 pada suatu peristiwa yang hasilnya acak, dan kemudian menerapkan gagasan ini pada permainan peluang (Debnath, L., & Basu, 2014).

Pada zaman dahulu, Plato (428-348 SM) dan muridnya yang terkenal, Aristoteles (384-322 SM) biasa membahas kata kebetulan secara filosofis. Pada tahun 324 SM, seorang Yunani, Antimenes (530-510 SM) pertama kali mengembangkan sistem asuransi yang menjamin sejumlah uang terhadap menang atau kalahnya peristiwa tertentu. Mengingat banyak ketidakpastian dalam kehidupan sehari-hari seperti kesehatan, cuaca, kelahiran, kematian, dan permainan yang memunculkan konsep kebetulan atau variabel acak sebagai hasil percobaan (misalnya panjang benda, tinggi orang, suhu di kota pada hari tertentu). Hampir semua pengukuran dalam matematika atau sains memiliki sifat mendasar yang hasilnya berbeda-beda pada percobaan yang berbeda. Dengan kata lain, hasilnya secara umum bersifat acak. Jadi, kuantitas yang ingin kita ukur disebut variabel acak.

## 3.2 Kebutuhan teori Probabilitas

Dalam kehidupan sehari-hari sulit untuk mengetahui dengan “pasti” apa yang akan terjadi pada waktu yang akan datang, baik dalam jangka pendek maupun jangka panjang. Sebuah contoh sederhana adalah jika sebuah koin dilempar, maka akan sulit untuk memastikan bahwa muka gambar atau muka angka yang berada di atas. Jika terkait dengan suatu perusahaan, maka akan sulit untuk memprediksikan apakah tahun depan akan mengalami keuntungan atau kerugian. Jika terkait dengan suatu ujian, juga akan sulit untuk memastikan apakah lulus atau gagal dan lain sebagainya. Semua peristiwa tersebut berada dalam “ketidakpastian” atau *uncertainty*. Dengan demikian, probabilitas

atau peluang merupakan “derajat kepastian” untuk terjadinya suatu peristiwa yang diukur dengan angka pecahan antara nol sampai dengan satu, dimana peristiwa tersebut terjadi secara acak atau random. Dengan konsep probabilitas tersebut, maka akan dapat diusahakan untuk menarik kesimpulan tentang karakteristik dari populasi dengan menggunakan data sampel. Proses penarikan kesimpulan populasi atas dasar data sampel sering disebut dengan “induktif”.

Dengan menggunakan konsep probabilitas, maka dapat diusahakan untuk menjawab peristiwa-peristiwa yang belum dapat dipastikan. Misalnya terkait dengan teori permintaan, jika harga suatu barang dinaikkan sebesar Rp. 1.000,- maka permintaan terhadap barang tersebut dapat turun sebesar 20 unit, atau 25 unit, atau 30 unit dan lainnya. Jika sebuah dadu dilempar satu kali, maka muka yang tampak dapat mata 1, mata 2, mata 3, mata 4, mata 5 atau mata 6. Untuk menjawab peristiwa tersebut hanya dapat dilakukan dengan derajat kepastian, yaitu mulai sebesar nol sampai dengan satu ( $0 \leq \text{probabilitas} \leq 1$ ).

Terakhir, misalkan seorang teman Anda menyarankan Anda melempar koin seribu kali. Teman Anda itu mengatakan bahwa jika koin muncul setidaknya enam ratus kali, maka dia akan membayar Anda \$100; jika tidak, Anda harus membayarnya hanya \$1. Pada awalnya Anda mungkin berpikir bahwa, sementara 500 kepala adalah yang paling mungkin, masih ada peluang masuk akal bahwa 600 kepala akan muncul — setidaknya cukup bagus untuk membenarkan menerima taruhan \$100 sampai \$1 dari teman Anda. Namun, setelah menguasai teori peluang, Anda akan mengetahui bahwa semakin banyak jumlah lemparan koin, semakin besar kemungkinan bahwa jumlah kepala hampir setengah dari jumlah total lemparan koin. Nyatanya, dalam kasus ini, hanya ada kurang dari satu peluang dalam sepuluh miliar untuk mendapatkan lebih dari 600 kepala! Oleh karena itu, Anda juga tidak boleh menerima taruhan ini.

Seperti yang diperlihatkan contoh-contoh tadi, pemahaman yang baik tentang teori probabilitas akan memungkinkan Anda menilai probabilitas dengan benar dalam situasi sehari-hari, yang pada gilirannya memungkinkan Anda membuat keputusan yang lebih bijak. Bahkan mungkin menghemat uang Anda!

Teori probabilitas juga memainkan peran kunci dalam banyak aplikasi penting sains dan teknologi (Michael J. Evans and Jeffrey S. Rosenthal, 2009). Misalnya, desain reaktor nuklir harus sedemikian rupa sehingga lepasnya radioaktivitas ke lingkungan merupakan kejadian yang sangat langka. Tentu saja, bisa saja mengatakan bahwa hal ini secara kategoris tidak mungkin terjadi, tetapi reaktor adalah sistem yang rumit, dibangun dari banyak subsistem yang saling berhubungan, yang masing-masingnya akan gagal berfungsi dengan baik pada suatu waktu. Selain itu, kita tidak pernah dapat dengan pasti mengatakan bahwa peristiwa alam seperti gempa bumi tidak dapat terjadi yang akan cukup merusak reaktor untuk memungkinkan terjadinya emisi. Yang terbaik yang dapat kita lakukan adalah mencoba mengukur ketidakpastian mengenai kegagalan komponen reaktor atau terjadinya peristiwa alam yang akan menyebabkan peristiwa semacam itu. Di sinilah probabilitas mulai digunakan. Menggunakan probabilitas sebagai alat untuk menghadapi ketidakpastian, reaktor dapat dirancang untuk memastikan bahwa emisi yang tidak dapat diterima memiliki probabilitas yang sangat kecil — katakanlah, sekali dalam satu miliar tahun — untuk terjadi.

Contoh perjudian dan reaktor nuklir pada dasarnya berurusan dengan konsep risiko — risiko kehilangan uang, risiko terkena tingkat radioaktivitas yang merugikan, dan lain-lain. Faktanya, kita terpapar risiko sepanjang waktu. Saat kita mengendarai mobil, atau naik pesawat terbang, atau bahkan berjalan di jalanan, kita menghadapi risiko. Kita tahu bahwa risiko cedera dalam keadaan seperti itu tidak pernah nol, namun kita tetap melakukan aktivitas ini. Ini karena secara intuitif kita

menyadari bahwa kemungkinan terjadinya kecelakaan sangat rendah.

Jadi kita menggunakan probabilitas setiap hari dalam hidup kita untuk menilai risiko. Karena masalah yang kita hadapi, baik secara individu maupun kolektif, menjadi lebih rumit, kita perlu menyempurnakan dan mengembangkan gagasan kasar dan intuitif tentang probabilitas untuk membentuk pendekatan yang jelas dan tepat. Inilah sebabnya mengapa teori probabilitas telah dikembangkan sebagai subjek. Padahal, industri asuransi telah dikembangkan untuk membantu kita mengatasi risiko. Probabilitas adalah alat yang digunakan untuk menentukan apa yang Anda bayar untuk mengurangi risiko Anda atau untuk memberikan kompensasi kepada Anda atau keluarga Anda jika terjadi cedera.

### **3.3 Ruang sampel dan peristiwa**

Ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari percobaan. Biasa disebutnya dengan  $S$ . Penting untuk dapat membuat daftar hasil dengan jelas. Misalnya, jika saya menanam sepuluh biji kacang dan menghitung jumlah yang berkecambah, maka ruang sampelnya adalah

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Jika saya melempar koin tiga kali dan mencatat hasilnya, ruang sampelnya adalah :

$$S = \{GGG, GGA, GAG, GAA, AGG, AGA, AAG, AAA\},$$

di mana (misalnya) GAG berarti 'gambar pada lemparan pertama, lalu muncul angka, lalu gambar lagi'.

Terkadang kita dapat berasumsi bahwa semua hasil memiliki kemungkinan yang sama. (Dalam contoh kacang, kemungkinan besar tidak. Dalam contoh koin, asumsi akan berlaku jika koin itu 'adil': ini berarti bahwa tidak ada alasan fisik untuk mendukung satu sisi lebih berat dari yang lain.) Jika semua hasil memiliki kemungkinan yang sama, maka masing-masing memiliki

probabilitas  $1/S$ . (Ingat bahwa  $S$  adalah jumlah elemen dalam himpunan  $S$ ).

### 3.4 Himpunan

Himpunan adalah kumpulan dari objek-objek. Kita sering menetapkan suatu himpunan dengan mencantumkan anggotanya atau **elemen**, dalam tanda kurung seperti  $\{ \}$  ini. Misal  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  berarti  $A$  adalah himpunan yang terdiri dari bilangan 2, 4, 6, 8. Atau kita juga bisa menulis  $A = \{\text{bilangan genap kurang dari } 9\}$ .

Gabungan (**union**)  $A$  dan  $B$  adalah himpunan elemen yang dimiliki oleh  $A$  atau  $B$  (atau keduanya) dan dapat ditulis sebagai  $A \cup B$ . Irisan (**intersection**)  $A$  dan  $B$  adalah himpunan elemen yang termasuk dalam  $A$  dan  $B$ , dan dapat ditulis sebagai  $A \cap B$ . Komplemen (**complement**) dari  $A$ , sering dilambangkan dengan  $\bar{A}$ , adalah himpunan semua elemen yang bukan milik  $A$ . Dalam membuat definisi ini, kita mengasumsikan bahwa semua elemen yang kita pikirkan adalah milik suatu himpunan  $U$  yang lebih besar, yang kita sebut himpunan semesta (**universal**). Himpunan kosong ditulis  $\emptyset$  atau  $\{ \}$ , berarti himpunan tanpa elemen di dalamnya.

Himpunan  $C$  adalah himpunan bagian (**subset**) dari  $A$  jika **semua** elemen di  $C$  juga ada di  $A$ . Misalnya, berikut:

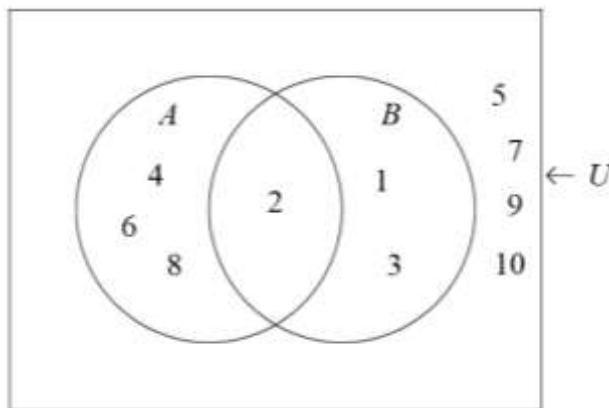
$U = \{\text{semua bilangan positif} \leq 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$C = \{6, 8\}$

Himpunan A, B dan U dapat direpresentasikan dalam Diagram Venn sebagai berikut:



**Gambar 3.1.** Contoh diagram Venn

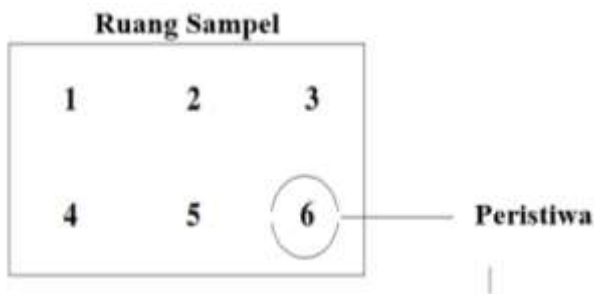
Irisan A dan B,  $A \cap B$ , ditunjukkan dalam diagram Venn dengan tumpang tindih himpunan A dan B,  $A \cap B = \{2\}$ . Gabungan himpunan A dan B,  $A \cup B$ , adalah himpunan anggota yang berada di  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  bersama dengan anggota yang berada di  $B = \{1, 2, 3\}$  termasuk masing-masing elemen sekali saja. Jadi,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ . Komplemen dari A adalah himpunan  $\bar{A}$  berisi semua elemen di  $U$  yang tidak ada di A. Jadi,  $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ . C adalah himpunan bagian dari A karena setiap elemen di  $C = \{6, 8\}$  juga ada di  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ .

### 3.5 Ruang setara hingga

Suatu peristiwa E (*event*) dapat terjadi sebanyak “h” kali diantara sejumlah “n” peristiwa yang mungkin, dengan ketentuan  $h \leq n$ . Dengan demikian nilai probabilitas dari peristiwa paling kecil adalah 0 (nol) dan paling besar adalah 1 (satu) atau diformulasikan menjadi:  $0 \leq P(E) \leq 1$  ; dimana  $P(E)$  merupakan probabilitas (peluang) kejadian suatu peristiwa. Untuk saat ini, kita akan

membatasi diskusi pada kasus-kasus di mana ada sejumlah hasil yang kemungkinannya sama. Misalnya, jika sebuah koin dilempar, ada dua kemungkinan hasil yang sama: gambar (G) atau angka (A). Jika sebuah dadu dilempar, ada enam kemungkinan hasil yang sama: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Himpunan semua hasil yang mungkin dari percobaan yang diberikan disebut ruang sampel. Sebuah kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Lihat kembali contoh melempar dadu bermuka enam. Hasil yang mungkin dari percobaan ini adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, sehingga ruang sampelnya adalah himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6}. 'Kejadian mendapatkan 6' adalah himpunan bagian {6}. Hal ini dapat dilihat dalam diagram berikut:



**Gambar 3.2.** Ruang sampel dan peristiwa

Ada enam kemungkinan dalam ruang sampel dan hanya satu di antaranya yang sesuai dengan mendapatkan angka 6, jadi peluang mendapatkan angka 6 saat Anda melempar dadu adalah  $\frac{1}{6}$ . Kita katakan bahwa peluang terjadinya peristiwa A adalah:

$$P(A) = \frac{\text{Jumlah elemen di } A}{\text{Jumlah total elemen dalam ruang sampel}}$$

### Contoh 1

Jika sebuah koin dilemparkan, jelas dari definisi probabilitas kami di atas itu  $P(\text{memperoleh muka}) = \frac{1}{2}$

### Contoh 2

Sebuah kartu diambil secara acak dari 52 kartu. Misalkan  $A$  = 'kartunya adalah hati' dan  $B$  = 'kartunya adalah kartu as'.

### Solusi

$P(A) = \frac{13}{52}$  karena ada 13 kartu hati dalam seperangkat kartu bridge.

$P(B) = \frac{4}{52}$  karena ada 4 kartu as dalam seperangkat kartu bridge.

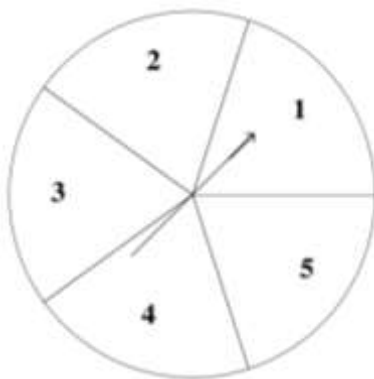
Untuk menghitung probabilitas suatu peristiwa, kita hanya perlu mengetahui jumlah total hasil yang mungkin dari suatu percobaan dan jumlah hasil yang sesuai dengan peristiwa yang diberikan.

### Latihan 1

Berapa peluang Anda untuk memenangkan undian di mana 325 tiket telah terjual, jika Anda memiliki satu tiket?

### Latihan 2

Kursor diputar pada disk yang dibagi menjadi lima sektor yang sama seperti yang ditunjukkan di bawah ini. Posisi penunjuk dicatat. (Jika berada pada garis, kursor diputar lagi).



Misalkan  $A$  kejadian 'penunjuk ada di sektor pertama' dan  $B$  kejadian 'penunjuk ada di sektor ke-2 atau ke-4'. Carilah  $P(A)$ ,  $P(B)$ .

### Contoh 3

Pertimbangkan masalah berikut. Dua koin dilempar. Misalkan A adalah kejadian 'dua gambar diperoleh', dan, B adalah kejadian 'satu gambar dan satu angka diperoleh'.

#### Solusi

Ruang sampel = {GG, GA, AG, AA}.  $A=\{GG\}$ ,  $B=\{GA, AG\}$ .

Karena dalam ruang sampel terdapat 4 hasil.

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Perhatikan bahwa GA dan AG harus dianggap sebagai hasil yang berbeda.

Seringkali kita dapat dengan mudah mewakili hasil yang mungkin pada diagram dan menghitung secara langsung. Berikut beberapa teknik dan aturan untuk membantu perhitungan. Sekarang mari kita lihat apa yang terjadi dengan mencoba eksperimen berikut:

Lempar dadu sebanyak 50 kali dan catat jumlah setiap hasil 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lanjutkan bergulir dan catat jumlah setiap hasil setelah 100 lemparan. Sekarang catat nomornya setelah 200 pelemparan. Temukan frekuensi relatif dari setiap hasil setelah 50, 100 dan 200 pelemparan. Misalnya menghitung berapa kali '1' terjadi. Apakah itu mendekati  $\frac{1}{6}$ , yaitu 0,17?

### 3.6 Peristiwa pelengkap

Jika suatu peristiwa adalah kepastian, maka probabilitasnya adalah satu. Dalam bahasa umum kita sering mengatakan itu 100% pasti (yang artinya sama). Misalnya, dalam percobaan pelemparan koin, misalkan C adalah peristiwa 'mendapatkan gambar atau angka'. Ruang sampelnya adalah {G, A}. Peristiwanya adalah {G, A}. Jadi  $P(C) = \frac{2}{2} = 1$

#### Contoh 4

Jika sebuah dadu normal dilempar, berapa peluang muncul angka kurang dari 7?

#### Solusi

Ruang sampel = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Peristiwa = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.  
Karenanya probabilitas (angka kurang dari 7) =  $\frac{6}{6} = 1$

**Jika suatu peristiwa tidak mungkin, maka probabilitasnya nol.**

#### Contoh 5

Temukan peluang melempar 8 pada dadu normal. Di sini tidak ada kemungkinan hasil dalam acara tersebut yaitu Ruang sampel = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Peristiwa = { }, yaitu himpunan kosong. Oleh karena itu peluang melempar 8 adalah  $= \frac{0}{6} = 0$ .

**Jika peristiwa itu bukan mustahil atau pasti, maka probabilitasnya antara 0 dan 1.** Dua peristiwa saling melengkapi jika mereka tidak dapat terjadi pada waktu yang sama dan mereka membentuk seluruh ruang sampel. Ketika sebuah koin dilempar, ruang sampelnya adalah {H, T} dan kejadian H = 'memperoleh kepala' dan T = 'memperoleh ekor' adalah komplementer. Jika kita menghitung probabilitas kita menemukan:

$$P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2} \text{ dan } P(H) + P(T) = 1.$$

#### Contoh 6

Sebuah dadu digulirkan. Misalkan A kejadian 'diperoleh angka kurang dari 3' dan misalkan B kejadian 'diperoleh angka 3 atau lebih'. Maka  $P(A) = \frac{2}{6}$ , dan  $P(B) = \frac{4}{6}$  sehingga  $P(A) + P(B) = 1$ .

Kami telah mengilustrasikan hukum berikut: **Jika dua kejadian saling melengkapi, maka probabilitas mereka berjumlah 1.**

### Contoh 7

Sebuah kelereng diambil secara acak dari sebuah kantong yang berisi 3 kelereng merah, 2 biru, 5 hijau, dan 1 kuning. Berapa probabilitas bahwa itu bukan hijau?

#### Solusi

Ada dua cara untuk menyelesaikan masalah ini:

#### Metode A:

Kita dapat menghitung probabilitas bahwa kelereng itu berwarna hijau:  $P(G) = \frac{5}{11}$ . Karena sebuah kelereng berwarna hijau atau tidak hijau, peluang bahwa kelereng tersebut tidak berwarna hijau,  $P(G) = 1 - \frac{5}{11} = \frac{6}{11}$ .

#### Metode B:

Alternatifnya, kita dapat menemukan probabilitas bahwa kelereng berwarna merah, biru atau kuning  $\frac{6}{11}$ .

### Latihan 3

Tiga umbi tulip ditanam di kotak jendela. Carilah peluang bahwa paling sedikit satu bunga akan berbunga jika peluang semua gagal berbunga adalah 1.

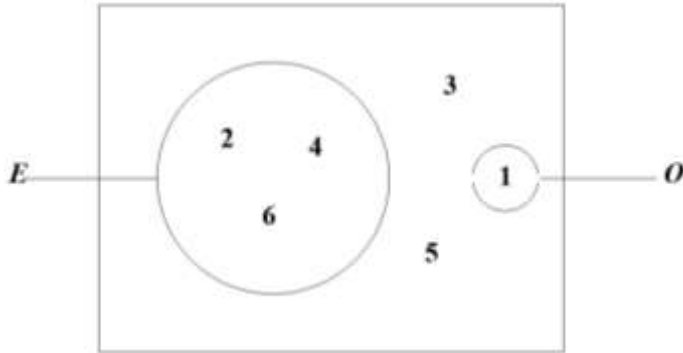
Terkadang perhitungan menjadi lebih mudah dengan menggunakan kejadian pelengkap.

## 3.7 Peristiwa saling terpisah

Dua peristiwa **tidak kompatibel**, **terpisah** atau **saling eksklusif** (*mutually exclusive*) ketika kemunculan yang satu menghalangi terjadinya yang lain, yaitu mereka tidak dapat terjadi pada waktu yang sama. Sebagai contoh, kita tidak akan pernah memiliki sisi gambar dan sisi angka koin yang menghadap ke atas pada saat yang bersamaan.

### Contoh 8

Misalkan sebuah dadu dilempar. Maka kejadian  $E$  = 'memperoleh bilangan genap' dan  $O$  = 'memperoleh satu' saling terpisah seperti gambar berikut:



**Gambar 3.3.** Contoh *mutually exclusive events*

Pada diagram gambar 3.3, peristiwa tidak berpotongan. Perhatikan bahwa  $P(\text{melempar angka genap atau satu}) = P(1, 2, 4, 6) = \frac{4}{6} = P(E) + P(O)$ .

### Contoh 9

Berapa peluang terambilnya hati atau sekop dari satu pak berisi 52 kartu jika satu kartu diambil secara acak?

$P(\text{hati}) = \frac{13}{52}$ ,  $P(\text{sekop}) = \frac{13}{52}$ ,  $P(\text{hati atau sekop}) = \frac{26}{52}$  karena 26 kartu adalah hati atau sekop.. Perhatikan  $P(\text{hati atau sekop}) = P(\text{hati}) + P(\text{sekop})$ . Kita sekarang dapat menyatakan hukum penjumlahan untuk kejadian yang saling lepas (*mutually exclusive*). Jika dua kejadian  $A$  dan  $B$  saling terpisah (*mutually exclusive*), peluang terjadinya  $A$  atau  $B$ , dilambangkan  $P(A \cup B)$ , adalah:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

#### Latihan 4

Suatu bilangan dipilih secara acak dari bilangan bulat 2 sampai 25. Hitunglah peluangnya:

- (a) Kuadrat sempurna;
- (b) Bilangan prima;
- (c) Bilangan prima atau kuadrat sempurna.

#### Contoh 10

Apa kelemahan argumen berikut?

"Tujuh puluh persen siswa sains tahun pertama belajar matematika. Tiga puluh persen mahasiswa sains tahun pertama belajar kimia. Jika seorang siswa IPA tahun pertama dipilih secara acak, peluang bahwa siswa tersebut mengambil matematika adalah 70 , peluang siswa tersebut mengambil kimia adalah 30 , maka peluang siswa tersebut mengambil matematika atau kimia adalah  $\frac{70}{100} + \frac{30}{100} = 1$  (yaitu suatu kepastian).

#### Solusi

Kedua kejadian tersebut tidak saling lepas, oleh karena itu kita tidak dapat menjumlahkan probabilitasnya. Artinya, untuk menghitung semua siswa yang mengerjakan matematika dan/atau kimia, kita perlu menghitung semua siswa matematika, semua siswa kimia, dan kurangi jumlah siswa yang dihitung dua kali karena mereka berada di kedua kelas.

Jika  $M \cup C$  berarti bahwa setidaknya satu dari  $M$  atau  $C$  terjadi dan  $M \cap C$  berarti bahwa  $M$  dan  $C$  terjadi, kemudian  $P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C)$ .

Untuk meringkas:

Untuk dua kejadian  $A$  dan  $B$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Jika  $A$  dan  $B$  saling lepas maka  $P(A \cap B) = 0$ , dan  $A$  dan  $B$  tidak dapat terjadi bersamaan, sehingga  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

### Latihan 5

Sebuah kelas matematika terdiri dari 14 perempuan dan 16 laki-laki. Dari jumlah tersebut, 12 pria dan separuh wanita belajar ilmu komputer. Seseorang dipilih secara acak dari kelas. Temukan probabilitas bahwa orang yang dipilih adalah:

- (a) Seorang wanita
- (b) Mempelajari ilmu komputer;
- (c) Seorang wanita yang mempelajari ilmu komputer;
- (d) Seorang wanita atau sedang mengambil ilmu komputer.

### Latihan 6

Sekantong kelereng berisi 23 mata harimau, 17 pelangi, dan 5 mutiara. Satu kelereng diambil secara acak. Dilambangkan dengan: T saat 'mata harimau ditarik'; R saat 'pelangi ditarik'; P saat 'mutiara ditarik'. Jelaskan peristiwa berikut dalam kata-kata dan temukan probabilitasnya:

- (a)  $R \cup T$ ,
- (b)  $R \cap T$ ,
- (c)  $T \cup \bar{P}$ ,
- (d)  $T \cup (R \cap P)$ ,
- (e)  $\bar{R} \cap (P \cup R \cup T)$ .

### Ringkasan

1. Jika ada sejumlah terbatas hasil percobaan yang kemungkinannya sama, peluang kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{\text{Banyaknya hasil yang mungkin pada A}}{\text{Jumlah total hasil yang mungkin}}$$

2. Probabilitas terjadinya suatu peristiwa terletak antara nol dan satu. Jika peristiwa itu tidak dapat terjadi, probabilitasnya nol dan jika pasti terjadi, probabilitasnya adalah satu.

3. Jika dua kejadian **saling melengkapi**, yaitu saling eksklusif (tidak dapat terjadi bersamaan) dan membentuk seluruh ruang sampel, maka probabilitasnya berjumlah 1.
4. Untuk dua kejadian A dan B peluang terjadinya A atau B (atau keduanya) adalah  

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
 Khususnya jika A dan B **saling terpisah** (*mutually exclusive*),  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . Artinya, peluang bahwa **paling tidak salah satu** di antaranya akan terjadi sama dengan jumlah probabilitasnya.

### Solusi Latihan

1. Jika undian dilakukan sedemikian rupa sehingga setiap tiket memiliki peluang yang sama untuk ditarik  $P(\text{menang}) = \frac{1}{325}$ .
2.  $P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{2}{5}$ .
3.  $P(\text{minimal satu umbi bunga}) = 1 - P(\text{tidak ada umbi bunga}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
4.  $S = \{2, 3, 4, \dots, 25\}$ . Misalkan Q menjadi acara 'persegi sempurna dipilih', maka  $Q = \{4, 9, 16, 25\}$ . Misalkan R adalah peristiwa 'terpilihnya bilangan prima'. Maka  $R = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ .
  - (a)  $P(Q) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
  - (b)  $P(R) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$
  - (c)  $P(Q \cup R) = P(Q) + P(R) = \frac{13}{24}$ . (karena kejadian Q dan R saling terpisah)

5.

| Klasifikasi         | Wanita | Pria | Total |
|---------------------|--------|------|-------|
| Ilmu Komputer       | 7      | 12   | 19    |
| Bukan Ilmu Komputer | 7      | 4    | 11    |
| Total               | 14     | 16   | 30    |

Misalkan W peristiwa 'orang yang dipilih adalah seorang wanita'. Kemudian C kejadian 'orang yang dipilih mengambil ilmu komputer'.

$$(a) P(W) = \frac{14}{30}$$

$$(b) P(C) = \frac{19}{30}$$

(c)  $P(W \cap C) = \frac{7}{30}$ , seperti pada tabel jumlah wanita yang menggunakan ilmu komputer adalah 7.

$$(d) P(W \cup C) = P(W) + P(C) - P(W \cap C) = \frac{14}{30} + \frac{19}{30} - \frac{7}{30} = \frac{26}{30}$$

6.

(a)  $R \cup T$  adalah kejadian 'pelangi atau mata harimau'.  $P(R \cup T) = P(R) + P(T) = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$ , karena ini saling eksklusif (*mutually exclusive*).

(b)  $P(R \cap T)$  adalah kejadian 'pelangi dan mata harimau'.  $P(R \cap T) = 0$ .

(c)  $T \cup \tilde{P}$  adalah kejadian 'mata harimau atau tidak mutiara ditarik'. Ini setara dengan kejadian 'mata harimau atau pelangi ditarik'.  $P(T \cup \tilde{P}) = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$

(d)  $T \cup (R \cap P)$  adalah kejadian mata harimau atau pelangi dan mutiara. Karena  $(R \cap P) = \{ \}$  atau himpunan kosong,  $P(T \cup (R \cap P)) = P(T) = \frac{23}{45}$

(e)  $\bar{R} \cap (P \cup R \cup T)$  adalah peristiwa 'bukan pelangi dan baik mutiara, pelangi atau mata harimau ditarik'. Karena  $P \cup R \cup T$  adalah seluruh ruang sampel,  $\bar{R} \cap (P \cup R \cup T) = \bar{R}$  dan  $P(\bar{R}) = \frac{28}{45}$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Debnath, L., & Basu, K. 2014. 'A short history of probability theory and its applications', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(1), pp. 13–39. doi: 10.1080/0020739x.2014.936975.
- Michael J. Evans and Jeffrey S. Rosenthal. 2009. *Probability and Statistics - The Science of Uncertainty*. Second edi. W. H. Freeman.



# BAB 4

## PROBABILITAS KEJADIAN KONDISIONAL DAN KEJADIAN INDEPENDEN

*Oleh Abdul Baist*

### 4.1 Probabilitas Kondisional

Misalkan Anda memiliki satu pak kartu biasa yang dikocok dengan baik. Peluang  $P(A)$  dari kejadian  $A$  bahwa kartu teratas merupakan kartu as adalah

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Namun, misalkan Anda mengetahui bahwa kartu paling bawah adalah kartu as sekop (sebagai kejadian  $B$ ). Berapa peluang bahwa kartu teratas adalah as? Terdapat 51 kemungkinan dan tiga di antaranya adalah as, jadi probabilitasnya adalah  $3/51$ . Untuk membedakan ini dari probabilitas biasa, kita nyatakan dengan  $P(A|B)$  dan kita sebut sebagai probabilitas kondisional dari  $A$  dengan diketahui kartu terbawah adalah kartu as sekop.

Demikian pula, jika Anda mengamati bahwa kartu paling bawah adalah raja sekop  $K$ , Anda akan menyimpulkan bahwa peluang kartu paling atas merupakan as adalah

$$P(A|K) = \frac{4}{51}.$$

Perhatikan contoh berikut.

#### Contoh 1:

Misalkan Anda sedang bermain poker. Saat dibagikan, Anda menghitung peluang untuk mendapatkan *royal flush*  $R$ , dengan

asumsi bahwa semua kartu memiliki kemungkinan yang sama. (*Royal flush* terdiri dari 10, J, Q, K, A dalam satu jenis kartu.) Sama seperti Anda mendapatkan jawaban sebelumnya

$$P(R) = 4 \binom{52}{5}^{-1} = \frac{1}{649740},$$

pembagi kartu membagikan kartu terakhir Anda menghadap ke atas. Itu adalah kartu as sekop,  $B$ . Jika Anda menerima kartunya, bagaimana peluang Anda untuk mendapatkan *royal flush*?

Secara intuitif, tampaknya tidak mungkin  $P(R)$  tersebut, karena kondisi untuk mendapatkannya telah berubah. Sekarang Anda membutuhkan empat kartu pertama Anda adalah sepuluh hingga raja sekop secara tepat. (Juga, seandainya kartu terakhir Anda adalah dua sekop,  $S$ , peluang Anda untuk *royal flush* pasti nol.) Seperti di atas, untuk membedakan probabilitas baru ini, kita menyebutnya probabilitas kondisional dari  $R$  yang diberikan  $B$  dan dilambangkan dengan  $P(R|B)$ .

Apakah lebih besar atau lebih kecil dari  $P(R)$ ? Setidaknya Anda memiliki kartu as, yang merupakan permulaan, jadi mungkin lebih besar. Tapi sekarang Anda tidak bisa mendapatkan *flush* dengan jenis kartu apa pun kecuali sekop, jadi mungkin lebih kecil. Untuk mengatasi ketidakpastian, Anda berasumsi bahwa setiap set empat kartu dari 51 kartu yang tersisa memiliki kemungkinan yang sama untuk menyelesaikan permainan Anda dan menghitung bahwa

$$P(R|B) = \frac{1}{\binom{51}{4}} = \frac{13}{5} P(R).$$

Kesempatan Anda untuk mendapatkan *royal flush* lebih dari dua kali lipat.

Mari kita selidiki ide-ide ini dalam bentuk yang lebih umum. Seperti biasa kita diberikan ruang sampel, ruang kejadian  $\mathcal{F}$ , dan fungsi probabilitas  $P(\cdot)$ . Kita anggap bahwa suatu peristiwa  $B \in \mathcal{F}$  pasti terjadi, dan menyatakan probabilitas kondisional dari setiap

peristiwa  $A$ , diberikan  $B$ , oleh  $P(A|B)$ . Seperti yang kita lakukan untuk  $P(\cdot)$ , kita amati bahwa  $P(\cdot|B)$  adalah fungsi yang didefinisikan pada  $\mathcal{F}$ , yang mengambil nilai dalam  $[0, 1]$ . Tapi apa fungsinya?

Jelas,  $P(A)$  dan  $P(A|B)$  pada umumnya tidak sama, karena meskipun  $P(B^c) \neq 0$  kita selalu memiliki

$$P(B^c|B) = 0.$$

Kedua, kita perhatikan bahwa kejadian  $B$  yang diberikan, kejadian  $A$  dapat terjadi jika dan hanya jika  $A \cap B$  terjadi. Ini membuatnya wajar untuk mengharuskan bahwa

$$P(A|B) \propto P(A \cap B).$$

Akhirnya, dan sepele,

$$P(B|B) = 1.$$

Setelah direnungkan sejenak tentang ketiga pengamatan tersebut, ternyata kandidat yang menarik untuk memainkan peran  $P(A|B)$  adalah  $P(A \cap B)/P(B)$ . Kita buat refleksi intuitif ini menjadi formal sebagai berikut.

### Definisi 1

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah kejadian dengan  $P(B) > 0$ . Diberikan bahwa  $B$  terjadi, probabilitas kondisional bahwa  $A$  terjadi dinotasikan dengan  $P(A|B)$  dan didefinisikan dengan

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1)$$

Ketika  $P(B) = 0$ , probabilitas kondisional  $P(A|B)$  tidak terdefinisi. Namun, untuk menghindari hal tersebut, mudah untuk mengadopsi konvensi bahwa, bahkan ketika  $P(B) = 0$ , kita masih dapat menulis  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ , kedua sisi memiliki nilai nol. Jadi, apakah  $P(B) > 0$  atau tidak, benar bahwa

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Demikian juga,  $P(A \cap B^c) = P(A|B^c)P(B^c)$  dan karenanya, untuk setiap kejadian  $A$  dan  $B$ , kita telah membuktikan aturan partisi berikut:

### Teorema 1

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A \cap B^c)P(B^c). \end{aligned} \quad (2)$$

### Contoh 2:

Lihat kembali Contoh 1. Mari kita periksa apakah Definisi 1 konsisten dengan diskusi formal kita sebelumnya di bagian ini. Dengan menggunakan (1)

$$P(R|B) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{\binom{52}{5}}}{\frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}} = \frac{1}{\binom{51}{4}}$$

Berikut ini contoh yang lebih rumit.

### Contoh 3:

Sebuah konglomerat industri memproduksi jenis mobil tertentu di tiga kota bernama Faris, Gilang, dan Hendro. Dari 1000 buatan Faris, 20% rusak; dari 2000 buatan Gilang, 10% rusak, dan dari 3000 buatan Hendro, 5% rusak. Anda membeli mobil dari dealer yang jauh. Misalkan  $D$  adalah kejadian rusak,  $F$  kejadian dibuat di Faris dan seterusnya. Tentukan: (a)  $P(F|H^c)$ ; (b)  $P(D|H^c)$ ; (c)  $P(D)$ ; (d)  $P(F|D)$ . Asumsikan bahwa Anda memiliki kemungkinan yang sama untuk membeli salah satu dari 6000 mobil yang diproduksi.

### Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a) } P(F|H^c) &= \frac{P(F \cap H^c)}{P(H^c)} \text{ dengan menggunakan (1),} \\ &= \frac{P(F)}{P(H^c)} \text{ karena } F \subseteq H^c, \\ &= \frac{1000}{6000} / \frac{3000}{6000} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) P(D|H^c) &= \frac{P(D \cap H^c)}{P(H^c)} \text{ dengan menggunakan (1),} \\
&= \frac{P(D \cap (F \cup G))}{P(H^c)} \text{ karena } H^c = F \cup G, \\
&= \frac{P(D \cap F) + P(D \cap G)}{P(H^c)} \text{ karena } F \cap G = \emptyset \\
&= \frac{P(D|F)P(F) + P(D|G)P(G)}{P(H^c)} \text{ dengan menggunakan (1)} \\
&= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \text{ berdasarkan data pada soal} \\
&= \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

$$(c) P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|H^c)P(H^c) \text{ dengan menggunakan (2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} \text{ berdasarkan data dan (b)} \\
&= \frac{11}{20}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) P(F|D) &= \frac{P(F \cap D)}{P(D)} \text{ dengan menggunakan (1)} \\
&= \frac{P(D|F)P(F)}{P(D)} \text{ dengan menggunakan (1)} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} / \frac{11}{20} \text{ berdasarkan data dan (c)} \\
&= \frac{4}{11}.
\end{aligned}$$

Kita sering menggunakan generalisasi dasar Teorema berikut ini.

## Teorema 2

Diketahui

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i) \quad (3)$$

maka  $A \subseteq \bigcup_i B_i$  dan  $B_i \cap B_j = \emptyset$  untuk  $i \neq j$ ; aturan partisi yang diperluas.

Sebagai contoh, dengan menggunakan (3), kita dapat menuliskan

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)},$$

dan memperluas penyebut menggunakan (3), maka kita telah membuktikan hasil terkenal berikut, yaitu Aturan Bayes:

### **Teorema Bayes**

Jika  $A \subseteq \bigcup_1^n B_i$ , dan  $B_i \cap B_j = \emptyset$  untuk  $i \neq j$ , maka

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_i^n P(A|B_i)P(B_i)}; P(A) > 0. \quad (4)$$

Berikut ini adalah contoh khusus bagaimana (4) diterapkan dalam latihan.

### **Contoh 4:**

Anda memiliki tes darah untuk beberapa penyakit langka yang terjadi secara kebetulan pada 1 dari setiap 100.000 orang. Tes ini cukup andal; jika Anda memiliki penyakit, akan dikatakan benar dengan probabilitas 0,95; jika Anda tidak mengidap penyakit tersebut, tes tersebut akan mengatakan Anda mengidap penyakit tersebut dengan probabilitas 0,005. Jika tes mengatakan Anda memiliki penyakit, berapa probabilitas bahwa ini adalah diagnosis yang benar?

### **Penyelesaian:**

Misalkan  $D$  adalah kejadian bahwa Anda menderita penyakit dan  $T$  adalah kejadian yang menurut tes Anda mengidapnya. Kemudian, kita memerlukan  $P(D|T)$ , yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} P(D|T) &= \frac{P(T|D)P(D)}{P(T|D)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)} \text{ dengan menggunakan (4)} \\ &= \frac{(0,95)(0,00001)}{(0,95)(0,00001) + (0,99999)(0,005)} \cong 0,02. \end{aligned}$$

Meski tampak sebagai tes yang cukup bagus, untuk penyakit langka seperti ini tes tersebut hampir tidak berguna.

Penting untuk dicatat bahwa probabilitas kondisional merupakan fungsi probabilitas. Jadi,  $P(\Omega|B) = 1$  di mana  $\Omega$  adalah ruang sampel dan, jika  $A_i \cap A_j = \emptyset$  untuk  $i \neq j$ , kita dapatkan

$$P\left(\bigcup_i A_i|B\right) = \sum_i P(A_i|B). \quad (5)$$

Dari sini, kita dapat menyimpulkan berbagai identitas yang berguna (seperti pada bagian sifat probabilitas); misalnya:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C), \quad (6)$$

$$P\left(\bigcap_1^n A_i\right) = P\left(A_1|\bigcap_2^n A_i\right)P\left(A_2|\bigcap_3^n A_i\right) \dots P(A_n) \quad (7)$$

$$P(A|B) = 1 - P(A^c|B),$$

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C), \quad (8)$$

dan seterusnya.

$$(9)$$

### Contoh 5:

Buktikan (5), (6), (7), (8), dan (9).

Pertama,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_i A_i|B\right) &= P\left(\left(\bigcup_i A_i\right) \cap B\right) / P(B) \text{ menggunakan (1).} \\ &= P\left(\bigcup_i (A_i \cap B)\right) / P(B) \\ &= \sum_i P(A_i \cap B) / P(B) \text{ karena } A_i \text{ tidak beririsan,} \\ &= \sum_i P(A_i|B) \text{ dengan menggunakan (1),} \end{aligned}$$

dan kita telah membuktikan (5).

Kedua, dengan mengulangi penggunaan (1),

$$P(A|B \cap C)P(B|C)P(C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \cdot \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \cdot P(C)$$

$$= P(A \cap B \cap C),$$

jika penyebutnya tidak nol. Jika penyebutnya nol, maka (6) masih berlaku dengan konvensi, kedua sisi bernilai nol.

Relasi (7) dilanjutkan dengan induksi menggunakan (6); dan (8) dan (9) adalah konsekuensi dari (5).

### Contoh 6:

Kejadian  $A$  dikatakan "tertarik" pada kejadian  $B$  jika  $P(A|B) > P(A)$ . Jika  $P(A|B) < P(A)$ , maka  $A$  "ditolak" oleh  $B$  dan  $A$  "tidak tertarik" pada  $B$  jika

$$P(A|B) = P(A). \quad (10)$$

- (a) Tunjukkan bahwa jika  $B$  menarik  $A$ , maka  $A$  menarik  $B$ , dan  $B^c$  menolak  $A$ .
- (b) Secarik kertas tipis ada di salah satu  $n$  kotak file yang menonjol. Kejadian di berkas kotak ke- $j$  adalah  $B_j$ , di mana  $P(B_j) = b_j > 0$ . Kejadian di mana pencarian sepiantas dari berkas kotak ke- $j$  gagal menemukan slip adalah  $F_j$ , di mana  $P(F_j|B_j) = \varphi_j < 1$ . Tunjukkan bahwa  $B_j$  dan  $F_j$  saling menolak, tetapi  $F_j$  menarik  $B_i$ , karena  $i \neq j$ .

### Penyelesaian:

- (a) Karena  $B$  menarik  $A$ , dengan menggunakan (1),  $P(A \cap B) > P(A)P(B)$ , sehingga, jika dibagi dengan  $P(A)$ , diperoleh  $P(B|A) > P(B)$ . Selanjutnya dengan Teorema 2,

$$P(A|B^c)P(B^c) = P(A) - P(A|B)P(B) < P(A)(1 - P(B)),$$

karena  $B$  menarik  $A$ ,

$$= P(A)P(B^c).$$

Jadi  $B^c$  menolak  $A$  (pada pembagian dengan  $P(B^c) \neq 0$ ).

- (b) Dengan Teorema Bayes,

$$P(B_j|F_j) = \frac{P(F_j|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(F_j|B_i)P(B_i)} = \frac{\varphi_j b_j}{1 - b_j + \varphi_j b_j}$$

karena jelas, untuk  $i \neq j$ ,  $P(F_j|B_i) = 1$ . Jadi,

$$P(B_j) - P(B_j|F_j) = \frac{b_j(1 - b_j)(1 - \varphi_j)}{1 - b_j + \varphi_j b_j} > 0.$$

Oleh karena itu,  $B_j$  ditolak oleh  $F_j$ . Juga, untuk  $i \neq j$ ,

$$P(B_i|F_j) - PB_i = \frac{b_i}{1 - b_j + \varphi_j b_j} - b_i = \frac{b_i b_j (1 - \varphi_j)}{1 - b_j + \varphi_j b_j} > 0$$

jadi  $F_j$  menarik  $B_i$ , untuk  $i \neq j$ .

Perhatikan bahwa ini sesuai dengan intuisi kita. Kita sangat percaya bahwa jika kita mencari slip di file dan gagal menemukannya, maka kemungkinan besar (daripada sebelum pencarian) ada di tempat lain. (Coba pikirkan konsekuensinya jika kebalikannya benar.) Kesimpulan dari Contoh 6 ini tidak tergabung dalam aksioma kita, tetapi mengikutinya. Oleh karena itu memberikan dorongan kecil tapi berharga untuk kredibilitasnya.

Akhirnya, kita mempertimbangkan urutan probabilitas kondisional. Karena kemampuan probabilitas kondisional adalah fungsi probabilitas [lihat (5)], kita mengharapkannya kontinu seperti dalam pengertian pada bab barisan dari kejadian. Jadi jika (ketika  $n \rightarrow \infty$ )  $A_n \rightarrow A$  dan  $B_n \rightarrow B$ , maka dengan Teorema barisan dari kejadian kita dapatkan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n|B) = P(A|B)$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A|B_n) = P(A|B). \quad (11)$$

## 4.2 Kejadian Independen

Mungkin saja probabilitas kondisional  $P(A|B)$  sama dengan probabilitas tak kondisional  $P(A)$ , sehingga

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Gagasan ini mengarah pada hal-hal berikut:

### Definisi

(a) Peristiwa  $A$  dan  $B$  independen ketika

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

(b) Kumpulan kejadian  $(A_i ; i \geq 1)$  adalah independen bila

$$P\left(\bigcap_{i \in F} A_i\right) = \prod_{i \in F} P(A_i)$$

untuk sembarang himpunan terbatas  $F$  dari indeks.

(c) Kejadian  $A$  dan  $B$  independen kondisional, diberikan  $C$ , ketika

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C).$$

Ini tidak menyiratkan independensi kecuali  $C = \Omega$ .

(d) Kumpulan kejadian  $(A_i ; i \geq 1)$  independen berpasangan jika  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$  untuk  $i \neq j$ .

Ini tidak berarti independensi secara umum.

Mudah untuk melihat bahwa independensi setara dengan gagasan ketidakpedulian yang didefinisikan dalam (10), tetapi istilah "ketidakpedulian" tidak digunakan secara umum. Biasanya, tetapi tidak selalu, jelas kapan dua kejadian independen, seperti yang diilustrasikan oleh dua contoh berikutnya.

**Contoh 1:**

Sebelum pertandingan sepak bola, Anda mengetos koin untuk *kick-off*. Misalkan  $C$  adalah kejadian Anda memenangkan tos, dan misalkan  $M$  adalah kejadian Anda memenangkan pertandingan.

- (a) Tunjukkan bahwa hasil pertandingan independen pada apakah Anda memenangkan tos jika dan hanya jika, untuk suatu  $p$  dan  $p'$ , dengan  $0 < p$ , dan  $p' < 1$ ,

$$P(C \cap M) = pp',$$

$$P(C \cap M^c) = p(1 - p'),$$

$$P(C^c \cap M) = (1 - p)p',$$

dan

$$P(C^c \cap M^c) = (1 - p)(1 - p').$$

- (b) Misalkan  $B$  adalah kejadian menang atau kalah keduanya, jadi  $B = \{(C \cap M) \cup (C^c \cap M^c)\}$ . Misalkan  $C$  dan  $M$  memang independen. Tunjukkan bahwa  $C$  dan  $B$  independen jika dan hanya jika  $p' = \frac{1}{2}$ .

**Penyelesaian:**

- (a) Jika  $C$  dan  $M$  saling bebas, dan  $P(C) = p$  dan  $P(M) = p$ , lalu dengan definisi  $P(C \cap M) = pp'$  dan seterusnya.

Sebaliknya, untuk probabilitas yang diberikan

$$P(C) = P(C \cap M) + P(C \cap M^c) = pp' + p(1 - p') = p$$

dan sama halnya dengan  $P(M) = p'$ . Karena itu,

$$P(C)P(M) = pp = P(C \cap M).$$

Hal ini, bersama dengan tiga identitas serupa (latihan untuk Anda), menunjukkan independen.

- (b) Mudah,  $P(C \cap B) = P(C \cap M)$ . Jadi,  $C$  dan  $B$  independen jika  $pp' = P(C \cap M) = P(C)P(B) = p(pp' + (1 - p)(1 - p'))$ .

Artinya, jika  $(1 - p)(1 - 2p') = 0$ . Karena  $p \neq 1$ , maka  $p' = \frac{1}{2}$ . Mudah untuk sebaliknya.

## Contoh 2:

Sebuah tanaman mendapat dua gen independen untuk warna bunga, satu dari setiap tanaman induk. Jika gennya identik, maka bunganya seragam dengan warna itu jika berbeda, maka bunganya bergaris dalam dua warna tersebut. Gen untuk warna merah muda, merah tua, dan merah muncul dalam populasi dalam proporsi  $p : q : r$ , di mana  $p + q + r = 1$ . Induk tanaman tertentu dipilih secara acak; misalkan  $A$  kejadian bunganya paling sedikit berwarna merah muda sebagian, dan misalkan  $B$  kejadian bunganya bergaris.

(a) Tentukan  $P(A)$  dan  $P(B)$ .

(b) Tunjukkan bahwa  $A$  dan  $B$  independen jika  $p = \frac{2}{3}$  dan  $r = q = \frac{1}{6}$ .

(c) Apakah ini satu-satunya nilai  $p$ ,  $q$ , dan  $r$  sehingga  $A$  dan  $B$  independen?

## Penyelesaian:

(a) Dengan notasi yang jelas ( $P$  untuk pink,  $C$  untuk merah tua, dan  $R$  untuk merah), kita dapatkan

$$P(PP) = P(P)P(P), \text{ dengan independensi orang tua,} \\ = p^2,$$

karena  $P$  muncul dengan probabilitas  $p$ . Demikian juga,

$$P(PR) = P(R)P(P) = rp = P(RP).$$

Karena itu,

$$P(A) = P(PP \cup PR \cup RP \cup PC \cup CP) \\ = p^2 + 2pr + 2pq \text{ dengan definisi fungsi peluang,} \\ = 1 - (1 - p)^2,$$

karena  $p + q + r = 1$ . (Dapatkan Anda melihat cara mendapatkan ekspresi terakhir ini secara langsung?)

Demikian pula,

$$P(B) = P(PC \cup PR \cup RC) = 2(pq + qr + rp).$$

(b) Kejadian  $A$  dan  $B$  independen, jika dan hanya jika,

$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = P(PC \cup PR) = 2(pq + pr).$$

Dari bagian (a), ini setara dengan

$$(1 - (1 - p)^2)(pq + qr + pr) = p(q + r),$$

dan ini dipenuhi oleh nilai  $p, q$ , dan  $r$  yang diberikan.

(c) Tidak. Menata ulang hasil di (b), kita melihat bahwa  $A$  dan  $B$  independen untuk setiap nilai  $q$  dan  $r$  yang terletak pada kurva  $rq = 2rq(q + r) + r^3 + q^3$ , dalam bidang  $r - q$ . Anda mungkin ingin menghibur diri sendiri dengan menunjukkan bahwa ini adalah *loop* dari asalnya. Di luar *loop*,  $A$  dan  $B$  menarik; di dalam *loop*,  $A$  dan  $B$  adalah penolak.

### Contoh 3:

Ruang sampel untuk pelemparan sepasang dadu ( $\Omega_2$ ) memiliki 36 kemungkinan hasil yang sama. Misalkan  $n_j$  menunjukkan banyaknya hasil di mana jumlah angka yang ditampilkan adalah  $j$ ,  $2 \leq j \leq 12$ . Sekarang misalkan  $A_k$  menjadi kejadian yang Anda menangkan dengan menggulirkan sepasang dadu dengan jumlah  $k$ . Misalkan  $S_k$  adalah kejadian bahwa setiap lemparan menghasilkan jumlah  $k$ . Sekarang, misalnya,  $A_4$  terjadi hanya jika  $S_4$  terjadi pada lemparan pertama dan  $S_4$  terjadi sebelum  $S_7$  pada tos selanjutnya. Namun, semua tos setelah yang pertama hingga kemunculan pertama dari  $S_4$  atau  $S_7$  tidak relevan, dan lemparan independen.

Jadi,

$$P(A_4) = P(S_4)P(S_4|S_4 \cup S_7) = \frac{(P(S_4))^2}{P(S_4 \cup S_7)} = \frac{\left(\frac{3}{36}\right)^2}{\frac{3}{36} + \frac{3}{36}} = \frac{1}{36}.$$

Lakukan perhitungan serupa untuk  $A_5, A_6, A_8, A_9$ , dan  $A_{10}$ .

#### Contoh 4:

Misalkan  $A$  dan  $B$  independen, dan  $B$  dan  $C$  independen.

(a) Apakah  $A$  dan  $C$  independen secara umum?

(b) Apakah  $B$  bebas dari  $A \cup C$ ?

(c) Apakah  $B$  bebas dari  $A \cap C$ ?

#### Penyelesaian:

(a) Tidak. Ambil  $A \equiv C$ . [Kemudian kerjakan Soal 9(a).]

(b) Tidak. Perhatikan Contoh 1(b), dengan  $p = p' = \frac{1}{2}$ , dan misalkan  $A = M$ . Kemudian,  $B$  independen dari  $M$  dan  $C$ , tetapi

$$P(B \cap (C \cup M)) = P(C \cap M) = \frac{1}{4}$$

dan

$$\begin{aligned} P(B)P(C \cup M) &= (pp' + (1 - p)(1 - p'))(1 \\ &\quad - (1 - p')(1 - p)) \\ &= \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(c) Tidak. Dengan notasi yang sama seperti pada (b), mengikuti Contoh 1(b) lagi, kita dapatkan

$$P(B \cap C \cap M) = P(C \cap M) = \frac{1}{4},$$

dan

$$P(B)P(C \cap M) = (pp' + (1 - p')(1 - p))pp' = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}.$$

## LATIHAN

1. Tunjukkan bahwa  $P(A|B)$  memenuhi tiga aksioma dari suatu probabilitas, yaitu,
  - (a)  $P(A|B) \geq 0$
  - (b)  $P(S|B) = 1$
  - (c)  $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$   
jika  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
2. Tentukan  $P(A|B)$  jika
  - (a)  $A \cap B = \emptyset$
  - (b)  $A \subset B$
  - (c)  $B \subset A$
3. Berikan sebuah contoh dari tiga kejadian  $A_1, A_2, A_3$  pada ruang probabilitas sedemikian rupa sehingga mereka berpasangan independen tetapi tidak independen.  
(Petunjuk: Pertimbangkan peubah acak  $X_1, X_2, X_3$  terdistribusi independen dan identik dengan  $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} = P(X_1 = 0)$  dan kejadian  $A_1 = \{X_1 = X_2\}, A_2 = \{X_1 = X_3\}, A_3 = \{X_3 = X_1\}$ .)
4. Buktikan bahwa  $P(A|B) > P(A)$  jika dan hanya jika  $P(B|A) > P(B)$ . Dalam probabilitas, jika untuk dua kejadian  $A$  dan  $B$ ,  $P(A|B) > P(A)$ , kita katakan bahwa  $A$  dan  $B$  berkorelasi secara positif. Jika  $P(A|B) < P(A)$ ,  $A$  dan  $B$  dikatakan berkorelasi secara negatif.
5. Dalam kondisi apa pada  $A \cap B$  akan  $P(A|B) = P(A)$ ? Cobalah untuk menginterpretasikan arti dari persamaan ini.
6. Probabilitas seorang pemanah mengenai target saat keadaan berangin adalah 0,4; saat keadaan tidak berangin, kemungkinan dia mencapai target adalah 0,7. Pada bidikan

apa pun, kemungkinan hembusan angin adalah 0,3. Tentukan probabilitas bahwa:

- (a) Pada tembakan tertentu, ada hembusan angin dan mengenai sasaran.
- (b) Dia mengenai sasaran dengan tembakan pertamanya.
- (c) Dia mengenai sasaran tepat sekali dalam dua tembakan.
- (d) Tidak ada hembusan angin pada saat dia meleset dari target.

7. Misalkan  $A$ ,  $B$  adalah dua kejadian dengan  $P(B) > 0$ . Tunjukkan bahwa

- (a) Jika  $B \subset A$ , maka  $P(A|B) = 1$ ,
- (b) Jika  $A \subset B$ , maka  $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$

8. Tiga koin bias  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  terletak di atas meja. Probabilitas masing-masing muncul gambar ketika dilempar adalah  $1/3$ ,  $2/3$ , dan 1. Sebuah koin diambil secara acak, ditos, dan diamati muncul gambar.

- (a) Hitunglah probabilitas bahwa itu adalah  $C_k$  untuk setiap  $k = 1, 2, 3$ .
- (b) Diberikan bahwa sebuah koin ditos satu kali dan diamati muncul gambar, hitunglah probabilitasnya bahwa lemparan kedua dari koin yang sama juga akan menghasilkan gambar.
- (c) Percobaan dimulai lagi dengan tiga koin yang sama. Kali ini koin yang dipilih dilempar dua kali dan diamati menghasilkan gambar dua kali. Hitung probabilitas bahwa itu adalah  $C_k$  untuk setiap  $k = 1, 2, 3$ .
- (d) Diketahui bahwa sebuah koin telah dilempar dua kali dan diamati menghasilkan gambar dua kali, hitung

probabilitas bahwa lemparan ketiga dari koin yang sama juga akan menghasilkan gambar.

9. (a) Suatu peristiwa  $E$  independen pada dirinya sendiri. Tunjukkan bahwa probabilitasnya adalah 0 atau 1.
- (b) Peristiwa  $A$  dan  $B$  saling lepas. Bisakah Anda mengatakan apakah mereka dependen atau independen?
- (c) Buktikan bahwa jika kejadian  $A$  dan  $B$  independen maka kejadian  $A^c$  dan  $B$  juga demikian, serta kejadian  $A^c$  dan  $B^c$ .
10. Kandidat diberikan paling banyak tiga kesempatan pada tes yang diberikan. Diketahui  $j - 1$  kegagalan sebelumnya, probabilitas seorang kandidat gagal pada percobaan ke- $j$  adalah  $p_j$ . Jika  $p_1 = 0,6$ ,  $p_2 = 0,4$ , dan  $p_3 = 0,75$ , tentukan peluang bahwa seorang kandidat:
- (a) Lulus pada kesempatan kedua:
- (b) Lulus pada kesempatan ketiga:
- (c) Lulus dengan diketahui bahwa ia gagal pada percobaan pertama;
- (d) Lulus pada kesempatan kedua dengan diketahui bahwa ia lulus.

## DAFTAR PUSTAKA

- David Stirzaker. 1999. *Probability and Random Variables, a beginner's guide*. Cambridge: Cambridge University Press.
- David Stirzaker. 2003. *Elementary Probability, second edition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hwei P. Hsu. 1997. *Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes*. New York: McGraw-Hill.
- Kevin J. Hastings. 2010. *Introduction to Probability with Mathematica, second edition*. New York: CRC Press.
- Krishna B. Athreya, & Soumendra N. Lahiri. 2006. *Measure Theory and Probability Theory*. New York: Springer.
- Robert V. Hogg, Joseph W. McKean, & Allen T. Craig. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics, sixth edition*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Saeed Ghahramani. 2005. *Fundamentals of Probability with Stochastic Process*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Sanjeev Kulkarni, & Gilbert Harman. 2011. *An Elementary Introduction to Statistical Learning Theory*. New Jersey: John Wiley & Sons.

# BAB 5

## EKSPEKTASI MATEMATIKA

*Oleh Farida Daniel*

### 5.1 Pengertian Ekspektasi Matematika

Suatu konsep yang sangat penting dalam peluang dan statistik adalah ekspektasi matematika atau nilai harapan matematika dari suatu peubah acak. Secara umum ekspektasi dibedakan menurut ekspektasi suatu peubah acak atau distribusi, ekspektasi suatu fungsi dari peubah acak multivariate (termasuk bivariat). Konsep ekspektasi matematik dalam teori peluang adalah serupa dengan konsep pusat massa dari suatu benda yang mempunyai rapat massa. Konsep ini dirumuskan sebagai berikut:

**Definisi 5.1:**

Diketahui peubah acak  $X$  mempunyai fungsi kepadatan peluang  $f(x)$  maka ekspektasi matematik atau nilai harapan dari  $X$  adalah besaran :

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x \text{ di } A} xf(x) & ; \text{ Jika } X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & ; \text{ Jika } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

Perlu diperhatikan bahwa ada tidaknya  $E[X]$  tergantung kepada apakah  $\sum$  atau  $\int$  berhingga atau tidak. Artinya  $\sum$  atau  $\int$  harus konvergen absolut agar  $E[X]$  ada.

**Contoh 5.1:**

Diketahui 3 TV dipilih secara acak dari 12 TV yang 2 diantaranya rusak. Berapa banyak TV rusak yang diharapkan terpilih dalam pengiriman tersebut?

Penyelesaian :

Jika  $X$  menyatakan banyaknya TV yang rusak yaitu  $x = 0, 1, 2$  maka  $X$  adalah peubah acak diskrit dengan fungsi kepadatan peluang dari  $X$  adalah:

$$f(x) = \frac{C_x^2 C_{3-x}^{10}}{C_3^{12}}; x = 0, 1, 2$$

Maka tabel distribusi peluang dari  $X$  adalah:

| $x$    | 0     | 1    | 2    |
|--------|-------|------|------|
| $f(x)$ | 12/22 | 9/22 | 1/22 |

Dengan demikian

$$E(X) = \sum_{x=0}^2 xf(x) = (0)(12/22) + (1)(9/22) + (2)(1/22) = 1/2$$

**Sifat-sifat Ekspektasi Matematika:**

Jika  $k$  sebarang konstanta dan  $f, g, h$  adalah fungsi-fungsi maka berlaku :

1.  $E[k] = k$  untuk setiap konstanta  $k$
2.  $E[kg] = kE[g]$
3. Jika  $a$  dan  $b$  adalah konstanta maka  

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$
4. Jika  $g(x) \leq h(x)$  untuk setiap  $x$  maka  $E[g(x)] \leq E[h(x)]$
5. Jika  $k_i$  adalah konstanta dan  $g_i$  adalah fungsi-fungsi dari satu atau lebih peubah acak dengan  $i = 1, 2, \dots$  maka

$$E\left[\sum_{i=1}^k k_i g_i(x)\right] = \sum_{i=1}^k k_i E[g_i(x)]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^k k_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] = \sum_{i=1}^k k_i E[g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

**Contoh 5.2:**

Diketahui peubah acak  $X$  mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan  $E[X]$  dan  $E[2X]$

Penyelesaian:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2(1-x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$E[2X] = 2E[X] = 2 \left( \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

**Contoh 5.3:**

Diketahui fungsi kepadatan peluang bersama dari  $X$  dan  $Y$  adalah:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & ; 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & ; x, y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah a).  $E[X]$ , b)  $E[XY]$ , c)  $E[XY^2]$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \text{a. } E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(x + y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \int_0^1 xy dy \\ &= 1/3 + 1/4 = 7/12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy(x + y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y dx dy + \int_0^1 \int_0^1 xy^2 dx dy \\ &= 1/9 + 1/8 = 17/72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } E[XY^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy^2(x + y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^2 dx dy + \int_0^1 \int_0^1 xy^3 dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} y^2 x^3 \Big|_0^1 dy + \int_0^1 \frac{1}{2} y^3 x^2 \Big|_0^1 dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 y^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^1 y^3 dy \\ &= \frac{1}{9} y^3 \Big|_0^1 + \frac{1}{8} y^4 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72} \end{aligned}$$

#### Contoh 5.4:

Seorang pedagang es akan memperoleh keuntungan sebesar Rp. 6.000,00 jika cuaca cerah. Tetapi jika cuaca buruk ia akan rugi sebesar Rp. 1.500,00. Peluang cuaca akan cerah adalah 0,70. Berapa harapan matematis keuntungannya?

Penyelesaian :

Diketahui  $X_1 = \text{Rp.}6.000,00 \rightarrow f(x_1) = 0,70$

$X_2 = -\text{Rp.}1.500,00 \rightarrow f(x_1) = 1 - 0,70 = 0,30$

Maka

$$\begin{aligned} E[X] &= x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) \\ &= (6.000)(0,70) + (-1.500)(0,30) = 3.750 \end{aligned}$$

## 5.2 Mean

### Definisi 5.2 :

Jika  $X$  adalah suatu peubah acak dengan distribusi tertentu dari  $X$ , besaran  $\mu = E[X]$  dinamakan mean dari  $X$  dan didefinisikan sebagai :

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_x x f(x) & ; \text{ jika } X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & ; \text{ jika } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

Mean atau rata-rata adalah suatu ukuran yang menunjukkan kecenderungan dari suatu peubah acak. Untuk  $X$  yang kontinu pengertian  $E[X]$  serupa dengan pusat massa sehingga dapat didefinisikan sebagai:

$$\mu = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}{1} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

### Contoh 5.5:

Misalkan suatu mesin memproduksi kabel dan tentu saja ada yang cacat selama proses produksi itu. Katakanlah panjang

kabel diantara dua cacat yang berurutan merupakan peubah acak  $X$  dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} 2(1+x)^{-3}; & x > 0 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Berapakah rataan panjang kabel hasil produksi itu diantara dua cacat yang berurutan?

Penyelesaian :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x2(1+x)^{-3} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$$

Misalkan  $t = 1+x$  maka  $x = t-1$

$$\begin{aligned} \mu &= 2 \int_0^{\infty} \frac{t-1}{t^3} dt = 2 \int_0^{\infty} (t-1)t^{-3} dt = 2 \int_0^{\infty} (t^{-2} - t^{-3}) dt = 2 \left( -t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} \right) \\ &= 2 \left( -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} \right) \Bigg|_0^{\infty} \\ &= 2(-0 + 0 + 1 - 1/2) = 1 \end{aligned}$$

Jadi rataan panjang kabel diantara dua cacat  $\mu = 1$  satuan panjang.

### 5.3 Variansi

Besaran yang digunakan untuk menunjukkan sebaran atau simpangan dari peubah acak relatif terhadap ukuran kecenderungan (mean) disebut variansi. Besaran ini didefinisikan sebagai  $\sigma^2 = E[X^2 - \mu^2]$  sedangkan akar positif dari variansi dinamakan deviasi standar dari  $X$ . Variansi  $X$  didefinisikan sebagai:

$$Var(x) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \begin{cases} \sum_x (x - \mu_x)^2 f(x) & ; x \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx & ; x \text{ kontinu} \end{cases}$$

### **Teorema 5.1 :**

Variansi  $\sigma^2$  dari  $X$  dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Bukti:

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$

$$Var(X) = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2$$

$$= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E[X^2] - \mu^2$$

### **Sifat- sifat Variansi:**

1. Jika  $X$  adalah peubah acak dengan variansi  $\sigma^2$  dan  $a, b$  adalah sebarang konstanta maka

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

2. Nilai  $E[(X - a)^2]$  adalah minimum jika  $a = \mu = E[X]$

3. Jika  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak yang saling bebas maka

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$$Var(X - Y) = Var(X) - Var(Y)$$

**Contoh 5.6:**

Peubah acak  $X$  mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :  $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}; & x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$

Carilah mean dan variansi dari  $X$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \text{a. } \mu = E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x(2e^{-2x})dx = 2 \int_0^{\infty} xe^{-2x} dx \\ &= 2 \left[ (x) \frac{e^{-2x}}{-2} - (1) \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^{\infty} = -xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 (2e^{-2x})dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \\ &= 2 \left[ (x^2) \left( \frac{e^{-2x}}{-2} \right) - (2x) \left( \frac{e^{-2x}}{4} \right) + (2) \left( \frac{e^{-2x}}{-8} \right) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] = E\left[\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - 1/2)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - 1/2)^2 (2e^{-2x})dx \\ &= \int_0^{\infty} (x - 1/2)^2 (2e^{-2x})dx = \int_0^{\infty} (2x^2 e^{-2x} - 2xe^{-2x} + 1/2 e^{-2x})dx \\ &= 1/2 - 1/2 + 1/4 = 1/4 \end{aligned}$$

Atau dengan cara lain :

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 = 1/2 - (1/2)^2 = 1/4$$

**Contoh 5.7:**

Tunjukkan bahwa jika  $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$  maka  $E[X^*] = 0$  dan  $\text{Var}(X^*) = 1$

Penyelesaian :

$$\text{a. } E[X^*] = E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} E[X - \mu] = \frac{1}{\sigma} (\mu - \mu) = 0$$

$$\text{b. } \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} E[(X - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

**Contoh 5.8:**

Diketahui peubah acak  $X$  mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Hitunglah a). mean dari  $X$  , b) variansi dari  $X$  .

Penyelesaian:

a). Mean dari  $X$  adalah :

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{2}(x+1)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + x)dx = \frac{1}{3}$$

$$\text{b). } E(X^2) = \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{2}(x+1)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^3 + x^2)dx = \frac{1}{3}$$

variansi dari  $X$  adalah ,

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 1/3 - 1/9 = 2/9$$

**Catatan:**

Apabila ruang dari  $X$  hanya terdiri atas 1 buah titik, maka  $\sigma^2 = 0$ . Perlu diingat bahwa *Mean dan variansi tidak dijamin selalu ada*. Hal ini tergantung kepada fungsi kepadatan peluang yang dimiliki sebagaimana dapat dilihat pada contoh berikut:

**Contoh 5.9:**

Misalkan peubah acak  $X$  mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}; 1 < x < \infty \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah mean dan variansi dari  $X$

Penyelesaian :

a). Mean dari  $X$  , adalah :

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

$$\mu = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$$

Ini berarti  $\mu$  tidak ada.

b). Berdasarkan bagian a) karena  $\mu$  tidak ada, maka  $\sigma^2$  pun tidak ada.

## 5.4 Kovariansi dan Korelasi

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak yang mempunyai fungsi kepadatan peluang bersama  $f(x,y)$ . Kovariansi dua peubah acak  $X$  dan  $Y$  adalah ukuran keeratan

hubungan atau ukuran asosiasi antara  $X$  dan  $Y$  sedangkan korelasi adalah ukuran keeratan hubungan yang tidak bergantung kepada satuan dari kedua peubah acak.

**Definisi 5.3:**

Kovariansi dari  $X$  dan  $Y$  adalah:

$$\sigma_{X,Y} = \text{Kov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \text{ atau}$$

$$\sigma_{X,Y} = \mu'_{1,1} - \mu_x \mu_y$$

**Teorema 5.2:**

$$E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

Bukti :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \\ &= E[XY - \mu_x Y - \mu_y X + \mu_x \mu_y] \\ &= E[XY] - \mu_x E[Y] - \mu_y E[X] + E[\mu_x \mu_y] \\ &= E[XY] - \mu_x \mu_y - \mu_y \mu_x + \mu_x \mu_y \\ &= E[XY] - \mu_x \mu_y \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

**Sifat-sifat Kovariansi:**

1. Jika  $X$  dan  $Y$  adalah dua peubah acak yang saling bebas maka  $\sigma_{XY} = 0$ . Tetapi sebaliknya belum tentu
2. Jika  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adalah peubah acak-peubah acak.

Misalkan  $Y_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  dan  $Y_2 = \sum_{i=1}^n b_i x_i$  dimana  $a_i, b_i$  adalah konstanta maka

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \text{Var}(x_i) + \sum_{i < j} \sum (a_i b_j + a_j b_i) \text{Cov}(X_i, X_j)$$

**Teorema 5.3:**

Jika  $X$  dan  $Y$  peubah acak yang saling bebas maka  $Cov(X, Y) = 0$

Bukti :

Jika  $X$  dan  $Y$  peubah acak yang saling bebas maka  $E[XY] = E[X]E[Y]$ . Berdasarkan teorema 7.2 maka :

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

**Contoh 5.10:**

Dua tablet diambil secara acak dari suatu botol yang berisi 3 aspirin, 2 sedatif, dan 4 laksatif. Jika  $X$  adalah banyaknya aspirin dan  $Y$  adalah banyaknya sedatif, hitunglah  $Cov(X, Y)$ !

Penyelesaian :

Tabel distribusi peluang dapat dilihat sebagai berikut :

$$f(x, y) = \frac{C_x^3 C_y^2 C_{2-x-y}^4}{C_2^9} ; x=0,1,2; y=0,1,2 \text{ dan } 0 < x+y < 2$$

|       |   | Y        |       |          | Total |
|-------|---|----------|-------|----------|-------|
|       |   | 0        | 1     | 2        |       |
| X     | 0 | 1/6      | 2/9   | 1/3<br>6 | 15/36 |
|       | 1 | 1/3      | 1/6   | 0        | 18/36 |
|       | 2 | 1/1<br>2 | 0     | 0        | 3/36  |
| Total |   | 7/1<br>2 | 14/36 | 1/3<br>6 | 1     |

Dengan demikian :

$$E[X] = \sum_{x=0}^2 xf(x) = 0 \cdot \frac{7}{12} + 1 \cdot \frac{14}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$E[Y] = \sum_{y=0}^2 yf(y) = 0 \cdot \frac{15}{36} + 1 \cdot \frac{18}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

$$E[XY] = \sum_{X=0}^2 \sum_{Y=0}^2 xyf(x, y) = 1 \cdot 1 \cdot (1/6) = 1/6$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \frac{1}{6} - \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} - \frac{8}{27} = -\frac{21}{162} \end{aligned}$$

#### Definisi 5.4:

Korelasi dua peubah acak  $X$  dan  $Y$  adalah

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}; \text{Var}(X) > 0, \text{Var}(Y) > 0$$

Kovariansi dan korelasi merupakan ukuran hubungan linear antara dua peubah acak. Maksudnya  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  jika  $(X - \mu_X)$  dan  $(Y - \mu_Y)$  cenderung mempunyai tanda yang sama dengan peluang yang tinggi dan  $\text{Cov}(X, Y) < 0$  jika  $(X - \mu_X)$  dan  $(Y - \mu_Y)$  cenderung mempunyai tanda yang berlawanan dengan peluang yang tinggi.

#### Contoh 5.11 :

Perhatikan soal pada contoh 7.3. Carilah kovariansi dan koefisien korelasi dari peubah acak  $X$  dan  $Y$ .

Penyelesaian :

Pada penyelesaian contoh 7.3 kita telah memperoleh  $\mu_X = 7/12$  maka

a. Variansi dari  $X$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = \int_0^1 \int_0^1 x^2(x+y)dydx - (7/12)^2 = \frac{11}{144}$$

b. Mean dan Variansi dari  $Y$

Dengan cara yang sama pada point a) kita memperoleh  $\mu_y = 7/12$  dan  $\sigma_y^2 = 11/144$

c. Kovariansi dari  $X$  dan  $Y$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2y + xy^2)dxdy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2 \right) dy \\ &= \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$Kov(X, Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y = \frac{1}{3} - \left( \frac{7}{12} \right) \left( \frac{7}{12} \right) = -\frac{1}{144}$$

Sedangkan koefisien korelasi dari  $X$  dan  $Y$  adalah:

$$\rho = \frac{-1/144}{\sqrt{11/144} \sqrt{11/144}} = -\frac{1}{11}$$

### Contoh 5.12:

Diketahui fungsi kepadatan peluang bersama dari peubah acak diskrit  $X$  dan  $Y$  adalah sebagai berikut :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{42}(2x+y); & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & ; x, y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah :

- Mean dari  $X$
- Mean dari  $Y$

- c.  $Var(X)$
- d.  $Var(Y)$
- e. Koefisien korelasi dari  $X$  dan  $Y$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \mu_x &= E[X] = \sum_x \sum_y xf(x, y) = \sum_x \left[ \sum_y xf(x, y) \right] \\
 &= \sum_x \left[ \sum_{y=0}^3 \frac{x}{42} (2x + y) \right] \\
 &= \sum_{x=0}^2 \left( \frac{(2x^2 + 0) + (2x^2 + 1) + (2x^2 + 2) + (2x^2 + 3)}{42} \right) \\
 &= \sum_{x=0}^2 \left( \frac{8x^2 + 6}{42} \right) = \frac{6 + 14 + 38}{42} = \frac{58}{42} = \frac{29}{21} \\
 \text{b. } \mu_y &= E[Y] = \sum_y \sum_x yf(x, y) \\
 &= \sum_y \left[ \sum_x yf(x, y) \right] \\
 &= \sum_y \left[ \sum_{x=0}^2 \frac{y}{42} (2x + y) \right] \\
 &= \sum_y \left[ \sum_{x=0}^2 \frac{y}{42} (2x + y) \right] = \sum_{y=0}^3 \left[ \sum_{x=0}^2 \frac{2xy + y^2}{42} \right] \\
 &= \sum_{y=0}^3 \left( \frac{(0 + y^2) + (2y + y^2) + (4y + y^2)}{42} \right) \\
 &= \sum_{y=0}^3 \left( \frac{3y^2 + 6y}{42} \right) = \frac{0 + (3 + 6) + (12 + 12) + (27 + 18)}{42}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{9+24+45}{42} = \frac{78}{42} = \frac{13}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } E[X^2] &= \sum_x \sum_y x^2 f(x, y) = \sum_x \left[ \sum_y x^2 f(x, y) \right] \\ &= \sum_x \left[ \sum_{y=0}^3 \frac{x^2}{42} (2x + y) \right] \\ &= \sum_x \left[ \sum_{y=0}^3 \frac{(2x^3 + yx^2)}{42} \right] \\ &= \sum_{x=0}^2 \left( \frac{(2x^3 + 0) + (2x^3 + x^2) + (2x^3 + 2x^2)}{42} \right) + \frac{(2x^3 + 3x^2)}{42} \\ &= \sum_{x=0}^2 \left( \frac{8x^3 + 6x^2}{42} \right) = \frac{0 + (8+6) + (64+24)}{42} \\ &= \frac{14+88}{42} = \frac{102}{42} = \frac{17}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - \mu^2 = \frac{17}{7} - \left( \frac{29}{21} \right)^2 \\ &= \frac{17}{7} - \frac{841}{441} = \frac{7497 - 5887}{3087} = \frac{1610}{3087} = \frac{230}{441} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } E[Y^2] &= \sum_x \sum_y y^2 f(x, y) = \sum_y \left[ \sum_x y^2 f(x, y) \right] \\ &= \sum_y \left[ \sum_{x=0}^2 \frac{y^2}{42} (2x + y) \right] \\ &= \sum_y \left[ \sum_{x=0}^2 \frac{(2y^2x + y^3)}{42} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^2 \left( \frac{(0+y^3) + (2y^2+y^3) + (4y^2+y^3)}{42} \right) \\
&= \sum_{y=0}^3 \left( \frac{3y^3+6y^2}{42} \right) \\
&= \frac{0+(3+6)+(24+24)+(81+54)}{42} = \frac{192}{42} = \frac{32}{7}
\end{aligned}$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - \mu_Y^2 = \frac{32}{7} - \left(\frac{13}{7}\right)^2 = \frac{224-169}{49} = \frac{55}{49}$$

$$\begin{aligned}
\text{e. } E[XY] &= \sum_y \sum_x xyf(x, y) = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^3 xyf(x, y) \\
&= \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^3 \frac{xy}{42} (2x+y) = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^3 \frac{(2x^2y+xy^2)}{42} = \frac{102}{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
&= \frac{17}{7} - \left(\frac{29}{21}\right)\left(\frac{13}{7}\right) = -\frac{20}{147}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-20/147}{\sqrt{(230/441)(55/49)}} \\
&= -0,2103
\end{aligned}$$

### Soal Latihan

1. Diketahui peubah acak  $X$  dan  $Y$  mempunyai fkp bersama berikut:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2 & ; (x, y) = (0,0), (0,1), (1,1) \\ 0 & ; x, y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah  $E[(X - 1/3)(Y - 2/3)]$

2. Diketahui fkp bersama dari peubah acak  $X$  dan  $Y$  adalah

sebagai berikut: 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{135}xy & ; 0 < x < 3, 1 < y < 4 \\ 0 & ; x, y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah kovarians  $X$  dan  $Y$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Dekking, F. M, et.al. 2005. *A Modern Introduction to Probability and Statistics*. USA: Springer.
- Hogg, R. V. & Craig, A. T. 1978. *Introduction to Mathematical Statistics*. Newyork: Macmillan Publishing Co. Inc.
- Soleh, A. Z. 2005. *Ilmu Statistika Pendekatan Teoritis dan Aplikatif*. Bandung: Rekayasa Sains.
- Sudjana. 2008. *Metode Statistika*. Bandung : Tarsito.
- Walpole, R. E. & Myers, R. H.1986. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB



# BAB 6

## DISTRIBUSI UNIFORM DISKRIT DAN BERNOULLI

*Oleh Mohammad Ridho'i*

### 6.1 Pendahuluan

Pada bab ini akan membahas distribusi uniform diskrit dan bernoulli. Bentuk terapannya adalah dengan mengelompokkan sesuai dengan karakteristiknya, kemudian menentukan jenis sebarannya.

Tujuan instruksional umum dari mempelajari bab ini adalah pembaca diharapkan memahami konsep penggunaan dan mampu menyelesaikan persoalan yang berhubungan dengan distribusi uniform diskrit dan bernoulli.

Tujuan instruksional khusus dari mempelajari bab ini adalah pembaca diharapkan mampu mengidentifikasi, menentukan ekspektasi, varians dan fungsi pembangkit momen dari distribusi uniform diskrit dan bernoulli.

### 6.2 Distribusi Uniform Diskrit

#### Prinsip Dasar

Distribusi uniform diskrit atau sebaran seragam diskrit adalah sebaran yang peubah acaknya memperoleh semua nilainya dengan peluang kemunculan yang sama. Diantara semua sebaran peluang diskrit yang paling sederhana adalah sebaran seragam diskrit. Dalam sebaran ini, setiap nilai peubah acak mempunyai peluang terjadi yang sama. (Walpole, 1995).

### **Ciri-ciri:**

1. Setiap kemungkinan yang muncul sebagai hasil eksperimen memiliki peluang kejadian yang sama.
2. Semakin banyak kemungkinan yang dapat muncul, maka peluang setiap kemungkinan semakin kecil.

### **Definisi**

#### **Definisi 1** *Distribusi Uniform Diskrit.*

Suatu variable random diskrit  $X$  mempunyai nilai  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  yang mempunyai peluang kejadian yang sama dikatakan berdistribusi uniform diskrit jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$f(x) = f(x; n) = \frac{1}{n} \quad \text{untuk } x = 1, 2, 3, \dots, n$$

Atau

$$P(X; x) = \frac{1}{n} \quad \text{untuk } x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

Penggunaan notasi  $f(x; n)$  sebagai pengganti  $f(x)$  untuk menunjukkan bahwa sebaran seragam itu bergantung pada parameter  $n$ .

### **Contoh 1**

Delapan buah kartu diberi nomor 1 sampai dengan 8. Kemudian kartu tersebut dimasukkan ke dalam satu kotak. Setiap kartu memiliki peluang yang sama untuk terambil. Berapakah peluang bahwa kartu yang terambil tersebut bernomor 5?

Informasi yang diperoleh dari soal soal adalah:

- ❖ Terdapat sejumlah kemungkinan kartu yang terambil
- ❖ Setiap kartu memiliki peluang yang sama untuk terambil
- ❖ Maka soal tersebut menggunakan penyelesaian distribusi uniform diskrit.

Penyelesaian.

$$P(X = x) = \frac{1}{n} \text{ untuk } x = x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

Untuk  $n = 8$

$$\text{Maka } P(X = x) = \frac{1}{8} \text{ untuk } x = x_1, x_2, x_3, \dots x_8$$

Untuk  $x = 5$

$$P(X; x) = \frac{1}{8}$$

$$P(X; 5) = \frac{1}{8}$$

Sehingga peluang terambilnya kartu bernomor 5 adalah  $\frac{1}{8}$ .

## **Contoh 2**

Sebuah kelereng diambil dari kotak yang 6 kelereng dengan warna yang berbeda-beda. Jika X menyatakan warna kelereng yang diambil. Buatlah distribusi probabilitas X!

Penyelesaian:

Ruang sampel =  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  dan setiap warna kelereng memiliki peluang yang sama untuk terambil.

$$P(X = x) = \frac{1}{n} \text{ untuk } x = x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

Untuk  $n = 6$

$$\text{Maka } P(X = x) = \frac{1}{6} \text{ untuk } x = x_1, x_2, x_3, \dots x_6$$

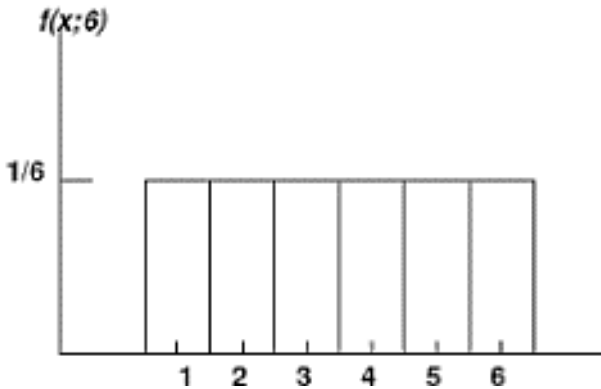
Untuk  $x = 6$

$$P(X; x) = \frac{1}{6}$$

$$P(X; 6) = \frac{1}{6}$$

Dengan demikian distribusi seragamnya adalah  $P(X = 6) = \frac{1}{6}$

Sajian grafik dari sebaran seragam ini selalu berupa beberapa persegi panjang dengan ukuran yang sama. Histogram pada contoh 2 ditunjukkan pada Gambar 6.1



**Gambar 6.1.** Histogram pada pengambilan kelereng  
(<https://rantielas.wordpress.com>)

## Teorema

### Teorema 1

Rataan dan Variansi Distribusi Uniform Diskrit  $f(x; n)$  adalah

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ dan } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

## Bukti

### ❖ Untuk Rataan

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i; n) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

### ❖ Untuk Variansi

$$\begin{aligned} \sigma^2 = E(x_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i; n) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} \end{aligned}$$

Jadi **teorema 1**, terbukti.

### **Contoh 3**

Dari contoh 1 tentukan rata-rata dan variansinya

Penyelesaian

Berdasarkan **teorema 1**, maka diperoleh

$$\text{➤ } E(X) = \mu_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ untuk } n = 8$$

$$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$$

$$\mu_x = \frac{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_8)}{8}$$

$$\mu_x = \frac{(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)}{8}$$

$$\mu_x = \frac{(36)}{8} = 4,5$$

Jadi  $E(x)$  yang diperoleh adalah 4,5

$$\text{➤ } Var(x) = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 (x_i - \mu)^2}{8}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + (x_3 - \mu)^2 + \dots + (x_8 - \mu)^2}{8}$$

$$\sigma^2 = \frac{(1 - 4,5)^2 + (2 - 4,5)^2 + (3 - 4,5)^2 + \dots + (8 - 4,5)^2}{8}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-3,5)^2 + (-2,5)^2 + (1,5)^2 + \dots + (3,5)^2}{8}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-3,5)^2 + (-2,5)^2 + (-1,5)^2 + \dots + (3,5)^2}{8}$$

$$\sigma^2 = \frac{38,25}{8} = 4,78$$

Jadi nilai  $\text{Var}(x)$  untuk variable acak  $x$  yang mengikuti Distribusi Uniform Diskrit tersebut adalah 4,78

### **Teorema 2**

Fungsi pembangkit momen atau moment generating function (MGF) dari distribusi uniform diskrit yaitu:

$$M_X(t) = \frac{e^t}{n} \left( \frac{1 - e^{tn}}{1 - e^t} \right)$$

Bukti:

Kita tahu bahwa MGF adalah suatu sebaran yang didefinisikan sebagai  $E(e^{tx})$ . Dengan demikian, MGF dari distribusi uniform diskrit dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^n e^{tx} \cdot f(x; n)$$

$$M_X(t) = \sum_{x=1}^n e^{tx} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^n e^{tx}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{n} (e^{t1} + e^{t2} + \dots + e^{tn})$$

Dengan menggunakan pola deret geometric, maka persamaan di atas dapat dijabarkan menjadi

$$M_X(t) = \frac{1}{n} ((e^t)^1 + (e^t)^2 + \dots + (e^t)^n)$$

$$M_X(t) = \left( \frac{(e^t)^1}{n} + \frac{(e^t)^2}{n} + \dots + \frac{(e^t)^n}{n} \right)$$

$$M_X(t) = \left( \frac{(e^t)^1}{n} + \frac{(e^t)^2}{n} + \dots + \frac{(e^t)^n}{n} \right)$$

$$M_X(t) = \frac{e^t}{n} + \frac{e^t}{n} (e^t)^1 + \frac{e^t}{n} (e^t)^2 + \dots + \frac{e^t}{n} (e^t)^{n-1}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan dengan menggunakan rumus sehingga menjadi:

$$M_X(t) = \frac{e^t}{n} \left( \frac{1-e^{tn}}{1-e^t} \right). \text{ Terbukti}$$

## 6.3 Distribusi Bernoulli

### Prinsip Dasar

Pada pembahasan distribusi atau sebaran bernoulli hanya ada dua kemungkinan hasil dari satu percobaan yaitu sukses atau gagal. Atau bernilai 1 untuk peluang sukses dan bernilai 0 untuk peluang gagal. Peluang sukses biasanya dinotasikan dengan  $p$  dan peluang gagal dinotasikan dengan  $1-p$ .

### Ciri-ciri:

1. Hanya satu kali percobaan yang dilakukan
2. Terdapat dua kemungkinan hasil yaitu sukses atau gagal
3. Peluang sukses dinyatakan dengan  $p$ , dan peluang gagal dinyatakan dengan  $1-p$
4. Penulisan:  $X \sim BIN(1, p)$

### Definisi

Definisi 1.

Suatu peubah acak  $X$  mempunyai distribusi bernoulli jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$f(X; p) = p^x(1-p)^{1-p} = p^x(q)^{1-x}, \text{ untuk } x = 0, 1.$$

Atau

$$\text{Bentuk pmf: } p(X; x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$p(X; x) = p^x(q)^{1-x}, \text{ untuk } x = 0, 1.$$

#### Contoh 4

Peluang seorang mahasiswa mendapat nilai A pada mata kuliah statistika adalah  $3/9$ . Berapa peluang bahwa nilai yang didapat mahasiswa tersebut bukan A?

Informasi yang diperoleh dari soal:

- Satu buah percobaan
- $p = 3/9$  untuk mendapat nilai A
- kejadian: nilai A atau bukan A  $\rightarrow$  2 kemungkinan
- $X = 0$
- Berdasarkan informasi tersebut soal bisa diselesaikan dengan distribusi Bernoulli

#### Penyelesaian

$$P(X; x) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

$$P(X; 0) = \frac{3^0}{9} \left(1 - \frac{3}{9}\right)^{1-0}$$

$$P(X; 0) = 1 \cdot \frac{6}{9}$$

$$P(X; 0) = \frac{6}{9}$$

Jadi peluang bahwa mahasiswa untuk tidak mendapatkan nilai bukan A adalah  $6/9$ .

#### Contoh 5

Sebuah koin dilempar satu kali, dicatat bahwa hasil yang muncul angka "A" dan Gambar adalah "G". Berapa peluang yang muncul angka?

Penyelesaian

Ruang sampel dari permasalahan tersebut adalah  $S = \{A, G\}$ . sehingga peluang muncul angka adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

Dalam hal ini sesuai dengan penyelesaian menggunakan distribusi Bernoulli didapat:

$$f(X; p) = p^x(1 - p)^{1-p} = p^x(q)^{1-x}, \text{ untuk } x = 0, 1$$

Karena  $p = 0,5$  sehingga  $f(X; p) = (0,5)^x(0,5)^{1-x}$  untuk  $x = 0, 1$ . Setelah dilakukan pelemparan koin ternyata yang muncul adalah angka, berarti  $x = 1$  atau percobaan sukses.

$$\text{Jadi } f(X; p) = (0,5)^1(0,5)^{1-1} = 0,5$$

### **Teorema**

#### **Teorema 1**

Rataan dan Variansi Distribusi Bernoulli

$$\mu = p \text{ dan } \sigma^2 = pq$$

Bukti:

➤ Untuk rataa

$$\begin{aligned} \mu = E(x) &= \sum_{x=0}^1 xf(X; p) = \sum_{x=0}^1 xp^x q^{1-x} \\ &= 0 \cdot p^0 q^{1-0} + 1p^1 q^{1-1} = p \end{aligned}$$

➤ Untuk variansi

$$\text{Diketahui bahwa } \sigma^2 = E(x_1 - \mu)^2 = E(x)^2 - [E(x)]^2$$

$\mu = E(x) = 0$  maka akan dicari  $E(x^2)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mu = E(x)^2 &= \sum_{x=0}^1 x^2 f(X; p) = \sum_{x=0}^1 x^2 p^x q^{1-x} \\ &= 0^2 p^0 q^{1-0} + 1^2 p^1 q^{1-1} = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(x_i - \mu)^2 = E(x)^2 - [E(x)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) \\ &= pq \end{aligned}$$

Jadi teorema 1 (rataa dan variansi distribusi Bernoulli) terbukti

### Contoh 6

Dari contoh 4 tentukan rata-rata dan variansinya.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{➤ Rata-rata} &= \mu = p \text{ dan } \sigma^2 = pq \\ \mu &= p = 3/9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ Varian} &= \sigma^2 = p(1 - p) \\ \sigma^2 &= p(1 - p) \\ \sigma^2 &= \frac{3}{9} \left(1 - \frac{3}{9}\right) \\ \sigma^2 &= \frac{3}{9} \left(\frac{6}{9}\right) \\ \sigma^2 &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

### Terorema 2

Fungsi pembangkit momen atau moment generating function (MGF) dari distribusi Bernoulli:

$$M_x(t) = 1 - p + pe^t$$

Bukti

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=0}^1 t^x f(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 e^{tx} p^x (1 - p)^{1-x} \\ &= [(pe^t)^0 (1 - p)^{1-0}] + [(pe^t)^1 (1 - p)^{1-1}] \\ &= 1 - p + pe^t \end{aligned}$$

## DAFTAR PUSTAKA

- <https://www.rumusstatistik.com/2014/08/distribusi-bernoulli.html> diakses 14 April 2023
- <https://www.rumusstatistik.com/2015/09/mgf-distribusi-seragam-diskret.html> 14 April 2023
- Susiswo. 2009. Statistika Matematis. Malang: UM Press.
- Walpole, R.E. 1995. 'Pengantar Statistika edisi ke-3', *Jakarta: Gramedia Pustaka Utama* [Preprint].



# BAB 7

## DISTRIBUSI BINOMIAL

*Oleh Nur Fitriyah Indraswari*

### 7.1 Pendahuluan

Dalam ilmu statistika, distribusi variabel random terbagi menjadi dua jenis yaitu diskrit dan kontinu. Untuk distribusi variabel random diskrit terbagi menjadi 4 yaitu distribusi binomial, poisson, geometrik, dan hipergeometrik. Pada bab ini akan membahas tentang salah satu jenis variabel random diskrit yang sangat sering ditemui yaitu distribusi binomial.

Jika membahas distribusi probabilitas, maka akan sangat erat kaitannya dengan percobaan, kejadian, dan peluang. Yang perlu diingat, tidak semua percobaan merupakan percobaan binomial atau bernouli, namun percobaan binomial sdah pasti percobaan statistika. Tentunya ada beberapa ciri khas suatu percobaan dapat dikategorikan percobaan binomial. Boediono and Koster (2014) menyatakan ada 4 syarat yang harus terpenuhi yaitu: 1) percobaan diulang sebanyak  $n$  kali; 2) setiap hasil percobaan dibedakan menjadi dua yaitu kejadian sukses dan gagal; 3) kejadian sukses dan gagal yaitu tetap pada  $n$  kali percobaan, dan; 4) semua hasil yang muncul saling bebas.

Sebagai contoh:

Sebuah dadu bermata 8 dilemparkan sebanyak 180 kali. Misalkan munculnya sisi muka 3 kita andaikan kejadian sukses (S) dan kejadian munculnya sisi bukan 3 kita sebut kejadian gagal (G), maka  $P(\text{sukses}) = P(S) = \frac{1}{8}$ , dan  $P(\text{gagal}) = P(G) = 1 - \frac{1}{8} = 1 - p = q$  tetap. Kejadian munculnya muka 3 pada pelemparan pertama, kedua, ketiga, dan seterusnya sampai pelemparan ke-180

merupakan kejadian saling bebas. Percobaan ini disebut percobaan binomial.

## 7.2 Perumusan Distribusi Binomial

Misalnya percobaan pelemparan sebuah uang logam sebanyak 3 kali ( $n=3$ ). Munculnya sisi muka kita sebut kejadian sukses (S) dan kejadian munculnya sisi belakang kita sebut kejadian gagal (G). Dari percobaan tersebut diperoleh  $S = \{SSS, SSG, SGS, GSS, GGS, GSG, SGG, GGG\}$ . Kita misalkan  $P(S) = p$  dan  $P(G) = 1 - p = q$ , maka kita peroleh probabilitas kejadian 8 titik sampel tersebut yang secara lebih ringkas dan terinci hasil-hasil tersebut kita nyatakan pada tabel 7.1 berikut.

**Tabel 7.1.** Probabilitas Pelemparan Sebuah Uang Logam  
Sebanyak 3 Kali

| No | Kejadian | Probabilitas | Variabel Acak X | P(X = x)           |
|----|----------|--------------|-----------------|--------------------|
| 1  | SSS      | $p^3$        | X = 3           | $P(X = 3) = p^3$   |
| 2  | SSG      | $p^2q$       | X = 2           | $P(X = 2) = 3p^2q$ |
| 3  | SGS      | $p^2q$       |                 |                    |
| 4  | GSS      | $p^2q$       |                 |                    |
| 5  | GGS      | $pq^2$       | X = 1           | $P(X = 1) = 3pq^2$ |
| 6  | GSG      | $pq^2$       |                 |                    |
| 7  | SGG      | $pq^2$       |                 |                    |
| 8  | GGG      | $q^3$        | X = 0           | $P(X = 0) = q^3$   |

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}P(X = 3) &= p^3 = 1 \cdot p^3 \cdot q^0 \\&= \binom{3}{3} p^3 \cdot q^{3-3}, 3 \text{ sukses dan } 0 \text{ gagal} \\P(X = 2) &= 3p^2q = 3 \cdot p^2 \cdot q^{3-2} \\&= \binom{3}{2} p^2 \cdot q^{3-2}, 2 \text{ sukses dan } 1 \text{ gagal} \\P(X = 1) &= 3pq^2 = 3 \cdot p^1 \cdot q^{3-1} \\&= \binom{3}{1} p^1 \cdot q^{3-1}, 1 \text{ sukses dan } 2 \text{ gagal} \\P(X = 0) &= q^3 = 1 \cdot p^0 \cdot q^{3-0} \\&= \binom{3}{0} p^0 \cdot q^{3-0}, 0 \text{ sukses dan } 3 \text{ gagal}\end{aligned}$$

Diperoleh:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Berdasarkan penjabaran di atas, diperoleh bahwa distribusi binomial dari variabel acak  $X$  dapat dirumuskan menjadi:

$$f(x) = P(X = x) = b(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Dimana:

$$x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$p$  = peluang kejadian sukses

$q$  = peluang kejadian gagal

$$q = 1 - p$$

Salah satu kegunaan dari distribusi binomial yaitu dapat memudahkan kita dalam menentukan besarnya nilai harapan atau probabilitas yang terjadi untuk setiap variabel random  $x$  (Diana, 2017). Untuk menunjukkan bahwa distribusi binomial merupakan

distribusi probabilitas, maka akan harus ditunjukkan bahwa memenuhi syarat:

1.  $f(x) \geq 0$

karena kisaran nilai peluang dari 0 sampai 1 dan nilai kombinasi pasti positif, maka  $f(x)$  pasti positif

2.  $\sum_{x=0}^n f(x) = 1$

Dengan menggunakan kesamaan pada binomial newton  $(a + b)^n = \sum_{r=0}^n C(n, r) a^{n-r} b^r$  pada  $f(x)$  maka akan diperoleh:

binomial newton = Distribusi binomial

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n C(n, r) a^{n-r} b^r$$

$$\sum_{r=0}^n C(n, r) a^{n-r} b^r = (a + b)^n$$

berdasarkan kesamaan di atas maka bentuk

$$p^x \cdot q^{n-x} = p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

dapat dinyatakan dengan

$$(p + (1-p))^n = 1^n = 1 \text{ sehingga}$$

$$\sum_{x=0}^n f(x) = \sum_{x=0}^n C(n, x) \cdot p^x \cdot q^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Berdasarkan hasil yang didapat pada 1 dan 2 diatas maka terbukti bahwa distribusi binomial merupakan distribusi probabilitas.

## 7.3 Ekspektasi Matematika

$$E(X) = n \cdot p$$

Dimana n = banyaknya percobaan dan p = peluang sukses

Bukti:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^n x \cdot f(x) \\
&= \sum_{x=0}^n x \cdot P(x) \\
&= \sum_{x=0}^n x \cdot P(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^n x \cdot C_x^n \cdot p^x \cdot q^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^n x \cdot C_x^n \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \\
&= [(0 \cdot C_0^n \cdot p^0 \cdot q^n - 0) + (1 \cdot C_1^n \cdot p^1 \cdot q^{n-1} - 1) \\
&\quad + \dots \dots \dots] \\
&= 0 + \sum_{x=1}^n x \cdot C_x^n \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^n x \cdot \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x \cdot (1-p)^{n-x} \\
&\quad - x, \text{ kita uraikan } x! \text{ dan } n! \\
&= \sum_{x=1}^n x \cdot \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!} p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \\
&\quad \text{kita modifikasi bentuk } Px \\
&= \sum_{x=1}^n \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} (p \cdot p^{x-1}) \cdot (1-p)^{n-x} \\
&= n \cdot p \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} (p^{x-1}) \cdot (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Misalkan  $m = n - 1$  dan  $s = x - 1$ , maka persamaan di atas menjadi:

$$E(X) = n \cdot p \sum_{x=0}^m \frac{m!}{s! \cdot (m-s)!} (p^s) \cdot (1-p)^{m-s}$$

Berdasarkan bentuk pada syarat (2) diatas yang berbentuk  $\sum_{x=0}^n C_x^n q^{n-x} p^x = 1$ , maka

$$\begin{aligned} E(X) &= n \cdot p \sum_{x=0}^m \frac{m!}{s! \cdot (m-s)!} (p^s) \cdot (1-p)^{m-s} \\ &= n \cdot p (1) \\ &= n \cdot p \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

## 7.4 Varians

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$$

dimana  $n$  = banyaknya percobaan

$p$  = peluang kejadian sukses

$q$  = peluang kejadian gagal,  $q = (1 - p)$

Bukti:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Dalam mencari  $\text{Var}(X)$ , kita harus mencari terlebih dahulu nilai ekspektasi matematika dari  $x^2$ .

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^n x^2 \cdot P(X = x) \\ &= \sum_{x=0}^n x^2 \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} (p^x) \cdot (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^n x^2 \frac{n(n-1)!}{x(x-1)! \cdot (n-x)!} (p^x) \cdot (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^n x \frac{n(n-1)!}{(x-1)! \cdot (n-x)!} (pp^{x-1}) \cdot (1-p)^{n-x} \\
&= n \cdot p \sum_{x=0}^n x \frac{(n-1)!}{(x-1)! \cdot (n-x)!} (p^{x-1}) \cdot (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Misalkan  $m = n-1$  dan  $s = x-1$ , maka persamaan diatas menjadi:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= n \cdot p \sum_{s=0}^m (s+1) \frac{m!}{s! \cdot (m-s)!} (p^s) \cdot (1-p)^{m-s} \\
&= n \cdot p \sum_{s=0}^m (s+1) C_s^m (p^s) \cdot (1-p)^{m-s},
\end{aligned}$$

menurut sifat sigma:

$$\begin{aligned}
&= n \cdot p \left[ \sum_{s=0}^m (s) \cdot C_s^m (p^s) \cdot (1-p)^{m-s} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=0}^m (1) \cdot C_s^m (p^s) \cdot (1-p)^{m-s} \right] \\
&= n \cdot p \left[ \sum_{s=0}^m (s) \cdot C_s^m (p^s) \cdot (1-p)^{m-s} + (1) \cdot (0) \right] \\
&= n \cdot p \left[ \sum_{s=0}^m (s) \cdot \frac{m(m-1)!}{s(s-1)! (m-s)!} (p \cdot p^{s-1}) \cdot (1-p)^{m-s} \right. \\
&\quad \left. + 1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n.p \left[ \sum_{s=0}^m \frac{m(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!} (p.p^{s-1}).(1-p)^{m-s} + 1 \right] \\
&= n.p \left[ \sum_{s=0}^m (mp) \frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!} (p^{s-1}).(1-p)^{m-s} + 1 \right] \\
&= n.p \left[ (mp) \sum_{s=0}^m \frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!} (p^{s-1}).(1-p)^{m-s} + 1 \right]
\end{aligned}$$

Jika kita misalkan  $m-1 = k$  dan  $s-1 = l$ , maka persamaan di atas menjadi:

$$E(X^2) = n.p \left[ (mp) \sum_{l=1}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} (p^l).(1-p)^{k-l} + 1 \right]$$

menurut syarat (2):

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= n.p [(mp) . (1) + 1] \\
&= n.p [mp + 1] \\
&= n.p [(n-1)p + 1] \\
&= n.p [(np - p) + 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sehingga } Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= n.p [(np - p) + 1] - (np)^2 \\
&= (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 \\
&= np - np^2 \\
&= np(1 - p) \\
&= n.p.q(\text{terbukti})
\end{aligned}$$

## 7.5 Menghitung Distribusi Binomial Berbantuan Microsoft Excel

Distribusi binomial merupakan salah satu jenis dari distribusi variabel random diskrit yang sering kali kita temui. Ciri khas dari distribusi ini yaitu hanya memuat dua kemungkinan, yaitu sukses atau gagal, muncul atau tidak muncul dan lain sebagainya. Selain menggunakan rumus yang sudah ada, kita juga

bisa menggunakan microsoft excel untuk mencari nilai distribusi binomial dari suatu kejadian. Formula yang digunakan yaitu BINOM.DIST yang sudah tersedia di excel. Berikut contoh soal dan penyelesaian berbantuan microsoft excel.

### Permasalahan

Probabilitas seorang pasien sembuh dari penyakit adalah 0,4. 15 orang telah diketahui terjangkit penyakit tersebut, berapakah probabilitasnya bahwa:

- Paling sedikit 10 pasien sembuh
- Ada 3 sampai 8 pasien sembuh
- Terdapat tepat 5 pasien sembuh

### Penyelesaian

Berdasarkan soal, didapat nilai  $n = 15$  &  $p = 0,4$

- Paling sedikit 10 orang yang dapat sembuh, maka dapat ditulis  $x \geq 10$

Langkah 1: Kita pilih insert function di menu home. Setelah itu pilih kategori statistical.

Langkah 2: Pilih select a function: BINOM.DIST

Langkah 3: Isi Function Argumen

Baris Number\_s diisi banyak subjek (n) yaitu 15

Trials diisi variabel acak yang diinginkan yaitu 9

Probability\_s diisi 0,4

Cumulative diisi TRUE karena yang dihitung di sini kumulatif.

Berikut penulisan rumusnya:

$=1-(\text{BINOM.DIST}(B6;B4;B5;\text{TRUE}))$

- Ada 3 sampai 8 pasien sembuh sembuh, maka dapat ditulis  $3 \leq x \leq 8$

Langkah 1: Kita pilih insert function di menu home. Setelah itu pilih kategori statistical.

Langkah 2: Pilih select a function: BINOM.DIST

Langkah 3: Isi Function Argumen

Baris Number\_s diisi banyak subjek (n) yaitu 15

Trials diisi variabel acak yang diinginkan yaitu 2 dan 8

Probability\_s diisi 0,4

Cumulative diisi TRUE karena yang dihitung di sini kumulatif.

Berikut penulisan rumusnya:

=(BINOM.DIST(D7;D4;D5;TRUE))-  
(BINOM.DIST(D6;D4;D5;TRUE))

- c. Terdapat 5 pasien sembuh, maka dapat ditulis  $x = 5$
- Langkah 1: Kita pilih insert function di menu home. Setelah itu pilih kategori statistical.
- Langkah 2: Pilih select a function: BINOM.DIST
- Langkah 3: Isi Function Argumen
- Baris Number\_s diisi banyak subjek (n) yaitu 15
- Trials diisi variabel acak yang diinginkan yaitu 5
- Probability\_s diisi 0,4
- Cumulative diisi FALSE karena yang dihitung di sini bukan kumulatif.

Berikut penulisan rumusnya:

=BINOM.DIST(F6;F4;F5;FALSE)

Hasil perhitungan berbantuan microsoft excel

| 1        |             |            |             |          |             |
|----------|-------------|------------|-------------|----------|-------------|
| a        |             | b          |             | c        |             |
| Binomial |             | Binomial   |             | Binomial |             |
| n        | 15          | n          | 15          | n        | 15          |
| p        | 0,4         | p          | 0,4         | p        | 0,4         |
| x        | 9           | x1         | 2           | x        | 5           |
|          |             | x2         | 8           |          |             |
| P(X>=10) | 0,033833303 | P(3<=X<=8) | 0,877838591 | P(X=5)   | 0,185937845 |

## 7.6 Contoh Soal

- Sebuah mata uang dilambungkan 10 kali.
  - Tentukan probabilitas munculnya sisi muka sebanyak 5 kali!, serta hitunglah  $E(X)$  dan  $Var(X)$  - nya!
  - Tentukan probabilitas munculnya sisi belakang sebanyak 2 kali!

Penyelesaian:

- Misalkan peristiwa **hasil sukses adalah munculnya sisi muka (M)**, maka  $P(\text{sukses}) = P(M) = \frac{1}{2} = p$ , dan  $P(\text{gagal}) = P(B) = \frac{1}{2} = q$ , sehingga distribusi binomialnya:

$$\begin{aligned}
 b(x;n,p) &= C_x^n \cdot p^x \cdot q^{n-x} \\
 b(5;10,\frac{1}{2}) &= C_5^{10} \cdot (\frac{1}{2})^5 \cdot (\frac{1}{2})^{10-5} \\
 &= 252 \cdot (\frac{1}{32}) \cdot (\frac{1}{32}) \\
 &= \frac{252}{1024} \\
 &= 0,246
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X) &= n \cdot p \\
 &= 10 \cdot (\frac{1}{2}) \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

$$= 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ = 2,5$$

- b. Misalkan peristiwa **hasil sukses adalah munculnya sisi belakang(belakang)**, maka  $P(\text{sukses}) = P(B) = \frac{1}{2} = p$ , dan  $P(\text{gagal}) = P(M) = \frac{1}{2} = q$ , sehingga distribusi binomialnya:

$$b(x;n,p) = C_x^n \cdot p^x \cdot q^{n-x} \\ b(2;10,\frac{1}{2}) = C_2^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2} \\ = 45 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{256}\right) \\ = \frac{45}{1024} \\ = 0.044$$

2. Dalam suatu klinik bersalin terjadi 10 kelahiran tiap minggunya. Tentukan probabilitas lahirnya 3 orang anak laki-laki dalam seminggu!

Penyelesaian:

Misal **peristiwa sukses adalah kelahiran laki-laki**, maka  $P(\text{sukses}) = \frac{1}{2} = p$ , dan  $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , sehingga probabilitas yang dimaksud adalah:

$$b(x;n,p) = C_x^n \cdot p^x \cdot q^{n-x} \\ b(3;10,\frac{1}{2}) = C_3^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} \\ = 120 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{128}\right) \\ = \frac{120}{1024} = 0,117$$

## DAFTAR PUSTAKA

- Boediono, B. and Koster, W. 2014. *Teori dan Aplikasi Statistika dan Probabilitas*. 5th edn. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- Diana. 2017. 'Distribusi Binominal sebagai Estimasi Probabilitas Kesuksesan pada Uji Coba Kualitas Layanan Sistem Informasi', *Jurnal Ilmiah MATRIK*, 19(3), pp. 227–236. Available at: <http://eprints.binadarma.ac.id/id/eprint/11643>.



# BAB 8

## DISTRIBUSI GEOMETRIK

*Oleh I Made Suarsana*

### 8.1 Pendahuluan

Pada bagian sebelumnya kita telah belajar tentang beberapa distribusi diskrit khusus seperti distribusi uniform diskrit, distribusi bernoulli, dan distribusi binomial. Pada bagian ini pembahasan difokuskan pada distribusi geometrik. Distribusi geometrik masih berkaitan erat dengan percobaan Bernoulli distribusi binomial. Pada distribusi bernoulli menggambarkan percobaan yang memiliki dua kemungkinan hasil yaitu sukses atau gagal dengan peluang sukses yang tetap, pada distribusi binomial negatif menggambarkan banyak perulangan sukses ke- $k$  muncul pada percobaan ke- $x$  sementara pada distribusi geometrik menggambarkan jumlah percobaan yang diperlukan sampai diperoleh sukses yang pertama kali. Dengan demikian distribusi geometrik sebenarnya kasus khusus dari distribusi binomial negatif yaitu ketika nilai parameter  $k = 1$ . Pada dasarnya mempelajari jenis-jenis distribusi peluang bertujuan agar dapat merumuskan suatu permasalahan menggunakan model peluang sehingga mampu menyelesaikan permasalahan tersebut. Pada bagian berikutnya akan dibahas tentang (1) distribusi geometrik meliputi fungsi distribusi peluangnya serta rata-rata dan variansinya, dan (2) contoh penerapan distribusi geometrik pada berbagai kasus.

## 8.2 Distribusi Geometrik

Distribusi geometrik adalah salah satu dari beberapa distribusi probabilitas diskrit yang penting dalam statistik. Distribusi ini menggambarkan peluang terjadinya peristiwa sukses yang tidak pasti dalam percobaan berulang yang independen. Sejarah penemuan distribusi geometrik dimulai pada abad ke-18. Pada tahun 1733, seorang matematikawan Swiss bernama Daniel Bernoulli menerbitkan sebuah makalah yang berjudul "*Ars Conjectandi*" di mana ia membahas teori probabilitas. Dalam makalah ini, Bernoulli memperkenalkan distribusi geometrik dan mengajukan beberapa contoh penerapannya. Namun, kemudian pada tahun 1760, matematikawan Prancis Pierre-Simon Laplace lebih terkenal karena memberikan pengertian yang lebih sistematis tentang distribusi geometrik. Ia juga membahas penerapannya pada berbagai bidang seperti statistik, astronomi, dan fisika. Selain Bernoulli dan Laplace, matematikawan Inggris, Thomas Simpson, juga mengembangkan teori tentang distribusi geometrik pada tahun 1757. Ia menulis sebuah buku yang berjudul "*The Doctrine and Application of Fluxions*", di mana ia memberikan penjelasan tentang distribusi geometrik dan metode untuk menghitung probabilitasnya. Dari penemuan-penemuan ini, distribusi geometrik menjadi salah satu konsep probabilitas yang paling penting dan digunakan dalam berbagai aplikasi di bidang ilmu sosial, ekonomi, dan sains.

Distribusi geometrik adalah banyaknya ulangan yang diperlukan untuk mencapai sukses pertama kali. Distribusi geometrik berkaitan erat dengan percobaan Bernoulli sehingga sering dikatakan sebagai percobaan Bernoulli yang dilakukan berulang kali dan berhenti jika diperoleh hasil sukses.

### Definisi 8.1

Misalkan dilakukan percobaan dengan peluang kejadian sukses dinotasikan dengan  $p$  dan peluang kejadian gagal dinotasikan dengan  $q$  maka suatu variabel random diskrit  $X$  dikatakan berdistribusi geometrik jika fungsi distribusi peluangnya berbentuk:

$$g(x; p) = pq^{x-1}$$

di mana  $x = 1, 2, 3, \dots$ , dan  $q = 1 - p$

Variabel random yang berdistribusi geometrik disimbolkan dengan:

$$X \sim GEO(p)$$

di mana  $X$  = banyaknya percobaan dilakukan berulang kali dan berhenti jika diperoleh hasil sukses.

Sebagai kasus khusus dari distribusi binomial,

$$g(x; p) = b(x; 1; p)$$

Atau

$X \sim GEO(p)$  sama saja dengan  $X \sim Bin(1, p)$

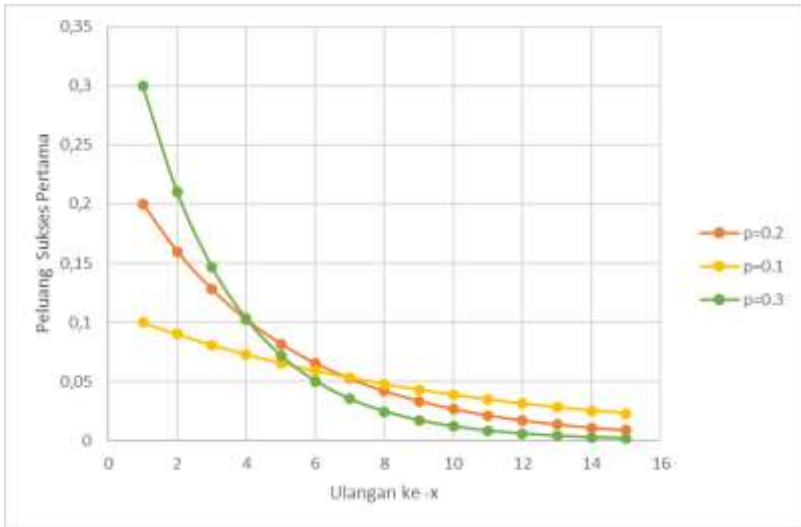
Sebagai ilustrasi distribusi geometrik dapat dilihat tabel berikut.

| Ulangan ke- | Hasil Percobaan | Peluang Sukses Pertama |
|-------------|-----------------|------------------------|
| 1           | S               | $p$                    |
| 2           | GS              | $pq$                   |
| 3           | GGs             | $pq^2$                 |
| 4           | GGGS            | $pq^3$                 |
| 5           | GGGGS           | $pq^4$                 |
| 6           | GGGGGS          | $pq^5$                 |
| $\vdots$    | $\vdots$        | $\vdots$               |
| $x$         | $GG \cdots GS$  | $pq^{x-1}$             |

Sebagaimana distribusi lainnya selanjutnya kita bahas tentang sifat distribusi geometrik berkaitan dengan rata-rata dan variansnya.

Tabel distribusi geometrik dengan nilai ulangan ke- $x$  pada beberapa nilai peluang sukses  $p$  disajikan sebagai berikut.

| $x$ | $p = 0.1$ | $p = 0.2$ | $p = 0.3$ | $p = 0.4$ | $p = 0.5$ |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1   | 0,1       | 0,2       | 0,3       | 0,4       | 0,5       |
| 2   | 0,09      | 0,16      | 0,21      | 0,24      | 0,25      |
| 3   | 0,081     | 0,128     | 0,147     | 0,144     | 0,125     |
| 4   | 0,0729    | 0,1024    | 0,1029    | 0,0864    | 0,0625    |
| 5   | 0,06561   | 0,08192   | 0,07203   | 0,05184   | 0,03125   |
| 6   | 0,059049  | 0,065536  | 0,050421  | 0,031104  | 0,015625  |
| 7   | 0,053144  | 0,052429  | 0,035295  | 0,018662  | 0,007813  |
| 8   | 0,04783   | 0,041943  | 0,024706  | 0,011197  | 0,003906  |
| 9   | 0,043047  | 0,033554  | 0,017294  | 0,006718  | 0,001953  |
| 10  | 0,038742  | 0,026844  | 0,012106  | 0,004031  | 0,000977  |
| 11  | 0,034868  | 0,021475  | 0,008474  | 0,002419  | 0,000488  |
| 12  | 0,031381  | 0,01718   | 0,005932  | 0,001451  | 0,000244  |
| 13  | 0,028243  | 0,013744  | 0,004152  | 0,000871  | 0,000122  |
| 14  | 0,025419  | 0,010995  | 0,002907  | 0,000522  | 6,1E-05   |
| 15  | 0,022877  | 0,008796  | 0,002035  | 0,000313  | 3,05E-05  |
| 16  | 0,020589  | 0,007037  | 0,001424  | 0,000188  | 1,53E-05  |
| 17  | 0,01853   | 0,005629  | 0,000997  | 0,000113  | 7,63E-06  |
| 18  | 0,016677  | 0,004504  | 0,000698  | 6,77E-05  | 3,81E-06  |
| 19  | 0,015009  | 0,003603  | 0,000489  | 4,06E-05  | 1,91E-06  |
| 20  | 0,013509  | 0,002882  | 0,000342  | 2,44E-05  | 9,54E-07  |



## Teorema 8.2

Jika  $X$  adalah variabel random yang brdistribusi geometrik maka berlaku

$$(i) \quad M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

$$(ii) \quad E[X] = \frac{1}{p}$$

$$(iii) \quad Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

## Bukti

Diketahui bahwa  $X \sim GEO(p)$  maka

$$g(x; p) = pq^{x-1}$$

untuk  $x = 1, 2, 3, \dots, q = 1 - p$

$$(i) \quad \text{Akan ditunjukkan } M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t!}$$

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tx}) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} g(x; p) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} p q^{x-1} \\
&= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^x \\
&= \frac{p}{q} [e^t q + e^{2t} q^2 + e^{3t} q^3 + \dots] \text{ (deret geometri)} \\
&= \frac{p}{q} \frac{e^t q}{(1 - e^t q)} \\
&= \frac{p e^t}{1 - q e^t}
\end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa  $M_X(t) = \frac{p e^t}{1 - q e^t}$

(ii) Akan ditunjukkan  $E[X] = \frac{1}{p}$

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{dM_X(t)}{dt} \text{ di } t = 0 \\
\frac{dM_X(t)}{dt} &= \frac{p e^t (1 - q e^t) + p e^t q e^t}{(1 - q e^t)^2} \\
&= \frac{p e^t}{(1 - q e^t)^2} \\
\frac{dM_X(0)}{dt} &= \frac{p e^0}{(1 - q e^0)^2} \\
&= \frac{p}{p^2} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

(iii) Akan ditunjukkan  $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \frac{d^2 M_X(0)}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dM_X(t)}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{pe^t}{(1 - qe^t)^2} \right) \\ &= \frac{pe^t(1 - qe^t)^2 + 2pqe^t(1 - qe^t)}{(1 - qe^t)^4} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 M_X(0)}{dt^2} = \frac{pe^0(1 - qe^0)^2 + pqe^0(1 - qe^0)}{(1 - qe^0)^4}$$

$$= \frac{p^3 + 2p^2q}{p^4}$$

$$= \frac{p + 2q}{p^2}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= \frac{p + q}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{p + 2 - 2p - 1}{p^2}$$

$$= \frac{1 - p}{p^2}$$

Dengan demikian terbukti bahwa

$$Var[X] = \frac{1 - p}{p^2}$$

### 8.3 Aplikasi Distribusi Geometrik

Pada bagian ini akan diberikan beberapa contoh peristiwa atau percobaan yang berkaitan dengan distribusi geomerik.

a) Percobaan Melambungkan Dadu yang Seimbang

Dilakukan percobaan pelemparan dadu seimbang atau homogen sehingga setiap mata dadu memiliki peluang yang sama untuk muncul maka peluang diperoleh diperoleh mata dadu 6 pada setiap pelemparan dapat ditentukan dengan rumus:

$$g(x;p) = pq^{x-1}$$

Dengan  $p = \frac{1}{6}$  dan  $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$  sehingga diperoleh

$$g\left(x;\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$$

Hasil perhitungan pada pelemparan ke 1, 2, sampai ke 5 ditampilkan pada tabel.

| Pelemparan ke- ( $x$ )                                                                       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Peluang muncul angka 6 pertama kali pada pelemparan ke- $x$<br>$g\left(x;\frac{1}{6}\right)$ | 0,167 | 0,139 | 0,116 | 0,096 | 0,080 |

Perhatikan nilai peluang muncul angka 6

- b) Percobaan Melambungkan Mata Uang yang Tak Seimbang  
 Pada percobaan pelemparan mata uang tak seimbang, peluang muncul muka “M” adalah  $\frac{2}{3}$ . Mata uang dilemparkan berulang kali dan berhenti jika didapatkan “M” maka peluang diperoleh “M” pada ulangan ke- $x$  adalah

$$g\left(x; \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

| Pelemparan ke- $x$                                                                             | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Peluang muncul angka “M” pertama kali pada pelemparan ke- $x$ , $g\left(x; \frac{2}{3}\right)$ | 0,667 | 0,222 | 0,074 | 0,025 | 0,008 |

- c) Percobaan Menelpon Pusat Layanan

Pada waktu-waktu sibuk, pusat layanan pelanggan via telepon sangat mendekati kapasitasnya sehingga para penelpon mengalami kesulitan terhubung ke customer service. Misalkan bahwa peluang pada waktu sibuk suatu panggilan sukses terhubung ke customer service adalah  $p = 0.05$ . Maka tentukan peluang panggilan sukses pertama kali terhubung pada percobaan ke 5!

**Jawab**

Dari persoalan di atas diketahui bahwa  $p = 0.05$  dan  $x = 5$  sehingga nilai peluang sukses pada panggilan ke-5 dapat ditentukan:

$$g(x; p) = g(5; 0.05) = 0.05 \times 0.95^4 = 0.041$$

Jadi peluang panggilan sukses pertama kali terhubung pada percobaan ke 5 adalah 0.041

d) Percobaan Pemeriksaan Produk Cacat

Diyakini, 1 dari setiap 100 lampu yang diproduksi mesin suatu pabrik adalah produk gagal. Tentukanlah peluang bahwa barang ke-5 yang diperiksa merupakan produk gagal!

**Jawab**

Diketahui

$$p = \frac{1}{100} = 0,01$$
$$x = 5$$

Dengan menggunakan distribusi geometrik diperoleh peluang bahwa barang ke-4 yang diperiksa merupakan produk gagal adalah

$$g(5,0.01) = (0.01)(0.99)^4 = 0.0096$$

e) Percobaan Pemasaran Produk

Perusahaan handphone merek baru menyadari bahwa handphone merek Sams\* menguasai daerah pemasaran yang dituju sebesar 55%. Perusahaan ingin melakukan penelitian lebih lanjut dengan mencari responden yang memang menggunakan handphone merek Sams\*. Oleh karenanya diambil sampel acak para pengguna handphone di daerah tersebut. Tentukanlah berapa peluang bahwa responden pertama yang diambil secara acak merupakan pengguna HP merek Sams\*, tentukan pula untuk responden kedua, ketiga, hingga responden ke 5.

f) Percobaan Seleksi Karyawan baru

Pada seleksi karyawan baru suatu perusahaan terdapat 3 dari 10 pelamar sarjana komputer sudah mempunyai keahlian tingkat pemrograman tingkat lanjut. Para pelamar diwawancarai secara intensif dan dipilih secara acak.

a. Hitunglah persentase yang diterima dari jumlah pelamar yang ada?

- b. Berapa peluang pertama kali pelamar diterima pada 5 interview yang dilakukan?
- c. Berapakah rata-rata pelamar yang membutuhkan interview guna mendapatkan satu calon yang menguasai skill pemrograman lanjut?

Jawab

- a. Persentase yang diterima adalah

$$p = \frac{3}{10} \times 100\% = 30\%$$

- b. Peluang pertama kali pelamar diterima pada 5 wawancara yang dilakukan adalah

$$g(5, 0.3) = 0.3 (0.7)^{5-1} = 0.072$$

- c. Rata-rata banyak wawancara yang dibutuhkan guna mendapatkan satu calon yang menguasai skill pemrograman lanjut adalah

$$E[x] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = 3,33$$

## DAFTAR PUSTAKA

- Anggoro, B.S., 2015. Sejarah Teori Peluang dan Statistika. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 6(1), pp.13-24.
- Dekking, F.M., Kraaikamp, C., Lopuhaä, H.P., Meester, L.E., Dekking, F.M., Kraaikamp, C., Lopuhaä, H.P. and Meester, L.E., 2005. Basic statistical models. *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How*, pp.245-268.
- Nugroho, S., 2008. *Dasar Dasar Metode Statistika*. Grasindo.
- Setyawan, F., 2012. *Sejarah Teori Peluang dan Genetika Peluang*. PT Balai Pustaka (Persero).
- Sudjana, N., 2005. Metode Statistika Edisi keenam. *Bandung: PT. Tarsito*.

# BAB 9

## DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

*Oleh Eva Nur Ramadhani*

### 9.1 Definisi

Distribusi hipergeometrik ini seperti distribusi binomial selain untuk pengambilan sampel tanpa pengembalian. Saat dilakukan pengambilan sampel tanpa pengembalian, probabilitas akan berubah setiap percobaan berikutnya. Sebaliknya, distribusi binomial mengasumsikan probabilitas tetap konstan selama dilakukannya uji coba.

Distribusi hipergeometrik adalah distribusi probabilitas diskrit yang menghitung kemungkinan suatu peristiwa terjadi  $k$  kali dalam sejumlah  $n$  percobaan ketika sampel diambil dari populasi kecil tanpa pengembalian.

Secara umum, kita tarik pada peluang terambilnya  $x$  keberhasilan dari  $k$  kejadian berhasil dari suatu populasi yang berukuran  $N$  dan sampel yang memiliki ukuran  $n$ . Percobaan seperti di atas dikenal dengan percobaan hipergeometrik. Suatu percobaan dikategorikan sebagai percobaan hipergeometrik apabila memenuhi kedua sifat, yaitu:

1. Suatu sampel acak dengan ukuran  $n$  diambil dari populasi yang memiliki ukuran  $N$ .
2.  $k$  dari  $N$  diklasifikasikan sebagai kejadian berhasil, kemudian  $N - k$  diklasifikasikan sebagai kejadian tidak berhasil/gagal.

Peubah acak hipergeometrik merupakan jumlah banyaknya kejadian berhasil  $X$  yang terjadi dalam suatu percobaan

hipergeometrik. Dengan demikian, distribusi probabilitas bagi peubah acak hipergeometrik disebut sebagai distribusi hipergometrik dan nilai-nilainya dapat dinotasikan dengan  $h(x; N, n, k)$  karena nilai-nilai tersebut bergantung pada banyaknya kejadian berhasil  $k$  di antara  $n$  sample yang diambil dari suatu populasi dengan ukuran  $N$ .

Misalnya, ketika dilakukan pengambilan kartu As dari setumpuk kartu bridge, kemungkinan untuk mendapatkan kartu As lain berkurang karena jumlah kartu As yang ada di tumpukan kartu bridge juga berkurang.

Distribusi hipergeometrik dapat digunakan untuk menentukan peluang pada beberapa percobaan di bawah ini:

1. Terambilnya 2 permen merah saat diambil 5 permen secara acak dari toples yang berisi 5 permen merah dan 10 permen putih.
2. Terpilihnya 8 juri wanita saat dipilih 13 juri secara acak dari kumpulan 50 juri yang terbagi rata antara pria dan wanita.

Salah satu penerapan yang paling umum dari distribusi hipergeometrik adalah kontrol kualitas industri, seperti misalnya menghitung probabilitas komponen cacat yang diproduksi oleh suatu pabrik. Misalkan sebuah pabrik menghasilkan 1% suku cadang cacat yang dikemas. Distribusi hipergeometrik dapat digunakan untuk memodelkan terjadinya bagian yang rusak untuk tujuan kontrol kualitas, selama barang yang diambil sampelnya tidak diganti dari kotak.

Dalam bidang elektrokimia, distribusi hipergeometrik dapat memprediksi efek kerusakan permukaan pada elektroda untuk setiap elektroda dengan dua reaksi yang berlawanan. Distribusi hipergeometrik memberikan informasi yang berharga tentang

efektivitas antarmuka elektroda-elektrolit dan dapat meningkatkan interpretasi pengukuran sifat permukaan. (Fahidy, 2012)

Seiring bertambahnya ukuran populasi, distribusi hipergeometrik lebih mendekati distribusi binomial. Distribusi ini merupakan contoh dari *Probability Mass Function* (PMF) karena menghitung kemungkinan untuk variabel acak diskrit.

Distribusi peluang variabel acak hipergeometrik  $X$ , merupakan banyaknya kejadian berhasil dalam sampel acak dengan ukuran  $n$  yang diambil dari  $N$  total dimana  $k$  adalah banyak kejadian berhasil dan  $N - k$  adalah banyak kejadian gagal, ialah

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \text{ untuk } x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Dimana

$n$  : ukuran sampel

$x$  : banyak kejadian berhasil yang diamati

$k$  : banyak kejadian berhasil dalam populasi

$N$  : ukuran populasi (Walpole, 1968)

Untuk memperjelas penggunaan rumus distribusi hipergeometrik, simak contoh di bawah ini.

### **Contoh 9.1**

Sebuah peneliti yang terdiri atas 5 orang diambil secara acak dari 3 wanita dan 5 laki-laki. Tentukan distribusi peluang bagi banyaknya wanita dalam susunan tim peneliti tersebut!

Penyelesaian:

Misalnya  $X$  merupakan banyaknya wanita yang ada dalam susunan tim peneliti tersebut. Dari persoalan di atas diketahui

$N = 8$  karena terdapat 8 orang tim peneliti

$n = 5$  karena akan diambil 5 orang tim peneliti

$k = 3$  karena terdapat 3 orang tim peneliti perempuan

$X = 0, 1, 2, 3$

Kedua sifat percobaan hipergeometrik dipenuhi maka

$$P(X = 0) \rightarrow h(0; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{0} \binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56}$$

$$P(X = 1) \rightarrow h(1; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{4}}{\binom{8}{5}} = \frac{15}{56}$$

$$P(X = 2) \rightarrow h(2; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{30}{56}$$

$$P(X = 3) \rightarrow h(3; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{3} \binom{5}{2}}{\binom{8}{5}} = \frac{10}{56}$$

Dari perhitungan tersebut, distribusi peluang  $X$  dapat digeneralisasikan menjadi

$$h(x; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{x} \binom{5}{5-x}}{\binom{8}{5}} \text{ untuk } x = 0, 1, 2, 3$$

Distribusi hipergeometrik bagi  $X$  dapat dinyatakan dalam bentuk tabel seperti tabel 9.1.

**Tabel 9.1.** Distribusi hipergeometrik contoh 9.1

| $x$        | 0              | 1               | 2               | 3               |
|------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{15}{56}$ | $\frac{30}{56}$ | $\frac{10}{56}$ |

## 9.2 Probabilitas Kumulatif Hipergeometrik

Probabilitas kumulatif hipergeometrik mengacu pada probabilitas variabel acak hipergeometrik yang lebih besar dari atau sama dengan batas bawah tertentu dan yang kurang dari atau sama dengan batas atas tertentu.

Misalnya, secara acak dipilih 5 kartu dari setumpuk kartu bridge. Untuk mengetahui probabilitas kumulatif hipergeometrik mendapatkan 2 kartu berbentuk hati atau kurang, perlu menghitung probabilitas mendapatkan 0 kartu berbentuk hati kemudian dijumlahkan dengan probabilitas mendapatkan 1 kartu berbentuk hati dan probabilitas mendapatkan 2 kartu berbentuk hati. Perhatikan contoh di bawah ini.

### Contoh 9.2

Misalkan akan diambil 5 kartu secara acak dari setumpuk kartu bridge. Berapakah peluang kumulatif mendapatkan 2 kartu berbentuk hati atau kurang?

Penyelesaian:

Ini merupakan percobaan hipergeometrik dimana diketahui

$N = 52$  karena di dalam satu set kartu bridge terdapat 52 kartu

$k = 13$  karena di dalam satu set kartu bridge terdapat 13 kartu berbentuk hati

$n = 5$  karena akan diambil 5 kartu secara acak

$x = 0$  sampai 2 karena akan dicari kemungkinan mendapatkan 0, 1, 2 kartu berbentuk hati

Masukkan nilai-nilai yang telah diketahui ke dalam rumus perhitungan distribusi hipergeometrik.

$$h(0; 52, 5, 13) = \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}} = 0.2215$$

$$h(1; 52, 5, 13) = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{4}}{\binom{52}{5}} = 0.4114$$

$$h(2; 52, 5, 13) = \frac{\binom{13}{2} \binom{39}{3}}{\binom{52}{5}} = 0.2743$$

Setelah mendapatkan ketiga hasilnya, masukkan ke dalam formula probabilitas kumulatif hipergeometrik

$$\begin{aligned} h(x \leq x; N, n, k) &= h(x \leq 2; 52, 5, 13) \\ &= h(x = 0; 52, 5, 13) + h(x = 1; 52, 5, 13) + \\ &\quad h(x = 2; 52, 5, 13) \\ &= 0.2215 + 0.4114 + 0.2743 \\ &= 0.9072 \end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa probabilitas kumulatif hipergeometrik dari terambilnya 2 kartu berbentuk hati atau kurang dari percobaan di atas adalah 0.9072.

### 9.3 Rata-rata dan Varians Hipergeometrik

Untuk menentukan rata-rata dari distribusi hipergeometrik dapat menggunakan rumus

$$\mu = \frac{n \cdot k}{N}$$

Dimana

$n$  : ukuran sampel

$k$  : banyak kejadian berhasil dalam populasi

$N$  : ukuran populasi

Kemudian untuk menentukan varians dari distribusi hipergeometrik dapat menggunakan rumus

$$\sigma^2 = \frac{N - n}{N - 1} \cdot n \cdot \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

Dimana

$n$  : ukuran sampel

$k$  : banyak kejadian berhasil dalam populasia

$N$  : ukuran populasi

Untuk memperjelas penggunaan rumus rata-rata dan varians distribusi hipergeometrik, simak contoh di bawah ini.

### Contoh 9.3

Bila 5 kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu bridge, tentukan

- Peluang terambilnya 3 kartu berbentuk hati
- Selang  $\mu \pm 2\sigma$  dan tafsirkan

Penyelesaian:

- Dengan menggunakan distribusi hipergeometrik untuk

$$n = 5$$

$$N = 52$$

$$k = 13$$

$$x = 3$$

maka peluang memperoleh 3 kartu berbentuk hati adalah

$$h(3; 52; 5; 13) = \frac{\binom{13}{3} \binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} = 0.0815$$

Jadi peluang terambilnya 3 kartu berbentuk hati dalam 5 kartu yang diambil secara acak adalah 0.0815.

- Untuk menentukan selang  $\mu \pm 2\sigma$  dan menafsirkannya, terlebih dahulu harus dicari rata-rata dan variansnya.

$$\mu = \frac{(5)(13)}{52} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{52-5}{51}\right)(5) \left(\frac{13}{52}\right) \left(1 - \frac{13}{52}\right) = 0.8640$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.8640} = 0.93$$

Maka selang  $\mu + 2\sigma$  adalah  $1.25 \pm (2)(0.93)$  atau dapat dikatakan dari  $-0.61$  sampai  $3.11$ . Hal tersebut dapat ditafsirkan sebagai berikut

"Banyaknya kartu dengan berbentuk hati yang terambil bila 5 kartu diambil secara acak tanpa pengembalian akan terletak antara  $-0.61$  sampai  $3.11$  dengan peluang

sekurang-kurangnya  $\frac{3}{4}$ . Jadi bila dilakukan pengambilan 5 kartu ini secara berulang maka  $\frac{3}{4}$  bagiannya akan memuat kurang dari 4 kartu berbentuk hati.

Bila ukuran  $n$  relatif kecil jika dibandingkan dengan  $N$ , maka nilai peluang pada setiap pengambilan akan berubah menjadi sangat kecil. Sehingga secara praktis dapat disimpulkan bahwa percobaan tersebut serupa dengan percobaan binomial. Apabila hal tersebut terjadi, maka rata-rata dan varians dapat ditentukan menggunakan rumus di bawah ini

$$\mu = \frac{n \cdot k}{N}$$

$$\sigma^2 = n \cdot \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

Dimana

$n$  : ukuran sampel

$k$  : banyak kejadian berhasil dalam populasi

$N$  : ukuran populasi

## 9.4 Distribusi Hipergeometrik Multivariat

Distribusi hipergeometrik dapat diperluas atau dapat melibatkan lebih dari satu variabel acak. Jika distribusi hipergeometrik melibatkan lebih dari satu variabel acak, maka disebut sebagai distribusi hipergeometrik multivariat atau peubah ganda.

Jika terdapat  $N$  objek dapat dipartisi dalam  $k$  sel  $A_1, A_2, \dots, A_k$  yang berturut-turut memuat  $a_1, a_2, \dots, a_k$  elemen, maka distribusi peluang dari variabel acak diskrit  $X_1, X_2, \dots, X_k$  yang berturut-turut menyatakan banyaknya elemen yang dipilih dari  $A_1, A_2, \dots, A_k$  dalam suatu sampel acak yang berukuran  $n$  adalah

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k; a_1, a_2, \dots, a_k, N, n) = \frac{\binom{a_1}{x_1} \binom{a_2}{x_2} \dots \binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

Dengan  $\sum_{i=1}^k x_i = n$  dan  $\sum_{i=1}^k a_i = N$ . (Walpole, 2012)

Untuk memperjelas penggunaan rumus distribusi hipergeometrik multivariat, simak contoh di bawah ini.

### Contoh 9.4

Seseorang hendak menghias rumahnya dengan menanam beberapa jenis tanaman. Dari sebuah keranjang yang berisi 3 mawar, 4 bougenville, dan 3 hyacinth ia mengambil 5 secara acak untuk ditanam di halaman depan, sedangkan 5 sisanya ditanam di halaman belakang. Tentukan peluang ketika musim berbunga tiba, terdapat 1 mawar, 2 bougenville dan 2 hyacinth yang mekar di halaman depan rumah?

Penyelesaian:

Dengan menggunakan sebaran hipergeometrik dengan  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = 3$ ,  $N = 10$  dan  $n = 5$ , peluang terdapat 1 mawar, 2 bougenville dan 2 hyacinth yang mekar di halaman depan rumah saat musim berbunga tiba adalah

$$f(1,2,3; 3, 4, 3, 10, 5) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{3}{14}.$$

## DAFTAR PUSTAKA

- Fahidy, T. 2012. *An application of hypergeometric distribution theory to competitive processes at deteriorating electrode surfaces*. In *Electrochemistry Communications*, 282-284.
- Walpole, Ronald E. 1968. *Introduction to Statistic (3<sup>rd</sup> Edition)*. New York. Mc Millan.
- Walpole, R. E, Myers, R. H & Ye, Keying. 2012. *Probability & Statistic for Engineers & Scientist (9th Edition)*. New York. Prentice Hall.

# BAB 10

## DISTRIBUSI POISSON

*Oleh Soleman Saidi*

### 10.1 Pendahuluan

Distribusi Poisson pertama kali ditemukan oleh matematikawan Prancis Simeon Denis Poisson (1781-1840). Distribusi Poisson sering digunakan dalam riset operasi untuk menentukan probabilitas bahwa suatu peristiwa akan jarang terjadi selama periode waktu yang singkat. Dalam kedokteran, kita sering menjumpai kejadian dengan variabel acak yang langka. Misalnya, jumlah kunjungan pasien gawat darurat dalam waktu 3 jam atau kasus yang jarang terjadi, meskipun sampelnya besar. Dalam hal ini, menggunakan distribusi binomial kurang tepat. Distribusi Poisson adalah distribusi peluang diskrit untuk terjadinya beberapa kejadian dalam selang waktu tertentu, dimana variabel acak  $x$  adalah banyaknya kejadian dalam selang waktu, dapat berupa waktu, jarak, luas, volume, bilangan, dan seterusnya. Distribusi Poisson kerap kali digunakan untuk menentukan probabilitas suatu peristiwa yang sangat tidak mungkin terjadi dalam kondisi tertentu.

### 10.2 Distribusi Poisson dan Proses Poisson

Eksperimen Poisson merupakan eksperimen yang menghasilkan variabel acak  $X$  dan memiliki nilai numerik, yakni jumlah hasil dalam periode waktu tertentu atau dalam siklus tertentu. Interval waktu dapat berupa panjang, menit, jam, hari, minggu, bulan atau bahkan tahun. Dengan demikian percobaan Poisson dapat digunakan untuk memperoleh pengamatan untuk

variabel acak  $X$  yang mewakili jumlah hubungan, misalnya. B. jumlah panggilan per jam ke kantor, jumlah hari sekolah tutup karena banjir atau gempa bumi, pertandingan sepak bola terpaksa ditunda karena hujan di musim hujan. Area yang dimaksud bisa berupa garis, area, objek atau mungkin potongan objek. Dalam kasus tersebut,  $X$  dapat mewakili jumlah bakteri dalam wadah atau jumlah salah ketik pada halaman (Walpole, 1995). Eksperimen Poisson dinamai menurut proses Poisson dan memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

1. Jumlah hasil yang terjadi dalam interval waktu atau wilayah tertentu, tidak akan terpengaruh pada interval waktu wilayah lain. Dalam konteks ini, proses Poisson disebut sebagai tanpa memori
2. Probabilitas bahwa suatu hasil (secara individual) terjadi pada selang waktu yang sangat singkat atau selang waktu terkecil sebanding dengan besarnya selang, atau tidak bergantung pada jumlah hasil yang terjadi di luar jumlah hasil. selang waktu atau jangkauan
3. Jika probabilitas terjadinya lebih dari satu hasil dalam waktu singkat maka dapat diabaikan

Walpole (1989) mengatakan bahwa banyaknya hasil  $X$  dalam percobaan Poisson disebut variabel acak Poisson dan distribusi probabilitasnya disebut distribusi Poisson. Jumlah hasil rata-rata dihitung menggunakan rumus  $\mu = \lambda t$ , di mana  $t$  mewakili "waktu" atau "area" yang diperhatikan. Karena probabilitas bergantung pada  $\lambda$ , laju terjadinya hasil dilambangkan dengan simbol  $p(x; \lambda t)$ . Penurunan rumus  $p(x; \lambda t)$  didasarkan pada tiga sifat proses Poisson yang disebutkan di atas dan akan melampaui cakupan buku ini. Berikut ini diperlukan saat menghitung probabilitas Poisson.

Distribusi probabilitas peubah  $X$ , yang menyatakan jumlah keberhasilan dalam rentang atau interval tertentu, dilambangkan dengan  $t$ , diberikan oleh

$$P(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots,$$

$\lambda t$  adalah banyaknya rata-rata sukses yang terjadi per satuan waktu atau daerah tersebut dan  $e = 2,71828\dots$

Tabel Poisson (lampiran) berisi jumlah probabilitas Poisson  $P(r; \lambda t) = \sum_{x=0}^r p(x; \lambda t)$  untuk beberapa nilai tertentu  $\lambda t$  yaitu 0, 1 sampai 18. Dua contoh berikut (contoh 1 dan contoh 2) mengilustrasikan penggunaan tabel.

### Contoh 1

Jumlah rata-rata partikel radioaktif yang melewati penghitung dalam 1 milidetik dalam percobaan laboratorium adalah 4. Berapa peluang bahwa 6 partikel akan melewati penghitung dalam milidetik tertentu?

*Jawab*

Dengan menggunakan distribusi Poisson, bila  $x=6$  dan  $\lambda t = 4$  (tabel pada lampiran) diperoleh

$$\begin{aligned} P(6; 4) &= \frac{e^{-4} (4)^6}{6!} \\ P(r; \lambda t) &= \sum_{x=0}^6 p(x; 4) - \sum_{x=0}^5 p(x; 4) \\ &= 0,8893 - 0,7851 = 0,1042 \end{aligned}$$

## Contoh 2

Banyaknya kapal tangker minyak yang tiba tiap hari di suatu pelabuhan adalah 10. Pelabuhan dapat menerima maksimal 15 kapal tanker per hari.

Berapa peluang kapal tanker harus kembali pada hari tertentu karena pelabuhan tidak dapat melayani mereka?

*Jawab*

Misalkan  $X$  menyetakan banyaknya tangker yang tiba tiap hari. Dengan menggunakan tabel pada lampiran 1, diperoleh

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= 1 - P(X \leq 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x; 4) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x; 10) \\ &= 1 - 0,19513 = 0,0487 \end{aligned}$$

Distribusi Poisson juga biasa digunakan dalam kendali mutu dan penjaminan mutu. Selain itu, beberapa distribusi kontinu penting yang digunakan dalam teori reliabilitas dan teori antrian bergantung pada proses Poisson ( Ronald and Myers, 1989).

**Teorema:** rataan dan Variansi distribusi Poisson  $P(x; \lambda t)$  keduanya sama dengan  $\lambda t$ .

**Bukti**

Untuk menunjukkan rataan sama dengan  $\lambda t$ , tulislah  $\mu = \lambda t$ . maka

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

$$= \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^x}{(x-1)!}$$

Sekarang misalkan  $y = x - 1$  sehingga diperoleh

$$E(X) = \mu \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \mu$$

karena

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \sum_{y=0}^{\infty} p(y; \mu = 1)$$

Variansi distribusi Poisson didapat dengan mula-mula mencari

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \\ &= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \\ &= \mu^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^{x-2}}{(x-2)!} \end{aligned}$$

Masukkan  $y = x - 2$ , maka diperoleh

$$E[X(X-1)] = \mu^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \mu^2$$

Jadi

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[X(X-1)] + \mu - \mu^2 \\ &= \mu^2 + \mu - \mu^2 \\ &= \mu \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

### Contoh 3

Satu toko online menemukan bahwa toko tersebut menerima keluhan dari 50 pelanggan ketika mengirimkan barang ke 10.000 pelanggan. Jika suatu saat toko mengirimkan produk ke pelanggannya, maka akan mencapai 1000 produk. Hitung probabilitas bahwa bisnis akan menerima keluhan

- 7 pelanggan,
- 5 pelanggan,

Jawab

Diketahui

$$\begin{aligned}P &= 50 / 10.000 = 0,005 \\n &= 1000 \\&= np \\&= 1000 \times 0,005 \\&= 5\end{aligned}$$

maka:

a.

$$\begin{aligned}P(X = 7) \\P(X = 7) &= 526,4021 / 5040 \\P(X = 7) &= 0,1044\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}P(X = 7) &= 21,0561 / 120 \\P(X = 7) &= 0,1755\end{aligned}$$

### Contoh 4

Terdapat 15 mesin jahit yang digunakan oleh Pabrik garmen. Peluang sebuah mesin jahit rusak dan perlu diperbaiki adalah 0,01.

Jika ada 2 mesin yang mengalami malfungsi dan perlu diperbaiki, tentukan peluangnya

$$\begin{aligned}\mu &= n \cdot p = 15 \cdot 0,01 \\&= 0,15\end{aligned}$$

$$P(x = 2) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{0,15^2 \cdot e^{-0,15}}{2!} = 0,00968297$$

### Contoh 5

Ada sebuah toko yang menjual peralatan listrik yang mencatat rata-rata 7 bola lampu R 40W per hari. Jika permintaan lampu berdistribusi Poisson, berapa peluang penjualan berikutnya akan terjadi?

- a) 3 lampu R
- b) 5 lampu R

*Jawab*

$$\mu = 7$$

$$x = 3 \rightarrow P(x = 3) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{7^3 \cdot e^{-7}}{3!} = 0,000586457$$

$$x = 5 \rightarrow P(x = 5) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{7^5 \cdot e^{-7}}{5!} = 0,1277$$

## DAFTAR PUSTAKA

- Hogg, R.V., McKean, J.W., dan Craig, A.T. 2013. *Introduction to Mathematical Statistics*, Edisi ke tujuh. New York: Pearson.
- Walpole E. Ronald and Myers H. Raimond. 1989. *Probability and statistics for engineers and scientistc. Four edition*. Macmillian Publishing Co., Inc.
- Walpole E. Ronald and Myers H. Raimond. 1995. *Pengantar Statistika*. Jakarta, PT. Garmedia Pustaka Utama.
- <https://repository.unikom.ac.id/61031/1/Pertemuan%208.pdf>
- <https://www.rumusstatistik.com/2012/07/rumus-distribusi-poisson.html>
- <http://eprints.uad.ac.id/25032/1/Alhamdulillah%20Buku%20Statmat%20Fix.pdf>

Lampiran

Tabel L.2 Jumlah peluang poisson  $\sum_{x=0}^r P(x;\mu)$

| r | $\mu$  |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|   | 0,1    | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    |
| 0 | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6730 | 0,6065 | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 |
| 1 | 0,9953 | 0,9825 | 0,9631 | 0,9384 | 0,9098 | 0,8781 | 0,8442 | 0,8088 | 0,7725 |
| 2 | 0,9998 | 0,9989 | 0,9964 | 0,9921 | 0,9856 | 0,9769 | 0,9659 | 0,9526 | 0,9371 |
| 3 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9992 | 0,9982 | 0,9966 | 0,9942 | 0,9909 | 0,9865 |
| 4 |        | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9992 | 0,9986 | 0,9977 |
| 5 |        |        |        | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9997 |
| 6 |        |        |        |        |        |        | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

| r  | $\mu$  |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    | 1,0    | 1,5    | 2,0    | 2,5    | 3,0    | 3,5    | 4,0    | 4,5    | 5,0    |
| 0  | 0,3679 | 0,2231 | 0,1353 | 0,0821 | 0,0498 | 0,0302 | 0,0183 | 0,0111 | 0,0067 |
| 1  | 0,7358 | 0,5578 | 0,4060 | 0,2873 | 0,1991 | 0,1359 | 0,0916 | 0,0611 | 0,0404 |
| 2  | 0,9197 | 0,8088 | 0,6767 | 0,5438 | 0,4232 | 0,3208 | 0,2381 | 0,1736 | 0,1247 |
| 3  | 0,9810 | 0,9344 | 0,8571 | 0,7576 | 0,6472 | 0,5366 | 0,4335 | 0,3423 | 0,2650 |
| 4  | 0,9963 | 0,9814 | 0,9473 | 0,8912 | 0,8153 | 0,7254 | 0,6288 | 0,5321 | 0,4405 |
| 5  | 0,9994 | 0,9955 | 0,9834 | 0,9580 | 0,9161 | 0,8576 | 0,7851 | 0,7029 | 0,6160 |
| 6  | 0,9999 | 0,9991 | 0,9955 | 0,9858 | 0,9665 | 0,9347 | 0,8893 | 0,8311 | 0,7622 |
| 7  | 1,0000 | 0,9998 | 0,9989 | 0,9958 | 0,9881 | 0,9733 | 0,9489 | 0,9134 | 0,8666 |
| 8  |        | 1,0000 | 0,9998 | 0,9989 | 0,9962 | 0,9901 | 0,9786 | 0,9597 | 0,9319 |
| 9  |        |        | 1,0000 | 0,9997 | 0,9989 | 0,9967 | 0,9919 | 0,9829 | 0,9682 |
| 10 |        |        |        | 0,9999 | 0,9997 | 0,9990 | 0,9972 | 0,9933 | 0,9863 |
| 11 |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9991 | 0,9976 | 0,9945 |
| 12 |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9992 | 0,9980 |
| 13 |        |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9993 |
| 14 |        |        |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 |
| 15 |        |        |        |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 |
| 16 |        |        |        |        |        |        |        |        | 1,0000 |

**Tabel L.2** Jumlah peluang poisson  $\sum_{x=0}^r P(x;\mu)$  (lanjutan)

| r  | $\mu$  |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    | 5,5    | 6,0    | 6,5    | 7,0    | 7,5    | 8,0    | 8,5    | 9,0    | 9,5    |
| 0  | 0,0041 | 0,0025 | 0,0015 | 0,0009 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |
| 1  | 0,0266 | 0,0174 | 0,0113 | 0,0073 | 0,0047 | 0,0030 | 0,0019 | 0,0012 | 0,0008 |
| 2  | 0,0884 | 0,0620 | 0,0430 | 0,0296 | 0,0203 | 0,0138 | 0,0093 | 0,0062 | 0,0042 |
| 3  | 0,2017 | 0,1512 | 0,1118 | 0,0818 | 0,0591 | 0,0424 | 0,0301 | 0,0212 | 0,0149 |
| 4  | 0,3575 | 0,2851 | 0,2237 | 0,1730 | 0,1321 | 0,0996 | 0,0744 | 0,0550 | 0,0403 |
| 5  | 0,5289 | 0,4457 | 0,3690 | 0,3007 | 0,2414 | 0,1912 | 0,1496 | 0,1157 | 0,0885 |
| 6  | 0,6860 | 0,6063 | 0,5265 | 0,4497 | 0,3782 | 0,3134 | 0,2562 | 0,2068 | 0,1649 |
| 7  | 0,8095 | 0,7440 | 0,6728 | 0,5987 | 0,5246 | 0,4530 | 0,3856 | 0,3239 | 0,2687 |
| 8  | 0,8944 | 0,8472 | 0,7916 | 0,7291 | 0,6620 | 0,5925 | 0,5231 | 0,4557 | 0,3918 |
| 9  | 0,9462 | 0,9161 | 0,8774 | 0,8305 | 0,7764 | 0,7166 | 0,6530 | 0,5874 | 0,5218 |
| 10 | 0,9747 | 0,9574 | 0,9332 | 0,9015 | 0,8622 | 0,8159 | 0,7634 | 0,7060 | 0,6453 |
| 11 | 0,9890 | 0,9799 | 0,9661 | 0,9466 | 0,9208 | 0,8881 | 0,8487 | 0,8030 | 0,7520 |
| 12 | 0,9955 | 0,9912 | 0,9840 | 0,9730 | 0,9573 | 0,9362 | 0,9091 | 0,8758 | 0,8364 |
| 13 | 0,9983 | 0,9964 | 0,9929 | 0,9872 | 0,9784 | 0,9658 | 0,9486 | 0,9261 | 0,8981 |
| 14 | 0,9994 | 0,9986 | 0,9970 | 0,9943 | 0,9897 | 0,9827 | 0,9726 | 0,9585 | 0,9400 |
| 15 | 0,9998 | 0,9995 | 0,9988 | 0,9976 | 0,9954 | 0,9918 | 0,9862 | 0,9780 | 0,9665 |
| 16 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9990 | 0,9980 | 0,9963 | 0,9934 | 0,9889 | 0,9825 |
| 17 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9992 | 0,9984 | 0,9970 | 0,9947 | 0,9911 |
| 18 |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9994 | 0,9987 | 0,9976 | 0,9957 |
| 19 |        |        | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9995 | 0,9989 | 0,9980 |
| 20 |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9991 |
| 21 |        |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 |
| 22 |        |        |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 |
| 23 |        |        |        |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 |
| 24 |        |        |        |        |        |        |        |        | 1,0000 |

Tabel L.2 Jumlah peluang poisson  $\sum_{x=0}^r p(x;\mu)$  (lanjutan)

| r  | $\mu$  |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    | 10,0   | 11,0   | 12,0   | 13,0   | 14,0   | 15,0   | 16,0   | 17,0   | 18,0   |
| 0  | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |        |        |        |        |        |        |
| 1  | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 |        |        |        |        |
| 2  | 0,0028 | 0,0012 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 |        |        |
| 3  | 0,0103 | 0,0049 | 0,0023 | 0,0010 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4  | 0,0293 | 0,0151 | 0,0076 | 0,0037 | 0,0018 | 0,0009 | 0,0004 | 0,0002 | 0,0001 |
| 5  | 0,0671 | 0,0375 | 0,0203 | 0,0107 | 0,0055 | 0,0028 | 0,0014 | 0,0007 | 0,0003 |
| 6  | 0,1301 | 0,0785 | 0,0458 | 0,0259 | 0,0142 | 0,0076 | 0,0040 | 0,0021 | 0,0010 |
| 7  | 0,2202 | 0,1432 | 0,0895 | 0,0540 | 0,0316 | 0,0180 | 0,0100 | 0,0054 | 0,0029 |
| 8  | 0,3328 | 0,2320 | 0,1550 | 0,0998 | 0,0621 | 0,0374 | 0,0220 | 0,0126 | 0,0071 |
| 9  | 0,4579 | 0,3405 | 0,2424 | 0,1658 | 0,1094 | 0,0699 | 0,0433 | 0,0261 | 0,0154 |
| 10 | 0,5830 | 0,4599 | 0,3472 | 0,2517 | 0,1757 | 0,1185 | 0,0774 | 0,0491 | 0,0304 |
| 11 | 0,6968 | 0,5793 | 0,4616 | 0,3532 | 0,2600 | 0,1848 | 0,1270 | 0,0847 | 0,0549 |
| 12 | 0,7916 | 0,6887 | 0,5760 | 0,4631 | 0,3585 | 0,2676 | 0,1931 | 0,1350 | 0,0917 |
| 13 | 0,8645 | 0,7813 | 0,6815 | 0,5730 | 0,4644 | 0,3632 | 0,2745 | 0,2009 | 0,1426 |
| 14 | 0,9165 | 0,8540 | 0,7720 | 0,6751 | 0,5704 | 0,4657 | 0,3675 | 0,2808 | 0,2081 |
| 15 | 0,9513 | 0,9074 | 0,8444 | 0,7636 | 0,6694 | 0,5681 | 0,4667 | 0,3715 | 0,2867 |
| 16 | 0,9730 | 0,9441 | 0,8987 | 0,8355 | 0,7559 | 0,6641 | 0,5660 | 0,4677 | 0,3750 |
| 17 | 0,9857 | 0,9678 | 0,9370 | 0,8905 | 0,8272 | 0,7489 | 0,6593 | 0,5640 | 0,4686 |
| 18 | 0,9928 | 0,9823 | 0,9626 | 0,9302 | 0,8826 | 0,8195 | 0,7423 | 0,6550 | 0,5623 |
| 19 | 0,9965 | 0,9907 | 0,9787 | 0,9573 | 0,9235 | 0,8752 | 0,8122 | 0,7363 | 0,6509 |
| 20 | 0,9984 | 0,9953 | 0,9884 | 0,9750 | 0,9521 | 0,9170 | 0,8682 | 0,8055 | 0,7307 |
| 21 | 0,9993 | 0,9977 | 0,9939 | 0,9859 | 0,9712 | 0,9469 | 0,9108 | 0,8615 | 0,7991 |
| 22 | 0,9997 | 0,9990 | 0,9970 | 0,9924 | 0,9833 | 0,9673 | 0,9418 | 0,9047 | 0,8551 |
| 23 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9985 | 0,9960 | 0,9907 | 0,9805 | 0,9633 | 0,9367 | 0,8989 |
| 24 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9993 | 0,9980 | 0,9950 | 0,9888 | 0,9777 | 0,9594 | 0,9317 |
| 25 |        | 0,9999 | 0,9997 | 0,9990 | 0,9974 | 0,9938 | 0,9869 | 0,9748 | 0,9554 |
| 26 |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9987 | 0,9967 | 0,9925 | 0,9848 | 0,9718 |
| 27 |        |        | 0,9999 | 0,9998 | 0,9994 | 0,9983 | 0,9959 | 0,9912 | 0,9827 |
| 28 |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9991 | 0,9978 | 0,9950 | 0,9897 |
| 29 |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9989 | 0,9973 | 0,9941 |
| 30 |        |        |        |        | 0,9999 | 0,9998 | 0,9994 | 0,9986 | 0,9967 |
| 31 |        |        |        |        |        | 0,9999 | 0,9997 | 0,9993 | 0,9982 |
| 32 |        |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9990 |
| 33 |        |        |        |        |        |        | 0,9999 | 0,9998 | 0,9995 |
| 34 |        |        |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 |
| 35 |        |        |        |        |        |        |        | 1,0000 | 0,9999 |
| 36 |        |        |        |        |        |        |        |        | 0,9999 |
| 37 |        |        |        |        |        |        |        |        | 1,0000 |



# BAB 11

## DISTRIBUSI UNIFORM KONTINU DAN EKSPONENSIAL

*Oleh Ahmad Choirul Anam*

### 11.1 Pendahuluan

Pada bab ini akan dibahas terkait distribusi uniform (seragam) yang lebih khusus pada data kontinu dan distribusi eksponensial. Sebelumnya diketahui bahwa distribusi merupakan bagian dari percobaan suatu peubah acak yang menghasilkan banyaknya kuantitas dari suatu percobaan. Distribusi uniform dan eksponensial merupakan bagian dari distribusi probabilitas dengan beberapa syarat tertentu. Mengingat kembali suatu distribusi dari percobaan menyatakan banyaknya pemetaan dari suatu ruang kejadian ke dalam suatu wilayah fungsi dalam bentuk bilangan riil. Misalkan: "suatu eksperimen pelemparan sebuah uang logam sebanyak 3 kali. Jika  $x$  menyatakan banyaknya sisi muka yang muncul". Pada kasus tersebut, banyaknya hasil yang ditanyakan merupakan suatu distribusi probabilitas yang menggunakan peubah acak diskrit. Sehingga kasus tersebut dapat diselesaikan dengan menentukan nilai  $x$  terlebih dahulu ( $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ), kemudian rincian distribusi probabilitas seperti di bawah ini.

$$n(s) = 8$$

Untuk  $x = 0$ , artinya tidak ada sisi muka yang muncul, maka

$$P(x = 0) = \frac{n(0)}{n(s=8)} = \frac{1}{8}$$

$x = 1$ , artinya ada 1 sisi muka yang muncul, maka

$$P(x = 1) = \frac{n(1)}{n(s=8)} = \frac{3}{8}$$

$x = 2$ , artinya ada 2 sisi muka yang muncul, maka

$$P(x = 2) = \frac{n(2)}{n(s=8)} = \frac{3}{8}$$

$x = 3$ , artinya ada 3 sisi muka yang muncul, maka

$$P(x = 3) = \frac{n(3)}{n(s=8)} = \frac{1}{8}$$

Sehingga, lebih detail distribusi probabilitas di atas dapat ditunjukkan dalam tabel berikut.

**Tabel 11.1.** Distribusi Probabilitas peubah acak  $x$

| $x$               | 0             | 1             | 2             | 3             |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(X = x) = f(x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Pada Tabel 11.1 diketahui bahwa distribusi probabilitasnya berbeda-beda dan memiliki ruang sampel yang terbatas (diskrit). Selanjutnya, terdapat ruang sampel yang memiliki titik-titik tak berhingga atau berada pada selang interval tertentu, maka termasuk kontinu.

Pada bagian ini, akan membahas lebih lanjut terkait distribusi probabilitas dengan karakteristik tertentu. Distribusi uniform merupakan distribusi probabilitas yang paling sederhana karena memiliki nilai variabel yang probabilitasnya sama untuk terpilih (Noeryanti, 2021). Distribusi eksponensial merupakan distribusi probabilitas kontinu yang merupakan bentuk khusus dari distribusi gamma dengan nilai  $\alpha = 1$  (Walpole, 2012).

## 11.2 Distribusi Uniform Kontinu

Distribusi uniform adalah suatu distribusi yang memiliki probabilitas yang sama pada setiap kejadian, tidak dikategorikan, dan ruang sampelnya tidak dibatasi (Aridinanti, 2003). Secara detail, distribusi uniform ada yang diskrit dan kontinu. Distribusi uniform diskrit merupakan distribusi probabilitas yang paling sederhana dengan nilai variabel random memiliki probabilitas

yang sama untuk terpilih. Sedangkan distribusi uniform kontinu adalah jika variabel random  $x$  memiliki nilai (kontinu) dengan kemungkinan kemunculan yang sama (Darsyah and Ismunarti, 2013).

Jika variabel random  $X$  bisa memiliki nilai  $x_1, x_2, x_3, \dots x_k$  dengan probabilitas yang sama, maka distribusi uniform diskrit dinyatakan sebagai :

$$f(x, k) = \frac{1}{k}; \quad x = x_1, x_2, x_3, \dots x_k$$

*Keterangan:*

$f(x, k)$  menyatakan nilai fungsi  $f$  tergantung pada  $k$   
 $k$  menyatakan data percobaan ke- $k$  atau parameter  
 $x$  menyatakan banyak percobaan

### **Contoh 1**

Sebuah koin memiliki dua sisi yaitu sisi Angka dan Gambar. Jika  $a$  menyatakan banyaknya sisi angka yang muncu, maka  $a = 0$  dan 1. Sehingga distribusi probabilitasnya adalah

$$f(x; 2) = \frac{1}{2} \quad x = 0, 1$$

### **Contoh 2**

Beberapa jenis pensil 3H, 2H, HB, dan BS akan digunakan untuk membuat sketsa dengan probabilitas sama yaitu  $\frac{1}{4}$ .

Tentukan:

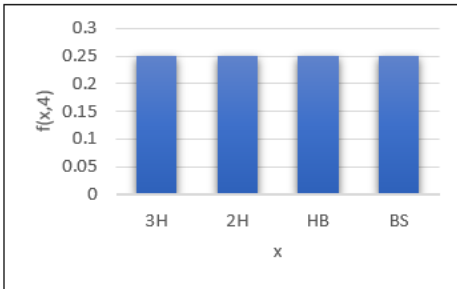
- Distribusi uniformnya
- Histogram distribusi uniform

*Jawab:*

a. Distribusi uniform

$$f(x, 4) = \frac{1}{4} \quad x = 3H, 2H, HB, BS$$

b. Histogram



### **Definisi**

Nilai rata-rata (mean) dan variansi distribusi uniform diskrit  $f(x, k)$  adalah

$$\text{Mean } (\bar{x}) = \mu = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$$

$$\text{Varians } (\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2}{k}$$

### **Contoh**

Sebuah dadu dilemparkan sekali dan memiliki ruang sampel  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  dengan probabilitas setiap ruang sampelnya sama yaitu  $\frac{1}{6}$ . Tentukan rata-rata dan variansnya.

Menggunakan definisi, didapatkan bahwa

$$\mu = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1 - 3,5)^2 + (2 - 3,5)^2 + \dots + (6 - 3,5)^2}{6} = \frac{35}{12}$$

Pada kasus di atas, diketahui bahwa variabel acak yang muncul memiliki probabilitas yang sama. Bagaimana jika variabel acak tersebut terletak pada suatu wilayah fungsi tak berhingga atau pada suatu interval  $(a, b)$  tertentu. Maka distribusi uniform tersebut sebagai distribusi uniform kontinu dan dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x|a, b) = \frac{1}{b - a}; a < x < b$$

Jika variabel  $x$  memiliki nilai (kontinu) dengan kemungkinan muncul yang sama, maka dikatakan bahwa variabel tersebut termasuk distribusi uniform dengan fungsi densitas probabilitas (pdf) sebagai berikut.

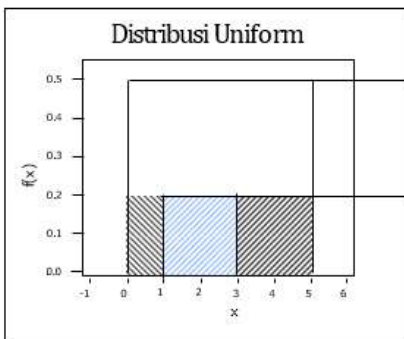
$$f(x|a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & \text{Jika } a < x < b \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Misalkan,

Densitas uniform  $[0, 5]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5 - 0} = \frac{1}{5}, & \text{untuk } 0 < x < 5 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

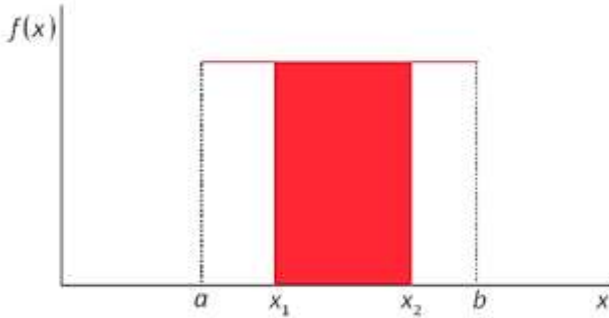
Densitas tersebut dapat digambarkan bahwa



Total Luas Area  $f(x) = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$   
 Karena peluang  $\leq 1$

Luas area di bawah  $f(x)$   
 pada interval 1 sampai 3  
 $= P(1 \leq x \leq 3)$   
 $= 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Dengan demikian, untuk mengetahui distribusi uniform kontinu dapat menggunakan bentuk umum terkait luas area dalam suatu kurva.



### 11.3 Distribusi Uniform Kontinu

Bentuk umum yang digunakan untuk menentukan distribusi uniform kontinu adalah sebagai berikut.

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{b-a} dx$$

Seperti pada distribusi yang lain, distribusi uniform kontinu juga memiliki rumus mean dan varians yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan probabilitas terkait distribusi uniform. Berikut ditunjukkan rumus mencari rata-rata (mean) distribusi uniform kontinu yaitu.

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Selanjutnya, untuk mencari varians dari distribusi uniform kontinu adalah

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Pada setiap proses perhitungannya, terdapat beberapa nilai probabilitas dari variabel acak yang berada pada interval pengamatan tertentu, dalam hal ini disebut sebagai fungsi distribusi kumulatif (cdf). Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi uniform kontinu dinyatakan sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a < x < b \\ 1; & x \geq b \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi di atas terdapat kasus khusus yaitu: jika  $a = 0$  dan  $b = 1$ , maka distribusinya disebut **distribusi seragam baku** (*standard uniform distribution*), yang disimbolkan dengan  $U(0, 1)$ .

### Contoh

Ahmad sedang menunggu proses *boarding* pesawat di Bandara Internasional Blimbingsari Banyuwangi antara pukul 08.00 – 10.00 WIB. Jika proses tersebut berdistribusi uniform, hitunglah berapa probabilitas Ahmad harus menunggu.

- Kurang atau sama dengan 30 menit dari pukul 08.00 WIB
- Lebih dari 30 menit

### Jawab

- Waktu antara pukul 08.00 – 10.00 adalah 120 menit, maka kurang atau sama dengan 30 menit dapat dituliskan ( $X \leq 30$ )

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{b-a} dx$$

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 30) &= \int_0^{30} \frac{1}{120 - 0} dx = \frac{1}{120} x \Big|_0^{30} \\
 &= \left( \frac{1}{120} \cdot 30 \right) - \left( \frac{1}{120} \cdot 0 \right) \\
 &= \frac{30}{120} \\
 &= 0,25
 \end{aligned}$$

b. Lebih dari 30 menit, kasus ini dapat dituliskan  $P(X > 30)$

$$\begin{aligned}
 P(x_1 < X < x_2) &= \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{b-a} dx \\
 P(X > 30) &= \int_{30}^{120} \frac{1}{120 - 0} dx = \frac{1}{120} x \Big|_{30}^{120} \\
 &= \left( \frac{1}{120} \cdot 120 \right) - \left( \frac{1}{120} \cdot 30 \right) \\
 &= 1 - P(X \leq 30) \\
 &= 1 - 0,25 \\
 &= 0,75
 \end{aligned}$$

### ***Soal Latihan***

1. Auditorium suatu hotel dapat disewa untuk suatu kegiatan maksimal 6 jam. Misalkan  $X$  merupakan peubah acak yang menyatakan waktu rapat yang berdistribusi seragam.
  - a. Tentukan fungsi densitas peluang dari  $X$ .
  - b. Tentukan peluang, jika suatu kegiatan hanya berlangsung selama 4 jam.

2. Suatu terminal memiliki jadwal dengan pemberhentian pada interval 15 menit yang dimulai pada pukul 07.00 WIB pagi. Sehingga bus-bus tersebut bergenti pada pukul 07.00, 07.15, 07.30, dst. Pada suatu waktu terdapat penumpang yang akan naik bus di terminal dengan menyebar seragam antara pukul 07.00 WIB dan 08.00 WIB. Hitunglah peluang bahwa penumpang tersebut menunggu
  - a. Kurang dari 5 menit
  - b. Lebih dari 10 menit

## 11.4 Distribusi Eksponensial

Beberapa distribusi yang banyak digunakan dalam statistika, khususnya pada proses stokastik adalah distribusi eksponensial. Distribusi eksponensial merupakan salah satu kasus khusus dari distribusi gamma. Ada juga yang mengemukakan bahwa distribusi eksponensial diilustrasikan sebagai suatu kejadian yang dapat berjalan sukses secara kontinu dan distribusi probabilitasnya juga bersifat kontinu dalam kurun waktu tertentu. Nilai praktis yang seringkali menggunakan distribusi eksponensial berhubungan dengan waktu, misalnya: waktu tunggu, pemodelan waktu hingga komputer *log off*, waktu lamanya percakapan dalam telepon, pemodelan waktu pintu gerbang otomatis terbuka jika ada objek di depannya dan sebagainya. Berikut ditunjukkan beberapa karakteristik dari distribusi eksponensial.

- a. Kurva dari distribusi eksponensial berbentuk menceng atau condong ke kanan
- b. Nilai  $x$  (peubah acak yang berdistribusi eksponensial) berkisar dari nol sampai tak hingga
- c. Puncak kurva dari distribusi eksponensial selalu pada  $x = 0$

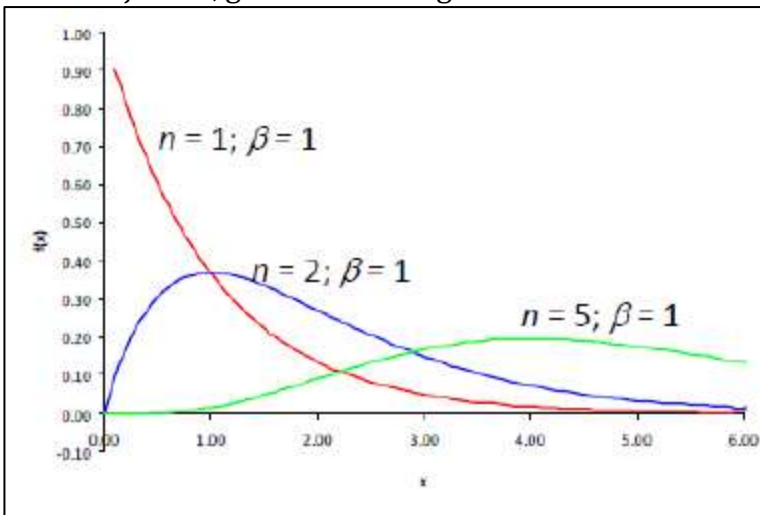
- d. Kurva distribusi eksponensial akan terus menurun ketika nilai  $x$  semakin besar

Mengingat kembali pada distribusi gamma bahwa yang memiliki peran penting dalam bidang teori antrian dan teori keandalan (reliabilitas). Pada distribusi gamma dalam bab sebelumnya diketahui bahwa fungsi densitas probabilitasnya dengan parameter  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dengan  $\alpha > 0$  dan  $\beta > 0$

Berikut ditunjukkan, grafik distribusi gamma



**Gambar 11.1.** Distribusi Gamma

Pada Gambar 11.1 di atas dapat dianalisis bahwa saat grafik tersebut memiliki nilai  $n = 1$  atau  $\alpha = 1$  (grafik berwarna merah), maka distribusi gamma dengan kasus tersebut merupakan suatu **distribusi eksponensial**.

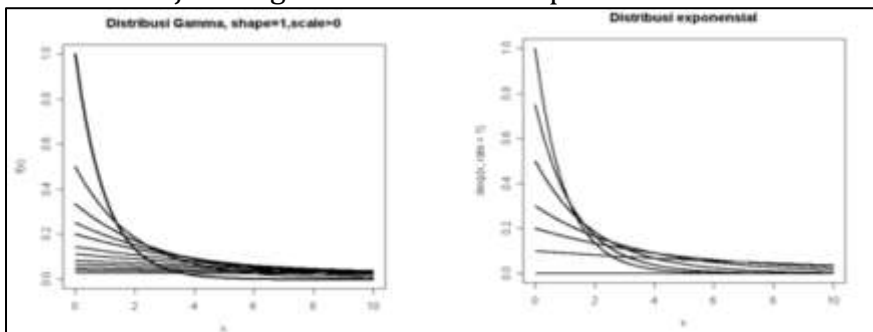
### Definisi

Suatu peubah acak kontinu  $X$  disebut berdistribusi eksponensial dengan parameter  $\beta$ , jika fungsi densitas probabilitasnya (pdf) dinyatakan dalam bentuk

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan  $\beta > 0$

Berikut ditunjukkan gambar distribusi eksponensial



**Gambar 11.2.** Distribusi Eksponensial (Distribusi gamma dengan  $\alpha = 1$ )

Selain itu, terdapat mean dalam distribusi eksponensial yaitu :

$$E[X] = \mu = \beta$$

Dan varians,

$$V[X] = \sigma^2 = \beta^2$$

## 11.5 Hubungan Distribusi Eksponensial dan Poisson

Pada penerapan statistika utamanya terkait distribusi probabilitas, baik distribusi eksponensial dan distribusi poisson memiliki peranan yang penting. Dalam distribusi poisson, suatu peubah acak  $X$  menunjukkan banyaknya kejadian

dalam interval waktu tertentu (jam, menit, dst). Sedangkan, distribusi eksponensial dalam peubah acak  $X$  menunjukkan lamanya waktu antara dua kejadian berturut-turut. Hal ini berarti bahwa peubah acak dalam distribusi eksponensial merupakan lamanya waktu ( $t$ ) dalam suatu kejadian Poisson.

### Contoh

Pada suatu warung telepon (Wartel) diketahui bahwa lamanya penggunaan telepon rata-rata setiap orang adalah 10 menit yang dimodelkan dengan distribusi eksponensial. Jika Anda akan menggunakan telepon dan didahului oleh seseorang, tentukan peluang bahwa Anda harus menunggu selama.

- Lebih dari 10 menit
- Antara 10 sampai 20 menit

*Jawab*

Misalkan,  $X$  merupakan variabel acak kontinu yang menyatakan lamanya penggunaan telepon di wartel

Diketahui bahwa  $X \sim \exp(\lambda)$  dengan  $\lambda = \frac{1}{10}$ , sehingga

$$f(x) = \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}$$

- Lebih dari 10 menit, maka

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= 1 - P(X \leq 10) \\ &= 1 - \int_0^{10} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx \\ &= 1 + \left[ e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^{10} \\ &= 1 + \left( e^{-\frac{10}{10}} - e^{\frac{0}{10}} \right) \\ &= 1 + (e^{-1} - e^0) \\ &= 0,3679 \end{aligned}$$

Sehingga, peluang distribusi eksponensial dalam menunggu selama lebih dari 10 menit adalah 0,3679

b. Antara 10 sampai 20 menit

$$\begin{aligned}
 P(10 < X < 20) &= \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{\frac{-x}{10}} dx \\
 &= -\left[e^{\frac{-x}{10}}\right]_{10}^{20} \\
 &= -(e^{-2} - e^{-1}) \\
 &= e^{-1} - e^{-2} \\
 &= 0,2325
 \end{aligned}$$

Sehingga, peluang distribusi eksponensial dalam menunggu antara 10 sampai 20 menit adalah 0,2325

### ***Soal Latihan***

1. Suatu mesin memuat komponen yang memiliki daya tahan pertahun dinyatakan oleh peubah acak  $t$  yang berdistribusi eksponensial dengan parameter waktu sampai rusak adalah  $\beta = 5$ . Jika sebanyak 5 komponen dipasangkan pada mesin yang berlainan, berapa peluang paling sedikit terdapat 2 komponen yang masih akan berfungsi pada akhir tahun ke delapan.
2. Waktu kedatangan pesawat pada suatu bandara internasional yang sedang padat mengikuti distribusi eksponensial dengan mean 12 menit. Berapa peluang waktu antar kedatangan adalah 10 menit atau kurang?
3. Al-Bayyan adalah suatu toko buku besar yang memiliki laju kedatangan pengunjung yang berdistribusi eksponensial

sebesar 5,8 setiap 50 menit. Tentukan peluang bahwa kedatangan pengunjung membutuhkan waktu selama.

- a. 15 menit atau kurang.
- b. Diantara 20 dan 30 menit.

## DAFTAR PUSTAKA

- Aridinanti, L. 2003. *Buku Ajar Pengantar Statistika*. Surabaya: Jurusan Statistika FMIPA ITS.
- Darsyah, M.Y. and Ismunarti, D.H. 2013. 'Perbandingan Kurva pada Distribusi Uniform dan Distribusi Binomial', *Statistika*, 1(1), pp. 21–29. Available at:  
<https://doi.org/10.26714/jsunimus.1.1.2013.%25p>.
- Noeryanti. 2021. *Pengantar Teori Probabilitas*. Yogyakarta: AKPRIND Press.
- Walpole RE, Myers, Y. 2012. *Probability & Statistics for Engineers & Scientist*. 9th edn. New Jersey: Pearson Prentice Hall Inc.



# BAB 12

## DISTRIBUSI NORMAL

*Oleh Hanna Hilyati Aulia*

### 12.1 Pendahuluan

Distribusi normal (Gaussian) sejauh ini merupakan distribusi probabilitas yang paling penting. Salah satu alasan utamanya adalah Teorema Limit Pusat (TLP) yang akan kita bahas nanti di buku ini. Untuk memberi Anda gambaran, TLP menyatakan bahwa jika ditambahkan sejumlah besar variabel acak, distribusi peubahnya akan mendekati normal dalam kondisi tertentu. Hasil ini berasal dari fakta bahwa banyak variabel acak dalam kehidupan nyata dapat dinyatakan sebagai jumlah dari sejumlah besar variabel acak dan, dengan TLP, kita dapat berargumen bahwa distribusi jumlah tersebut harus normal. TLP adalah salah satu hasil terpenting dalam probabilitas dan kita akan membahasnya nanti. Di sini, kami akan memperkenalkan variabel acak normal.

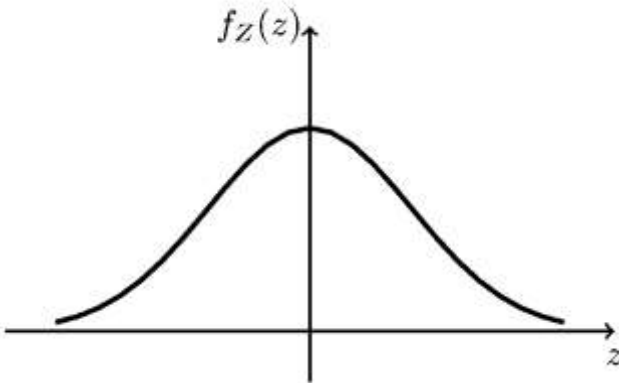
Pertama-tama didefinisikan variabel acak normal standar. Kita kemudian akan melihat bahwa kita dapat memperoleh variabel acak normal lainnya dengan menskalakan dan menggeser variabel acak normal standar.

### 12.2 Distribusi Normal Standar

Distribusi normal termasuk dalam distribusi kontinu. Variabel acak kontinu  $Z$  dikatakan sebagai variabel acak normal standar (standar Gaussian), ditunjukkan sebagai  $Z \sim N(0,1)$ , jika fungsi kepadatan peluang atau PDF(*Probability Density Function*)-nya diberikan oleh

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Suku  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  ada untuk memastikan luas di bawah PDF sama dengan satu. Kita akan memverifikasi bahwa ini berlaku pada latihan. Gambar 12.1 menunjukkan PDF dari variabel acak normal standar.



**Gambar 12.1.** PDF dari Distribusi Normal Standar  
(Sumber : <https://www.probabilitycourse.com/>)

Selanjutnya, akan ditentukan nilai mean dan variansi dari distribusi normal standar. Untuk melakukan itu, digunakan fakta sederhana. Misalkan suatu fungsi  $g(u): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jika  $g(u)$  adalah suatu fungsi ganjil, artinya  $g(-u) = -g(u)$  dan  $\int_0^\infty g(u)du < \infty$ , maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = 0$$

Untuk tujuan kita, tuliskan

$$g(u) = u^{2k+1} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \right\}$$

Dimana  $k = 0, 1, 2, \dots$  Maka  $g(u)$  adalah fungsi ganjil dan memenuhi  $\left| \int_0^\infty g(u)du < \infty \right|$ . Hal ini dapat dilihat dari sisi bahwa

$g(u)$  menurun lebih cepat dari fungsi  $\exp\{-u\}$  dan karena  $|\int_0^\infty \exp\{-u\} du| < \infty$ , dapat disimpulkan bahwa  $|\int_0^\infty g(u) du| < \infty$ . Selanjutnya, misalkan  $Z$  adalah variabel acak normal standar, maka

$$E[Z^{2k+1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2k+1} \exp\{-\frac{u^2}{2}\} du = 0$$

Untuk setiap  $k$ . Jadi, terbukti bahwa untuk variabel acak normal standar memiliki mean 0. Hal ini tidak mengejutkan karena berdasarkan Gambar 14.1 kita dapat lihat bahwa PDF simetris disekitar titik asalnya, sehingga  $E[Z] = 0$ . Selanjutnya, kita tentukan  $E[Z^2]$

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\{-\frac{u^2}{2}\} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -u \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = 1 \end{aligned}$$

Persamaan terakhir berlaku karena mengintegrasikan PDF normal standar dari  $-\infty$  ke  $\infty$ . Jadi, dapat disimpulkan bahwa untuk variabel acak normal standar  $Z$ , kita punya  $\text{Var}(Z)=1$ .

Dengan demikian, diperoleh:

Jika  $Z \sim N(0,1)$ , maka  $E[Z] = 0$  dan  $\text{Var}[Z] = 1$ .

Untuk mendapatkan CDF (*Cummulative Density Function*) dari distribusi normal standar, kita akan mengintegrasikan fungsi PDF. Diberikan

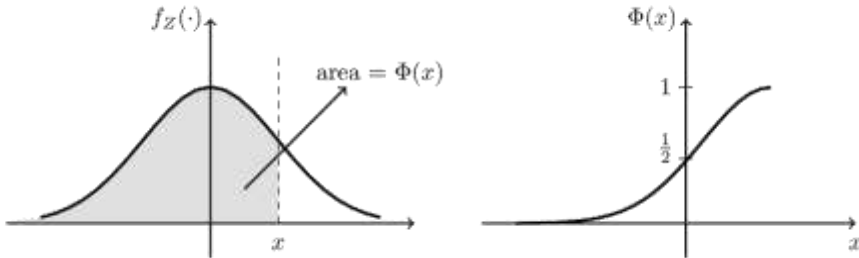
$$F_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$$

Integral ini tidak memiliki solusi bentuk tertutup. Namun demikian, karena pentingnya distribusi normal, nilai  $F_z(z)$  telah ditabulasi dan banyak kalkulator dan paket perangkat lunak

memiliki fungsi ini. Notasikan CDF normal standar dengan  $\Phi$  oleh fungsi berikut.

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du.$$

CDF dari setiap variabel acak normal dapat ditulis dalam bentuk fungsi  $\Phi$ , jadi fungsi  $\Phi$  banyak digunakan dalam probabilitas. Gambar 14.2 menunjukkan fungsi  $\Phi$ .



**Gambar 12.2.** Fungsi  $\Phi$  (CDF normal standar)  
(Sumber : <https://www.probabilitycourse.com/>)

Berikut adalah karakteristik dari fungsi  $\Phi$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$  ;
2.  $\Phi(0) = \frac{1}{2}$  ;
3.  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

## 12.3 Distribusi Normal Random

Setelah melihat variabel acak normal standar, kita dapat memperoleh variabel acak normal apa pun dengan menggeser dan menskalakan variabel acak normal standar. Secara khusus, definisikan

$$X = \sigma Z + \mu \text{ dimana } \sigma > 0$$

Maka

$$\begin{aligned} E[X] &= \sigma E[Z] + \mu = \mu \\ \text{Var}[X] &= \sigma^2 \text{Var}[Z] = \sigma^2 \end{aligned}$$

Dengan demikian, variabel acak  $X$  berdistribusi normal dengan mean  $\mu$  dan varians  $\sigma^2$  atau ditulis  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Sebaliknya, jika  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , variabel acak yang didefinisikan oleh  $Z = X - \mu/\sigma$  adalah variabel acak normal standar, yaitu,  $Z \sim N(0,1)$ .

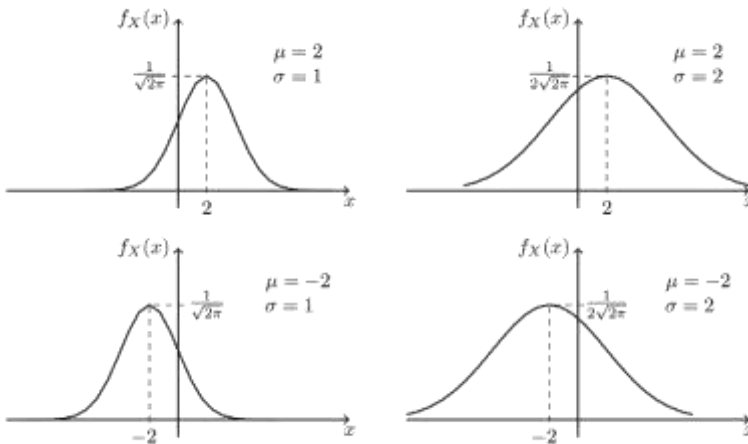
Untuk menemukan CDF dari  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , kita bisa menulis

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(\sigma Z + \mu \leq x) \quad Z \sim N(0,1) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Untuk menentukan PDF, maka kita turunkan  $F_X(x)$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) \\ &= \frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \Phi'\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma} f_Z\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

Berikut ini adalah contoh PDF dari distribusi normal untuk beberapa nilai  $\mu$  dan  $\sigma$ .



**Gambar 12.3.** PDF dari distribusi normal  
(Sumber : <https://www.probabilitycourse.com/>)

Sifat penting dan berguna dari distribusi normal adalah bahwa transformasi linear dari variabel acak normal itu sendiri merupakan variabel acak normal. Secara khusus, kami memiliki teorema berikut:

**Teorema 12. 1**

Jika  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ , dan  $Y = aX + b$  dimana  $a, b \in \mathbb{R}$ , maka  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

**Bukti.**

Tuliskan

$X = \sigma_X Z + \mu_X$  dimana  $Z \sim N(0,1)$ .

Maka,

$$Y = aX + b = a(\sigma_X Z + \mu_X) + b = (a\sigma_X)Z + (a\mu_X + b).$$

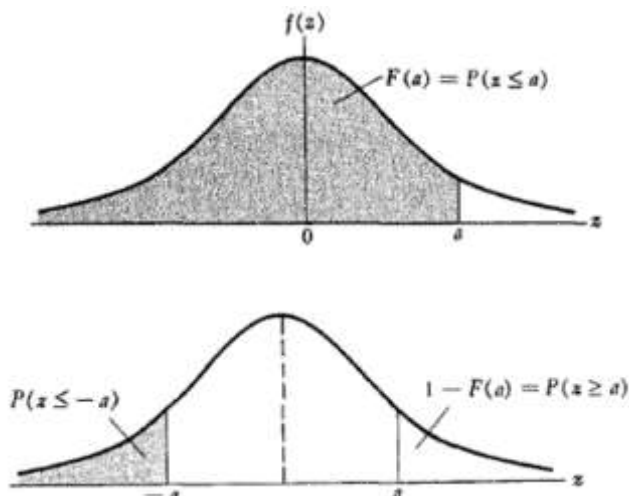
Dengan demikian,

$$Y \sim N(a\mu_X + b, a^2\sigma_X^2).$$

## Aturan Pencarian Nilai Distribusi Normal

1.  $P(Z \leq a) = F(a)$  (untuk  $a > 0$ )

$P(Z \leq a) = 1 - F(-a)$  (untuk  $a < 0$ )



**Gambar 12.4.** Grafik daerah  $P(Z \leq a)$   
(Sumber : Google)

### Contoh 12.1

Tentukan  $P(Z \leq a)$  untuk  $a = 1,65$ ;  $-1,65$ .

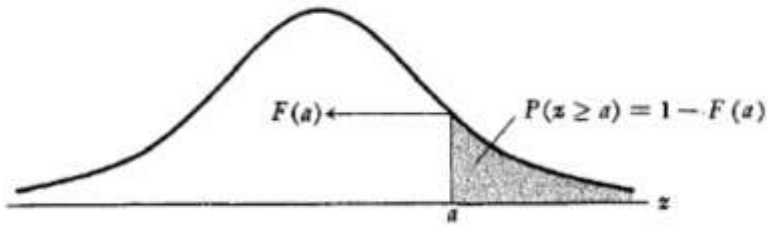
Penyelesaian.

a)  $P(Z \leq 1,65) = F(1,65) = 0,95$  (Berdasarkan hasil pada Tabel Distribusi Normal)

b)  $P(Z \leq -1,65) = F(-1,65) = 1 - F(1,65) = 0,05$   
(Berdasarkan hasil pada Tabel Distribusi Normal)

2.  $P(Z \geq a) = 1 - F(a)$  (untuk  $a > 0$ )

$P(Z \geq a) = F(-a)$  (untuk  $a < 0$ )



**Gambar 12.5.** Grafik daerah  $P(Z \geq a)$   
(Sumber : Google)

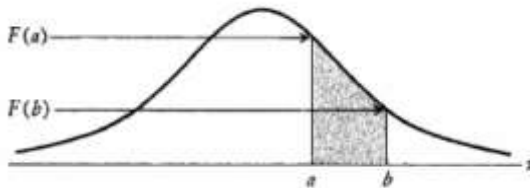
### Contoh 12.2

Tentukan  $P(Z \geq a)$  untuk  $a = 1,5; -1,5$ .

Penyelesaian.

- a)  $P(Z \geq 1,5) = 1 - F(1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$   
(Berdasarkan hasil pada Tabel Distribusi Normal)
- b)  $P(Z \geq -1,5) = F(1,5) = F(1,5) = 0,9332$   
(Berdasarkan hasil pada Tabel Distribusi Normal)

3.  $P(a \leq Z \leq b) = F(b) - F(a)$  (untuk  $a < b$ )



**Gambar 12.6.** Grafik daerah  $P(a \leq Z \leq b)$   
(Sumber : Google)

### Contoh 12.3

Tentukan  $P(a \leq Z \leq b)$  untuk  $a = -1; b = 1,5$ .

Penyelesaian.

$$\begin{aligned}
 P(-1 \leq Z \leq 1,5) &= F(1,5) - F(-1) \\
 &= F(1,5) - (1 - F(1))
 \end{aligned}$$

$$= 0,9332 - 1 + 0,8413 = 0,7745$$

(Berdasarkan hasil pada Tabel Distribusi Normal)

$$\begin{aligned} 4. \quad P(-a \leq Z \leq a) &= F(a) - F(-a) \\ &= F(a) - (1 - F(a)) \\ &= F(a) - 1 + F(a) \\ &= 2F(a) - 1 \end{aligned}$$

#### **Contoh 12.4**

Tentukan  $P(-a \leq Z \leq a)$  untuk  $a = 1,96$ .

Penyelesaian.

$$\begin{aligned} P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) &= 2F(1,96) - 1 = 2(0,975) - 1 \\ &= 0,95 \end{aligned}$$

(Berdasarkan hasil pada Tabel Distribusi Normal)

$$5. \quad F(a) = [1 + P(-a \leq Z \leq a)]/2$$

#### **Contoh 12.5**

Tentukan nilai  $a$  dari  $P(-a \leq Z \leq a) = 0,90$

Penyelesaian.

$F(a) = [1 + 0,90]/2 = 0,95$ , maka  $a = 1,65$ . (Berdasarkan hasil pada Tabel Distribusi Normal)

### **12.3.1 Penerapan Distribusi Normal**

Banyak masalah yang diselesaikan dengan distribusi normal, seperti beberapa contoh berikut ini.

- 1) Rata-rata jarak tempuh mobil pada suatu perusahaan pengiriman barang yaitu 100 km perbulan dan standar deviasinya 35 km yang mengikuti sebaran normal. Berapakah probabilitas bus menempuh jarak antara 60 km dan 130 km dalam 1 bulan?

**Penyelesaian:**

Untuk menyelesaikan masalah ini, kita perlu menghitung nilai z terlebih dahulu. Nilai z menunjukkan berapa standar deviasi dari mean yang ingin dihitung. Dalam hal ini, kita ingin menghitung probabilitas jarak tempuh mobil antara 60 km dan 130 km, yang berarti kita perlu menghitung nilai z untuk kedua nilai tersebut.

Diketahui:  $\mu = 100$ ,  $\sigma = 35$ ,  $x_1 = 60$ ,  $x_2 = 130$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 100}{35} = -1,14$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{130 - 100}{35} = 0,86$$

$$P(-1,14 < z < 0,86) = P(z < 0,86) - P(z < -1,14) \\ = 0.1271 - 0.8051 = 0.6780$$

Jadi, probabilitas mobil menempuh jarak antara 60 km dan 130 km dalam satu bulan adalah sekitar 0.6780 atau sekitar 67.80%.

- 2) Suatu nilai ujian mata kuliah statistika mengikuti sebaran normal, dengan nilai rata-ratanya 82 dan simpangan bakunya 7. Bila 21% di antara peserta ujian mendapat nilai A, berapakah kemungkinan nilai A yang terkecil dan nilai B tertinggi?

**Penyelesaian:**

Diketahui:  $\mu = 82$ ,  $\sigma = 7$ . Pada soal, diketahui luas daerah atau peluang yang diketahui yaitu 21% atau 0,21 kemudian dicari nilai-z lalu tentukan x dari rumus  $x = \sigma z + \mu$

Langkah-langkah yang harus diikuti adalah sebagai berikut:

- a) Menentukan nilai z untuk nilai A.

Untuk menentukan nilai z, kita perlu menggunakan rumus  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ , di mana x adalah nilai yang dicari. Dalam hal ini, kita ingin menentukan nilai A yang memiliki nilai z tertentu sehingga 21% dari peserta ujian memiliki nilai di atasnya. Kita dapat menggunakan tabel

distribusi normal standar atau kalkulator statistik untuk menentukan nilai  $z$  yang sesuai dengan luas di atas. Dalam hal ini, kita mencari nilai 0,21 dalam tabel atau menggunakan fungsi invers dari distribusi normal kumulatif. Dengan cara ini, kita mendapatkan nilai  $z$  sekitar 0,84. Sehingga kita dapat menghitung nilai  $A$  menggunakan rumus  $x = \sigma z + \mu = 7(0,84) + 82 = 87,88$ , sehingga nilai  $A$  adalah sekitar 87,88.

b) Menentukan nilai  $z$  untuk nilai  $B$ .

Untuk menentukan nilai  $z$  untuk nilai  $B$ , kita perlu mengulangi proses yang sama seperti pada langkah pertama. Kali ini, kita ingin menentukan nilai  $B$  yang memiliki persentase di bawahnya sama dengan persentase di atas nilai  $A$ , yaitu 21%. Sehingga, kita mencari nilai 0,79 dalam tabel atau menggunakan fungsi distribusi normal kumulatif. Dalam hal ini, kita mendapatkan nilai  $z$  sekitar -0,84. Sehingga kita dapat menghitung nilai  $B$  menggunakan rumus:  $x = \sigma z + \mu = 7(-0,84) + 82 = 75,88$ , sehingga nilai  $B$  adalah sekitar 75,88.

Jadi, nilai  $A$  yang terkecil adalah sekitar 87,88 dan nilai  $B$  yang tertinggi adalah sekitar 75,88.

## DAFTAR PUSTAKA

- Arifin Zainal. 2012. *Evaluasi Pembelajaran*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Islam Kementrian Agama RI.
- Arikunto Suharsimi. 2001. *Dasar-Dasar Evaluasi Pendidikan*. Jakarta: PT Bumi Aksara.
- Asrul, dkk. 2014. *Evaluasi Pembelajaran*. Medan: Cipta pustaka Media.
- Danial, D., Nurjannah, N., & Mirna, M. 2019. *Evaluation of The Learning Program of Mathematics Study Program at Islamic Institute Of Muhammadiyah Sinjai. Matematika Dan Pembelajaran*, 7(1), 65. <https://doi.org/10.33477/mp.v7i1.1046>.
- Fitriani. 2019. Kemampuan Pemecahan Masalah Siswa SMP. *JTMT: Journal Tadris Matematika*, 01(01), 25–30. <http://journal.iaimsinjai.ac.id/index.php/Jtm/article/view/393>.
- Hamalik, Oemar. 2010. *Manajemen Pengembangan Kurikulum*. Bandung : PT Remaja Rosdakarya.
- Elis Ratnawulan. 2014. *Evaluasi Pembelajaran*. Bandung: Penerbit pustaka.
- Ida Farida. 2017. *Evaluasi Pembelajaran*. Bandung:PT Remaja Rosdakarya.
- Muhammad Afandi.2013. *Evaluasi Pembelajaran Sekolah Dasar*. Semarang:UNISSULA Press
- Sukardi. 2009. *Evaluasi Pendidikan*. Jakarta: PT Bumi Aksara.
- Tim Pengembangan MKDP Kurikulum dan Pembelajaran. 2011. *Kurikulum dan Pembelajaran*. Jakarta Utara: PT Raja Grafindo Persada.

## **BIODATA PENULIS**



**Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd.**

Dosen FKIP Universitas Simalungun

Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd, lahir di Medan, Pendidikan S1, S2 dan S3 Prodi Pendidikan Matematika dan Matematika FMIPA USU Medan. Dosen di FKIP, SPS Program S2, dan Kepala Lembaga Akreditasi Internal USI. Penulis aktif mengikuti sebagai pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional dan aktif menulis Buku, Jurnal OJS, Sinta, dan Scopus.

## BIODATA PENULIS



**Dr. H. Nanang, M.Pd.**

Staf Dosen Jurusan Teknik Sipil  
Institut Teknologi Garut

Penulis lahir di Bandung tanggal 1 Juli 1964. Penulis adalah dosen dpk Kopertis Wilayah VII Surabaya pada Program Studi Pendidikan FKIP Universitas Muhammadiyah Jember dari tahun 1990 s.d. 2000 dan dosen LLDIKTI Wilayah IV Jawa Barat dan Banten pada Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Sipil dan Arsitektur Institut Teknologi Garut (ITG) dari Tahun 2000 s.d. sekarang. Dari tahun 1986 s.d 1990, penulis bekerja sebagai guru di SMAN 1 Bandung, SMA 55 Asia Afrika Bandung, SMA Karya Agung Bandung, SMA Swadaya Bandung.

Penulis menyelesaikan: S1 Pendidikan di IKIP Bandung (UPI) Tahun 1989, S2 Pendidikan di IKIP Surabaya (UNESA) Tahun 1999, dan S3 Pendidikan di UPI Bandung Tahun 2009.

Penulis menekuni bidang Pembelajaran. Penulis juga sebagai Tim Penilai DUPAK Kepangkatan Guru-guru di Kabupaten Garut dari tahun 2015 s.d. sekarang. Telah beberapa kali memperoleh hibah penelitian dan pengabdian pada masyarakat dari Universitas Muhammadiyah Jember, Institut Teknologi Garut, dan Ristek Dikti Kemendikbud.

## **BIODATA PENULIS**



**Ir. Johni S. Pasaribu, MT.**

Dosen Program Studi Sistem Informasi  
Fakultas IT Politeknik Piksi Ganesha

Penulis lahir di Medan tanggal 1 Juni 1966 dari pasangan HA Pasaribu (alm) dan Taruli Tambunan (alm). Penulis adalah anak keempat dari enam bersaudara. Pendidikan yang ditempuh yaitu SD Methodist Medan lulus tahun 1979, SMPN 88 Jakarta lulus tahun 1982 dan SMAN 3 Jakarta lulus tahun 1985. Kemudian melanjutkan studi di ITB jurusan Teknik Fisika spesialisasi Instrumentasi dan Kontrol. Penulis melakukan penelitian untuk tugas akhir di PT IPTN dengan judul Perancangan Sistem Kendali Fly By Wire Gerak Longitudinal Pada Engineering Flight Simulator Pesawat N250-100 dan menyelesaikan gelar sarjana teknik Insinyur (Ir) tahun 1992.

Kemudian penulis bekerja di PT. IPTN (sekarang PT Dirgantara Indonesia) di Departemen Iron Bird kemudian berpindah di Departemen Engineering Flight Simulator (EFS). Penulis terlibat dalam Operation and Maintenance untuk EFS sehingga simulator N250-100 ini dapat digunakan saat dilakukan pengujian-pengujian pesawat melalui simulator sebelum pengujian langsung pesawat di udara. Tahun 1998 penulis melanjutkan studi

S2 di ITB pada jurusan Teknik Informatika untuk spesialisasi Software Engineering, dimana ilmu yang diperoleh dapat diaplikasikan dalam pekerjaan di lapangan. Tahun 2001 penulis menyelesaikan pendidikan S2 dengan gelar MT mengambil penelitian yang berjudul Pengembangan Perangkat Lunak Simulasi Sistem Perasa Kendali Elevator Pesawat N250-100 dimana penelitian ini juga dilakukan di Engineering Flight Simulator (EFS) N250-100. Tahun 2004 penulis mulai aktif mengajar di Perguruan Tinggi di Bandung diantaranya pernah mengajar di Unikom, ITHB, STT Telkom (kini TelU). Kini penulis penuh mengajar dan menjadi dosen tetap di Politeknik Piksi Ganesha. Bidang keahlian mengajar dan penelitian penulis adalah Artificial Intelligence (AI), Decision Support System (DSS), Software Engineering dan Software Testing. Penulis juga aktif melakukan bimbingan mahasiswa S1 dan publikasi di jurnal-jurnal nasional maupun internasional.

## **BIODATA PENULIS**



### **Abdul Baist, S.Pd., M.Si.**

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika  
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan  
Universitas Muhammadiyah Tangerang

Penulis lahir di Jakarta tanggal 8 Mei 1979. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Tangerang. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Terapan, Institut Pertanian Bogor.

## **BIODATA PENULIS**



**Farida Daniel, S.Si., M.Pd.**

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika  
Institut Pendidikan Soe

Penulis lahir di Soe tanggal 16 Februari 1991. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, Institut Pendidikan Soe. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknik Universitas Nusa Cendana tahun 2012, pada tahun 2013 melanjutkan S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Semarang dan lulus tahun 2015. Penulis sementara melanjutkan studi S3 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia. Penulis menekuni bidang pendidikan matematika khususnya statistika, matematika terapan, analisis dan etnomatematika dalam pelaksanaan tridharma perguruan tinggi. Buku Ajar yang pernah ditulis antara lain Kalkulus Integral Berbasis Maple (2018) dan Teori Graf (2019).

## BIODATA PENULIS



**Mohammad Ridho'i, S.Pd., M.Pd.**

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika  
STKIP PGRI Lumajang

Nama **Mohammad Ridho'i, S.Pd., M.Pd.**, seorang Penulis yang Lahir di Lumajang, 20 September 1993, Jawa Timur. Penulis merupakan anak ke-dua dari dua bersaudara dari pasangan bapak Toyon dan Ibu Sukesi. Ia menamatkan pendidikan program Sarjana (S1) di STKIP PGRI Lumajang prodi Pendidikan Matematika dan menyelesaikan program Pasca Sarjana (S2) di Universitas Negeri Malang prodi Pendidikan Matematika.

e-mail : [ridho7798@gmail.com](mailto:ridho7798@gmail.com)

Instagram : [@ridho0993](https://www.instagram.com/ridho0993)

## **BIODATA PENULIS**



**Nur Fitriyah Indraswari, M.Pd.**

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika  
STKIP PGRI Sumenep

Nur Fitriyah Indraswari merupakan anak kedua dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Pamekasan Madura, pada tanggal 18 April 1992. Penulis menempuh jenjang sekolah dasar di SDN Jungcangcang 1 tahun 1998 sampai 2004. Kemudian melanjutkan di SMP Negeri 1 Pamekasan dan lulus tahun 2007. Masih di kota yang sama, penulis melanjutkan di SMA Negeri 1 Pamekasan dari 2007 sampai 2010. Pada jenjang Strata 1, penulis menempuh pendidikan di Universitas Madura dan lulus tahun 2014. Tahun 2015, penulis melanjutkan pendidikan Strata 2 di Universitas Surabaya dengan jurusan yang sama yaitu pendidikan matematika dan lulus tahun 2017. Setelah lulus, awal tahun 2018 penulis bergabung ke STKIP PGRI Sumenep sebagai dosen tetap di prodi pendidikan matematika sampai saat ini.

## **BIODATA PENULIS**



### **I Made Suarsana, S.Pd., M.Si.**

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika  
Fakultas MIPA Universitas Pendidikan Ganesha

I Made Suarsana, S.Pd., M.Si. lahir di Karangasem-Bali, 17 Pebruari 1983. Beliau menyelesaikan pendidikan sarjana di Program Studi S1 Pendidikan Matematika, IKIP Negeri Singaraja (Sekarang: Universitas Pendidikan Ganesha) tahun 2005 dan pendidikan magister di Program Studi S2 Matematika, Institut Teknologi Bandung. Saat ini beliau merupakan dosen tetap PNS di Program Studi S1 Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Ganesha sejak tahun 2006. Mata kuliah yang diampu diantaranya Kalkulus, Geometri Analitik, Matematika Ekonomi, Persamaan Diferensial, Metode Numerik, Aljabar Abstrak dan Analisis Vektor. Beberapa buku ajar yang telah beliau tulis yaitu Geometri Analitik (2014), Aljabar Abstrak (2018) dan Program Linier (2021). Beliau juga sangat aktif melakukan penelitian di bidang Matematika dan Pendidikan Matematika. Tulisan-tulisan beliau beberapa diantaranya telah dipublikasi pada jurnal internasional berputasi seperti di International Journal of Instruction (IJI), Journal of Mathematics Education (JME), dan International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET).

## BIODATA PENULIS



**Eva Nur Ramadhani, S.Si, M.Pd**  
Praktisi Pendidikan bidang Matematika

Penulis lahir di Sleman tanggal 4 Februari 1997. Penulis adalah praktisi pendidikan bidang Matematika. Menyelesaikan pendidikan S1 pada jurusan Matematika Universitas Ahmad Dahlan dan melanjutkan studi S2 pada jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Yogyakarta.

Penulis mulai terjun di dunia pendidikan pada tahun 2018 dan memiliki pengalaman menulis serta publikasi artikel ilmiah di jurnal nasional maupun internasional bereputasi.

## **BIODATA PENULIS**



### **Dr. Soleman Saidi, S.Pd., M.Si.**

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan dan Dosen Pascasarjana Pendidikan Matematika Universitas Khairun

Penulis lahir di Nusa Ambu tanggal 30 Oktober 1977. Penulis adalah dosen tetap pada Dosen Program Studi Pendidikan Matematika. Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Khairun. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan MIPA Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Khairun (1999), melanjutkan S2 pada Jurusan matematika Universitas Gadjah Mada (2006) dan melanjutkan program Doktor pada Universitas Negeri Malang (2019). Penulis menekuni bidang matematika khususnya statistika.

## **BIODATA PENULIS**



**Ahmad Choirul Anam, M.Pd**

Dosen Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah  
Universitas Ibrahimy, Situbondo

Penulis lahir di Banyuwangi pada 02 Juli 1994. Penulis adalah anak pertama dari dua bersaudara yang merupakan dosen Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah Universitas Ibrahimy Situbondo. Menyelesaikan Pendidikan S1 pada program studi Pendidikan Matematika di UIN Sunan Ampel Surabaya, kemudian melanjutkan Pendidikan S2 pada program studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya. Penulis menekuni bidang Pendidikan Matematika, utamanya pada pengajaran, pembelajaran, Statistika dan Teori Bilangan. Karya buku yang telah ditulis dan diterbitkan adalah Buku Matematika kelas XII dan Pedoman untuk Guru Matematika kelas XII yang diterbitkan tahun 2021, serta menulis Buku Matematika Kelas VIII dan Pedoman untuk Guru Matematika Kelas VIII yang diterbitkan pada tahun 2022 oleh Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. Selain itu, juga menulis buku secara kolaboratif berjudul Manajemen Pendidikan dan Pengantar Statistika.

## **BIODATA PENULIS**



### **Hanna Hilyati Aulia, M.Si.**

**Dosen Program Studi Ekonomi Syari'ah Fakultas Ekonomi dan  
Bisnis Islam**

Penulis lahir di Metro Lampung pada 18 Desember 1995. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Ekonomi Syari'ah, IAIN Metro Lampung. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan MIPA Matematika Universitas Jenderal Soedirman dan melanjutkan S2 pada Jurusan FMIPA Matematika Institut Teknologi Bandung peminatan Matematika Industri dan Keuangan. Penulis menekuni pemodelan matematika dalam bidang epidemi dan ekonomi. Penulis menggemari kegiatan pengajaran dan seni sejak bangku sekolah dengan membuat Komik Matematika selama SMA hingga Kuliah.