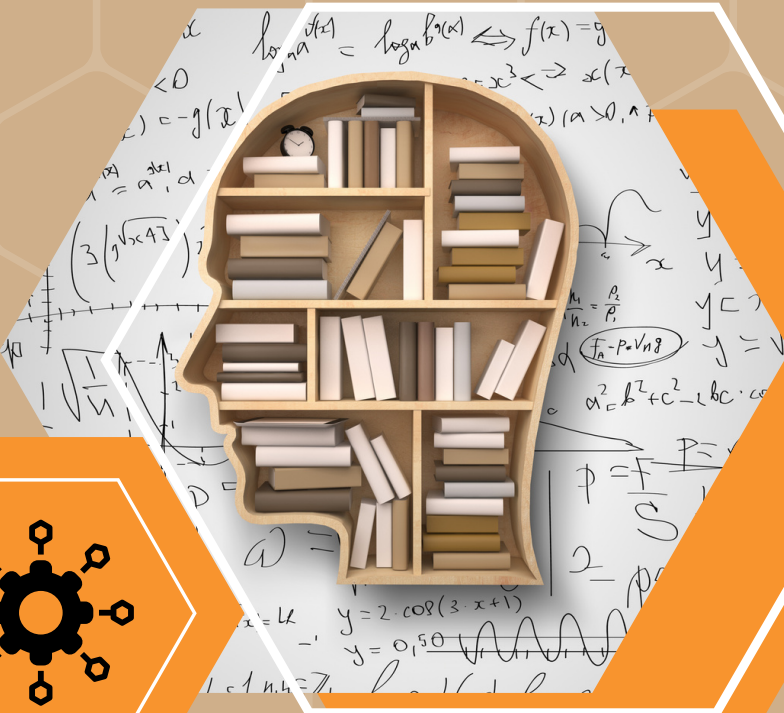


# PROGRAM LINEAR

**Joni Wilson Sitopu, Isna Nugraha, Puji Aryani,  
Pratiwi Dwi Warih Sitaresmi, Tungga Bhimadi Karya,  
Ida Fitriana Ambarsari, Novita Aswan, Nur Rahmawati,  
Rahimullailay, Evi Yulawati, Sulistyowati**



# **PROGRAM LINEAR**

**Joni Wilson Sitopu  
Isna Nugraha  
Puji Aryani  
Pratiwi Dwi Warih Sitaresmi  
Tungga Bhimadi Karyasa  
Ida Fitriana Ambarsari  
Novita Aswan  
Nur Rahmawati  
Rahimullaily  
Evi Yuliawati  
Sulistyowati**



**PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI**



# PROGRAM LINEAR

**Penulis :**

Joni Wilson Sitopu  
Isna Nugraha  
Puji Aryani  
Pratiwi Dwi Warih Sitaresmi  
Tungga Bhimadi Karyasa  
Ida Fitriana Ambarsari  
Novita Aswan  
Nur Rahmawati  
Rahimullaily  
Evi Yuliawati  
Sulistyowati

**ISBN : 978-623-198-184-4**

**Editor :** Ariyanto, M.Pd

**Penyunting :** Tri Putri Wahyui, S.Pd

**Desain Sampul dan Tata Letak :** Atyka Trianisa, S.Pd

**Penerbit :** PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

**Redaksi :**

Jl. Pasir Sebelah No. 30 RT 002 RW 001  
Kelurahan Pasie Nan Tigo Kecamatan Koto Tangah  
Padang Sumatera Barat  
Website : [www.globaleksekutifteknologi.co.id](http://www.globaleksekutifteknologi.co.id)  
Email : [globaleksekutifteknologi@gmail.com](mailto:globaleksekutifteknologi@gmail.com)

Cetakan pertama, Maret 2023

Hak cipta dilindungi undang-undang  
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk  
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.



## KATA PENGANTAR

Puji serta syukur penulis panjatkan atas kehadiran Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan berkat, nikmat, dan karunia-Nya dalam penyelesaian buku ini. Buku Program Linear ini sengaja ditulis untuk digunakan sebagai referensi bagi para pembaca dan mahasiswa. Selain itu, buku ini memberikan permasalahan berupa contoh soal dan pemecahan masalah, sehingga diharapkan dapat membantu memberikan wawasan dan pemahaman lebih baik dari sebelumnya. Sedangkan dari segi kedalaman dan ketajaman materi, penulis tetap mengharapkan pembaca untuk membuka teks aslinya dan lebih banyak waktu untuk diskusi dan latihan soal.

Secara detail pembahasan buku ini meliputi: Konsep Dasar Program, Metode Grafik, Metode Aljabar, Metode Simpleks, Metode Simpleks Direvisi, Metode Branch And Bound, Model Transportasi, Metode North West Corner, Metode Least Cost, Vogel Approximation Method (Vam), Metode Modi.

Materi pokok tersebut dikemas sedemikian rupa sehingga setelah mengikuti kegiatan pembelajaran dengan buku ini, mahasiswa diharapkan mampu memahami buku program linear terkini dengan baik dan benar secara utuh.

Akhir kata, penulis sampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyelesaian buku ini. Penulis juga menyadari bahwa di dalam pembuatan buku ini masih banyak kekurangan, untuk itu penulis menerima saran dan kritik yang sifatnya membangun. Mudah-mudahan buku Kalkulus ini memberikan banyak manfaat.

Padang, Maret 2023

Penulis

## DAFTAR ISI

|                                               |           |
|-----------------------------------------------|-----------|
| <b>KATA PENGANTAR .....</b>                   | <b>i</b>  |
| <b>DAFTAR ISI .....</b>                       | <b>ii</b> |
| <b>DAFTAR GAMBAR .....</b>                    | <b>v</b>  |
| <b>DAFTAR TABEL .....</b>                     | <b>vi</b> |
| <b>BAB 1 KONSEP DASAR PROGRAM LINEAR.....</b> | <b>1</b>  |
| 1.1 Pendahuluan .....                         | 1         |
| 1.2 Persamaan linear .....                    | 2         |
| 1.3 Fungsi-fungsi Dalam Program Linier.....   | 3         |
| 1.4 Masalah Pemrograman Linier .....          | 6         |
| 1.5 Rumusan Masalah Pemrograman Linier .....  | 9         |
| DAFTAR PUSTAKA.....                           | 12        |
| <b>BAB 2 METODE GRAFIK.....</b>               | <b>13</b> |
| 2.1 Pendahuluan .....                         | 13        |
| 2.2 Metode Grafik.....                        | 14        |
| 2.2.1 Langkah-langkah Metode Grafik.....      | 14        |
| 2.2.2 Contoh Soal 1.....                      | 15        |
| 2.2.3 Contoh Soal 2.....                      | 20        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                           | 24        |
| <b>BAB 3 METODE ALJABAR.....</b>              | <b>25</b> |
| 3.1 Pendahuluan .....                         | 25        |
| 3.2 Metode Aljabar.....                       | 25        |
| 3.2.1 Kasus Memaksimumkan Tujuan.....         | 26        |
| 3.2.2 Kasus Meminimumkan Tujuan.....          | 32        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                           | 38        |
| <b>BAB 4 METODE SIMPLEKS.....</b>             | <b>39</b> |
| 4.1 Simpleks Baku .....                       | 39        |
| 4.2 Contoh Masalah .....                      | 44        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                           | 50        |
| <b>BAB 5 METODE SIMPLEKS DIREVISI .....</b>   | <b>51</b> |
| 5.1 Pendahuluan .....                         | 51        |
| 5.2 Formulasi MSD dalam Bentuk Matriks.....   | 53        |

|                                                                        |            |
|------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.3 Contoh Penggunaan MSD .....                                        | 56         |
| 5.4 Soal Latihan .....                                                 | 70         |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                    | 72         |
| <b>BAB 6 METODE BRANCH AND BOUND.....</b>                              | <b>73</b>  |
| 6.1 Integer Linear Programming (Program Linier<br>Bilangan Bulat)..... | 73         |
| 6.2 Metode Branch and Bound.....                                       | 76         |
| 6.3 Analisis Metode Branch and Bound .....                             | 79         |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                    | 81         |
| <b>BAB 7 MODEL TRANSPORTASI .....</b>                                  | <b>83</b>  |
| 7.1 Pendahuluan .....                                                  | 83         |
| 7.2 Model Transportasi.....                                            | 84         |
| 7.3 Penyelesaian Masalah Transportasi.....                             | 88         |
| 7.3.1 Penyelesaian fesibel awal .....                                  | 89         |
| 7.3.2 Proses menuju solusi optimalisasi.....                           | 90         |
| 7.4 Contoh Kasus Masalah Transportasi .....                            | 93         |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                    | 103        |
| <b>BAB 8 NORT WEST CORNER METHOD (NWC) .....</b>                       | <b>105</b> |
| 8.1 Pendahuluan .....                                                  | 105        |
| 8.2 <i>Nort West Corner Method</i> (NWC) .....                         | 107        |
| 8.2.1 Langkah-langkah NWS .....                                        | 107        |
| 8.2.2 Latihan Soal.....                                                | 108        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                    | 116        |
| <b>BAB 9 METODE LEAST COST .....</b>                                   | <b>118</b> |
| 9.1 Pendahuluan .....                                                  | 118        |
| 9.2 Contoh Kasus Seimbang.....                                         | 118        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                    | 126        |
| <b>BAB 10 VOGEL'S APPROXIMATION METHOD (VAM) .....</b>                 | <b>128</b> |
| 10.1 Pendahuluan .....                                                 | 128        |
| 10.2 <i>Vogel's Approximation Method</i> (VAM) .....                   | 129        |
| 10.2.1 Langkah-langkah VAM.....                                        | 129        |
| 10.2.2 Contoh Soal.....                                                | 130        |
| 10.3 Permasalahan Pada VAM.....                                        | 136        |



|                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------|------------|
| 10.3.1 Contoh Soal Persoalan Supply > Demand<br>(Persoalan A)..... | 136        |
| 10.3.2 Contoh Soal Persoalan Supply < Demand<br>(Persoalan B)..... | 141        |
| DAFTAR PUSTAKA .....                                               | 148        |
| <b>BAB 11 METODE MODI (MODIFIED DISTRIBUTION) ....</b>             | <b>149</b> |
| 11.1 Pendahuluan .....                                             | 149        |
| 11.2 Langkah-langkah Metode MODI.....                              | 149        |
| 11.3 Contoh Penyelesaian .....                                     | 151        |
| DAFTAR PUSTAKA.....                                                | 168        |
| <b>BIODATA PENULIS</b>                                             |            |

## DAFTAR GAMBAR

|                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Gambar 4.1 :</b> Tampilan input data pada QM for<br>Windows untuk selanjutnya akan<br>diproses penyelesaiannya menggunakan<br>metode simpleks ..... | 48  |
| <b>Gambar 4.2 :</b> Solusi akhir dengan penyelesaian<br>menggunakan metode simpleks .....                                                              | 48  |
| <b>Gambar 7.1 :</b> Deskripsi jaringan transportasi .....                                                                                              | 86  |
| <b>Gambar 7.2 :</b> Alur Metode Penyelesaian Masalah<br>Transportasi.....                                                                              | 92  |
| <b>Gambar 8.1 :</b> Representasi model transportasi dengan<br>node dan panah.....                                                                      | 105 |

## DAFTAR TABEL

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabel 2.1 :</b> Informasi Sumberdaya Perusahaan.....                               | 16  |
| <b>Tabel 2.2 :</b> Informasi Kandungan Nutrisi .....                                  | 21  |
| <b>Tabel 7.1 :</b> deskripsi jaringan transportasi .....                              | 87  |
| <b>Tabel 8.1 :</b> Biaya distribusi dari pabrik ke-i ke<br>gudang ke-j .....          | 108 |
| <b>Tabel 8.2 :</b> Matriks <i>supply-demand</i> .....                                 | 108 |
| <b>Tabel 8.3 :</b> Pengalokasian awal.....                                            | 109 |
| <b>Tabel 8.4 :</b> Pengalokasian lanjutan .....                                       | 110 |
| <b>Tabel 8.5 :</b> Pengalokasian lanjutan .....                                       | 110 |
| <b>Tabel 8.6 :</b> Pengalokasian lanjutan .....                                       | 111 |
| <b>Tabel 8.7 :</b> pengalokasian lanjutan.....                                        | 112 |
| <b>Tabel 8.8 :</b> Solusi optimal menggunakan NWS .....                               | 113 |
| <b>Tabel 9.1 :</b> Jumlah Suplay Pabrik.....                                          | 118 |
| <b>Tabel 9.2 :</b> Jumlah Permintaan Gudang.....                                      | 118 |
| <b>Tabel 9.3 :</b> Biaya Angkut Pupuk dari Pabrik ke Gudang .....                     | 119 |
| <b>Tabel 9.4 :</b> Tabel Transportasi Awal .....                                      | 119 |
| <b>Tabel 9.5 :</b> Alokasi Biaya Sel Minimum Awal .....                               | 120 |
| <b>Tabel 9.6 :</b> Alokasi Biaya Sel Minumum Kedua.....                               | 121 |
| <b>Tabel 9.7 :</b> Alokasi Biaya Sel Minumum Ketiga.....                              | 122 |
| <b>Tabel 9.8 :</b> Solusi Awal.....                                                   | 123 |
| <b>Tabel 10.1 :</b> Perhitungan nilai <i>penalty</i> awal.....                        | 130 |
| <b>Tabel 10.2 :</b> Alokasi <i>supply</i> dan <i>demand</i> awal .....                | 131 |
| <b>Tabel 10.3 :</b> Perhitungan nilai <i>penalty</i> .....                            | 132 |
| <b>Tabel 10.4 :</b> Alokasi <i>supply</i> dan <i>demand</i> .....                     | 133 |
| <b>Tabel 10.5 :</b> Matriks hasil alokasi metode VAM .....                            | 134 |
| <b>Tabel 10.6 :</b> Persoalan <i>Supply &gt; Demand</i> (A) .....                     | 135 |
| <b>Tabel 10.7 :</b> Perhitungan nilai <i>penalty</i> awal<br>Persoalan A.....         | 136 |
| <b>Tabel 10.8 :</b> Alokasi <i>supply</i> dan <i>demand</i> awal<br>Persoalan A ..... | 137 |
| <b>Tabel 10.9 :</b> Perhitungan nilai <i>penalty</i> Persoalan A .....                | 137 |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabel 10.10 :</b> Alokasi <i>supply</i> dan <i>demand</i> Persoalan A ..... | 138 |
| <b>Tabel 10.11 :</b> Matriks hasil alokasi metode VAM                          |     |
| Persoalan A.....                                                               | 141 |
| <b>Tabel 10.12 :</b> Persoalan <i>Supply &gt; Demand</i> (B) .....             | 142 |
| <b>Tabel 10.13 :</b> Perhitungan nilai <i>penalty</i> awal                     |     |
| Persoalan B .....                                                              | 143 |
| <b>Tabel 10.14 :</b> Alokasi <i>supply</i> dan <i>demand</i> awal              |     |
| Persoalan B.....                                                               | 144 |
| <b>Tabel 10.15 :</b> Perhitungan nilai <i>penalty</i> Persoalan B .....        | 144 |
| <b>Tabel 10.16 :</b> Alokasi <i>supply</i> dan <i>demand</i> Persoalan B ..... | 145 |
| <b>Tabel 10.17 :</b> Matriks hasil alokasi metode VAM                          |     |
| Persoalan B.....                                                               | 146 |
| <b>Tabel 11.1 :</b> Kapasitas produksi pabrik .....                            | 151 |
| <b>Tabel 11.2 :</b> Besar permintaan outlet.....                               | 151 |
| <b>Tabel 11.3 :</b> Biaya transportasi pengiriman produk .....                 | 151 |
| <b>Tabel 11.4 :</b> Fisible awal dengan metode NWC .....                       | 152 |
| <b>Tabel 11.5 :</b> Hasil nilai baris dan kolom pada iterasi 1 .....           | 154 |
| <b>Tabel 11.6 :</b> Indeks Perbaikan pada iterasi 1 .....                      | 156 |
| <b>Tabel 11.7 :</b> Lintasan tertutup pada iterasi 1 .....                     | 157 |
| <b>Tabel 11.8 :</b> Hasil perbaikan biaya alokasi pada                         |     |
| iterasi 1 .....                                                                | 158 |
| <b>Tabel 11.9 :</b> Hasil nilai baris dan kolom pada iterasi 2 .....           | 159 |
| <b>Tabel 11.10 :</b> Indeks Perbaikan pada iterasi 2 .....                     | 159 |
| <b>Tabel 11.11 :</b> Lintasan tertutup pada iterasi 2 .....                    | 160 |
| <b>Tabel 11.12 :</b> Hasil perbaikan biaya alokasi                             |     |
| pada iterasi 2 .....                                                           | 161 |
| <b>Tabel 11.13 :</b> Hasil nilai baris dan kolom pada iterasi 3 .....          | 162 |
| <b>Tabel 11.14 :</b> Indeks Perbaikan pada iterasi 3 .....                     | 163 |
| <b>Tabel 11.15 :</b> Lintasan tertutup pada iterasi 3 .....                    | 164 |
| <b>Tabel 11.16 :</b> Hasil perbaikan biaya alokasi                             |     |
| pada iterasi 3 .....                                                           | 165 |
| <b>Tabel 11.17 :</b> Hasil nilai baris dan kolom pada iterasi 4 .....          | 166 |
| <b>Tabel 11.18 :</b> Indeks Perbaikan pada iterasi 4 .....                     | 166 |



# BAB 1

## KONSEP DASAR PROGRAM LINEAR

*Oleh Joni Wilson Sitopu*

### 1.1 Pendahuluan

Program linear adalah suatu metode penentuan nilai optimum dari suatu persoalan linear. Nilai optimum (maksimal atau minimum) diperoleh dari nilai dalam suatu himpunan penyelesaian persoalan linear (Johannes Supranto (1991). Di dalam persoalan linear terdapat fungsi linear yang bisa disebut sebagai fungsi objektif. Persyaratan, batasan, dan kendala dalam persoalan linear merupakan sistem pertidaksamaan linear. Program linier adalah teknik matematika untuk menemukan solusi optimal untuk masalah yang dapat dinyatakan dengan menggunakan persamaan dan pertidaksamaan linier, Susan Welch dan John C. Comer dalam Syamsi (1989). Jika masalah dunia nyata dapat direpresentasikan secara akurat oleh persamaan matematika program linier, metode tersebut akan menemukan solusi terbaik untuk masalah tersebut.

Dalam beberapa masalah dunia nyata yang kompleks dapat diekspresikan dengan sempurna dalam bentuk seperangkat fungsi linier. Namun demikian, program linier dapat memberikan representasi yang cukup realistis dari banyak masalah dunia nyata, terutama diterapkan dalam perumusan masalah matematis.

Subyek pemodelan dibahas secara singkat dalam konteks regulasi. Masalah regulasi yang dipelajari untuk dipecahkan adalah realitas dari representasi matematis yang sangat sederhana. Dalam pelaksanaan jalur pemodelan, model akan menjadi lebih matematis dan lebih kompleks. Dunia nyata selalu lebih kompleks daripada model. Jadi, dalam mencoba untuk mewakili dunia nyata dengan

lebih akurat, model yang dibangun pasti akan menjadi lebih kompleks. Model hanya boleh serumit yang diperlukan untuk mewakili masalah dunia nyata dengan cukup baik. Oleh karena itu, kompleksitas tambahan yang diperkenalkan dengan menggunakan program linier harus disertai dengan beberapa keuntungan signifikan dalam kemampuan untuk mewakili masalah dan, karenanya, dalam kualitas solusi yang dapat diperoleh.

Menurut Siswanto (2007) program linear adalah sebagai metode matematis untuk menentukan solusi optimal dengan memaksimalkan atau meminimalkan fungsi tujuan dari sekumpulan kendala terhadap suatu susunan kendala. Tujuan dari program linier adalah untuk memecahkan masalah memaksimalkan atau meminimalkan untuk mendapatkan solusi yang optimal.

## 1.2 Persamaan linear

Semua persamaan dan pertidaksamaan dalam program linier, menurut definisi, harus linier. Persamaan linier memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$$

Secara umum,  $a$  disebut koefisien persamaan, atau disebut parameter. Hal penting yang perlu diketahui tentang koefisien adalah bahwa koefisien memiliki nilai tetap, berdasarkan sifat dasar dari masalah yang sedang dipecahkan.  $x$  disebut variabel persamaan, dapat mengambil rentang nilai dalam batas yang ditentukan oleh batasan.

Persamaan dan pertidaksamaan linier sering ditulis menggunakan notasi penjumlahan, yang memungkinkan untuk menulis persamaan dalam bentuk yang jauh lebih ringkas. Persamaan linear di atas, dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

Dimana huruf  $i$  adalah indeks, atau penghitung, yang dimulai dalam kasus ini pada 1 sampai ke  $n$ . Ada istilah dalam

jumlah untuk setiap nilai indeks. Sama seperti variabel tidak harus ditentukan dengan huruf  $x$ , indeks tidak harus berupa huruf  $i$ .

### 1.3 Fungsi-fungsi Dalam Program Linier

Menurut Siswanto (2007) terdapat tiga unsur utama komponen program linear yaitu :

#### 1. Variabel keputusan

Variabel keputusan adalah variabel yang mempengaruhi nilai tujuan yang ingin dicapai. Langkah awal sebelum menentukan fungsi tujuan dan fungsi kendala.

Seperti disebutkan sebelumnya, berbagai simbol, dengan subskrip dan superskrip sesuai kebutuhan, dapat digunakan untuk mewakili variabel program linear (LP).

Secara umum, variabel LP dapat dituliskan sebagai berikut ;

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

#### 2. Fungsi tujuan

Fungsi tujuan dimaksimalkan atau diminimalkan terhadap fungsi kendala yang ada.

Tujuan dari masalah program linier adalah untuk memaksimalkan atau meminimalkan beberapa nilai numerik. Nilai ini mungkin merupakan nilai bersih yang diharapkan dari suatu mungkin biaya proyek.

Fungsi tujuan menunjukkan bagaimana setiap variabel berkontribusi terhadap nilai yang akan dioptimalkan dalam memecahkan masalah.

Fungsi tujuan mengambil bentuk umum berikut:

Memaksimalkan atau meminimalkan

$$Z = \sum_{i=1}^n c_i X_i$$

di mana ;

$c_i$  = koefisien fungsi tujuan yang sesuai dengan variabel ke- $i$ ,  
dan

$X_i$  = variabel keputusan ke- $i$ .



Koefisien fungsi tujuan menunjukkan kontribusi nilai fungsi tujuan dari satu unit variabel yang sesuai.

Misalnya, jika fungsi tujuan adalah untuk memaksimalkan nilai dari suatu proyek, dan  $X_i$  adalah aktivitas yang mungkin ke- $i$  dalam proyek, maka  $c_i$  (koefisien fungsi tujuan yang sesuai dengan  $X_i$ ) memberikan nilai bersih yang dihasilkan oleh satu unit aktivitas.

Sebagai contoh lain, jika masalahnya adalah meminimalkan biaya untuk mencapai beberapa tujuan,  $X_i$  mungkin adalah jumlah sumber daya yang digunakan untuk mencapai tujuan. Dalam hal ini,  $c_i$  akan menjadi biaya penggunaan satu unit sumber daya  $i$ .

Secara umum fungsi tujuan di atas menjelaskan bahwa ada koefisien dalam fungsi tujuan yang sesuai dengan setiap variabel. Tentu saja, beberapa variabel mungkin tidak berkontribusi pada fungsi tujuan. Dalam hal ini, dapat dianggap variabel memiliki koefisien nol, atau dapat menganggap variabel tidak berada dalam fungsi tujuan sama sekali.

### 3. Fungsi kendala

Fungsi kendala untuk model program linier juga harus merupakan fungsi linier. (Dumairy, 2012).

Batasan menentukan kemungkinan nilai yang mungkin diambil oleh variabel dari masalah program linier. Biasanya mewakili kendala sumber daya, atau tingkat minimum atau maksimum dari beberapa aktivitas atau kondisi.

Secara umum fungsi kendala dapat dituliskan sebagai berikut ;

Subjek to  $\sum_{i=1}^n a_{j,i} b_i \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$

dimana  $X_i$  = variabel keputusan ke- $i$ ,

$a_{j,i}$  = koefisien pada  $X_i$  dalam kendala  $j$ , dan

$b_j$  = koefisien ruas kanan pada kendala  $j$ .

dimana  $j$  adalah indeks yang di gunakan dari 1 sampai  $m$ , dan setiap nilai  $j$  sesuai dengan kendala. Dengan demikian, persamaan di atas mewakili  $m$  kendala (persamaan, atau, lebih tepatnya, ketidaksetaraan) dengan bentuk ini. Sumber daya kendala adalah jenis kendala yang umum. Dalam sumber daya kendala, koefisien  $a_{ij}$  menunjukkan jumlah sumber daya  $j$  yang digunakan untuk setiap unit aktivitas  $i$ , yang diwakili oleh nilai variabel  $X_i$ . Sisi kanan kendala ( $b_j$ ) menunjukkan jumlah total sumber daya  $j$  yang tersedia untuk proyek.

Batasan di atas ditulis sebagai batasan kurang dari atau sama, batasan lebih besar dari atau sama juga dapat digunakan. Batasan yang lebih besar dari atau sama selalu dapat dikonversi menjadi batasan yang lebih kecil atau sama dengan mengalikannya dengan  $-1$ . Demikian pula, kendala kesetaraan dapat ditulis sebagai dua pertidaksamaan, kendala kurang dari atau sama dan kendala lebih besar dari atau sama.

#### **4. Fungsi non-negatif**

Fungsi yang menyatakan bahwa setiap variabel yang terdapat dalam model program linier tidak boleh negatif. Secara matematis ditulis sebagai  $x_1, x_2, \dots, x_j \geq 0$

Variable program linier harus selalu mengambil nilai non-negatif (yaitu, variabel harus lebih besar atau sama dengan nol). Dalam kebanyakan kasus, di mana, misalnya, variabel mungkin mewakili tingkat serangkaian aktivitas atau jumlah beberapa sumber daya yang digunakan, persyaratan non-negatif ini akan masuk akal, bahkan perlu. Dalam kasus yang jarang terjadi di mana yang sebenarnya ingin mengizinkan variabel mengambil nilai negatif, ada "trik" formulasi tertentu yang dapat digunakan. Pada fungsi non-negatif semua variabel yang akan di gunakan hanya perlu mengambil nilai non-negatif. Bagaimanapun, batasan non-negatif adalah

bagian dari semua formulasi LP, dan harus selalu memasukkannya ke dalam formulasi LP.

Dapat ditulis sebagai berikut:

$$X_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

di mana ;

$X_i$  = variabel keputusan ke- $i$

## 1.4 Masalah Pemrograman Linier

Masalah program linear memiliki bentuk umum berikut:

Fungsi Tujuan :

memaksimalkan atau meminimalkan  $Z = \sum_{i=1}^n c_i X_i$

Fungsi Kendala :

$$\sum_{i=1}^n a_{j,i} b_i \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

di mana

$X_i$  = variabel keputusan ke- $i$ ,

$c_i$  = koefisien fungsi tujuan yang sesuai dengan variabel ke- $i$ ,

$a_{j,i}$  = koefisien pada  $X_i$  dalam kendala  $j$ , dan

$b_j$  = koefisien ruas kanan pada kendala  $j$

(dalam Nasruddin., dkk., (2022)).

Dalam program linier, tujuannya selalu untuk memaksimalkan atau meminimalkan beberapa fungsi linier dari variabel keputusan, yaitu ;

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

Fungsi ini disebut fungsi tujuan. Dirumuskan sebagai minimalisasi atau maksimalisasi. dalam mengkonversi dari satu ke yang lain adalah hal yang sepele baik dari sudut pandang pemodelan (baik meminimalkan biaya atau memaksimalkan keuntungan) dan dari sudut pandang analisis (baik memaksimalkan atau meminimalkan). Dalam matematika program linier, biasanya akan dianggap tujuannya adalah salah satu memaksimalkan fungsi

tujuan. Selain fungsi tujuan, juga memiliki kendala. Beberapa kendala ini sangat sederhana, seperti persyaratan bahwa beberapa variabel keputusan harus non-negatif. Yang lain lebih terlibat. Tetapi dalam semua kasus, kendala terdiri dari persamaan atau pertidaksamaan yang terkait dengan beberapa kombinasi linier dari variabel keputusan:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n \left. \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b.$$

Sangat mudah untuk mengubah batasan dari satu bentuk ke bentuk lainnya. Misalnya, dalam persamaan kendala

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n \leq b$$

Dapat dikonversi ke persamaan kendala dengan menambahkan variabel non-negatif,  $w$ , yang disebut *slack variable*:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n = b, w \geq 0$$

Di sisi lain, persamaan kendala

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n = b$$

Dapat dikonversi ke bentuk pertidaksamaan dengan memasukkan dua kendala pertidaksamaan:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n \leq b$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n \geq b$$

Oleh karena itu, dalam beberapa hal, tidak ada preferensi apriori tentang bagaimana seseorang mengajukan kendala. Namun, ada presentasi untuk mengajukan ketidaksamaan sebagai kurang dari dan untuk menetapkan bahwa semua variabel keputusan menjadi non-negatif. Oleh karena itu, masalah program linier dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Maksimalkan } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{Kendala } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} \leq b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Pada program linier yang dirumuskan dengan cara ini sebagai program linier dalam bentuk standar. Dimana  $m$  menunjukkan jumlah kendala, dan  $n$  menunjukkan jumlah variabel keputusan.

Algoritma pada dasarnya memperluas metode simpleks yang direvisi. Ini dapat dicirikan sebagai ekstensi yang memungkinkan lebih dari  $m$  variabel untuk menggunakan beberapa terminologi terkait. Karena dekat dengan pemrograman linier (LP), hal ini dapat menggabungkan banyak kemajuan terbaru dalam teknologi LP ke dalam implementasi. Hasilnya adalah program komputer yang memiliki banyak kemampuan kode LP yang efisien dan dapat menangani suku non-linier dengan kekuatan prosedur quasi-Newton. (dalam Joni Wilson Sitopu., dkk, 2019).

Sebuah proposal nilai khusus untuk variabel keputusan disebut solusi. Suatu solusi  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  disebut layak jika memenuhi semua kendala. Disebut optimal jika selain itu mencapai maksimum yang diinginkan. Beberapa masalah tidak mungkin dilakukan, seperti yang diilustrasikan oleh contoh berikut:

Maksimumkan  $5x_1 + 4x_2$

kendala  $x_1 + x_2 \leq 2$

$$-2x_1 - 2x_2 \leq -9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Pandang, bila kendala kedua disederhanakan diperoleh,  $x_1 + x_2 \geq 4,5$ , yang bertentangan dengan kendala pertama. Jika

suatu masalah tidak memiliki solusi yang layak, maka masalah itu sendiri disebut tidak layak. Di persoalan lain dari masalah yang tidak layak, orang menemukan masalah yang tidak terbatas. Masalah tidak terbatas jika memiliki solusi yang layak dengan nilai tujuan yang besar secara arbitrer.

Misalnya,

Maksimalkan  $x_1 - 4x_2$

Kendala  $-2x_1 + x_2 \leq -1$

$-x_1 - 2x_2 \leq -2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Di sini, dapat diatur  $x_1$  ke nol dan ambil  $x_1$  menjadi besar. Selama  $x_1$  lebih besar dari 2 solusi akan layak, dan semakin besar fungsi tujuannya. Oleh karena itu, masalahnya tidak terbatas. Selain menemukan solusi optimal untuk masalah program linier.

Perumusan masalah, dalam masalah dunia nyata ke dalam persamaan matematika dari program linier dan menafsirkan solusi untuk program linier, dapat diselesaikan dengan menggunakan komputer.

## 1.5 Rumusan Masalah Pemrograman Linier

Masalah program linier (LP) terdiri dari variabel keputusan, fungsi tujuan, kendala, dan pembatasan non-negatif. Variabel keputusan,  $x$ , dan  $y$ , memutuskan output dari masalah LP dan mewakili solusi akhir. Fungsi tujuan,  $Z$ , adalah fungsi linier yang perlu dioptimalkan (dimaksimalkan atau diminimalkan) untuk mendapatkan solusi. Kendala adalah batasan yang dikenakan pada variabel keputusan untuk membatasi nilainya. Variabel keputusan harus selalu memiliki nilai non-negatif yang diberikan oleh pembatasan non-negatif. Rumus umum dari masalah program linier adalah sebagai berikut :

Fungsi Tujuan :  $Z = ax + by$

Fungsi Kendala :  $cx + dy \leq e, fx + gy \leq h$

Pertidaksamaan juga bisa berupa " $\geq$ "  
Pembatasan non-negatif :  $x \geq 0, y \geq 0$

Pemecahan masalah program linier adalah pertama merumuskan masalah menggunakan data yang diberikan.

Berikut ini adalah langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah program linier :

1. Identifikasi variabel keputusan.
2. Merumuskan fungsi tujuan. diminimalkan atau dimaksimalkan.
3. Mengidentifikasi dan merumuskan kendala.
4. Variable keputusan lebih besar atau sama dengan 0. (menuliskan batasan non-negatif)
5. Langkah 5: Memecahkan masalah pemrograman linier menggunakan beberapa metode.

Satu-satunya cara untuk mempelajari cara memformulasi masalah pemrograman linier adalah dengan melakukannya.

Perhatikan contoh masalah berikut ;

Contoh :

Sebuah perusahaan memproduksi dua jenis barang (A dan B). Sumber daya yang dibutuhkan untuk memproduksi A dan B ada dua, yaitu waktu kerja mesin untuk pemrosesan otomatis dan waktu kerja pengrajin untuk finishing tangan.

Tabel di bawah ini memberikan jumlah menit yang diperlukan untuk setiap jenis :

| Jenis   | Waktu Kerja Mesin | Waktu Kerja Pengrajin |
|---------|-------------------|-----------------------|
| Jenis A | 13                | 20                    |
| Jenis B | 19                | 29                    |

Perusahaan memiliki waktu kerja mesin 40 jam yang tersedia di minggu berikutnya dan waktu kerja pengrajin 35 jam.

Waktu kerja mesin dihitung biayanya \$10 per jam dan waktu kerja pengrajin dihitung biayanya \$2 per jam. Waktu istirahat mesin dan pengrajin tidak dikenakan biaya. Pendapatan yang diterima untuk setiap jenis yang diproduksi (semua produksi dijual) adalah \$20 untuk A dan \$30 untuk B. Perusahaan memiliki kontrak khusus untuk memproduksi 10 jenis A per minggu untuk pelanggan tertentu.

Merumuskan masalah memutuskan berapa banyak yang akan diproduksi per minggu sebagai program linier.

Misalkan ;

$x$  adalah jumlah jenis dari A

$y$  adalah jumlah jenis dari B

Maka

Fungsi tujuan :

Memaksimalkan  $Z = 20x + 30y - 10(\text{waktu kerja mesin}) - 2(\text{waktu kerja pengrajin})$

Fungsi kendala :

$13x + 19y \leq 40(60)$  waktu kerja mesin

$20x + 29y \leq 35(60)$  waktu kerja pengrajin

Fungsi non-negatif

$x \geq 10$  kontrak

$x, y \geq 0$

sehingga

Fungsi tujuan menjadi

memaksimalkan

$$Z = 20x + 30y - 10 \left( \frac{13x+19y}{60} \right) - 2 \left( \frac{20x+29y}{60} \right)$$

$$Z = 17,1667 x + 25,8667 y$$

Fungsi kendala :

$13x + 19y \leq 2400$

$20x + 29y \leq 2100$

Fungsi non-negatif

$x \geq 10$

$x, y \geq 0$



## DAFTAR PUSTAKA

- David G. Luenberger and Yinyu Ye, 2008. *Linear and Nonlinear Programming*. Springer Science+Business Media, LLC. Fourth Edition Stanford University. Stanford, CA, USA
- Dumairy. 2012. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.
- George B. Dantzig and Mukund N. Thapa, 1997. *Linear Programming, 1: Introduction*, Springer. Verlag Newyork. Berlin Heldelberg
- Johannes Supranto. 1991. *Riset Operasii untuk Pengambilan Keputusan*. Jakarta: Raja Grafindo Persada.
- Nasruddin, Lulut Alfari, Agung Prasetyo, Ichsan, Nurul Ainun Fajriah, Joni Wilson Sitopu, Elfira Rahmadani, Syahrani Sirait, La Ode Asmin, Agustin Fatmawati, Anim, Ely Syafitri, 2022. *Matematika Untuk Perguruan Tinggi*. PT. Global Eksekutif Teknologi. Padang.
- Siswanto. 2007. *Operations Research Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Sitopu, J.W., dkk., 2019. 'Developing an Exact Method for Solving Non Linear Integer Goal Programming Problems Developing an Exact Method for Solving Non Linear Integer Goal Programming Problems', *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* [Preprint]. doi:10.1088/1742-6596/1255/1/012086.
- Sitopu, J.W., dkk., 2020. Neighbourhood Based Search Approach for Solving A Large Scale of NonConvex Mixed-Integer Non Linear Programming Problems *International Journal of Advanced Science and Technology* Vol. 29, No.4, (2020), pp. 2189-2200.

# BAB 2

## METODE GRAFIK

*Oleh Isna Nugraha*

### 2.1 Pendahuluan

Program Linear merupakan salah satu metode dalam *operations research* yang berguna dalam pengambilan keputusan menggunakan pendekatan kuantitatif. Program Linear adalah suatu model umum yang bisa digunakan untuk pemecahan masalah pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal. Masalah muncul apabila seorang pengambil keputusan diharuskan untuk memilih atau menentukan tingkat setiap kegiatan yang akan dilakukannya, dimana setiap kegiatan membutuhkan sumberdaya yang sama dan jumlahnya terbatas. Sebagai contoh, dapat digambarkan keadaan bagian produksi suatu perusahaan terdapat masalah dalam penentuan tingkat produksi masing-masing jenis produk dengan memperhatikan batasan faktor-faktor produksi seperti mesin, karyawan, bahan baku, dan sebagainya untuk memperoleh keuntungan yang maksimal atau biaya yang minimal (Yusgiantoro, 2014). Program Linear digunakan untuk memaksimalkan atau meminimalkan fungsi tujuan, dengan keterbatasan faktor sumber daya sebagai *constraints*.

Program Linear memiliki 4 (empat) ciri tertentu yang melekat, yaitu :

1. Penyelesaian masalah mengarah pada pencapaian tujuan maksimum atau minimum
2. *Constraints* yang ada membatasi tingkat pencapaian tujuan
3. Ada beberapa pilihan penyelesaian
4. Model matematis bersifat linear

Ada tiga elemen penting dalam Program Linear (Nigusman, 2018) yaitu:

1. Variabel keputusan (*decision variables*):  $X_1, X_2, \dots, X_n$  yaitu variabel yang nilainya ditentukan untuk keputusan.
2. Fungsi tujuan (*objective function*):  $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  yaitu fungsi yang akan dioptimalkan (dimaksimasi atau diminimasi).
3. Pembatasan (*constraints*):  $c_i(X_1, X_2, \dots, X_n) < b_i$  adalah pembatas-pembatas yang harus dipenuhi.

Dalam menyelesaikan masalah dengan menggunakan Program Linear, ada metode yang bisa dipakai yaitu metode grafik. Metode grafik hanya bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah fungsi tujuan dimana variabel keputusan sama dengan dua. Dalam Bab ini, akan dipelajari Program Linear dengan metode grafik untuk fungsi tujuan maksimasi dan minimasi.

## 2.2 Metode Grafik

Metode grafik dapat digunakan untuk pemecahan masalah program linear yang hanya memiliki dua variabel. Grafik disusun dari persamaan yang telah diformulasikan sehingga akan didapatkan titik-titik sebagai solusi, yang merupakan hasil dari perpotongan garis. Apabila dalam suatu pemrograman linear terdapat lebih dari 2 variabel, yaitu misalnya tiga variabel  $X_1, X_2$  dan  $X_3$ , maka metode grafik ini tidak dapat digunakan.

### 2.2.1 Langkah-langkah Metode Grafik

Berikut ini adalah langkah-langkah pemecahan dengan metode grafik (Asmara dkk., 2018):

1. Gambarkan garis-garis kendala pada sumbu koordinat.
2. Tentukan daerah dalam bidang koordinat yang memenuhi semua kendala (daerah feasible), kemudian tentukan semua titik daerah feasible tersebut.

3. Membuat grafik untuk kendala-kendala yang ada dalam suatu bagian.
4. Menentukan daerah kelayakan solusi pada grafik tersebut. Daerah layak dapat dilihat dari pertidaksamaan pada kendala. Apabila kendala dalam bentuk  $\leq$ , maka daerah arsiran terjadi pada bagian kiri bawah, tetapi apabila bentuk pertidaksamaan  $\geq$ , maka arsiran dilakukan ke kanan atas. Apabila bentuk persamaan ( $=$ ), maka daerah layak terjadi pada garis tersebut (berimpit).
5. Hitung nilai fungsi tujuan untuk semua titik sudut daerah layak. Untuk solusi optimal, pilih koordinat titik yang mempunyai nilai terbesar untuk fungsi tujuan maksimasi, dan nilai fungsi terkecil untuk tujuan minimasi.

Pemecahan persoalan Program Linear dengan metode grafik ini dibagi 2 (dua) kasus, yaitu :

- a. Kasus Maksimisasi.
- b. Kasus Minimisasi.

### 2.2.2 Contoh Soal 1

**(1) Kasus Maksimisasi** : kasus pemecahan persoalan Program Linear yang bertujuan mencari seluruh kemungkinan pemecahan yg memberikan nilai tujuan maksimum.

Suatu pabrik menghasilkan 2 barang, yaitu Barang A dan Barang B. Masing-masing jenis barang membutuhkan sumber daya seperti terlihat pada Tabel 2.1.

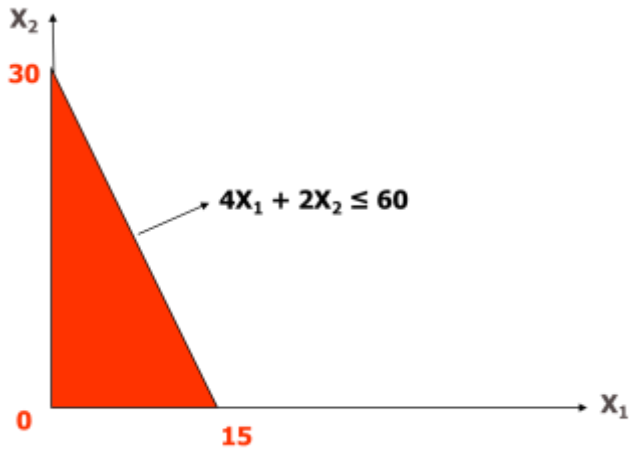
**Tabel 2.1 : Informasi Sumberdaya Perusahaan**

| Sumber Daya     | Barang A | Barang B | Kapasitas Sumber Daya |
|-----------------|----------|----------|-----------------------|
| Bahan           | 4        | 2        | 60                    |
| Mesin           | 2        | 4        | 48                    |
| Laba/unit       | 8.000    | 6.000    | Maksimum<br>Z         |
| Peubah Kegiatan | $X_1$    | $X_2$    |                       |

- a. Fungsi Tujuan :  
Maksimumkan  $Z = 8X_1 + 6X_2$  (Dalam Rp 1000).
- b. Fungsi Pembatas :  
Bahan :  $4X_1 + 2X_2 \leq 60$   
Mesin :  $2X_1 + 4X_2 \leq 48$   
 $X_1, X_2 \geq 0$

**Langkah-langkah penyelesaian :**

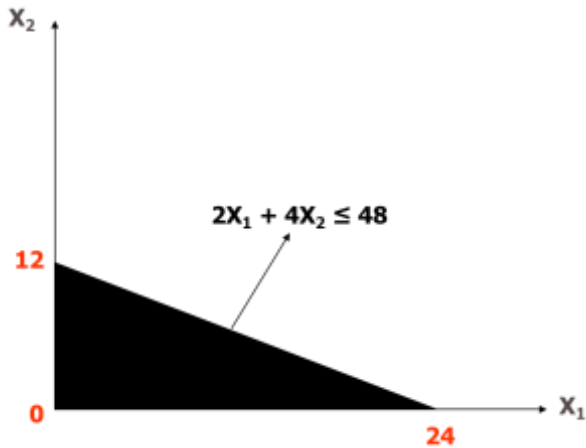
1. Gambarkan semua persamaan fungsi pembatas pada grafik dua dimensi.
- a.  $4X_1 + 2X_2 \leq 60$   
 $X_1 = 0$ , sehingga  $2X_2 \leq 60 \rightarrow X_2 \leq 30$   
 $X_2 = 0$ , sehingga  $4X_1 \leq 60 \rightarrow X_1 \leq 15$



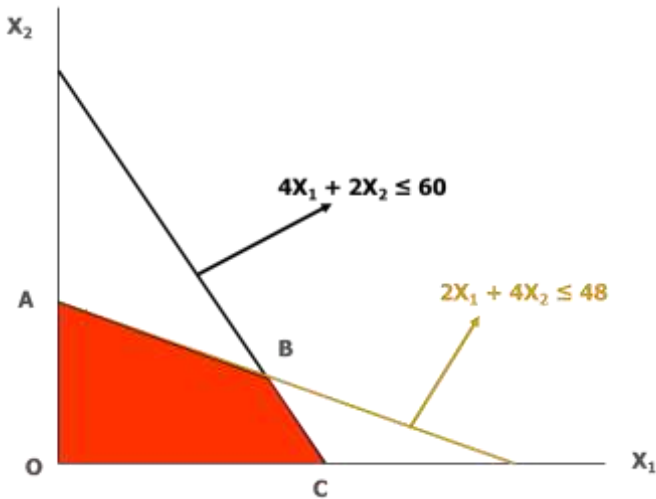
b.  $2X_1 + 4X_2 \leq 48$

$X_1 = 0$ , maka  $4X_2 \leq 48 \Rightarrow X_2 = 12$

$X_2 = 0$ , maka  $2X_1 \leq 48 \Rightarrow X_1 = 24$



Gambar Fungsi Pembatas Gabungan :



2. Menggambar Fungsi Tujuan pada grafik dua dimensi.

$$Z = 8X_1 + 6X_2 \rightarrow 6X_2 = Z - 8X_1$$

$$X_2 = Z/6 - 8/6X_1 \rightarrow X_2 = Z/6 - 4/3X_1$$

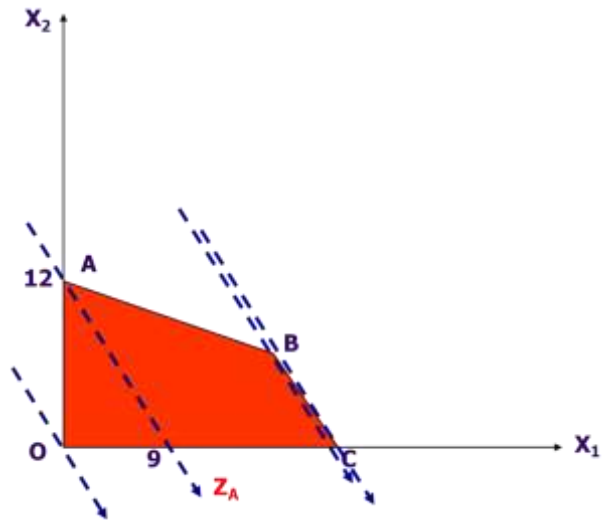
$$\Delta X_2 = 4; \Delta X_1 = 3$$

Jika :  $\Delta X_2 = 12$  sehingga  $\Delta X_1 = 9$

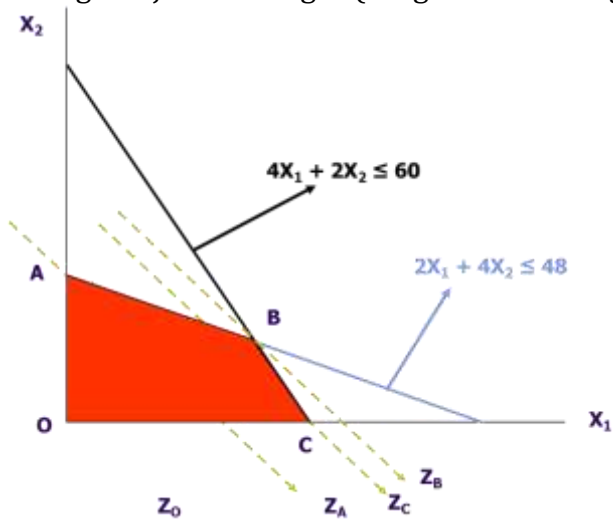
Menggambar fungsi tujuan :

$$Z = 8X_1 + 6X_2$$

$$\Delta X_2 = 12 \text{ dan } \Delta X_1 = 9$$



Gambar Fungsi Tujuan Gabungan (Langkah 1 dan Langkah 2):



Wilayah optimum adalah OABC.

1. Titik  $O$  :  $x_1 = 0$  dan  $x_2 = 0$ ; Jadi  $Z_0 = 0$
2. Titik  $A$  :  $x_1 = 0$  dan  $x_2 = 12$ ;



$$\begin{aligned}\text{Jadi } Z_A &= 8.000(0) + 6.000(12) \\ &= 72000\end{aligned}$$

3. Titik C :  $X_1 = 15$  dan  $X_2 = 0$

$$\begin{aligned}\text{Jadi } Z_C &= 8.000(15) + 6.000(0) \\ &= 120.000\end{aligned}$$

4. Titik B adalah perpotongan Pers (1) dan Pers (2)

$$\text{Pers (1) : } 4 X_1 + 2 X_2 \leq 60 \text{ dan}$$

$$\text{Pers (2) : } 2 X_1 + 4 X_2 \leq 48$$

Substitusi persamaan 1 dan persamaan 2 :

$$4 X_1 + 2 X_2 = 60 \times 2 \rightarrow 8 X_1 + 4 X_2 = 120$$

$$2 X_1 + 4 X_2 = 48 \times 1 \rightarrow 2 X_1 + 4 X_2 = 48$$

-----

$$6X_1 = 72$$

$$X_1 = 12$$

$$2 (12) + 4 X_2 = 48 \rightarrow X_2 = (48 - 24) / 2 = 6$$

$$Z = 8 X_1 + 6 X_2$$

$$\begin{aligned}\text{Jadi : } Z &= 8.000 (12) + 6.000 (6) \\ &= 132000\end{aligned}$$

Kesimpulan :

Optimal pada titik B yaitu Barang A ( $X_1$ ) harus diproduksi sebesar 12 unit per hari dan Barang B ( $X_2$ ) sebesar 6 unit perhari agar diperoleh laba yang maksimal yaitu sebesar Rp 132.000,-

### 2.2.3 Contoh Soal 2

**(2) Kasus Minimisasi** : kasus pemecahan masalah program linear yang bertujuan memberikan nilai solusi objektif minimum.

Seorang peternak mendapat suatu masalah sebagai berikut : setiap kambing peliharaan agar sehat harus diberi makan yang mengandung paling sedikit : 27, 21, dan 30 satuan nutrisi jenis A, B, dan C setiap harinya. Dua jenis makanan  $F_1$  dan  $F_2$  diberikan kepada kambing peliharaan tersebut. Satu gram makanan jenis  $F_1$  mengandung nutrisi jenis A, B, dan C masing-masing sebesar 3, 1,

dan 1 satuan. Sedangkan satu gram makanan jenis  $F_2$  mengandung nutrisi jenis A, B, dan C masing-masing 1, 1, dan 2 satuan. Harga satu gram  $F_1$  dan  $F_2$  masing-masing sebesar Rp 40.000 dan Rp 20.000.-

Peternak tersebut harus mengambil keputusan apakah membeli satu jenis makanan saja atau keduanya kemudian mencampurnya. Tujuan adalah agar jumlah pengeluaran peternak tersebut minimum.

### 1. Merumuskan Tabel Persoalan

**Tabel 2.2 : Informasi Kandungan Nutrisi**

| Nutrisi  | Kandungan Nutrisi |        | Jumlah Nutrisi  |
|----------|-------------------|--------|-----------------|
|          | $F_1$             | $F_2$  |                 |
| A        | 3                 | 1      | 27              |
| B        | 1                 | 1      | 21              |
| C        | 1                 | 1      | 30              |
| Harga/gr | 40 000            | 20 000 | Minimumkan<br>Z |
| Variabel | $X_1$             | $X_2$  |                 |

### 2. Menentukan Fungsi Tujuan dan Fungsi Kendala.

#### 1) Fungsi Tujuan :

$$\text{Minimumkan : } Z = 40\,000 X_1 + 20\,000 X_2$$

#### 2) Fungsi Pembatas :

$$\text{Persamaan 1 : } 3X_1 + X_2 \geq 27$$

$$\text{Persamaan 2 : } X_1 + X_2 \geq 21$$

$$\text{Persamaan 3 : } X_1 + 2X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

### 3. Wilayah optimum :

$$1) \text{ Titik O : } X_1 = 0 \text{ dan } X_2 = 0; Z_0 = 0$$

$$2) \text{ Titik A : } X_1 = 0 \text{ dan } X_2 = 27$$

$$\begin{aligned} Z_A &= 40.000(0) + 20.000(27) \\ &= 540000.- \end{aligned}$$

$$3) \text{ Titik B : } X_1 = 3 \text{ dan } X_2 = 18$$

Substitusi Pers (1) dan Pers (2)

$$3X_1 + X_2 = 27$$

$$X_1 + X_2 = 21 \quad -$$

$$2X_1 = 6$$

$$X_1 = 3$$

$$3X_1 + X_2 = 27 \rightarrow 3(3) + X_2 = 27$$

$$X_2 = 18$$

$$Z_B = 40000(3) + 20000(18) \\ = 480000.-$$

4) Titik C :  $X_1 = 12$  dan  $X_2 = 9$

Substitusi Pers (2) dan Pers (3)

$$X_1 + X_2 = 21 \quad (\times 2) \rightarrow 2X_1 + 2X_2 = 42$$

$$X_1 + 2X_2 = 30 \quad (\times 1) \rightarrow \underline{X_1 + 2X_2 = 30} \quad - \\ X_1 = 12$$

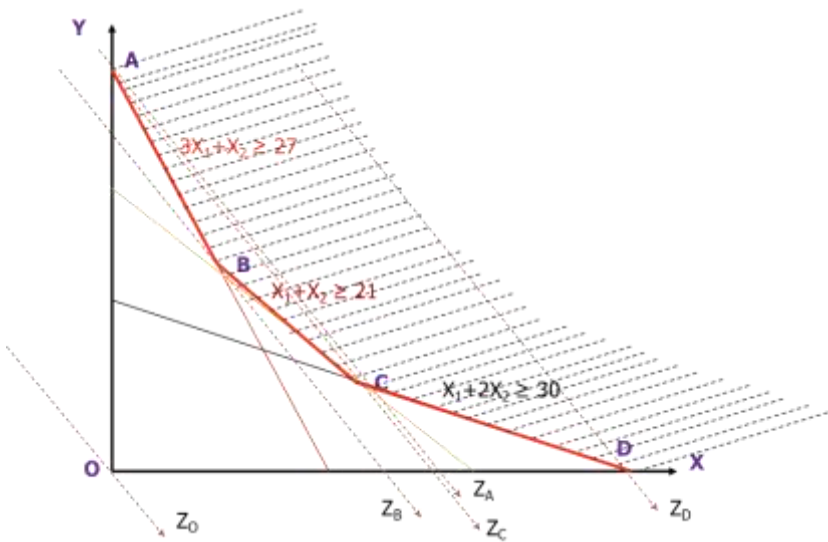
$$X_1 + 2X_2 = 30 \rightarrow 12 + 2X_2 = 30$$

$$X_2 = 9$$

$$Z_C = 40000(12) + 20000(9) \\ = 660000.-$$

5) Titik D :  $X_1 = 30$  dan  $X_2 = 0$

$$Z_D = 40000(30) + 20000(0) \\ = 12000000.-$$



Kesimpulan :

Pengeluaran minimum peternak jika membeli makanan kambing A = 3 satuan dan makanan kambing B = 12 satuan dengan  $Z_{\min} = \text{Rp } 480.000.-$

## DAFTAR PUSTAKA

- Asmara, T., Rahmawati, M., Aprilla, M., Harahap, E., & Darmawan, D. 2018. Strategi Pembelajaran Pemrograman Linier Menggunakan Metode Grafik Dan Simpleks. *Teknologi Pembelajaran*, 3(1).
- Ngusman. 2018. Perencanaan Jumlah Produksi Optimum Dengan Metode Linear Programing Pada Ud Muktijaya Cor Di Ciamis. *Jurnal Media Teknologi* Vol.5 No.1, 1-14.
- Yusgiantoro, P. 2014. *Ekonomi pertahanan: Teori dan praktik*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.

# BAB 3

## METODE ALJABAR

*Oleh Puji Aryani*

### 3.1 Pendahuluan

Pemrograman linear memiliki dua ciri utama, yaitu fungsi tujuan dan fungsi kendala. Fungsi tujuan hanya terdiri dari satu tujuan saja, sedangkan fungsi kendala terdiri dari banyak fungsi (*n function*). Metode pemrograman linear merupakan salah satu cara yang digunakan untuk menggambarkan suatu pemecahan permasalahan ekonomi bila sumber-sumber daya ekonomi yang terbatas dialokasikan secara optimal di antara berbagai kegiatan-kegiatan pilihan. Fungsi tersebut menyatakan bagaimana sumber-sumber dibatasi dan bagaimanakah alokasinya berjalan secara lengkap berlangsung secara linear. Dengan metode linear programming memungkinkan suatu manajemen organisasi atau perusahaan membuat keputusan bagaimana penggunaan sumber-sumber yang paling efektif untuk mencapai tujuan yang maksimal.

### 3.2 Metode Aljabar

Pemrograman linear bisa dilakukan dengan metode aljabar. Pemrograman dengan metode aljabar adalah dengan cara substitusi antar persamaan linear pada fungsi kendala dan tujuan. Prinsip yang digunakan ialah mencari seluruh kemungkinan pemecahan dasar yang layak (*feasible*), selanjutnya memilih salah satu yang dapat memberikan nilai yang paling optimal, yaitu nilai yang paling besar (maksimum) atau nilai yang paling kecil (minimum). Pemecahan pemrograman linear dengan metode aljabar ini dibagi menjadi 2 keadaan:

1. Maksimisasi, yaitu pemecahan masalah pemrograman linear yang bertujuan mencari seluruh kemungkinan

pemecahan masalah yang memberikan nilai objektif yang maksimum.

2. Minimisasi, yaitu pemecahan masalah pemrograman linear yang bertujuan mencari seluruh kemungkinan pemecahan masalah yang memberikan nilai objektif yang minimum.

### 3.2.1 Kasus Memaksimumkan Tujuan

Berikut ini diberikan contoh kasus maksimisasi atau memaksimumkan tujuan:

Dalam satu industri kecil, memproduksi dua jenis barang, barang A dan barang B, dan menggunakan dua jenis mesin, mesin M1 dan mesin M2. Satu unit barang A memerlukan waktu 3 menit diproses dengan M1 dan 5 menit diproses dengan M2. Sedangkan untuk barang B, diperlukan waktu 9 menit diproses dengan mesin M1 dan 5 menit dengan mesin M2. Dalam satu hari mesin M1 dan mesin M2 beroperasi tidak lebih dari 9 jam. Setiap satu unit barang A memberikan keuntungan Rp.200,00 dan satu unit barang B memberi keuntungan sebesar Rp.500,00. Buatlah model matematika dari masalah program linear di atas jika keuntungan bersih diharapkan mencapai sebesar-besarnya. Pilihlah kombinasi produksi barang A dan barang B yang bisa memaksimalkan keuntungan.

Penyelesaian:

1. Merumuskan Tabel Persoalan

Bagi memudahkan membuat model matematika, seluruh data yang ada dalam soal di atas, disusun dalam sebuah tabel di bawah ini:

|            | Barang A ( $X_1$ ) | Barang B ( $X_2$ ) | Kemampuan Operasi |
|------------|--------------------|--------------------|-------------------|
| Mesin M1   | 3 menit            | 9 menit            | 540 menit         |
| Mesin M2   | 9 menit            | 5 menit            | 540 menit         |
| Keuntungan | Rp200,00           | Rp500,00           |                   |

## 2. Menyusun Model Program Linear :

Fungsi Kendala:

$$3X_1 + 9X_2 \leq 540 \text{ atau } X_1 + 3X_2 \leq 180$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 540 \text{ atau } X_1 + X_2 \leq 90$$

$$X_1 \geq 0 \text{ dan } X_2 \geq 0$$

Fungsi Tujuan:

$$Z = 200X_1 + 500X_2$$

Penyelesaian dengan metode aljabar;

- 1) Tukarkan pertidaksamaan kepada persamaan dengan menambah slack variabel ( $X_3$  dan  $X_4$ ) pada fungsi kendala dan fungsi tujuan. Tahap ini disebut sebagai tahap standardisasi model.

Fungsi kendala:

$$X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 180$$

$$X_1 + X_2 + X_4 \leq 90$$

$$Z = .200X_1 + 500X_2 + 0X_3 + 0X_4 \quad (\text{maksimum})$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 > 0$$

- 2) Mencari pemecahan masalah. Sebelum memecahkan masalah, harus dihitung terlebih dahulu jumlah persamaan dasar yang akan dipakai untuk pemecahan masalah. Cara mencari jumlah persamaan dasar yang akan dicoba diselesaikan adalah dengan menggunakan rumus :

$$K = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

Dimana:

K = Jumlah Kombinasi

n! = Jumlah n faktorial untuk jumlah variabel

m! = Jumlah m faktorial untuk jumlah persamaan



Dalam contoh soal disini, terdapat 4 variabel, yaitu  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , dan 2 persamaan kendala. Oleh karena itu  $n! = 4!$  Dan  $m! = 2!$ .

$$K = \frac{4!}{2! (4-2)!} \quad \text{maka } K = 6,$$

Artinya, terdapat enam persamaan dasar yang bisa digunakan untuk mencari pemecahan masalah.

3) Mencari pemecahan masalah dengan menggunakan enam persamaan dasar:

a. Jika  $X_1 = X_2 = 0$  (tidak ada produksi)

$$X_1 + 3X_2 + X_3 = 180$$

$$X_3 = 180$$

$$X_1 + X_2 + X_4 = 90$$

$$X_4 = 90$$

$$Z_1 = 200X_1 + 500X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

$$= 200(0) + 500(0) + 0(180) + 0(90)$$

$= 0$  (berarti tidak ada penerimaan dari penjualan)

b. Jika  $X_1 = X_3 = 0$  ( $X_1$  tidak diproduksi)

$$X_1 + 3X_2 + X_3 = 180$$

$$3X_2 = 180$$

$$X_2 = 60$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 90$$

$$X_2 + X_4 = 90$$

$$60 + X_4 = 90$$

$$X_4 = 30$$

$$\begin{aligned}
Z_2 &= 200X_1 + 500X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
&= 200(0) + 500(60) + 0(X_3) + 0(30) \\
Z_2 &= 30000 \text{ (layak)}
\end{aligned}$$

c. Jika  $X_1 = X_4 = 0$

$$\begin{aligned}
X_1 + 3X_2 + X_3 &= 180 \\
0 + 3X_2 + X_3 &= 180 \\
3X_2 + X_3 &= 180
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_4 &= 90 \\
0 + X_2 + 0 &= 90 \\
X_2 &= 90
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3X_2 + X_3 &= 180 \\
3(90) + X_3 &= 180 \\
270 + X_3 &= 180 \\
X_3 &= -90 \text{ (tidak layak karena negatif)}
\end{aligned}$$

Karena nilai  $X_3$  negatif, maka  $Z_3$  tidak dapat dihitung (tidak layak)

d. Jika  $X_2 = X_3 = 0$

$$\begin{aligned}
X_1 + 3X_2 + X_3 &= 180 \\
X_1 + 0 + 0 &= 180 \\
X_1 &= 180
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_4 &= 90 \\
180 + 0 + X_4 &= 90
\end{aligned}$$

$X_4 = -90$  (tidak layak karena negatif)  
 Nilai  $X_4$  tidak memenuhi syarat, oleh karena itu  $Z_4$  tidak bisa dihitung.

e. Jika  $X_2 = X_4 = 0$

$$X_1 + 3X_2 + X_3 = 180$$

$$X_1 + 3(0) + X_3 = 180$$

$$X_1 + X_3 = 180$$

$$X_1 + X_2 + X_4 = 90$$

$$X_1 + 0 + 0 = 90$$

$$X_1 = 90$$

Sehingga dapat ditentukan nilai  $X_3$ , yaitu:

$$X_1 + X_3 = 180$$

$$X_3 = 180 - 90$$

$$X_3 = 90$$

$$Z_5 = 200X_1 + 500X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

$$Z_5 = 200(90) + 500(0) + 90 + 0$$

$$Z_5 = 18\,090 \text{ (layak)}$$

f. Jika  $X_3 = X_4 = 0$

$$X_1 + 3X_2 + X_3 = 180$$

$$X_1 + 3X_2 + 0 = 180$$

$$X_1 + 3X_2 = 180 \dots\dots\dots \text{persamaan 1}$$

$$X_1 + X_2 + X_4 = 90$$

$$X_1 + X_2 + 0 = 90$$

$$X_1 + X_2 = 90 \dots\dots\dots \text{persamaan 2}$$

Persamaan serentak 1 dan 2:

$$X_1 + 3X_2 = 180$$

$$(X_1 + X_2 = 90)$$

---

$$2X_2 = 90$$

$$X_2 = 45$$

$$\begin{aligned}X_1 + X_2 &= 90 \\X_1 + 45 &= 45 \\X_1 &= 45\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_6 &= 200X_1 + 500X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\Z_6 &= 200(45) + 500(45) \\Z_6 &= 9000 + 22500 \\Z_6 &= 31500 \text{ (layak)}\end{aligned}$$

Dari seluruh persamaan dasar, diperoleh nilai-nilai maksimum untuk Z adalah seperti berikut:

$$\begin{aligned}Z_1 &= 0 \\Z_2 &= 30\,000 \\Z_3 &= \text{tidak bisa dihitung (X}_3 \text{ bernilai negatif)} \\Z_4 &= \text{tidak bisa dihitung (X}_4 \text{ bernilai negatif)} \\Z_5 &= 18\,090 \\Z_6 &= 31\,500\end{aligned}$$

Ternyata  $Z_6$  memberikan nilai yang maksimum. Dengan kombinasi barang A ( $X_1$ ) sebanyak 45 unit dan barang B ( $X_2$ ) sebanyak 45 unit, maka keuntungan yang diperoleh akan maksimum yaitu sebesar Rp31 500,00.

Penjelasan lebih lanjut dari penyelesaian persoalan linear programing dengan metode aljabar adalah sebagai berikut:

- Kombinasi pertama, yaitu jika perusahaan tidak berproduksi,  $X_1 = X_2 = 0$ , maka sumber daya yang ada tidak digunakan, yaitu sebesar 180 ( $X_3$ ) dan 90 ( $X_2$ ).
- Kombinasi kedua, perusahaan hanya memproduksi  $X_2$  saja,  $X_1$  tidak diproduksi. Maka keuntungan yang diperoleh adalah sebesar Rp30 000. Sumber daya tersisa, yang tidak digunakan, sebanyak 40 ( $X_4$ ).
- Kombinasi kelima, perusahaan hanya memproduksi  $X_1$  saja, dengan jumlah keuntungan Rp18 090. Disebabkan  $X_1$

tidak diproduksi, maka sumber daya yang tersisa adalah sebanyak 30 ( $X_4$ ).

- d. Kombinasi keenam, perusahaan memproduksi  $X_2$  sebesar 45 unit dan  $X_1$  sebesar 45 unit, dengan keuntungan yang diperoleh sebesar Rp31 500. Kombinasi jumlah produksi ini memberikan keuntungan yang maksimal bagi perusahaan.

### 3.2.2 Kasus Meminimumkan Tujuan

Sebuah pabrik makanan memproduksi dua jenis makanan, yaitu Biskuit Oreo dan Biskuit Crackers. Vitamin dan protein diperlukan untuk membuat kedua jenis. Biskuit oreo memerlukan 4 unit vitamin dan 4 unit protein. Biskuit crackers memerlukan 2 unit vitamin dan 6 unit protein. Untuk biskuit oreo minimal akan diproduksi 4 unit dan biskuit crackers minimal akan diproduksi 2 unit. Kebutuhan minimal untuk vitamin adalah 16 unit dan kebutuhan minimal untuk protein adalah 24 unit. Biaya produksi biskuit oreo per unit adalah 200 ribu per unit dan biaya produksi biskuit crackers per unit adalah 160 ribu. Carilah kombinasi dari jumlah biskuit oreo dan biskuit crackers yang harus diproduksi agar bisa memberikan jumlah biaya yang minimal!

Penyelesaian:

1. Merumuskan tabel persoalan

Bagi memudahkan membuat model matematika, seluruh data yang ada dalam soal di atas, disusun dalam sebuah tabel.

|                             | Vitamin<br>(unit) | Protein<br>(unit) | Biaya Produksi<br>Per unit |
|-----------------------------|-------------------|-------------------|----------------------------|
| Biskuit Oreo<br>( $X_1$ )   | 4                 | 4                 | 200 kg                     |
| Bahan crackers<br>( $X_2$ ) | 2                 | 6                 | 160 kg                     |
| Kebutuhan<br>Minimal        | 16                | 24                |                            |

## 2. Menyusun Model Program Linier :

Fungsi Kendala:

$$4 X_1 + 2X_2 \geq 16$$

$$4 X_1 + 3X_2 \geq 24$$

$$X_1 \geq 4, X_2 \geq 2$$

Fungsi Tujuan:

$$Z = 200X_1 + 160X_2$$

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Tukarkan pertidaksamaan kepada persamaan dengan mengurangi slack variabel pada fungsi kendala dan fungsi tujuan. Tahap ini disebut sebagai tahap standarisasi model.

Fungsi Kendala:

$$4 X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 16$$

$$4 X_1 + 6X_2 - X_4 \geq 24$$

Fungsi Tujuan:

$$Z = 200X_1 + 160X_2 - X_3 - X_4$$

$$X_1 \geq 4, X_2 \geq 2, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$$

2. Mencari pemecahan masalah berdasarkan pada enam persamaan dasar (seperti pada contoh kasus maksimisasi di atas)

- a. Jika  $X_1 = X_2 = 0$  (tidak ada produksi)

$$4X_1 + 2X_2 - X_3 = 16$$

$$0 + 0 - X_3 = 16$$

$$X_3 = -16$$

$$4X_1 + 6X_2 - X_4 = 24$$

$$0 + 0 - X_4 = 24$$

$$X_4 = -24$$

Nilai  $Z_1$  tidak bisa dihitung karena nilai  $X_3$  dan  $X_4$  negatif, tidak sesuai dengan syarat yang ditentukan.

- b. Jika  $X_1 = X_3 = 0$  ( $X_1$  tidak diproduksi)

$$4X_1 + 2X_2 - X_3 = 16$$

$$2X_2 = 16$$

$$X_2 = 8$$

$$4X_1 + 6X_2 - X_4 = 24$$

$$6X_2 - X_4 = 24$$

$$6(8) - X_4 = 24$$

$$X_4 = 24$$

$$Z_2 = 200(0) + 160(8) - 0 - 0(4) = 1280 \text{ (layak)}$$

- c. Jika  $X_1 = X_4 = 0$

$$4X_1 + 2X_2 - X_3 = 16$$

$$0 + 2X_2 - X_3 = 16$$

$$2X_2 - X_3 = 16$$

$$4X_1 + 6X_2 - X_4 = 24$$

$$0 + 6X_2 + 0 = 24$$

$$6X_2 = 24$$

$$X_2 = 4$$

$$2(4) - X_3 = 16$$

$$8 - X_3 = 6$$

$$X_3 = 2$$

$$Z_3 = 200(0) + 160(4) - 0(2) - 0 = 640 \text{ (layak)}$$

- d. Jika  $X_2 = X_3 = 0$

$$4X_1 + 2X_2 - X_3 = 16$$

$$4X_1 + 0 - 0 = 16$$

$$4X_1 = 16$$

$$X_1 = 4$$

$$4X_1 + 6X_2 - X_4 = 24$$

$$4(4) + 0 - X_4 = 24$$

$$16 + 0 - X_4 = 5$$

$$X_4 = 11$$

$$Z_4 = 200(4) + 0 - 0 - 0(11) = 800 \text{ (layak)}$$

e. Jika  $X_2 = X_4 = 0$

$$4X_1 + 2X_2 - X_3 = 16$$

$$4X_1 + 2(0) - X_3 = 16$$

$$4X_1 - X_3 = 16$$

$$X_3 = 4X_1 - 16$$

$$4X_1 + 6X_2 - X_4 = 24$$

$$4X_1 + 0 + 0 = 24$$

$$X_1 = 6$$

Sehingga dapat ditentukan nilai  $X_3$ , yaitu:

$$X_3 = 4X_1 - 16$$

$$X_3 = 4(6) - 16$$

$$X_3 = 24 - 16$$

$$X_3 = 8$$

$$Z_5 = 200X_1 + 160X_2 - 0X_3 - 0X_4$$

$$Z_5 = 200(6) + 160(0) - 0(8) - 0$$

$$Z_5 = 1200 \text{ (layak)}$$

f. Jika  $X_3 = X_4 = 0$

$$4X_1 + 2X_2 - X_3 = 16$$

$$4X_1 + 2X_2 - 0 = 16$$

$$4X_1 = 16 - 2X_2$$



$$X_1 = 4 - 0,5X_2$$

$$4X_1 + 6X_2 - X_4 = 24$$

$$4X_1 + 6X_2 = 24$$

Substitusikan  $X_1 = 4 - 0,5X_2$  ke dalam persamaan:

$$4X_1 + 6X_2 = 24$$

$$4(4 - 0,5X_2) + 6X_2 = 24$$

$$16 - 2X_2 + 6X_2 = 24$$

$$16 + 4X_2 = 24$$

$$4X_2 = 8$$

$$X_2 = 2$$

$$X_1 = 4 - 0,5X_2$$

$$X_1 = 4 - 0,5(2)$$

$$X_1 = 3$$

$$Z_6 = 200X_1 + 160X_2 - 0X_3 - 0X_4$$

$$Z_6 = 200(3) + 160(2) - 0 - 0 = 920 \text{ (layak)}$$

Dari seluruh persamaan dasar, diperoleh nilai-nilai minimum untuk Z adalah seperti berikut:

$Z_1$  = Tidak bisa dihitung ( $X_3$  dan  $X_4$  bernilai negatif)

$$Z_2 = 1280$$

$$Z_3 = 640 \text{ (hanya memproduksi } X_2 \text{ saja)}$$

$$Z_4 = 800 \text{ (hanya memproduksi } X_1 \text{ saja)}$$

$$Z_5 = 1200$$

$$Z_6 = 920$$

Penjelasan lebih lanjut dari penyelesaian persoalan linear programming dengan metode aljabar adalah sebagai berikut:

- a. Kombinasi ketiga, perusahaan hanya memproduksi  $X_2$  saja,  $X_1$  tidak diproduksi. Maka biaya yang dikeluarkan

adalah sebesar Rp640. Sumber daya tersisa, yang tidak digunakan, sebanyak 2 ( $X_3$ ).

- b. Kombinasi keempat, perusahaan hanya memproduksi  $X_1$  saja, dengan jumlah biaya yang dikeluarkan sebesar Rp800. Disebabkan  $X_2$  tidak diproduksi, maka sumber daya yang tersisa adalah sebanyak 11 unit ( $X_4$ ).
- c. Kombinasi keenam, perusahaan memproduksi  $X_1$  sebesar 3 unit dan  $X_2$  sebesar 2 unit, dengan biaya yang dikeluarkan sebesar Rp920. Kombinasi jumlah produksi ini memberikan biaya yang minimal bagi perusahaan dengan tidak ada sumber daya yang tersisa karena semua produk,  $X_1$  dan  $X_2$  diproduksi oleh perusahaan. Oleh karena itu kombinasi ini adalah yang paling tepat sesuai dengan tujuan perusahaan yaitu memproduksi dua jenis biscuit dengan biaya yang paling minimal.

## DAFTAR PUSTAKA

- Chiang A.C. 2005. *Dasar-Dasar Matematika Ekonomi*. Bandung: Gelora Aksara Pratama.
- Dumairy. 2015. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. BPFE.
- Josep Bintang Kalangi. 2018. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat.
- J. Supranto. 2005. *Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Ghalia Indonesia.
- Sessu, H.A. 2014. *Pengantar Matematika Ekonomi*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Wilson Simangunsong. 2009. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

# BAB 4

## METODE SIMPLEKS

*Oleh Pratiwi Dwi Warih Sitaresmi*

### 4.1 Simpleks Baku

George Dantzig pertama kali mengemukakan metode penyelesaian program linier dengan metode simpleks pada tahun 1947. Metode ini menjadi terkenal ketika alat hitung elektronik ditemukan dan menjadi populer dengan munculnya komputer. Perhitungan metode ini dengan proses literasi berulang sampai diperoleh hasil yang optimal, dan lebih mudah dengan penggunaan komputer. Selanjutnya hingga tahun 1950-an, berbagai alat dan metode dikembangkan untuk memecahkan masalah program linier bahkan masalah riset operasional, seperti pemrograman dinamis, teori antrian, dan persediaan (Wirdasari, 2010).

Program linear merupakan metode matematis dalam mencapai tujuan tunggal, misal memaksimalkan keuntungan atau meminimumkan biaya. Adapun karakteristik permasalahan dalam program linear yaitu:

1. Ada tujuan yang akan diperoleh
2. Memiliki beberapa alternatif untuk memperoleh kebenaran
3. Sumber daya terbatas
4. Dapat dituliskan dalam bentuk matematis.

Terdapat tiga elemen penting dalam Program Linear (Rumetna et al., 2019), yaitu: 1) Variabel keputusan (*decision variables*)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , merupakan variabel yang nilai-nilainya dipilih untuk dibuat keputusan; 2) Fungsi tujuan (*objective function*)  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , merupakan fungsi yang akan dioptimasi (dimaksimumkan atau diminimumkan); dan 3) Pembatasan (*constraints*)  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$ , merupakan pembatasan-pembatasan yang harus dipenuhi.

Metode yang dapat digunakan dalam program linear, yaitu metode grafik (untuk 2 variabel) dan metode simpleks (untuk lebih dari 2 variabel). Penyelesaian dengan metode grafik dilakukan dengan menggambar fungsi-fungsinya, yaitu fungsi kendala dan fungsi tujuan. Metode grafik umumnya digunakan untuk memecahkan masalah program linear yang berdimensi  $2 \times n$  atau  $m \times 2$ , karena kemampuan suatu grafik dalam menampilkan hasil perhitungan terbatas (Asmara et al., 2018).

Metode Simpleks merupakan metode yang secara sistematis dimulai dari suatu pemecahan dasar yang fisibel ke pemecahan dasar fisibel lainnya, dilakukan secara iteratif sehingga akhirnya tercapai suatu pemecahan dasar yang optimum dan pada setiap langkah menghasilkan suatu nilai dari fungsi tujuan yang selalu lebih besar atau sama dari langkah sebelumnya (Sundry, 2014). Kelebihan dari metode simpleks yaitu mampu menghitung dua atau lebih variabel keputusan apabila dibandingkan dengan metode grafik yang hanya mampu mengaplikasikan dua variabel keputusan (Asmara et al., 2018).

Beberapa istilah yang dipakai dalam penyelesaian metode simpleks yaitu (Asmara et al., 2018):

1. Iterasi, yaitu tahapan perhitungan dimana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.
2. Variabel non basis, yaitu variabel yang nilainya diatur menjadi nol pada sebarang iterasi.
3. Variabel basis, yaitu variabel yang nilainya bukan nol pada sebarang iterasi. Pada solusi awal, variabel basis merupakan variabel slack (jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan  $<$ ) atau variabel buatan (jika fungsi kendala menggunakan persamaan  $>$  atau  $=$ ). Secara umum, jumlah variabel batas selalu sama dengan jumlah fungsi pembatas.
4. Solusi atau Nilai Kanan, yaitu nilai sumber daya pembatas yang masih tersedia. Pada solusi awal, nilai kanan atau solusi sama dengan jumlah sumber daya pembatas awal yang ada.
5. Variabel Slack, yaitu variabel yang ditambahkan ke model matematis kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan  $<$  menjadi persamaan  $=$ .
6. Variabel Surplus, yaitu variabel yang dikurangkan dari model matematis kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan  $>$  menjadi persamaan  $=$ .
7. Variabel Buatan, yaitu variabel yang ditambahkan ke model matematis kendala dengan bentuk  $>$  atau  $=$  untuk difungsikan sebagai variabel basis awal.
8. Kolom Kerja, yaitu kolom yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris kerja.
9. Baris Pivot (Baris Kerja), yaitu salah satu baris dari antara variabel baris yang memuat variabel keluar.
10. Elemen Kerja, yaitu elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi dasar perhitungan untuk tabel simpleks berikutnya.

11. Variabel Masuk, yaitu variabel yang terpilih untuk menjadi variabel basis pada iterasi berikutnya. Variabel masuk dipilih satu dari antara variabel non basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai positif.
12. Variabel Keluar, yaitu variabel yang keluar dari variabel basis pada iterasi berikutnya dan digantikan dengan variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu dari antara variabel basis pada setiap iterasi dan bernilai 0.

Seperti halnya metode aljabar, sebelum mengerjakan penyelesaian awal, terlebih dahulu juga harus melakukan standarisasi rumusan model. Fungsi-fungsi kendala yang masih berbentuk pertidaksamaan harus diubah dulu menjadi bentuk persamaan dengan didahului eliminasi Gauss (Rois, 2018).

Mencari  $x_1, x_2, \dots, x_n$  yang memaksimumkan atau meminimumkan, dengan fungsi tujuan:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_m$$

Dengan kendala

a) Kendala masalah

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2$$

b) Kendala non-negatif

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_n$$

$$x_1, x_2, x_n \geq 0$$

Keterangan:

$x_j$  = Jenis Aktivitas (Variabel Keputusan)

$a_{mn}$  = Kebutuhan sumber daya  $m$  untuk menghasilkan setiap unit aktivitas  $j$

$b_m$  = Jumlah sumber daya  $m$  yang tersedia

$c_j$  = Kenaikan nilai fungsi tujuan jika ada pertambahan satu unit aktivitas  $j$

Adapun algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan masalah program linear metode simpleks yaitu :

1. Mengubah fungsi kendala menjadi bentuk kanonik.  
Fungsi kendala diubah menjadi fungsi implisit, semua  $c_1 x_{ij}$  digeser ke kiri.
2. Menyusun persamaan – persamaan di dalam tabel

|           |          |          |          |          |          |           |           |     |           |          |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----|-----------|----------|
|           |          | $x_1$    | $x_2$    | ...      | $x_n$    | $x_{n+1}$ | $x_{n+2}$ | ... | $x_{n+m}$ | $K$      |
|           |          | $-C_1$   | $-C_1$   | ...      | $-C_1$   |           |           | ... |           |          |
| $x_{n+1}$ |          | $a_{11}$ |          |          |          |           |           | ... |           | $b_1$    |
| $x_{n+2}$ |          | $a_{21}$ |          |          |          |           |           | ... |           | $b_2$    |
| $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$  | ... | $\vdots$  | $\vdots$ |
| $x_{n+m}$ |          | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ...      | $a_{mn}$ |           |           | ... |           | $b_m$    |

Setelah data disusun dalam tabel, selanjutnya

3. Memilih kolom kunci. Periksa tabel simpleks layak atau tidak. Kelayakan dilihat dari solusi (nilai kanan). Jika solusi ada yang bernilai negatif maka tabel tidak layak, dan tidak bisa diteruskan untuk dioptimalkan.
4. Memilih baris kunci. Untuk menentukan baris kunci terlebih dahulu membagi nilai-nilai pada kolom nilai kanan ( $b_i$ ) dengan nilai yang sebaris dengan kolom kunci ( $a_{ij}$ ). Pilih nilai terkecil dari  $\frac{b_i}{a_{ij}}$ .
5. Menentukan angka kunci. Angka kunci merupakan tempat perpotongan baris kunci dan kolom kunci. Angka kunci menjadi dasar perubahan setiap nilai variabel-variabel dalam mendapatkan tabel selanjutnya.
6. Mengubah nilai-nilai baris kunci. Nilai baris kunci diubah dengan cara membaginya dengan angka kunci atau dengan menjadikan angka kunci sama dengan satu. Variabel dasar pada baris itu diganti dengan variabel yang terdapat di bagian atas kolom kunci.



- Mengubah nilai-nilai selain pada baris kunci. Nilai-nilai baris yang lain, selain pada baris kunci dapat diubah dengan: Baris Baru = Baris Lama – Koefisien kolom kunci nilai baru Baris kunci. Secara matematis ditulis:

$$BB = BL - a_y k \times BB_k$$

- Melanjutkan perbaikan. Mengulangi langkah-langkah perbaikan mulai langkah ke-5 sampai langkah ke-7 untuk memperbaiki tabel-tabel yang telah diubah atau diperbaiki nilainya. Perubahan baru berhenti setelah nilai  $z_j - c_j$  positif/negatif. Jika  $z_j - c_j$  semua sudah positif atau semua negatif untuk minimasi, berarti tabel tidak dapat dioptimalkan lagi, sehingga sudah diperoleh hasil optimal.

## 4.2 Contoh Masalah

Misal suatu perusahaan akan membuat kain sutra dan kain wol, yang terbuat dari benang sutra 3kg untuk pembuatan kain sutra dan benang sutra 4kg dan benang wol 1kg untuk pembuatan kain wol. Masing-masing membutuhkan masa kerja 2 jam untuk kain sutra dan kain wol. Benang sutra kurang dari 120kg, benang wol kurang dari 20kg dan masa kerja kurang dari 40 jam. Berapakah yang harus diproduksi untuk mendapatkan laba maksimal dengan  $Z = 30x_1 + 40x_2$ .

### Penyelesaian:

Penyelesaian untuk masalah yaitu:

- Langkah pertama, susun informasi dalam bentuk tabel, selanjutnya tampilkan fungsi tujuan dan fungsi kendala.

| Produk (kain) | Benang sutra (kg) | Benang wol (kg) | Lama kerja (jam) | Laba |
|---------------|-------------------|-----------------|------------------|------|
| Sutra         | 3                 | -               | 2                | 30   |
| Wol           | 4                 | 1               | 2                | 40   |
|               | 120               | 20              | 40               |      |

Fungsi tujuan:  $Z = 30x_1 + 40x_2$

Fungsi kendala:

- Benang sutra :  $3x_1 + 4x_2 \leq 120$
- Benang wol :  $x_2 \leq 20$
- Lama kerja :  $2x_1 + 2x_2 \leq 40$

Batasan non negatif:  $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

1) Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala

- Fungsi Tujuan:

$$Z = 30x_1 + 40x_2$$
$$\Leftrightarrow Z - 30x_1 - 40x_2 = 0$$

- Fungsi kendala :

✓ Benang sutra

$$3x_1 + 4x_2 \leq 120$$

$$3x_1 + 4x_2 + s_1 \leq 120$$

✓ Benang Wol

$$x_2 \leq 20$$

$$x_2 + s_2 \leq 20$$

✓ Lama kerja

$$2x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + 2x_2 + s_3 \leq 40$$

2) Menyusun persamaan dalam tabel

| NB    | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | NK  | Ind |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|
| Z     | -30   | -40   | 0     | 0     | 0     | 0   |     |
| $s_1$ | 3     | 4     | 1     | 0     | 0     | 120 |     |
| $s_2$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 20  |     |
| $s_3$ | 2     | 2     | 0     | 0     | 1     | 40  |     |

\*Catatan: Ind = Indeks

3) Menentukan kolom kunci

Kolom kunci adalah kolom yang mempunyai nilai baris Z yang bernilai negatif dengan angka terbesar.

| NB    | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | NK  | Ind |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|
| $Z$   | -30   | -40   | 0     | 0     | 0     | 0   |     |
| $s_1$ | 3     | 4     | 1     | 0     | 0     | 120 |     |
| $s_2$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 20  |     |
| $s_3$ | 2     | 2     | 0     | 0     | 1     | 40  |     |

4) Menentukan baris kunci

$$\text{Indeks} = \frac{\text{nilai kanan (NK)}}{\text{Nilai Kolom Kunci}}$$

| NB    | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | NK  | Ind |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|
| $Z$   | -30   | -40   | 0     | 0     | 0     | 0   | -   |
| $s_1$ | 3     | 4     | 1     | 0     | 0     | 120 | 30  |
| $s_2$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 20  | 20  |
| $s_3$ | 2     | 2     | 0     | 0     | 1     | 40  | 20  |

5) Menentukan nilai baris kunci baru

$$\text{Baris kunci baru} = \frac{\text{baris kunci}}{\text{angka kunci}}$$

Sehingga tabel menjadi

| NB    | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$         | NK | Ind |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|----|-----|
| $Z$   |       |       |       |       |               |    |     |
| $s_1$ |       |       |       |       |               |    |     |
| $s_2$ |       |       |       |       |               |    |     |
| $x_2$ | 1     | 1     | 0     | 0     | $\frac{1}{2}$ | 20 |     |

6) Mengubah nilai-nilai selain baris kunci

Baris baru =

baris lama – (nilai kolom  $\times$  nilai baris kunci baru

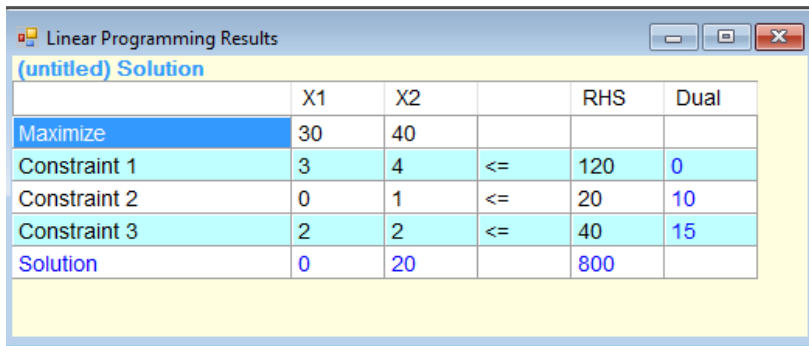
|       |     |     |   |   |                |     |     |
|-------|-----|-----|---|---|----------------|-----|-----|
| Z     | -30 | -40 | 0 | 0 | 0              | 0   |     |
| -40   | 1   | 1   | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$  | 20  | (-) |
|       |     |     |   |   | $\frac{1}{2}$  |     |     |
|       | 10  | 0   | 0 | 0 | 20             | 800 |     |
| $s_1$ | 3   | 4   | 1 | 0 | 0              | 120 |     |
| 4     | 1   | 1   | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$  | 20  | (-) |
|       |     |     |   |   | $\frac{1}{2}$  |     |     |
|       | -1  | 0   | 1 | 0 | -2             | 40  |     |
| $s_2$ | 0   | 1   | 0 | 1 | 0              | 20  |     |
| 1     | 1   | 1   | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$  | 20  | (-) |
|       |     |     |   |   | $\frac{1}{2}$  |     |     |
|       | -1  | 0   | 0 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 0   |     |

7) Menentukan nilai baris baru

| NB    | $x_1$    | $x_2$    | $s_1$    | $s_2$    | $s_3$                           | NK        | Ind |
|-------|----------|----------|----------|----------|---------------------------------|-----------|-----|
| Z     | 10       | 0        | 0        | 0        | 20                              | 800       |     |
| $s_1$ | -1       | 0        | 1        | 0        | -2                              | 40        |     |
| $s_2$ | -1       | 0        | 0        | 1        | $-\frac{1}{2}$                  | 0         |     |
| $x_2$ | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b><math>\frac{1}{2}</math></b> | <b>20</b> |     |

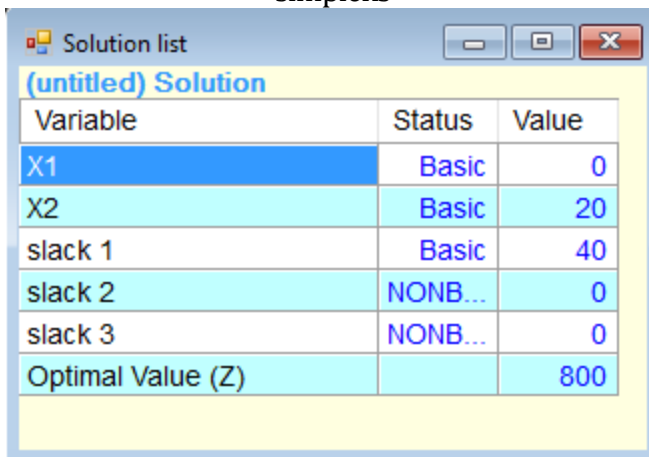
Dari hasil diatas dapat disimpulkan bahwa karena nilai Z sudah positif, maka diperoleh hasil  $x_2 = 20$ , maka **Zmax = 800**. Apabila nilai Z masih negatif, maka harus melakukan perbaikan sampai diperoleh nilai Z yang positif.

Penyelesaian metode simpleks dapat juga dilakukan dengan menggunakan aplikasi komputer, salah satu aplikasi yang umum digunakan adalah *QM for Windows*. Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 menunjukkan hasil dari penyelesaian kasus program linier dengan metode simpleks dibantu oleh software *QM for windows*.



|              | X1 | X2 |    | RHS | Dual |
|--------------|----|----|----|-----|------|
| Maximize     | 30 | 40 |    |     |      |
| Constraint 1 | 3  | 4  | <= | 120 | 0    |
| Constraint 2 | 0  | 1  | <= | 20  | 10   |
| Constraint 3 | 2  | 2  | <= | 40  | 15   |
| Solution     | 0  | 20 |    | 800 |      |

**Gambar 4.1 :** Tampilan input data pada QM for Windows untuk selanjutnya akan diproses penyelesaiannya menggunakan metode simpleks



| Variable          | Status  | Value |
|-------------------|---------|-------|
| X1                | Basic   | 0     |
| X2                | Basic   | 20    |
| slack 1           | Basic   | 40    |
| slack 2           | NONB... | 0     |
| slack 3           | NONB... | 0     |
| Optimal Value (Z) |         | 800   |

**Gambar 4.2 :** Solusi akhir dengan penyelesaian menggunakan metode simpleks

Berdasarkan pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.2, dapat dilihat bahwa nilai optimum yang dihasilkan untuk mendapatkan laba yang maksimal adalah 800 dengan memproduksi kain wol sebanyak 20 kg.

## DAFTAR PUSTAKA

- Asmara, T., Rahmawati, M., Aprilla, M., Harahap, E., & Darmawan, D. 2018. Strategi Pembelajaran Pemrograman Linier Menggunakan Metode Grafik Dan Simpleks. *Teknologi Pembelajaran*, 3(1), 506–514.
- Rois, M. A. 2018. *Metode Simpleks Program Linear pada Optimalisasi Pengelolaan Lahan Parkir FST UIN Walisongo dengan Konsep “Ukhuwah.”* 41(1), 51–57. <https://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM/article/view/15813>
- Rumetna, M., Lina, T., Filemon, F., Siwalette, B., Andriano, A., Deviana, R., & Paknawan, R. 2019. Penerapan Metode Simpleks untuk Menghasilkan Keuntungan Maksimum pada Penjual Buah Pinang. *Journal of Dedication to Papua Community*, 2(1), 75–86. <https://doi.org/10.34124/288517>
- Sunday, B. 2014. Penerapan Program Linier dalam Optimasi Biaya Pakan Ikan dengan Metode Simpleks. *Informasi Dan Teknologi Ilmiah (INTI)*, IV(3), 156–161.
- Wirdasari, D. 2010. Metode Simpleks Dalam Pemograman Linier. *Jurnal Teknologi Informasi*, 02(01), 276–286.

# BAB 5

## METODE SIMPLEKS DIREVISI

*Oleh Tungga Bhimadi Karyasa*

### 5.1 Pendahuluan

Mengawali uraian Metoda Simpleks Direvisi atau MSD, adalah dengan pengertian-pengertian sebagai berikut ini:

- a. Program Linier merupakan solusi dari masalah yang berkaitan dengan mencari kondisi optimum/terbaik, atau optimalisasi dengan membantu memilih dari sejumlah batasan untuk mendapatkan keuntungan maksimal atau biaya minimal untuk jumlah variabel yang diinginkan tanpa melanggar sejumlah batasan yang diberikan.
- b. Metoda Simpleks atau MS merupakan salah satu contoh solusi dari program linier dengan memformulasikan permasalahan tersebut dalam bentuk persamaan matriks dengan prosedur tertentu yaitu, memberi solusi dari pendefinisian fungsi pembatas atau *Constraint Function* yang diberlakukan pada lokasi terluar dari daerah layak atau *Outside Feasible Area*.
- c. Pemahaman daerah layak, dapat dinyatakan dalam bentuk grafik yang dibatasi oleh persamaan dari rumusan setiap konstrain.
- d. Hasilnya dari cara grafik ini adalah dua lokasi terluar yang terbesar dengan nilai fungsi tujuan maksimum atau minimum. Kemudian lokasi daerah sebenarnya, dicari dari antara dua lokasi tersebut.



Metode Simpleks Direvisi atau MSD ini sendiri, merupakan penyederhanaan dari MS yang dikembangkan oleh **Dantzig** dan **Oschar-Hays** tahun 1953, dengan:

- a. Fokus penemuan adalah dalam penggunaan metode, yaitu: perhitungan terhadap konstanta yang diperlukan saja.
- b. Dari **Ervica Badiatuzzahra (2012)**, MSD menggunakan prosedur dan model matematika, *sama* dengan Metode Simpleks.
- c. Dikatakan *Direvisi* karena *menambahkan* perlakuan dengan *langkah-langkah iterasi* pada setiap putusan pilihan. Sehingga, perlakuan yang sudah dilakukan dari MS, diikuti dengan pembuatan tabel untuk prediksi perlakuan selanjutnya, menjadi sudah tidak lagi digunakan, karena dengan MSD *dibuat data baru*.
- d. Perhitungan hanya dilakukan sesuai dengan informasi yang berhubungan dengan solusi layak basis-1 ke basis yang lain dari data baru, berdasar persamaan awal dengan *operator vektor matriks*.
- e. Hal ini menyebabkan kesan, penyelesaian MSD lebih rumit, tetapi prosedur lebih sederhana.

Metode Simpleks Direvisi atau MSD, dengan kelebihan:

- a. Menawarkan kesempatan untuk *meningkatkan efisiensi* dalam proses mencari solusi.
- b. *Jumlah iterasi dan langkah-langkah* yang digunakan pada kedua metode ini tepat sama.
- c. *Perbedaannya* terletak pada perincian variabel masuk dan variabel keluar, dengan sekali dua kali iterasi untuk setiap variabel basic-non basic.

4(empat) keuntungan MSD dibanding dengan MS adalah, dari **Ervica Badiatuzzahra (2012)**:

- a. MSD melakukan perhitungan terhadap konstanta yang dibutuhkan saja.
- b. Tabel MSD lebih sederhana, atau bahkan tidak diperlukan lagi.
- c. Dapat digunakan cara operasional matriks dan vektor.
- d. Lebih cepat mendapatkan nilai optimal sesuai fungsi tujuan.

## 5.2 Formulasi MSD dalam Bentuk Matriks

Bentuk Persamaan Linear dalam Bentuk Matriks, dinyatakan dalam Formula-PL dari, sebagai berikut:

1. *Maksimumkan atau minimumkan*, dalam bentuk matriks, dari **Muhlis Tahir (2012)**, dengan *fungsi tujuan dan fungsi pembatas*,

$$Z = C X \quad (1)$$

$$\text{Terhadap} \quad AX \leq b \quad (2)$$

dimana: C adalah *vektor kolom*  $[c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ ,

X matriks/vektor kolom,  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , dan  $X \geq 0$

A adalah matriks bujur sangkar dengan koefisien pertidaksamaan batasan. Matriks A ini dapat dipartisikan menjadi sederet matriks kolom, yaitu:  $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]^T$ .

b matriks/vektor kolom,  $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$

- a. Agar pertidaksamaan-2 menjadi persamaan, ditambahkan matriks identitas atau  $[I]$ , sehingga persamaan-2 menjadi,  
 $[A \ I] X = b$  untuk X (3)

- b. Matriks kolom X dan C, dipartisipasikan atau digandakan kolomnya menjadi dua matriks XI dan XII dan matriks CI dan CII. Begitu juga matriks A, dari partisi matriks kolom  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

2. **Iterasi MSD dalam bentuk matrik** berdasarkan tabel berikut ini.

| Variabel | $X_I$                | $X_{II}$            | Nilai Kanan    |
|----------|----------------------|---------------------|----------------|
| Basis    |                      |                     |                |
| Z        | $C_B B^{-1} A - C_I$ | $C_B^{-1} - C_{II}$ | $C_B B^{-1} b$ |
| $X_B$    | $B^{-1} A$           | $B^{-1}$            | $B^{-1} b$     |

Selama proses iterasi dilakukan, nilai matriks  $C_B$ ,  $B^{-1}$ , dan  $X_B$  akan berubah untuk setiap iterasi yang dilakukan, tergantung kondisi vektor masuk dan vektor keluar. Nilai Vektor dan matriks lainnya tetap.

Dalam prakteknya, pembuatan tabel ini tidak digunakan, tetapi rumus-rumus didalamnya langsung diaplikasikan.

3. **Langkah Penyelesaian**, dilakukan dengan,
- Pemeriksaan optimalisasi dengan ***penentuan vektor masuk***.
    - Menghitung matriks  $Y = C_B B^{-1}$
    - Menghitung  $z_j - c_j = Y p_j - c_j$  untuk setiap vektor  $P_j$  non basis
    - Solusi optimal diperoleh jika,  $(z_j - c_j) \geq 0$  tujuan maksimasi, dan  $(z_j - c_j) \leq 0$  tujuan minimasi.
  - Solusi optimalnya dengan  $X_B = B^{-1} b$  dan  $x = C_B X_B$ , jika optimal belum tercapai, maka dicari vektor keluar yaitu vektor dengan nilai  $(z_j - c_j) < 0$  terbesar untuk tujuan maksimasi, atau  $(z_j - c_j) > 0$  terbesar untuk tujuan minimasi.

c. Untuk vektor masuk yang sudah ditentukan pada **Langkah-1**, maka dapat dihitung,

- 1) Nilai variabel basis saat itu dengan,  $X_B = B^{-1} b$
- 2) Koefisien Pembatas untuk Variabel Masuk dengan,  

$$\alpha_j = B^{-1} p_j$$
- 3) Vektor keluar, untuk maksimasi maupun minimasi, diberikan oleh nilai minimum dari persamaan-4, yaitu:

$$\Theta = \min(k) \left\{ \frac{(B^{-1}b)(k)}{\alpha_k^j}, \alpha_k^j > 0 \right\} \quad (4)$$

dimana  $(B^{-1}b)(k)$  dan  $\alpha_k^j$  merupakan elemen ke-k dari  $B^{-1}b$  dan  $\alpha^j$ , jika kondisi yang terjadi  $\alpha_k^j \leq 0$  maka permasalahan (yang dapat dirumuskan dalam MSD ini) solusinya tidak terbatas.

4. Basis selanjutnya mengikuti persamaan berikut,

$$B_{\text{next}}^{-1} = EB^{-1} \quad (5)$$

Dimana, E matriks identitas dari  $(B^{-1}_{\text{awal}})$  dengan elemen kolom  $P_r$  yang digantikan oleh nilai  $\xi$ , dengan,

$$\xi = \left[ -\alpha_1^j / \alpha_k^j \quad -\alpha_2^j / \alpha_k^j \quad -\alpha_3^j / \alpha_k^j \quad \dots \quad +1 / \alpha_k^j \quad -\alpha_1^j / \alpha_k^j \right]^T \quad (6)$$

Perlu diperhatikan bahwa:  $+1 / \alpha_k^j$  merupakan batasan atau

tanda bahwa variabel basic yang ditentukan **harus dengan koefisien =1** (berapapun angka tersebut ada), angka tersebut diabaikan.

Kembali ke Langkah-3a

### Catatan:

Variasi fungsi pembatas dapat dinyatakan dalam bentuk pertidaksamaan lebih kecil atau lebih besar dan persamaan, yaitu:

- a. Apabila *fungsi pembatas* hanya memberi bentuk pertidaksamaan dengan tanda lebih besar atau lebih kecil **yang sama**, maka pada *fungsi tujuan* untuk koefisien pada variabel non basic atau slack, **semua sama dengan nol**.
- b. Apabila *fungsi pembatas* memberi bentuk pertidaksamaan dengan tanda **lebih besar** atau **lebih kecil** yang tidak sama, maka pada *fungsi tujuan* untuk koefisien variabel non basic atau slack tidak semua sama dengan nol, tetapi disertakan dengan variabel non basic dengan tanda negatif.
- c. Apabila fungsi pembatas dalam satu masalah terdiri dari tanda:
  - \* $\leq$  maka persamaannya ditambahkan variabel non basic dengan tanda positif.
  - \* $\geq$  maka persamaannya ditambahkan variabel non basic dengan tanda positif, tetapi fungsi pembatas sebelah kiri tanda sama dengan atau ( $=$ ) diberi tanda berlawanan dengan sebelumnya.
  - \* $=$  maka persamaannya dikalikan dengan -1, dan tetap diberi variabel non basic dengan tanda positif, contoh-1, masalah-2.

## 5.3 Contoh Penggunaan MSD

### Contoh-1

*Persamaan Tujuan*, dari Hamdy A Taha (1993), dengan penjelasan - penjelasan, sebagai berikut:

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

Dengan ***Pertidaksamaan Batasan*** yaitu:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$\text{dan } x_1, x_2 \geq 0$$

**Penyelesaiannya, yaitu:**

Jika semua fungsi pembatas  $\leq$ , maka fungsi tujuan merupakan,

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

Dengan persamaan batasan menjadi:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 1$$

$$x_2 + x_6 = 2,$$

1. **Formulasi Program Linear** untuk matriks dan vektor menjadi,

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T \text{ identitas semua variabel}$$

$$X_I = [x_1 \ x_2]^T \text{ identitas variabel basic}$$

$$X_{II} = [x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T \text{ identitas variabel slack}$$

$$c = [3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ angka-angka untuk koefisien fungsi tujuan}$$

$$c_I = [1 \ 2 \ -1 \ 0]^T$$

$$c_{II} = c_B = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$b = [6 \ 8 \ 1 \ 2]^T$$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_6]$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. **Iterasi ke-1** sebagai solusi awal, mengasumsikan,

$$X_B = X_{II} = C_{II}, \text{ dan } B^{-1} = I$$

- a. Penentuan **vektor masuk**, untuk  $P_1$  dan  $P_2$ , berarti vektor kolom  $*C_B = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , maka,  $Y(P_1, P_2) = C_B B^{-1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$

$$*(z_1 - c_1, z_2 - c_2) = Y(P_1, P_2) - (c_1, c_2)$$

$$= (0 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T - (3 \ 2) = (-3 \ -2)$$

$*(z_1 - c_1, z_2 - c_2) = (-3 \ -2)$ , harga  $(-3 \ -2)$  berhubungan dengan  $P_1$  dan  $P_2$  kemudian dipilih dengan angka terkecil yaitu  $-3$ , yang berhubungan dengan  $P_1$  sesuai koefisien fungsi tujuan.

Vektor Masuk. berhubungan **dengan  $P_1$  Masuk**

- b. Penentuan **Vektor Keluar**, menghitung sebagai berikut,

$$* \text{Nilai variable basis, } X_B = B^{-1}b = I b = b = (6 \ 8 \ 1 \ 2)^T$$

\*Koefisien pembatas variabel masuk,

$$\alpha^1 = B^{-1} P_1 = I P_1 = P_1 = (1 \ 2 \ -1 \ 0)^T$$

$$* \text{Nilai minimum dari } \Theta = \min(k) \left\{ \frac{(B^{-1}b)(k)}{\alpha_k^j}, \alpha_k^j > 0 \right\}$$

$$\text{dengan } \alpha^1 = [1 \ 2 \ -1 \ 0]^T$$

$$*\Theta_1 = \min(6/1, 8/2, 1/-1 \ 2/0),$$

Syarat  $\alpha_k^j > 0$  atau positif, dipenuhi oleh  $(6/1 \text{ dan } 8/2)$ ,

Maka  $\Theta = 8/2$  (pilihan minimum),

Angka-8 berhubungan dengan  $x_4$ ,

Dan *vector keluar* adalah  $P_4$ , maka  $P_1$  menggantikan  $P_4$ .

\* $P_1$  menggantikan  $P_4$ , maka  $B^{-1}_{\text{next}} = EB^{-1} = EI$

\* $\xi$  sesuai persamaan-6, dengan  $j=1$  dan  $k=2$  maka  $\alpha_k^j=2/1=2$ , dan  $\alpha_k^j=[1 \ 2 \ -1 \ 0]^T$ ,

$$\xi = \left[ -\frac{\alpha_1^j}{\alpha_k^j} \quad -\frac{\alpha_2^j}{\alpha_k^j} \quad -\frac{\alpha_3^j}{\alpha_k^j} \dots + \frac{1}{\alpha_k^j} \quad -\frac{\alpha_1^j}{\alpha_k^j} \dots \right]^T$$

Pastikan  $+\frac{1}{\alpha_k^j}$  digunakan pada posisi yang benar, yaitu:

$$\xi_1 = [-1/2 \ 1/2 \ -(-1/2) \ 0/2]^T = [-1/2 \ 1/2 \ 1/2 \ 0]^T$$

Angka-angka ini menempati kolom ke-2 dari pergantian  $P_4$  diisi angka-angka  $\xi$ .

Berhubungan dengan  $P_4$ , pada matriks- $E_1$ , berikut:

Matriks- $E_1$  menggantikan matriks- $I$  untuk iterasi ke-2 Basis selanjutnya adalah  $X_B = (x_3 \ x_1 \ x_5 \ x_6)$  dengan **posisi  $x_4$  digantikan  $x_1$** , dan harga  $C_B$  berubah dari matrik nol menjadi  $C_B = (0 \ 3 \ 0 \ 0)$  dimana angka-3 adalah angka-  $x_1$  pada *fungsi tujuan*.

### 3. Iterasi ke-2 sebagai solusi awal, mengasumsikan,

- Menentukan vektor masuk untuk vector non basic  $P_1$  dan  $P_4$ ,

$$*C_{B1} B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [0 \ 3 \ 0 \ 0]^T = (0 \ 3/2 \ 0 \ 0)$$

$$*(z_2 - c_2, z_3 - c_3) = Y(P_2, P_3) - (c_2, c_3) \\ = (0 \ 3/2 \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T - (2 \ 0) = (-1/2 \ 3/2)$$

masih ada angka negatif, iterasi dilanjutkan.

\*Sebelumnya, sudah diperoleh vector  $P_2$  masuk, maka:



$$X_B = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [6 \ 1 \ 8 \ 2]^T = (2 \ 4 \ 5 \ 2)^T$$

$$\alpha^2 = E_1 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [2 \ 1 \ 1 \ 1]^T = (3/2 \ 1/2 \ 3/2 \ 1)^T$$

$$\alpha^2 = (3/2 \ 1/2 \ 3/2 \ 1)^T$$

$$\Theta_2 = \min(k) \left\{ \frac{(B^{-1}b)(k)}{\alpha_k^j}, \alpha_k^j > 0 \right\}$$

$$\Theta_2 = \min (2/1.5 \ 4/0.5 \ 5/1.5 \ 2/1.5) =$$

$$\min (4/3 \ 8 \ 10/3 \ 4/3) = 4/3$$

Benar dugaan, untuk persesuaian dengan  $x_2$ ,  
maka *vector keluar* adalah  $P_4$ .

- b. Menentukan vektor masuk untuk vector non basic  $P_2$  dan  $P_4$ ,

Untuk menentukan **Basis** karena  $P_2$  menggantikan  $P_4$ , maka:

$$\alpha^2 = (3/2 \ 1/2 \ 3/2 \ 1)^T \text{ untuk } k=2 \text{ dan,}$$

$$\xi_2 = \left[ -\alpha_1^j / \alpha_k^j \ -\alpha_2^j / \alpha_k^j \ -\alpha_3^j / \alpha_k^j \ \dots \ +1 / \alpha_k^j \ -\alpha_1^j / \alpha_k^j \ \dots \right]^T$$

$$\text{dengan } \alpha^2 = 3/2$$

$$\xi_2 = \left[ +1 / \alpha_k^j \ -\alpha_1^j / \alpha_k^j \ \dots \right]$$

$$= [+1/(3/2) \ -(1/2)/(3/2) \ -(3/2)/(3/2) \ -1/(3/2)]^T$$

$$= [2/3 \ -1/3 \ -1 \ -2/3]^T,$$

$$B^{-1}_{\text{next}} =$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basis baru selanjutnya adalah  $X_B = (x_2 \ x_1 \ x_5 \ x_6)$  dengan **posisi  $x_4$  digantikan  $x_1$** , dan harga  $C_B$  berubah dari matrik nol menjadi  $C_B = (2 \ 3 \ 0 \ 0)$  dimana angka-3 adalah angka- $x_1$  pada *fungsi tujuan* dan angka-2 adalah angka- $x_2$  pada *fungsi tujuan*.

4. **Iterasi ke-3** penentuan vektor masuk terakhir.  
Menentukan vektor masuk untuk vektor non basic  $P_1$  dan  $P_4$ ,

$$*Y = C_{B2} B_2^{-1} = (2 \ 3 \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1/3 \ 4/3 \ 0 \ 0)$$

$$*(z_3 - c_3, z_4 - c_4) = Y(P_3, P_4) - (c_3, c_4)$$

$$= (1/3 \ 4/3 \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T - (0 \ 0) = (1/3 \ 4/3)$$

Hasil sudah positif semua, langsung ditentukan yang dicari.

$$*[x_2 \ x_1 \ x_5 \ x_6]^T = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} [6 \ 8 \ 1 \ 2]^T$$

$$=[4/3 \ 10/3 \ 3 \ 2/3]^T$$

$$x_1=4/3 \text{ dan } x_2=10/3$$

$$*Z = C_{B2} X_{B2} = (2 \ 3 \ 0 \ 0) [4/3 \ 10/3 \ 3 \ 2/3]^T = 38.3$$

## **Contoh-2**

Uraian pengerjaan mengikuti prosedur MSD dengan modifikasi dan penjelasan-penjelasan, sebagai berikut:

### **Masalah-1**

Fungsi tujuan diberikan:  $Z = x_1 + 4x_2$

dari **Jasbir S. Arora (1989)** dengan ***Pertidaksamaan Batasan*** yaitu:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Jawab masalah ini, kembali ke bentuk standar Program Linear yaitu: **maksimumkan** dengan persamaan tujuan  $Z - x_1 - 4x_2 = 0$ . Kenapa dimaksimumkan karena pertidaksamaan  $x_1 + 2x_2 \geq 4$  sebagai *batasan yang sendirian*  $\geq$  sehingga berpola hasil minimum. Persamaan menjadi:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 4$$

$$x_1 - x_2 - x_6 + x_8 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Jika  $x_3$  merupakan variabel non basic atau slack dan  $x_5$  variabel buatan, maka  $x_4$  merupakan kelebihan harga, sehingga untuk persamaan berlaku diberi tanda minus. Untuk memberi harga awal, dua variabel non basic sekaligus diberi asumsi harga yaitu,  $x_3 = 0$  ini normal kita misalkan, dan  $x_3 = 2$ , dua-duanya kita pindahkan sebagai variabel basic, yang lainnya non basic. Dalam hal ini persamaan yang mengandung minus ' $-x_5$ ' dikalikan dengan -2. Dengan mengikuti prosedur MSD yang dalam hal ini hanya terdapat 2 (dua) variabel basic yang dicari. Hasilnya diperoleh  $x_1 = 11/9$ ,  $x_2 = 17/9$ , dan nilai maksimal  $13/3$ , dengan harga variabel non basic yaitu:  $x_4 = 5/3$ ,  $x_6 = 7/3$ , dan  $x_8 = -7/3$ . Variabel non basic lainnya sama dengan nol.

## Masalah-2

kasus *perubahan pembatas* untuk pengembangan dari **Jasbir S. Arora (1989)**, dengan penyelesaian-penjelasan step by step pengerjaan MSD, yaitu:

**Fungsi tujuan** diberikan:  $Z = x_1 + 4x_2$

dengan ***Pertidaksamaan Batasan*** yaitu:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Jawab masalah ini dengan penjelasan sebagai berikut:

- Awal pengerjaan dilakukan dengan kembali ke bentuk standar Program Linear, yaitu: **maksimumkan** dengan persamaan tujuan  $Z - x_1 - 4x_2 = 0$ .
- Setelah variabel non basic  $x_3$  ditambahkan pada pertidaksamaan-1 untuk menjadi persamaan, maka wajib

dahulukan variabel non basic  $x_4$  dan diletakkan pada pertidaksamaan yang lainnya dengan tanda minus karena pertidaksamaan dengan tanda '≥'.

- c. Untuk fungsi pembatas dengan persamaan (tanda =), maka fungsi pembatas persamaan ini diubah menjadi pertidaksamaan dengan dikalikan -1. Dalam iterasi dicermati untuk mengontrol variabel non basic yang ditambahkan selalu sama dengan nol.
- d. Contoh soal ini dari referensi dikerjakan dengan Metode Simplex tanpa ada revisi. Disini, Dengan contoh soal yang sama, dilakukan dengan MSD.

*Persamaan Pembatas* menjadi:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 &= -7 \\ -x_1 - x_2 + x_5 &= 3 \\ -x_1 - x_2 + x_6 &= 1/10 \end{aligned}$$

Pembatas Persamaan diubah pertidaksamaan, angka sebelah kanan setelah tanda **sama dengan** menjadi negatif.

Prosedur berikutnya, sebagai berikut:

1. **Formulasi Program Linear** untuk matriks dan vektor menjadi,

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T \quad \text{identitas semua variabel}$$

$$X_I = [x_1 \ x_2]^T \quad \text{identitas variabel basic}$$

$$X_{II} = [x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T \quad \text{identitas variabel non basic atau slack}$$

$$c = [1 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{angka-angka dari koefisien fungsi tujuan}$$

$$c_I = C_B = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$b = [5 \ -7 \ 3 \ 1/10]^T$$

$$1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_6]$$

$$[P_1 \ P_2]^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. **Iterasi ke-1** sebagai solusi awal, mengasumsikan,

$$X_B = X_{II} = C_{II}, \text{ dan } B^{-1} = I$$

a. Penentuan **vektor masuk**, untuk  $P_1$  dan  $P_2$ , berarti vektor kolom  $*C_B = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , maka,  $Y(P_1, P_2) = C_B B^{-1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$

$$\begin{aligned} *(z_1 - c_1, z_2 - c_2) &= Y(P_1, P_2) - (c_1, c_2) \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T - [1 \ 4] \\ &= [-1 \ -4] \end{aligned}$$

$*(z_1 - c_1, z_2 - c_2) = (-1 \ -4)$ , harga  $(-1 \ -4)$  berhubungan dengan  $P_1$  dan  $P_2$  kemudian dipilih dengan angka terkecil yaitu  $-4$ , yang berhubungan dengan  $P_2$ . Sesuai koefisien fungsi tujuan. Vektor Masuk, berhubungan **dengan  $P_2$  Masuk**

b. Penentuan **Vektor Keluar**, menghitung sebagai berikut,

$$* \text{Nilai variabel basis, } X_B = B^{-1}b = I b = b = [5 \ -7 \ 3 \ 1/10]^T$$

\*Koefisien pembatas variabel masuk,

$$\alpha^1 = B^{-1} P_1 = I P_1 = P_1 = [1 \ -2 \ -1 \ -1]^T$$

$$* \text{Nilai minimum dari } \theta = \min(k) \left\{ \frac{(B^{-1}b)(k)}{\alpha_k^j}, \alpha_k^j > 0 \right\}$$

$$\text{dengan } \alpha^1 = [1 \ 2 \ -1 \ -1]^T$$

$$*\theta_1 = \min \text{ positif } (5/1 \ -7/2 \ 3/-1 \ (1/10)/-1)$$

$$= (5 \ -7/2 \ -3 \ -1/10)$$

syarat  $\alpha_k > 0$  atau positif, dipenuhi oleh 5.

maka  $\theta = 5$  (pilihan minimum),

angka-5 berhubungan dengan  $x_1$  **menggantikan  $x_3$** ,

dan *vector keluar* adalah  $P_3$ , maka  $P_2$  menggantikan  $P_3$ .

\* $P_1$  menggantikan  $P_4$ , untuk  $B^{-1}_{\text{next}} = EB^{-1} = EI$

- c. \* $\xi$  sesuai persamaan-6, dan  $\alpha_k = [1. \ 2 \ -1 \ -1]^T$ , dengan  $j=1$  dan  $k=2$  maka  $\alpha_k = \alpha^1_2 = 2$

$$\xi = \left[ -\alpha^j_1 / \alpha^j_k \quad -\alpha^j_2 / \alpha^j_k \quad -\alpha^j_3 / \alpha^j_k \dots + 1 / \alpha^j_k \quad -\alpha^j_1 / \alpha^j_k \dots \right]^T$$

Pastikan  $+1 / \alpha^j_k$  digunakan pada posisi yang benar, yaitu:

$$\xi_1 = [1 \ -1 \ 1/2 \ 1/2]^T$$

Untuk diingat,  $P_1$  masuk ke  $x_3$ .

Basis selanjutnya adalah  $X_B = (x_1 \ x_4 \ x_5 \ x_6)$  dengan **posisi  $x_3$  digantikan  $x_1$** , dan harga  $C_B$  berubah dari matrik nol menjadi  $C_B = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$  dimana angka-4 adalah dari angka-  $x_2$  pada *fungsi tujuan*.

### 3. Iterasi ke-2 sebagai solusi awal, mengasumsikan,

- a. Menentukan vektor masuk untuk vektor non basic  $P_1$  dan  $P_4$ ,

$$*E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$*C_{B1} B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$= [1 \ -1 \ -1/2 \ -1/2]^T$$

$$*(z_1 - c_1, z_3 - c_3) = [1 \ -1 \ -1/2 \ -1/2]^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-[4 \ 0 \ 0 \ 0] = [-3 \ 3/2 \ 0 \ 0]$$

\*Sebelumnya, sudah diperoleh vektor  $P_1$  masuk, menjadi akan masuk  $P_2$  maka:

$$*X_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [5 \ -7 \ 3 \ 1/10]^T$$

$$= [5 \ -12 \ 11/2 \ 249/10]^T$$

Masih ada angka minus, iterasi dilanjutkan.

$$*\alpha^2 = E_1 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [1 \ -2 \ -1 \ -1]^T$$

$$= [1 \ -3 \ -3/2 \ -3/2]^T \text{ dengan } \alpha_k^j = \alpha_3^2 = -3/2$$

$$*\Theta_2 = \min(k) \left\{ \frac{(B^{-1}b)(k)}{\alpha_k^j}, \alpha_k^j > 0 \right\}$$

$$= \min (5/(-1/2) \ -12/(-1/2) \ (11/2) /(-1/2) \ (2 \ 49/10) /(-1/2))$$

$$= \min (-10 \ 24 \ -11 \ -13) \text{ syarat positif untuk angka } 24$$

Benar dugaan, untuk persesuaian dengan  $x_4$ , maka *vektor*



*keluar* adalah  $P_2$ .

- b. Menentukan vektor masuk untuk vektor non basic  $P_2$  dan  $P_4$ ,

Untuk menentukan **Basis** karena  $P_2$  menggantikan  $P_4$ , maka:

$$\alpha^2 = [1 \ -3 \ -3/2 \ -3/2]^T \text{ untuk } k=2 \text{ maka } \alpha_k^j = \alpha_3^2 = -3/2$$

$$*\xi_2 = \left[ -\alpha_1^j / \alpha_k^j \quad -\alpha_2^j / \alpha_k^j \quad -\alpha_3^j / \alpha_k^j \quad \dots \quad +1 / \alpha_k^j \quad -\alpha_1^j / \alpha_k^j \quad \dots \right]^T$$

$$\xi_2 = \left[ +1 / \alpha_k^j \quad -\alpha_1^j / \alpha_k^j \quad \dots \right]$$

$$= \left[ -1/(-3/2) \quad 1/(-3/2) \quad (1/2)/(-3/2) \quad (1/2)/(-3/2) \right]^T$$

$$= \left[ 2/3 \quad -2/3 \quad -1/3 \quad -1/3 \right]$$

$P_2$  masuk menggantikan  $P_3$ ,  $P_2$  masuk menggantikan  $P_4$ .

$$*E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- c.  $XB^{-1}_{\text{next}}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & -4/3 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basis baru selanjutnya adalah  $X_B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \end{bmatrix}$  dengan **posisi  $x_4$  digantikan  $x_1$** , dan harga  $C_B$  berubah dari matrik nol menjadi  $C_B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$  dimana angka-4 adalah angka- $x_2$  pada *fungsi tujuan* dan angka-1 adalah angka- $x_1$  pada *fungsi tujuan*.

4. **Iterasi ke-3** sebagai solusi awal, mengasumsikan, Menentukan vektor masuk untuk vektor non basic  $P_2$  dan  $P_1$ ,

$$*Y = C_{B4} B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & -4/3 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} *(z_4 - c_4, z_3 - c_3) &= Y(P_4, P_3) - (c_4, c_3) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hasil sudah positif semua, langsung ditentukan yang dicari.

$$*[x_2 \ x_1]^T = B^{-1}b$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & -4/3 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 & 1/10 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 13/3 \end{bmatrix}^T$$

$$X_1 = 13/3 \text{ dan } x_2 = 1/3$$

$$*z = C_{B2} X_{B2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T = 51/3$$

## 5.4 Soal Latihan

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan MSD.

1. Dari **Ervica Badiatuzzahra (2012)**, program linear berikut ini, yaitu maksimumkan dengan,  
**Persamaan Tujuan**

$$Z = 8x_1 + 6x_2$$

dengan

**Pertidaksamaan Batasan** yaitu:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60,$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 48,$$

$$\text{dan } x_1, x_2 \geq 0$$

2. **Persamaan Tujuan:**

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

dengan

**pertidaksamaan batasan** yaitu:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$\text{dan } x_1, x_2 \geq 0$$

3. **Persamaan Tujuan,**

$$Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

dengan

**Pertidaksamaan Batasan** yaitu:

$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 12$$

$$4x_1 + x_2 + 12x_3 \geq 8$$

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 8$$

$$\text{dan } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Jika semua fungsi pembatas  $\geq$ , maka fungsi tujuan merupakan,

**minimumkan**  $Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

4. **Persamaan Tujuan,**

$$Z = 5x_1 + 2x_2$$

dengan

**Pertidaksamaan Batasan** yaitu:

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 + 12x_3 \leq 8$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 8$$

$$x_2 \leq 2$$

$$\text{dan } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Jika semua fungsi pembatas  $\leq$ , maka fungsi tujuan merupakan,

**maksimumkan**  $Z = 5x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

5. **Persamaan Tujuan,**

$$Z = 2x_1 + x_2$$

dengan

**Pertidaksamaan Batasan** yaitu:

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$\text{dan } x_1, x_2 \geq 0$$

6. Silahkan coba juga soal pada sub bab 6.2.

## **DAFTAR PUSTAKA**

- Arora, J. S. 1989. Introduction to Optimum Design. McGraw-Hill Book Company. New York
- Badiatuzzahra, E. 2012. Program Linear – Metode Simpleks Revisi (MSR),
- Taha, H. A. 1993. Operation Research. Department of Industrial Engineering. University of Arkansas.
- Tahir, M. 2021. Simpleks yang Direvisi, <https://pdfslide.tips/document/simpleks-yang-direvisi>

# BAB 6

## METODE BRANCH AND BOUND

*Oleh Ida Fitriana Ambarsari*

### 6.1 Integer Linear Programming (Program Linier Bilangan Bulat)

Setiap industri pasti ingin menjadi yang terdepan dan mencapai tujuan untuk mendapatkan hasil yang optimal dengan batasan-batasan sumber yang ada. Batasan-batasan tersebut dapat berupa bahan baku, peralatan, mesin, waktu, biaya, dan tenaga kerja. Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan dengan metode atau teknik program linier.

Dalam menyelesaikan masalah optimasi menggunakan metode atau teknik program linier, kita perlu menerjemahkan terlebih dahulu kendala-kendala yang ada dalam masalah optimasi ke dalam bahasa matematika. Proses tersebut disebut dengan model matematika. Model matematika dapat didefinisikan sebagai suatu rumusan matematika yang diperoleh dari hasil penafsiran seseorang atau dengan kata lain, menerjemahkan suatu masalah optimasi ke dalam bahasa matematika. Suatu model matematika dikatakan baik, jika pada model tersebut hanya memuat bagian-bagian yang diperlukan saja. Beberapa hal penting dalam pemecahan masalah matematika adalah kemampuan pemahaman konsep matematis.

Banyak permasalahan yang bisa diselesaikan dengan metode program linier, diantaranya masalah transportasi, penugasan, program dinamis dan program bilangan bulat (Program Integer). Program linier atau *linear programming* adalah suatu teknik perencanaan bersifat sistematis dengan analisis yang dilakukan menggunakan model matematis untuk memperoleh

beberapa solusi penyelesaian optimum dari suatu masalah (Aminudin, 2005). Lebih lanjut, tujuan dari penggunaan program linier adalah untuk menentukan keuntungan maksimum dengan mengalokasikan sumber daya secara optimal (Meflinda and Mahyarni, 2011).

Sementara itu, program integer adalah suatu bentuk dari program matematikal. Program integer adalah suatu kasus khusus dari program linier dimana semua (atau beberapa) variabel dibatasi sebagai bilangan cacah tak negatif. Jika semua variabel dibatasi sebagai bilangan cacah, masalah tersebut disebut sebagai *pure integer programming* dan jika beberapa variabel tertentu dibatasi sebagai bilangan cacah, sedangkan yang lain tidak, maka masalah tersebut disebut *mixed integer programming*. Sedangkan, suatu bentuk khusus dari program integer dimana variabel dibatasi harus berharga nol atau satu, maka masalah tersebut disebut *zero one integer programming*. Metode simpleks adalah basis untuk penyelesaian masalah program linier dimana disyaratkan bahwa semua variabelnya tak negatif. Namun, untuk menyelesaikan masalah (model) program linier bilangan bulat terdapat beberapa cara. Namun, baik program linier dan program linier bilangan bulat, mulai dengan ruang yang sama, yaitu ruang penyelesaian layak (*feasible*). Lebih lanjut, karena adanya persyaratan bilangan cacah bagi masalah kedua yang berarti munculnya batasan tambahan menyebabkan adanya suatu pengurangan dari ruang penyelesaian layak.

*Integer Linear Programming* bisa diselesaikan dengan banyak cara, yaitu menggunakan grafik, metode eliminasi dan substitusi, dan sebagainya. Salah satu cara yang cukup efisien untuk menyelesaikan program integer adalah menggunakan algoritma *Branch and Bound*, jika dibandingkan dengan metode perhitungan nilai bulat lainnya dan telah menjadi kode komputer standar untuk *Integer Linear Programming*. Lebih lanjut, program linier bilangan bulat (*Integer Linear Programming*) adalah suatu

model program linier yang khusus dimanfaatkan untuk menyesuaikan suatu masalah dimana nilai variabel-variabel keputusan pada penyelesaian optimasi haruslah merupakan bilangan bulat.

Permasalahan optimalisasi jumlah produksi untuk mendapatkan keuntungan yang maksimum, dapat diselesaikan menggunakan metode program linier bilangan bulat dengan variabel keputusannya adalah bilangan bulat (Syahrini, *et al.*, 2019). Terdapat beberapa metode program linier yang digunakan untuk mencari solusi optimal pada jumlah produksi, seperti metode simpleks. Namun, hasil yang diperoleh dapat berupa bilangan bulat ataupun pecahan (Basriati, 2018). Pada kenyataannya, suatu usaha yang memproduksi makanan akan menghasilkan produk dalam jumlah bilangan bulat dan tidak dalam bentuk pecahan. Sedemikian sehingga, model program linier bilangan bulat dibutuhkan pada masalah optimasi jumlah produksi karena variabel keputusan yang dihasilkan, berupa bilangan bulat atau *integer*.

Metode *branch and bound* dan metode *cutting plane* adalah metode yang dikembangkan untuk menyelesaikan permasalahan program linier bilangan bulat (Jannah, *et al.*, 2018). Metode *branch and bound* adalah metode yang membagi masalah ke dalam sub masalah (*branching*). Pembagian masalah tersebut akan membentuk suatu pohon dan batasan baru (*bound*) untuk memperoleh solusi optimal (Basriati, 2018). Metode ini membatasi hasil penyelesaian yang menghasilkan bilangan pecahan dengan menambahkan batasan atas dan bawah untuk variabel keputusan, sehingga diperoleh hasil optimal berupa bilangan bulat (Siswanto, 2016).

Metode *branch and bound* sering digunakan untuk menyelesaikan masalah program bilangan bulat karena hasil yang diperoleh dalam penyelesaian optimal lebih teliti dan lebih baik dari metode lain. Metode ini dikatakan lebih teliti dan lebih baik



dari metode lain karena hasil optimal yang diperoleh biasanya lebih dari satu sehingga penulis dapat menentukan hasil yang paling optimal dari hasil-hasil yang telah diperoleh tersebut (Sitorus, 1997).

## 6.2 Metode Branch and Bound

Metode *branch and bound* awalnya digunakan dan dikembangkan oleh Land and Doig (1960) untuk menyelesaikan program integer yang kemudian dimodifikasi oleh Dakin (1965) dan telah sukses menerapkannya di dalam kitab undang-undang hukum dagang untuk banyak orang dalam memecahkan masalah program bilangan bulat (Sidabutar, 2008).

Metode *branch and bound* merupakan solusi untuk masalah program linier yang mengharuskan variabelnya berupa bilangan bulat. Prinsip yang mendasari metode ini adalah total set solusi yang fisibel dapat dibagi menjadi subset-subset solusi yang lebih kecil. Subset-subset ini selanjutnya dapat di evaluasi secara sistematis sampai solusi optimal ditemukan. Metode *branch and bound* pada masalah program linier digunakan bersama-sama dengan metode simpleks.

Metode *branch and bound* merupakan metode yang membagi masalah ke dalam sub masalah (*branching*) dengan menambahkan batasan baru (*bound*). Langkah-langkah dalam metode *branch and bound*, yaitu (Nur and Abdal, 2016):

- a. Langkah pertama, selesaikan masalah *Integer Linear Programming* (ILP) dan asumsikan masalah tersebut sebagai *Linear Programming* (LP). Selesaikan masalah tersebut menggunakan metode simpleks.
- b. Jika sudah mendapatkan solusi optimal dan hasil tersebut bernilai bilangan bulat pada LP, maka hasil tersebut juga merupakan solusi optimal dari ILP. Namun, jika solusi dari variabel keputusan bernilai pecahan, maka dari salah satu

- variabel dipilih dan dibuat percabangan untuk mendapatkan sub masalah ILP.
- c. Selanjutnya, kembali ke langkah awal dan selesaikan masalah tersebut, lalu tentukan sub masalah dengan nilai tertinggi (*upper bound*).
  - d. Jika solusi *upper bound* sub masalah belum menghasilkan nilai bilangan bulat, lakukan percabangan kemudian selesaikan seperti langkah pada poin c.

Bentuk umum program bilangan bulat dapat dirumuskan sebagai berikut:

Maksimumkan

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (\geq, =, \leq) \quad b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$x_j \geq 0$  semua bilangan cacah,  $j = 1, 2, \dots, n$

dengan  $a_{ij}$ ,  $b_i$ , dan  $c_j$  adalah konstanta (Siagian, 2006).

Lebih lanjut, prosedur dari metode *branch and bound* pada program bilangan bulat dapat diuraikan sebagai berikut:

Asumsikan suatu masalah program bilangan bulat.

Maksimumkan:

$$z = c \cdot x$$

Kendala:

$x \in S_0$  dengan  $S_0 = \{x | Ax = b, x \geq 0, \text{ dan integer}\}$

Ide umum dari metode *branch and bound* adalah pertama untuk menyelesaikan masalah sebagai model kontinu, yaitu menyelesaikan program bilangan bulat sebagai program linier:

Maksimumkan:

$$z = c \cdot x$$

Kendala:

$$x \in S_0 \text{ dengan } S_0 = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$$

Misalkan bahwa  $x_r$  adalah variabel yang berkendala integer yang mempunyai nilai optimum kontinu  $x_r^*$  yang pecahan. Hasil dari  $\lfloor x_r^* \rfloor < x_r < \lfloor x_r^* \rfloor + 1$  tidak memuat solusi integer yang layak. Sebagai akibatnya nilai integer layak dari  $x_r$  harus memenuhi salah satu dari dua kondisi berikut, yaitu:

$$x_r \leq \lfloor x_r^* \rfloor \text{ atau } x_r \geq \lfloor x_r^* \rfloor + 1$$

Kedua kondisi ini jika diaplikasikan untuk model yang kontinu, maka hasilnya merupakan dua masalah saling lepas (*mutually exclusive*) dengan himpunan kendala sebagai berikut:

$$(a) \quad T_1 = \{x | Ax = b, x_r \leq \lfloor x_r^* \rfloor, x \geq 0\}$$

$$(b) \quad T_2 = \{x | Ax = b, x_r \geq \lfloor x_r^* \rfloor + 1, x \geq 0\}$$

dan jika kendala-kendala integernya dimasukkan, maka diperoleh himpunan:

$$S_1 = \{x | Ax = b, x_r \leq \lfloor x_r^* \rfloor, x \geq 0, \text{ dan integer}\} \text{ dan}$$

$$S_2 = \{x | Ax = b, x_r \geq \lfloor x_r^* \rfloor + 1, x \geq 0, \text{ dan integer}\}$$

Sebenarnya bentuk ini merupakan pemisahan dari  $S_0$ , yaitu  $S_1 \cup S_2 = S_0, S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Solusi optimal  $x^*$  dari masalah yang diberikan, harus berada di salah satu  $S_1$  atau  $S_2$  dan harus juga merupakan solusi optimal dari salah satu sub masalah berikut:

$$(a) \quad \text{Maksimumkan } z = c \cdot x \text{ kendala } x \in S_1$$

$$(b) \quad \text{Maksimumkan } z = c \cdot x \text{ kendala } x \in S_2$$

Sub masalah-sub masalah ini dapat lagi diselesaikan dengan mengulangi proses yang sama dengan merelaksasi kendala integernya dan mencabangkan kembali, jika solusi optimal mempunyai komponen yang bernilai pecahan atau tidak integer. Proses percabangan ini akan membangun pohon keputusan, dengan setiap node  $k$  dari pohon keputusan tersebut berhubungan dengan suatu sub masalah: Maksimum  $z = c \cdot x$  kendala  $x \in S_k$ . Jika solusi optimal yang berhubungan dengan program linier tersebut layak (memenuhi) atau mempunyai komponen-

komponen bulat, maka solusi ini dicatat dan nilai objektifnya merupakan batas bawah untuk nilai optimum. Dalam kasus seperti ini tidak perlu dilakukan percabangan lebih jauh lagi dari sub masalah ini dan node yang demikian difathom atau dipangkas. Node yang belum terfathom disimpan dalam *master list*.

Pada beberapa node, nilai optimal (nilai integer terbesar yang lebih kecil atau sama dengan nilai optimum jika fungsi objektif mempunyai koefisien-koefisien integer)  $\bar{z}_k$  dari program linier yang bersangkutan merupakan suatu batas atas untuk nilai optimum dari semua turunannya. Jika batas atas tersebut lebih kecil dari batas bawah terbaik yang ada, maka sub masalah ini tidak dicabangkan lagi. Proses *branch and bound* diteruskan sampai setiap sub masalah berhenti karena salah satu dari dua alasan berikut, yaitu

- (i) Suatu solusi integer, atau
- (ii) Batas atas lebih kecil dari batas bawah yang ada sekarang (Sitorus, 1997).

### **6.3 Analisis Metode *Branch and Bound***

Beberapa peneliti melaksanakan penelitian tentang membandingkan efektifitas dari penggunaan metode *branch and bound* dengan metode *cutting plane* pada berbagai masalah optimasi yang terjadi di suatu industri. Metode *cutting plane* juga merupakan salah satu dari metode yang dapat menyelesaikan masalah program bilangan bulat. Pada penelitian Azzahrha, *et al.*, (2021) yang membandingkan hasil dari penggunaan metode *branch and bound* dan metode *cutting plane*, disimpulkan bahwa metode *cutting plane* memberikan hasil kombinasi produksi yang optimal dan memberikan keuntungan maksimum daripada saat menggunakan metode *branch and bound*.

Sedangkan, pada penelitian lain (Alamnuariputri, 2013) menjelaskan dari hasil penelitian diperoleh solusi bulat optimum jumlah produksi produk saniter yang dihasilkan dari *branch and*

*bound algorithm* lebih maksimal dibandingkan *cutting plane*. Hal ini juga telah dijelaskan oleh Taha (1997) bahwa *branch and bound algorithm* adalah metode yang nilai pemecahannya lebih optimal dibandingkan dengan algoritma *cutting plane* dari segi hasil pemecahannya.

Adapun kelemahan dari metode *branch and bound* ini adalah prosedur dari metode ini sangat panjang karena metode ini mengharuskan pemecahan program linier yang lengkap pada setiap node. Dalam masalah yang besar, metode ini tidak efisien karena metode *branch and bound* hanya fokus pada solusi yang masih bernilai pecahan dan harus mencabangkan solusi yang masih bernilai pecahan ke dalam sub masalah baru sehingga membutuhkan waktu yang lama, terutama ketika satu-satunya informasi yang diperlukan di node tersebut adalah nilai tujuan optimumnya.

Lebih lanjut, dijelaskan juga bahwa metode *branch and bound* dapat dikatakan merupakan metode yang efektif dalam mengoptimalkan suatu permasalahan karena meskipun prosedur dari metode ini sangat panjang dalam permasalahan yang besar tetapi hasilnya lebih optimal daripada metode lain karena metode ini biasanya menghasilkan hasil optimal lebih dari satu. Dengan demikian, dari hasil-hasil optimal yang didapat dapat dibandingkan manakah yang merupakan hasil yang paling optimal. Hal ini juga dijelaskan oleh beberapa peneliti terkait hasil penelitian yang menyatakan bahwa penghasilan beberapa industri lebih maksimal dibandingkan sebelum menggunakan perhitungan dengan metode *branch and bound* (Angeline, *et al.*, 2014; Pagiling and Sahari, 2015; Hillier and Hillier, 2016; Supatimah, *et al.*, 2019).

Selain menyelesaikan secara manual dengan menggunakan metode simpleks dan metode *branch and bound*, dapat juga diselesaikan dengan berbantuan *QM For Windows*.

## DAFTAR PUSTAKA

- Alamnuariputri, Y. A. 2013. 'Integer Programming Dengan Pendekatan Metode Branch And Bound Dan Metode Cutting Plane Untuk Optimasi Kombinasi Produk', Skripsi, Malang: Universitas Brawijaya, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Matematika.
- Aminuddin. 2005. Prinsip-Prinsip Riset Operasi.
- Angeline., Iryanto. And Tarigan, G. 2014. 'Penerapan Metode Branch And Bound Dalam Menentukan Jumlah Produksi Optimum Pada Cv. Xyz', 2(2), Pp. 137-145.
- Azzahrha, F. K. Et Al. 2021. 'Optimalisasi Produksi Tahu Menggunakan Metode Branch And Bound Dan Cutting Plane', 6(2).
- Basriati, S. 2018. 'Integer Linear Programming Dengan Pendekatan Metode Cutting Plane Dan Branch And Bound Untuk Optimasi Produksi Tahu', 4(2), Pp. 95-104.
- Dakin, R. J. 1965. 'A Tree-Search Algorithm For Mixed Integer Programming Problems', Pp. 250-255.
- Hillier, S. And Hillier, S. 2016. 'Penerapan Branch And Bound Algorithm Dalam', 5(November), Pp. 148-155.
- Jannah, M. A. Et Al. 2018. 'Optimasi Hasil Produksi Tahu Dan Tempe Dengan Metode Branch And Bound Dan Metode Cutting Plane', 3(1), Pp. 42-47.
- Land, A. H. And Doig, A. G. 1960. 'An Automatic Method Of Solving Discrete Programming Problems', 28(3), 497.
- Meflinda, A. And Mahyarni. 2011. Operation Research (Riset Operasi).
- Nur, W. And Abdal, N. M. 2016. 'Penggunaan Metode Branch And Bound Dan Gomory Cut Dalam Menentukan Solusi Integer Linear Programming', 2(1), Pp. 9-15.

- Pagiling, R. K. D. And Sahari, A. 2015. 'Optimalisasi Hasil Produksi Tahu Dan Tempe Menggunakan Metode Branch And Bound', 12(1), Pp. 53–63.
- Siagian, P. 2006. Penelitian Operasional.
- Sidabutar, J. 2008. 'Pengembangan Algoritma Pencarian Untuk Menyelesaikan Problema Program Tak Linier Campuran', Tesis, Medan: Universitas Sumatera Utara, Program Pascasarjana.
- Siswanto. 2007. Operation Research.
- Sitorus, P. 1997. Program Linier.
- Supatimah, S. S. Et Al. 2019. 'Optimasi Keuntungan Dengan Metode Branch And Bound', 10(1), Pp. 13–23.
- Syahrini, I. Et Al. 2019. 'Mengoptimalkan Keuntungan Produksi Dengan Menggunakan Metode Branch And Bound Dan Metode Cutting Plane.
- Taha, H. 1997. 'Operation Research An Introduction', New Jersey: Prentice-Hall International.

# **BAB 7**

## **MODEL TRANSPORTASI**

*Oleh Novita Aswan*

### **7.1 Pendahuluan**

Program linier merupakan ilmu terapan yang sangat bermanfaat dan sangat luas pemakaiannya. Program Linier menggunakan model matematis untuk menjelaskan permasalahan yang dihadapi. Permasalahan yang dihadapi ini akan diselesaikan dengan suatu proses penelitian yang operasionalnya membentuk suatu model dan kemudian mengembangkan model itu. Model tersebut merupakan suatu sistem dimana setiap unsur didalamnya saling terkait satu sama lain, contohnya suatu firma, jaringan transport, pertempuran, pengalokasian, antrian dan lain-lain. Oleh karena itu, Program linier merupakan perencanaan suatu aktivitas yang bertujuan untuk memperoleh suatu hasil yang optimum (maksimum atau minimum). Hasil optimus yang dimaksud merupakan alternative terbaik diantara semua alternative yang layak (Ginting, 2021).

Program linier dapat diselesaikan dengan beberapa cara. Cara yang paling umum adalah dengan menggunakan metode grafik. Metode grafik hanya efektif digunakan apabila banyaknya variabel pada program linier hanya dua. Jika banyaknya variabel lebih dari dua misalnya ada tiga variabel, maka metode grafik tidak efektif lagi. Bahkan jika banyaknya variabel sudah lebih dari tiga maka metode grafik tidak dapat diterapkan lagi. Masalah utama dalam metode grafik adalah jumlah variabel keputusan yang dibatasi hanya 2 buah (Rahayu and Arifudin, 2020). Salah satu



penyelesaian permasalahan program linier adalah menggunakan model transportasi.

Dalam bab ini, akan dibahas definisi model transportasi, langkah-langkah dasar Teknik transportasi, jenis-jenis Teknik transportasi, dan beberapa contoh kasus model transportasi.

## 7.2 Model Transportasi

Model transportasi merupakan pemrograman linier jenis khusus yang berhubungan dengan masalah pendistribusian komoditi dari suatu sumber (*suplay*) contohnya pabrik ke tujuan (*demand*) contohnya Gudang. Secara umum tujuan dari model transportasi sendiri adalah untuk membantu distributor menentukan rencana pendistribusian komoditi untuk meminimumkan biaya distribusi agar permintaan terpenuhi (Sudradjat, 2008).

Model transportasi merupakan salah satu solusi tepat guna bagi sistem manajemen operasi dalam dunia bisnis yang bertugas memilih sarana dan sistem transportasi yang paling efisien sehingga biaya distribusi komoditi dapat diminimalisir (Abdillah, 2013). Pada dasarnya model transportasi dapat diselesaikan dengan metode simpleks biasa. Akan tetapi, struktur modelnya yang khusus memberikan kemungkinan adanya pengembangan prosedur pemecahan masalah. Prosedur pemecahan ini disebut Teknik transportasi yang memberikan keefisienan perhitungan (Lumbantoruan, 2020).

Permasalahan yang terkait dengan pendistribusian komoditi dari beberapa sumber ke beberapa tujuan pada masa sekarang merupakan suatu permasalahan yang rutin terjadi. Pada permasalahan ini pendistribusian membutuhkan suatu strategi atau kebijakan dari distributor (*suplay*) agar proses pendistribusian dapat terlaksana dengan baik dan biaya pendistribusian yang dilakukan dapat diminimalisir tanpa

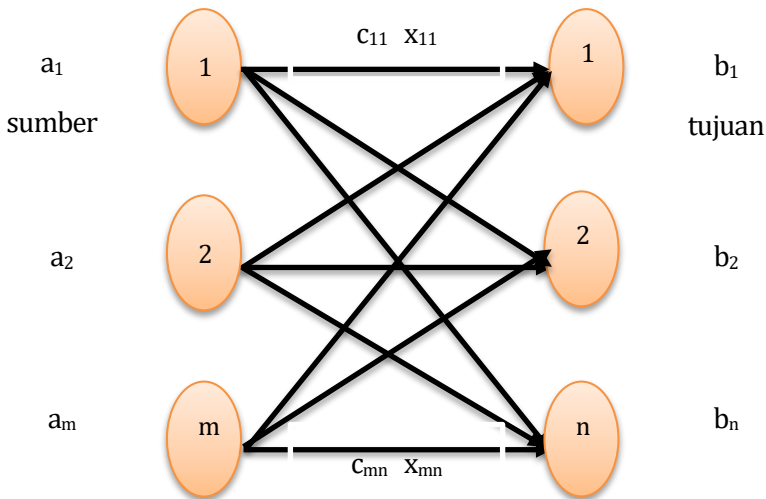
mengurangi permintaan (Haryono, 2015). Untuk itu, data-data yang dibutuhkan dalam suatu model transportasi adalah:

1. Data tingkat penawaran dari setiap sumber
2. Data jumlah permintaan dari setiap tujuan
3. Data biaya transportasi dari setiap sumber ke setiap tujuan (Tastrawati, 2015).

Adapun ciri-ciri permasalahan transportasi dapat terlihat berdasarkan beberapa kondisi berikut ini, yaitu:

1. Adanya beberapa sumber dan beberapa tujuan tertentu.
2. Jumlah komoditi (barang) yang akan didistribusikan dari setiap sumber dan komoditi (barang) yang diminta oleh setiap tujuan memiliki besaran tertentu.
3. Jumlah komoditi yang akan didistribusikan dari setiap sumber ke setiap tujuan harus sesuai dengan permintaan dan atau kapasitas sumber.
4. Biaya pengangkutan kapasitas dari sumber ke tujuan memiliki besaran tertentu (Tastrawati, 2015).

Berikut adalah salah satu model transportasi dari sebuah jaringan distribusi barang dengan  $m$ -sumber dan  $n$ -tujuan.



**Gambar 7.1 :** Deskripsi jaringan transportasi (Sudradjat, 2008)

Pada gambar terlihat bahwa sumber dan tujuan diwakili oleh sebuah **node**. Tanda panah mewakili jaringan penghubung antara sumber dan tujuan dalam proses pengiriman komoditi tersebut. Huruf  $a$  dan  $b$  mewakili jumlah penawaran dan permintaan. Sedangkan biaya diwakili oleh huruf  $c$  dan  $x$  dengan  $i=1,2,...dst$  dan  $j=1,2,...dst$ . Selain itu, Gambar 7.1 diatas dapat ditransformasikan ke dalam bentuk tabel sebagai berikut:

**Tabel 7.1** : deskripsi jaringan transportasi (Sudradjat, 2008)

| Tujuan asal    | T1                                 | T2                                 | ..... | Tj                                 | ..... | Tn                                 | ai             |
|----------------|------------------------------------|------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|------------------------------------|----------------|
| A <sub>1</sub> | C <sub>11</sub><br>x <sub>11</sub> | C <sub>12</sub><br>x <sub>12</sub> | ..... | C <sub>1j</sub><br>x <sub>1j</sub> | ..... | C <sub>1n</sub><br>x <sub>1n</sub> | a <sub>1</sub> |
| A <sub>2</sub> | C <sub>21</sub><br>x <sub>21</sub> | C <sub>22</sub><br>x <sub>22</sub> | ..... | C <sub>2j</sub><br>x <sub>2j</sub> | ..... | C <sub>2n</sub><br>x <sub>2n</sub> | a <sub>2</sub> |
| .              | .                                  | .                                  | .     | .                                  | .     | .                                  | .              |
| .              | .                                  | .                                  | .     | .                                  | .     | .                                  | .              |
| .              | .                                  | .                                  | .     | .                                  | .     | .                                  | .              |
| A <sub>m</sub> | C <sub>m1</sub><br>x <sub>m1</sub> | C <sub>m2</sub><br>x <sub>m2</sub> | ..... | C <sub>mj</sub><br>x <sub>mj</sub> | ..... | C <sub>mn</sub><br>x <sub>mn</sub> | a <sub>m</sub> |
| b <sub>j</sub> | b <sub>1</sub>                     | b <sub>2</sub>                     | ..... | b <sub>j</sub>                     | ..... | b <sub>n</sub>                     | Σai<br>Σbj     |

Berdasarkan Gambar 7.1 dan tabel 7.1 maka model program linier yang menggambarkan ilustrasi diatas dapat dituliskan dengan bentuk persamaan berikut ini:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Dengan Batasan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_{ij} & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\geq a_{ij} & i = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 & \text{untuk semua } i \text{ dan } j \end{aligned}$$

Kelompok Batasan yang pertama menunjukkan bahwa jumlah pengiriman dari sumber tidak dapat melebihi

penawarannya sedangkan kelompok atasan yang kedua menunjukkan bahwa jumlah pengiriman ke tujuan harus memenuhi permintaannya (Tastrawati, 2015). Model diatas menyiratkan bahwa penawaran total  $\sum_{i=1}^m a_{ij}$  setidaknya harus sama dengan permintaan total  $\sum_{j=1}^n b_{ij}$ . Saat penawaran total sama dengan permintaan total ( $\sum_{i=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^n b_{ij}$ ), maka persamaan/model/formulasi yang dihasilkan disebut model transportasi berimbang (*balanced transportation model*) (Rafflesia and Widodo, 2002).

### 7.3 Penyelesaian Masalah Transportasi

Transportasi adalah suatu proses perpindahan komoditi(barang,orang atau jasa) dari satu tempat ke tempat lain. Seperti yang telah dipaparkan pada subbab sebelumnya, permasalahan transportasi merupakan suatu permasalahan rutin yang bersinggungan dengan kegiatan-kegiatan rutin manusia. Pada awalnya permasalahan transportasi telah di pelajari oleh L. V. Kantorovitch pada tahun 1939 sebelum berkembangnya model program linier. Kemudian tahun 1941, F. L. Hitchcock mempresentasikan model standar transportasi dan pada tahun 1947 T.C. Koopmans juga telah mempelajari masalah yang diberi nama *occasionally attached* (Syahputra, 2017).

Permasalahan transportasi merupakan suatu kasus khusus dari metode simpleks. Masalah transportasi sendiri memiliki keistimewaan yaitu 1)selalu ada solusi dan 2) solusi selalu bilangan bulat non negative. Penyelesaian masalah transportasi pada dasarnya menggunakan langkah-lagkah metode simpleks secara langsung dan hanya berbeda dalam perincian penerapan kondisi optimalitas dan kelayakan (Tastrawati, 2015). Langkah-langkah dasar dalam penyelesaian permasalahan transportasi tersebut antara lain:

1. Menentukan penyelesaian fesibel awal
2. Menentukan variabel masuk diantara variabel non dasar. Jika keseluruhan variabel memenuhi kondisi optimal (dari metode simpleks) maka proses berhenti. Akan tetapi jika tidak memenuhi maka dilanjutkan ke langkah ke-3
3. Menentukan variabel keluar sesuai dengan kondisi kelayakan diantara variabel-variabel dalam pemecahan masalah dasar saat ini. Kemudian temukan pemecahan dasar baru dan kembali ke langkah dua.

### 7.3.1 Penyelesaian fesibel awal

Penyelesaian fisibel awal digunakan untuk menentukan penyelesaian awal dalam masalah transportasi. Ada beberapa metode yang biasa digunakan, antara lain metode sudut barat laut (*Northweast Corner Methode*), metode biaya terendah (*Least Cost Methode*), dan metode pendekatan Vogel (*Voge's Aproximation Methode*). Masing-masing metode memiliki keuntungan yang berbeda. Metode sudut barat laut merupakan metode yang paling mudah, akan tetapi biasanya dibutuhkan lebih banyak iterasi untuk mencapai penyelesaian optimal dibandingkan dengan metode biaya terendah atau metode pendekatan Vogel. Tidak ada teori yang akan menjamin bahwa penyelesaian awal merupakan penyelesaian optimal (Tastrawati, 2015).

Langkah Pertama yang dilakukan dalam penyelesaian permasalahan transportasi adalah membentuk tabel simpleks awal (TSA), Selanjutnya mengatur alokasi awal yang nantinya akan diperbaiki untuk mendapatkan biaya minimum. Mengatur alokasi pada tabel simpleks awal ini dapat menggunakan tiga metode, yaitu:

1. Metode Sudut Barat laut (*Northwest Corner Methode*) di mana alokasi dimulai dari sudut kiri atas dari pojok kiri atas dan terus berlanjut ke pojok kanan bawah.

Kelemahan dari metode ini adalah tidak memperhitungkan besarnya biaya sehingga kurang efisien.

2. *Least Cost Method* atau Metode Biaya Terkecil. Metode ini terlebih dahulu mencari dan memenuhi biaya yang terkecil. Lebih efisien dibandingkan metode NWC.
3. *Voge's Aproximation Method* (VAM). Metode Vogel adalah metode yang paling efisien dalam menunjukkan alokasi pada Tabel Simpleks Awal. Namun, biasanya tetap diperlukan perbaikan alokasi lanjutan.

### 7.3.2 Proses menuju solusi optimalisasi

Setelah dilakukan penyelesaian fisis awal dengan membuat tabel simpleks awal dengan salah satu dari ketiga metode yang dapat digunakan bukan berarti solusi optimum dapat langsung diputuskan. Oleh karena itu, perlu dilakukan proses menuju solusi optimal. Proses menemukan solusi optimal ini adalah langkah yang dilakukan untuk melakukan pengecekan apakah tabel tersebut sudah optimal. Dilakukan perhitungan indeks perbaikan dengan menentukan *entering* dan *leaving variable*. Ada dua cara yang dapat digunakan dalam menentukan *entering* dan *leaving variable* yaitu dengan menggunakan metode *stepping stone* dan *Modified Distribution Method* (Metode MODI). (Lumbantoruan, 2020).

#### 1. Metode Stepping Stone

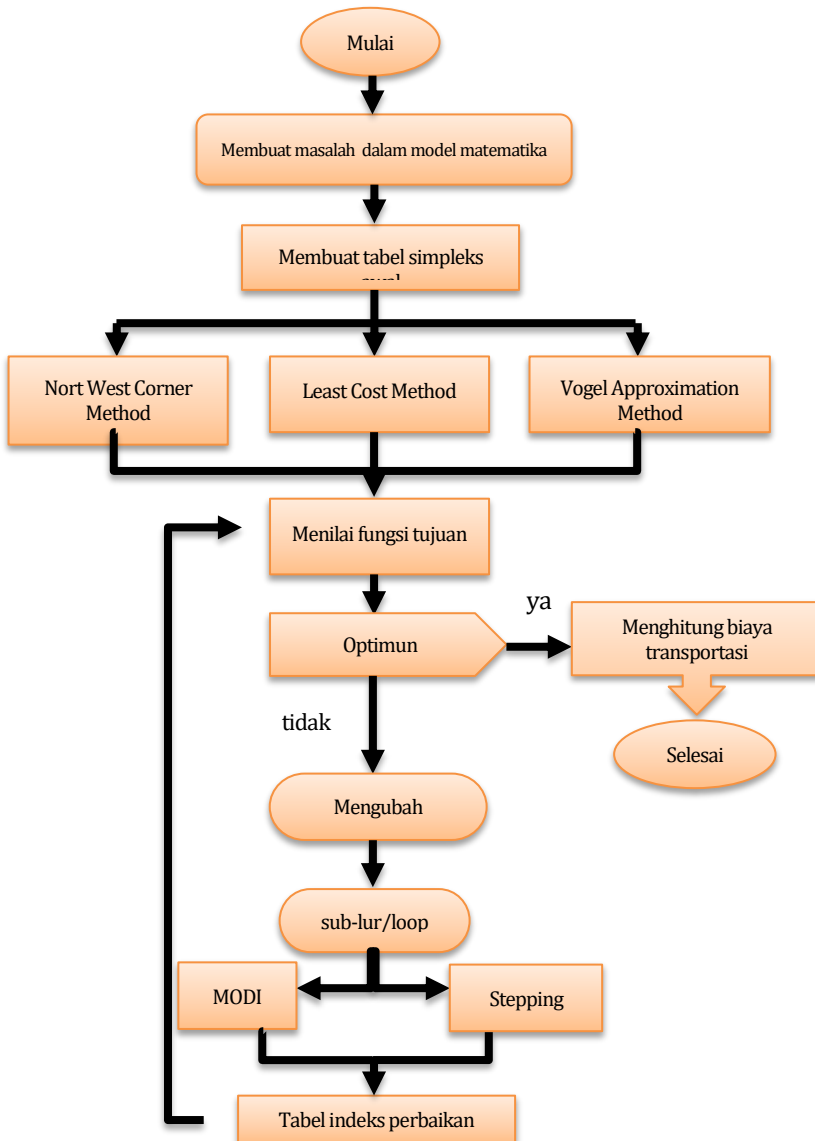
Pada dasarnya metode ini memberikan solusi masalah transportasi dengan melakukan perbaikan bertingkat dari solusi awal yang telah disusun. Metode Northwest Corner digunakan untuk menentukan solusi dasar awal yang fisis. Syarat pada metode ini adalah jumlah rute atau sel yang mendapat alokasi harus sebanyak jumlah kolom + jumlah baris - 1.

## 2. Metode Modified Distribution (MODI)

Metode MODI atau dikenal juga metode *potensial* (metode U-V) ini melakukan evaluasi dari suatu lokasi transportasi secara matriks. Perbedaan utama dari metode MODI dengan metode *Stepping-Stone* ialah cara mengevaluasi setiap sel dalam matriks. Penentuan sel kosong yang bisa menghemat biaya pada metode ini dilakukan dengan prosedur yang lebih pasti dan tepat serta metode ini dapat mencapai hasil optimal lebih cepat. Metode MODI menghitung indeks perbaikan untuk setiap sel kosong tanpa menggunakan jalur tertutup. Indeks perbaikan dihitung dengan terlebih dahulu menentukan nilai baris dan kolom. (Tastrawati, 2015)

Berikut bagan alir proses Penyelesaian masalah transportasi dari proses awal sampai dengan penyelesaian akhir.





**Gambar 7.2 :** Alur Metode Penyelesaian Masalah Transportasi (Lumbantoruan, 2020)

## 7.4 Contoh Kasus Masalah Transportasi

Kasus masalah transportasi telah banyak diangkat oleh beberapa peneliti yang diterbitkan dalam artikel-artikel ilmiah yang menggunakan teknik-teknik transportasi yang telah dibahas pada subab sebelumnya sebagai metode penyelesaian. Berikut salah satu contoh kasus permasalahan transportasi dengan penyelesaian menggunakan metode Nort West Corner.

### KASUS I:

PT. Berjaya Tani beropersi pada produksi pupuk yang memiliki tiga pabrik produksi. Masing-masing pabrik memiliki kapasitas (suplay) sebanyak 150, 90 dan 70 yang akan didistribusikan ke tiga gudang. Permintaan dari masing-masing gudang adalah sebanyak 170, 80 dan 60. Sementara itu, Biaya angkut dari pabrik pertama ke tiga gudang masing-masing adalah 8, 5 dan 6. Biaya angkut dari pabrik kedua ke tiga gudang masing-masing adalah 12, 10 dan 10. Kemudian biaya angkut dari pabrik ketiga ke tiga gdang masing-masing adalah 3, 9 dan 10. Berdasarkan permasalahan ini, Pihak PT. Berjaya Tani ingin mengetahui berapa biaya minimum untuk mendistribusikan pupuk tersebut.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan diatas adalah:

1. Mengalokasikan nilai terkecil antara demand tujuan 1 dan supply asal 1, nilai terkecil adalah nilai supply yaitu 150 di baris 1 dan kolom 1 diisi 150
2. Demand pada kolom 1 belum terpenuhi, jadi dialokasikan sisa dari 170 dikurangi 150. Tujuan 1 diberikan sebanyak 20 dari pabrik 2.
3. Karena baris 2 belum terisi penuh, maka dialokasikan sebanyak 70 sehingga baris 2 sudah terisi penuh 90.

4. Kemudian mengalokasikan sisa dari pengurangan demand tujuan 2 dengan 70. Jadi, tujuan 2 mendapat sebanyak 10 dari asal 3
5. Selanjutnya mengalokasikan 60 ke tujuan 3 dari asal 3
6. Bentuk tabel penyelesaiannya sebagai berikut:

| Asal<br>(Pabrik) | Tujuan (Gudang) |    |    | Suplay |
|------------------|-----------------|----|----|--------|
|                  | 1               | 2  | 3  |        |
| 1                | 8               | 5  | 6  | 150    |
| 2                | 12              | 10 | 10 | 90     |
| 3                | 3               | 9  | 10 | 70     |
| Demand           | 170             | 80 | 60 | 310    |

7. Langkah terakhir adalah menghitung biaya yang dikeluarkan

$$\begin{aligned}
 Z &= (8 \times 150) + (12 \times 20) + (10 \times 70) + (9 \times 10) + (10 \times 60) \\
 &= 1200 + 240 + 700 + 90 + 600 \\
 &= 2830
 \end{aligned}$$

Jadi biaya yang dikeluarkan untuk distribusi barang adalah sebesar 2830.

Untuk mendapatkan hasil yang optimal dalam meminimalkan biaya distribusi, dapat dilanjutkan pada tahap selanjutnya yaitu pembuatan tabel simpleks I, II, III, dan seterusnya dengan metode *stepping stone* atau MODI.

Pada kasus I permasalahan masalah transportasi merupakan masalah transportasi seimbang dalam artian suplay dan demand berada pada jumlah yang sama. Lalu bagaimana jika terjadi ketidakseimbangan antara suplay dan demand. Berikut akan dibahas tentang kondisi masalah transportasi tidak seimbang yang diambil dari (Tastrawati, 2015).

## KASUS II:

CV. RIA TRAVEL adalah sebuah perusahaan travel dan sewa mobil yang memiliki 2 garasi dengan daya tampung masing-masing 15 mobil dan 13 mobil. Perusahaan ini sedang mengalami masalah pengalokasian mobil untuk memenuhi permintaan sewa dari pelanggan. Ada 4 penyewa yang masing-masing membutuhkan 9,6,7 dan 9 buah mobil. Biaya perjalanan dari garasi ke tempat penyewa terlihat pada tabel berikut ini:

| Garasi | Tujuan |    |    |    |
|--------|--------|----|----|----|
|        | 1      | 2  | 3  | 4  |
| A      | 45     | 17 | 21 | 30 |
| B      | 14     | 18 | 19 | 31 |

Untuk menyelesaikan permasalahan transportasi diatas, terlebih dahulu adalah menentukan komponen apa saja yang dapat diambil dari soal yaitu:

1. Total jumlah mobil adalah  $15 + 13 = 28$  buah
2. Total permintaan sewa mobil adalah  $9+6+7+9 = 31$ .
3. Diperoleh bahwa jumlah permintaan  $>$  dari jumlah persediaan.
4. Terlebih dahulu seimbangkan tabel awal dengan menambahkan persediaan semu (garasi C) yang memiliki persediaan sebanyak  $31-28=3$  buah mobil.
5. Biaya pengiriman untuk garasi C dibuat 0 (Karena tidak ada mobil yang dikirimkan) berikut ilustrasi tabelnya:

| Garasi     | Tujuan |    |    |    | Persediaan |
|------------|--------|----|----|----|------------|
|            | 1      | 2  | 3  | 4  |            |
| A          | 45     | 17 | 21 | 30 | 15         |
| B          | 14     | 18 | 19 | 31 | 13         |
| C          | 0      | 0  | 0  | 0  | 3          |
| Permintaan | 9      | 6  | 7  | 9  |            |

Dengan menggunakan metode pendekatan Vogel dapat dilakukan penyelesaian dengan cara:

1. Pada baris-1 dua sel yang biayanya terkecil adalah  $c_{12} = 17$  dan  $c_{13} = 21$ . Selisih antaranya adalah  $21-17=4$ .
2. Pada baris -2 dua sel yang biayanya terkecil adalah  $c_{21} = 14$  dan  $c_{22}=18$ . Selisihnya adalah  $18-14=4$ .
3. Seterusnya dilihat dua biaya terkecil pada setiap baris dan kolom, maka akan didapat hasil sebagai berikut:

| Baris/kolom | 2 sel dengan biaya terkecil  | Selisih       |
|-------------|------------------------------|---------------|
| Baris-1     | $C_{11}=17$ dan $c_{12}=21$  | $21-17=4$     |
| Baris-2     | $C_{21}=14$ dan $c_{22}=18$  | $18-14=4$     |
| Baris-3     | 0                            | 0             |
| Kolom-1     | $C_{21}=14$ dan $c_{31}=0$   | $14-0=14$     |
| Kolom-2     | $C_{12}=17$ dan $c_{32}=0$   | $17-0=17$     |
| Kolom-3     | $C_{23} = 19$ dan $c_{33}=0$ | $19-0=19$     |
| Kolom-4     | $C_{14} =30$ dan $c_{34}=0$  | $30-0 = 30^*$ |

4. Selisih terbesar adalah 30 terjadi pada kolom ke-4. Biaya terkecil pada kolom-ke4  $c_{14}=0$ .
5. Pada sel ini dimasukkan barang sebanyak-banyaknya yaitu 3 unit. Jadi  $x_{14}= 3$ .
6. Dengan melakukan cara ini maka garasi C sudah terpenuhi permintaan sehingga sel an pada baris ke-3 tidak diikutkan pada literasi berikutnya.

7. Proses perhitungan selisih 2 sel yang biayanya terkecil dilanjutkan tetapi dengan menghilangkan baris ke-3 dari perhitungan sehingga didapat:

| Baris/kolom | 2 sel dengan biaya terkecil  | Selisih   |
|-------------|------------------------------|-----------|
| Baris-1     | C11=17 dan c12=21<br>(tetap) | 21-17=4   |
| Baris-2     | C21=14 dan c22=18<br>(tetap) | 18-14=4   |
| Baris-3     | Tidak dihitung               |           |
| Kolom-1     | C21=14 dan c11=45            | 45-14=31* |
| Kolom-2     | C12=17 dan c22=18            | 18-17=1   |
| Kolom-3     | C23 = 19 dan c13=21          | 21-19=2   |
| Kolom-4     | C14 =30 dan c23=31           | 31-30=1   |

akan diperoleh pola berikut ini:

| Garasi  | Tujuan |    |    |     | Selisih |   |   |
|---------|--------|----|----|-----|---------|---|---|
|         | 1      | 2  | 3  | 4   |         |   |   |
| A       | 45     | 17 | 21 | 30  | 15      | 4 | 4 |
| B       | 14     | 18 | 19 | 31  | 13      | 4 | 4 |
| C       | 0      | 0  | 0  | 0   | 3       | 0 | - |
| Selisih | 9      | 6  | 7  | 9   |         |   |   |
|         | 14     | 17 | 19 | 30* |         |   |   |
|         | 31*    | 1  | 2  | 1   |         |   |   |
|         |        |    |    |     |         |   |   |

8. Selisih terbesar adalah 31 terjadi pada kolom ke-1.  
 9. Biaya terkecil pada kolom ke-1 adalah c21=14. Pada sel ini dimasukkan barang sebanyak-banyaknya, yaitu 9 unit. Jadi  $x_{21}=9$ . Maka tujuan 1 sudah terpenuhi sehingga sel an pada kolom ke-1 tidak diktan pada iterasi berikutnya.

10. Proses perhitungan selisih 2 sel dengan biaya terkecil dilanjutkan tanpa mengikutsertakan kolom ke-1 sehingga diperoleh:

| Baris/kolom | 2 sel dengan biaya terkecil | Selisih  |
|-------------|-----------------------------|----------|
| Baris-1     | C11=17 dan c12=21 (tetap)   | 21-17=4* |
| Baris-2     | C23=19 dan c22=18           | 19-18=1  |
| Baris-3     | Tidak dihitung lagi         | -        |
| Kolom-1     | Tidak dihitung lagi         | -        |
| Kolom-2     | C12=17 dan c22=18 (tetap)   | 18-17=1  |
| Kolom-3     | C23 = 19 dan c13=21 (tetap) | 21-19=2  |
| Kolom-4     | C14 =30 dan c23=31 (tetap)  | 31-30=1  |

akan diperoleh pola berikut ini:

| Garasi  | Tujuan |    |    |     | Selisih |   |   |    |
|---------|--------|----|----|-----|---------|---|---|----|
|         | 1      | 2  | 3  | 4   |         |   |   |    |
| A       | 45     | 17 | 21 | 30  | 15      | 4 | 4 | 4* |
| B       | 14     | 18 | 19 | 31  | 13      | 4 | 4 | 1  |
| C       | 0      | 0  | 0  | 0   | 3       | 0 | - | 1  |
| Selisih | 9      | 6  | 7  | 9   |         |   |   |    |
|         | 14     | 17 | 19 | 30* |         |   |   |    |
|         | 31*    | 1  | 2  | 1   |         |   |   |    |
|         | -      | 1  | 2  | 1   |         |   |   |    |

11. Selisih terbesar adalah 4 pada baris ke-1 dengan biaya terkecil pada baris ke-1 adalah c12=17. Pada sel ini

dimasukkan barang sebanyak-banyaknya yaitu 6 unit. Jadi  $x_{12}=6$ .

12. Maka permintaan tujuan 2 sudah terpenuhi sehingga sel an pada kolom 2 tidak diikuti pada iterasi berikutnya.
13. Proses perhitungan selisih dua sel yang biayanya terkecil dilanjutkan tetapi dengan menghilangkan kolom ke-2 dari perhitungan sehingga didapat:

| Baris/kolom | 2 sel dengan biaya terkecil           | Selisih      |
|-------------|---------------------------------------|--------------|
| Baris-1     | $C_{14}=30$ dan $c_{13}=21$           | $30-21=9$    |
| Baris-2     | $C_{23}=19$ dan $c_{24}=31$           | $31-19=12^*$ |
| Baris-3     | Tidak dihitung lagi                   | -            |
| Kolom-1     | Tidak dihitung lagi                   | -            |
| Kolom-2     | Tidak dihitung lagi                   | -            |
| Kolom-3     | $C_{23} = 19$ dan $c_{13}=21$ (tetap) | $21-19=2$    |
| Kolom-4     | $C_{14} = 30$ dan $c_{23}=31$ (tetap) | $31-30=1$    |

akan diperoleh pola berikut ini:

| Garasi | Tujuan  |         |         |        | Selisih |   |   |   |     |
|--------|---------|---------|---------|--------|---------|---|---|---|-----|
|        | 1       | 2       | 3       | 4      |         |   |   |   |     |
| A      | 45      | 17<br>6 | 21<br>3 | 30     | 15      | 4 | 4 | 4 | 9   |
| B      | 14<br>9 | 18      | 19<br>4 | 31     | 13      | 4 | 4 | 1 | 12* |
| C      | 0       | 0       | 0       | 0<br>3 | 3       | 0 | - | - | -   |



|         |     |    |    |     |
|---------|-----|----|----|-----|
| Selisih | 9   | 6  | 7  | 9   |
|         | 14  | 17 | 19 | 30* |
|         | 31* | 1  | 2  | 1   |
|         | -   | 1  | 2  | 1   |
|         | -   | -  | 2  | 1   |

14. Selisih terbesar adalah 12 terjadi pada baris ke-2, Biaya terkecil pada baris ke-2 adalah  $c_{23} = 19$ . Pada sel ini dimasukan barang-barang sebanyak-banyaknya, yaitu 4 unit. Jadi  $x_{23} = 4$ .
15. Karena pada kolom ke-3 hanya kurang pengisian di  $x_{13}$  maka  $x_{13}$  diisi dengan  $7 - 4 = 3$ .
16. Dengan pengisian ini maka Tujuan 3 dan Garasi B sudah terpenuhi permintaannya sehingga sel pada kolom-3 tidak diikuti pada iterasi berikutnya.
17. Karena sekarang sisanya tinggal pada  $x_{14}$  maka  $x_{14}$  diisi dengan  $15 - 6 - 3 = 6$ .
18. Sehingga tabel penyelesaian awal dengan Metode Pendekatan Vogel tampak terlihat dibawah ini:

| Garasi     | Tujuan  |         |         |         | Permintaan |
|------------|---------|---------|---------|---------|------------|
|            | 1       | 2       | 3       | 4       |            |
| A          | 45      | 17<br>6 | 21<br>3 | 30<br>6 | 15         |
| B          | 14<br>9 | 18      | 19<br>4 | 31      | 13         |
| C          | 0       | 0       | 0       | 0<br>3  | 3          |
| Persediaan | 9       | 6       | 7       | 9       |            |

Selanjutnya adalah pengecekan optimalitas dengan menggunakan **metode stepping stone**. Menguji sel-sel yang masih kosong, apakah masih bisa memiliki nilai negative atau tidak, artinya masih bisa menurunkan biaya transportasi atau tidak. Sel yang diuji adalah : Sel  $x_{11}$ ,  $x_{22}$ ,  $x_{24}$ ,  $x_{31}$ ,  $x_{32}$  dan  $x_{33}$ .

Pengujian dilakukan pada setiap sel kosong tersebut dengan menggunakan metode *Stepping Stone*.

Pada metode ini, pengujian dilakukan mulai dari sel kosong tersebut, selanjutnya bergerak (boleh searah jarum jam dan boleh berlawanan) secara lurus/tidak boleh diagonal, ke arah sel yang telah terisi dengan alokasi, begitu seterusnya sampai kembali ke sel kosong tersebut. Setiap pergerakan ini akan mengurangi dan menambah secara bergantian biaya pada sel kosong tersebut. Perhatikan tanda panah dan tanda (+)/(-) nya.

| Garasi     | Tujuan      |         |             |         | Permintaan |
|------------|-------------|---------|-------------|---------|------------|
|            | 1           | 2       | 3           | 4       |            |
| A          | 45<br>(+)   | 17<br>6 | 21<br>3 (-) | 30<br>6 | 15         |
| B          | 14<br>(-) 9 | 18      | 19<br>4 (+) | 31      | 13         |
| C          | 0           | 0       | 0           | 0<br>3  | 3          |
| Persediaan | 9           | 6       | 7           | 9       |            |

### Pengujian

$$\text{Sel } x_{11} = 45 - 21 + 19 - 14 = 29$$

$$\text{Sel } x_{22} = 18 - 17 + 21 - 19 = 3$$

$$\text{Sel } x_{24} = 31 - 30 + 21 - 19 = 3$$

$$\text{Sel } x_{31} = 0 - 14 + 19 - 21 + 30 - 0 = 14$$

$$\text{Sel } x_{32} = 0 - 17 + 30 - 0 = 13$$

$$\text{Sel } x_{33} = 0 - 21 + 30 - 0 = 9$$

Dari hasil pengujian tersebut, ternyata semua sel sudah tidak ada yang bernilai negatif, atau dengan kata lain semua sel sudah tidak dapat memberikan penurunan biaya lagi, sehingga

dengan demikian dapat dikatakan kasus telah optimal, dengan total biaya minimumnya :

$$6(17) + 3(21) + 6(30) + 4(19) + 9(14) + 3(0) = 547 \text{ (ribuan)}$$

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdillah. 2013. *Program Linear*. Ambon: Penerbit Dua Satu Press.
- Ginting, S. S. 2021. *DIKTAT Program Linier*. Medan: Universitas Islam Negeri Sumatera Utara.
- Haryono, Y. 2015. 'Penyelesaian Masalah Model Transportasi Dengan Menggunakan Metode Simpleks Transportasi', *Lemma*, 1(2), pp. 71–77.
- Lumbantoruan, J. H. 2020. *Pemrograman Linear*. Jakarta: Universitas Kristen Indonesia.
- Rafflesia, U. and Widodo, F. H. 2002. *Pemrograman Linier*. Bengkulu: Fakultas Pertanian UNIB.
- Rahayu, Y. N. and Arifudin, O. 2020. *Program Linier Teori dan Aplikasi*. Bandung: Penerbit Widina Bhakti Persada.
- Sudradjat. 2008. 'Penelitian Operasional (Model Transportasi)', in *Modul Penelitian Operasional*. Bandung: Universitas Padjadjaran.
- Syahputra, E. 2017. *Program linier*. Medan: Universitas Negeri Medan.
- Tastrawati, N. K. T. 2015. *PEMROGRAMAN LINIER: MODEL TRANSPORTASI*. Bali: Universitas Udayana.



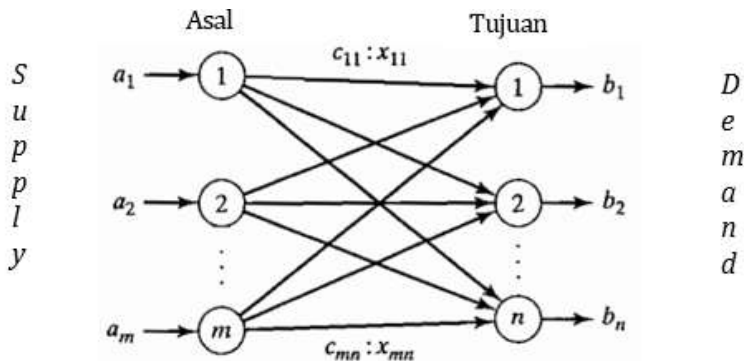
# BAB 8

## NORT WEST CORNER METHOD (NWC)

*Oleh Nur Rahmawati*

### 8.1 Pendahuluan

Salah satu aplikasi dari program linear adalah untuk menyelesaikan problem transportasi. Problem transportasi sendiri merupakan permasalahan dalam pendistribusian produk dari lokasi *supply*nya ke tempat dimana produk tersebut dibutuhkan. Problem distribusi dapat direpresentasikan pada Gambar 8.1.



**Gambar 8.1 :** Representasi model transportasi dengan node dan panah. (Sumber: Taha (2017))

Ciri-ciri problem transportasi:

1. Terdapat daerah asal sejumlah  $i$  dan daerah hasil sejumlah  $j$
2. Ketersediaan produk yang dapat diangkut (*supply*) dari daerah asal  $a_i$  serta *demand* pada masing-masing daerah tujuan  $b_j$  diketahui dengan pasti.
3. Biaya transportasi dari setiap daerah asal ke setiap daerah tujuan  $c_{ij}$  diketahui dengan pasti.
4. Jumlah produk yang akan dialokasikan dari daerah asal ke daerah tujuan  $x_{ij}$

Model matematis dari problem distribusi dapat dituliskan sebagai berikut (Bazaraa dkk., 2008):

Fungsi Tujuan:

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} c_{ij} \quad (1)$$

Batasan:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \forall i; i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad \forall j; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

Dengan:

$x_{ij}$  = Jumlah produk yang akan dialokasikan dari lokasi asal ke  $i$  ke lokasi tujuan ke  $j$

$c_{ij}$  = Biaya pendistribusian dari lokasi asal ke  $i$  ke lokasi tujuan ke  $j$

$a_i$  = Ketersediaan produk pada daerah asal ke- $i$

$b_j$  = Demand pada daerah tujuan ke- $j$

$m$  = Jumlah daerah asal (*supplier*)

$n$  = Jumlah daerah tujuan

Persamaan ke 1 merupakan fungsi tujuan dari problem transportasi yang besarnya sama dengan perkalian biaya pendistribusian dari  $i$  ke  $j$  dikalikan dengan jumlah yang

didistribusikan pada rute tersebut. Persamaan 2 merupakan batasan dari problem transportasi yang memastikan bahwa jumlah yang didistribusikan dari tiap lokasi asal ke  $i$  ke masing-masing lokasi ke  $j$  tidak melebihi kapasitas yang mampu disupply dari lokasi tersebut. Persamaan 3 merupakan batasan dari problem transportasi yang memastikan bahwa jumlah yang diterima oleh setiap lokasi tujuan ke  $j$  dari masing-masing lokasi asal ke  $i$  tidak melebihi *demand* dari lokasi tersebut. Persamaan 4 untuk memastikan bahwa solusi yang dihasilkan oleh problem ini lebih dari sama dengan 0.

## 8.2 Nort West Corner Method (NWC)

Metode *Nort West Corner Method* (NWC) merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai *initial basic feasible solution*. Jadi solusi yang dihasilkan dari metode ini belum tentu merupakan solusi yang paling optimal.

### 8.2.1 Langkah-langkah NWS

Tahapan dalam penyelesaian problem transportasi dengan metode NWS adalah sebagai berikut (Hiller dkk., 2001):

1. Penyusunan Matriks *supply-demand*
2. Pengalokasian dimulai dari ujung kiri atas yang dalam hal ini adalah sel  $X_{11}$ . Alokasikan semaksimal mungkin antara *supply* atau *demand* pada sel terpilih. Pilih Min (*Demand* untuk Gudang ke- $j$ , *Supply* dari Pabrik ke- $i$ ).
3. Jika *variable basic* yang terakhir terpilih adalah  $X_{ij}$ , selanjutnya pilih  $X_{i,j+1}$  (pindah pada kolom sebelah kanannya jika masih terdapat sisa pada *supply* ke  $i$  nya). Alokasikan semaksimal mungkin antara *supply* atau *demand* pada sel terpilih. Pilih Min (*Demand* untuk Gudang ke- $j$ , *Supply* dari Pabrik ke- $i$ ).
4. Setelah *supply* ke  $i$  telah habis, selanjutnya pilih  $X_{i+1,j}$  (pindah ke kolom dibawahnya). Alokasikan semaksimal



mungkin antara *supply* atau *demand* pada sel terpilih. Pilih Min (*Demand* untuk Gudang ke-*j*, *Supply* dari Pabrik ke-*i*).

5. Ulangi hingga semua *supply* dan *demand* sama dengan 0.

### 8.2.2 Latihan Soal

Suatu Perusahaan X memiliki 4 gudang yang harus *disupply* dengan rincian demand pada masing-masing Gudang antara lain: 3,3,2,2. Perusahaan tersebut memiliki 3 pabrik dengan kapasitas supply masing-masingnya antara lain: 5,2,3. Adapun biaya pendistribusian dari tiap pabrik ke masing-masing Gudang dapat dilihat pada Tabel 8.1 berikut:

**Tabel 8.1** : Biaya distribusi dari pabrik ke-*i* ke gudang ke-*j*

|                     |   | Gudang ke- <i>j</i> |    |    |    |
|---------------------|---|---------------------|----|----|----|
|                     |   | 1                   | 2  | 3  | 4  |
| Pabrik ke- <i>i</i> | 1 | 6                   | 14 | 12 | 8  |
|                     | 2 | 4                   | 8  | 6  | 4  |
|                     | 3 | 8                   | 6  | 16 | 10 |

### Solusi:

Berikut ini adalah tahapan dari metode NWS untuk penyelesaian problem diatas:

1. Penyusunan matriks *supply-demand*

Matriks *supply-demand* pada problem transportasi diatas dapat terlihat pada Tabel 8.2 berikut:

**Tabel 8.2** : Matriks *supply-demand*

|                     |   | Gudang ke- <i>j</i> |    |    |    | Supply |
|---------------------|---|---------------------|----|----|----|--------|
|                     |   | 1                   | 2  | 3  | 4  |        |
| Pabrik ke- <i>i</i> | 1 | 6                   | 14 | 12 | 8  | 5      |
|                     | 2 | 4                   | 8  | 6  | 4  | 2      |
|                     | 3 | 8                   | 6  | 16 | 10 | 3      |
| Demand              |   | 3                   | 3  | 2  | 2  |        |



2. Pengalokasian dimulai dari ujung kiri atas yang dalam hal ini adalah sel  $X_{11}$ . Alokasikan semaksimal mungkin antara *supply* atau *demand* pada sel terpilih. Dapat dilihat pada Tabel 8.3.

**Tabel 8.3 : Pengalokasian awal**

|             |   | Gudang ke-j       |    |    |    | Supply         |
|-------------|---|-------------------|----|----|----|----------------|
|             |   | 1                 | 2  | 3  | 4  |                |
| Pabrik ke-i | 1 | 6<br>3            | 14 | 12 | 8  | <del>5</del> 2 |
|             | 2 | 4                 | 8  | 6  | 4  | 2              |
|             | 3 | 8                 | 6  | 16 | 10 | 3              |
| Demand      |   | <del>3</del><br>0 | 3  | 2  | 2  |                |

Sel  $X_{11}$  terpilih untuk dialokasikan pertama kali. Produk yang dialokasikan pada sel tersebut sebanyak 3 yang didapatkan dari Min (*Demand* untuk Gudang ke-1, *Supply* dari Pabrik ke-1) yaitu Min (3,5). Nilai minimum antara 3 dan 5 adalah 3. Sehingga dialokasikan maksimal sebanyak 3 pada sel tersebut. Sisa *supply* pada pabrik ke 1 sebesar 2. Sisa *demand* pada gudang ke 1 sebesar 0.

3. Karena masih terdapat sisa pada *supply* pabrik ke 1 dan *variable basic* yang terakhir terpilih adalah  $X_{11}$ , selanjutnya pilih  $X_{i,j+1}$  yaitu  $X_{1,2}$ . Alokasikan semaksimal mungkin antara *supply* atau *demand* pada sel terpilih. Dapat terlihat pada Tabel 8.4

**Tabel 8.4 : Pengalokasian lanjutan**

|             |   | Gudang ke-j |                |    |    | Supply         |
|-------------|---|-------------|----------------|----|----|----------------|
|             |   | 1           | 2              | 3  | 4  |                |
| Pabrik ke-i | 1 | 6<br>3      | 14<br>2        | 12 | 8  | <del>3</del> 0 |
|             | 2 | 4           | 8              | 6  | 4  | 2              |
|             | 3 | 8           | 6              | 16 | 10 | 3              |
| Demand      |   | 0           | <del>3</del> 1 | 2  | 2  |                |

Produk yang dialokasikan pada sel  $X_{1,2}$  sebanyak 2 yang didapatkan dari Min (*Demand* untuk Gudang ke-2, *Supply* dari Pabrik ke-1) yaitu Min (3,2). Nilai minimum antara 3 dan 2 adalah 2. Sehingga dialokasikan maksimal sebanyak 2 pada sel tersebut. Sisa *supply* pada pabrik ke 1 sebesar 0. Sisa *demand* pada gudang ke 2 sebesar 1.

4. *Variable basic* yang terakhir terpilih adalah  $X_{12}$ . Karena *supply* dari pabrik ke 1 telah habis, selanjutnya pilih sel  $X_{i+1,j}$  yaitu sel  $X_{2,2}$  (pindah ke kolom dibawahnya). Alokasikan semaksimal mungkin antara *supply* atau *demand* pada sel terpilih. Dapat terlihat pada Tabel 8.5.

**Tabel 8.5 Pengalokasian lanjutan**

|             |   | Gudang ke-j |                |    |    | Supply         |
|-------------|---|-------------|----------------|----|----|----------------|
|             |   | 1           | 2              | 3  | 4  |                |
| Pabrik ke-i | 1 | 6<br>3      | 14<br>2        | 12 | 8  | 0              |
|             | 2 | 4           | 8<br>1         | 6  | 4  | <del>2</del> 1 |
|             | 3 | 8           | 6              | 16 | 10 | 3              |
| Demand      |   | 0           | <del>1</del> 0 | 2  | 2  |                |

Produk yang dialokasikan pada sel  $X_{2,2}$  sebanyak 1 yang didapatkan dari Min (*Demand* untuk Gudang ke-2, *Supply* dari Pabrik ke-2) yaitu Min (1,2). Nilai minimum antara 1 dan 2 adalah 1. Sehingga dialokasikan maksimal sebanyak 1 pada sel tersebut. Sisa *supply* pada pabrik ke 2 sebesar 1. Sisa *demand* pada gudang ke 2 sebesar 0.

5. Karena masih terdapat sisa pada *supply* pabrik ke 2 dan *variable basic* yang terakhir terpilih adalah  $X_{2,2}$ , selanjutnya pilih  $X_{i,j+1}$  yaitu  $X_{2,3}$ . Alokasikan semaksimal mungkin antara *supply* atau *demand* pada sel terpilih. Dapat terlihat pada Tabel 8.6.

**Tabel 8.6 : Pengalokasian lanjutan**

|             |   | Gudang ke-j |         |        |    | Supply |
|-------------|---|-------------|---------|--------|----|--------|
|             |   | 1           | 2       | 3      | 4  |        |
| Pabrik ke-i | 1 | 6<br>3      | 14<br>2 | 12     | 8  | 0      |
|             | 2 | 4           | 8<br>1  | 6<br>1 | 4  | 0      |
|             | 3 | 8           | 6       | 16     | 10 | 3      |
| Demand      |   | 0           | 0       | 1      | 2  |        |

Produk yang dialokasikan pada sel  $X_{2,3}$  sebanyak 1 yang didapatkan dari Min (*Demand* untuk Gudang ke-3, *Supply* dari Pabrik ke-2) yaitu Min (2,1). Nilai minimum antara 2 dan 1 adalah 1. Sehingga dialokasikan maksimal sebanyak 1 pada sel tersebut. Sisa *supply* pada pabrik ke 2 sebesar 0. Sisa *demand* pada gudang ke 3 sebesar 1.

6. *Variable basic* yang terakhir terpilih adalah  $X_{2,3}$ . Karena *supply* dari pabrik ke 2 telah habis, selanjutnya pilih sel  $X_{i+1,j}$  yaitu sel  $X_{3,3}$  (pindah ke kolom dibawahnya).

Alokasikan semaksimal mungkin antara *supply* atau *demand* pada sel terpilih. Dapat terlihat pada Tabel 8.7.

**Tabel 8.7 : Pengalokasian lanjutan**

|             |   | Gudang ke-j |         |         |    | Supply |
|-------------|---|-------------|---------|---------|----|--------|
|             |   | 1           | 2       | 3       | 4  |        |
| Pabrik ke-i | 1 | 6<br>3      | 14<br>2 | 12      | 8  | 0      |
|             | 2 | 4           | 8<br>1  | 6<br>1  | 4  | 0      |
|             | 3 | 8           | 6       | 16<br>1 | 10 | 2      |
| Demand      |   | 0           | 0       | 10      | 2  |        |

Produk yang dialokasikan pada sel  $X_{3,3}$  sebanyak 1 yang didapatkan dari Min (*Demand* untuk Gudang ke-3, *Supply* dari Pabrik ke-3) yaitu Min (1,3). Nilai minimum antara 1 dan 3 adalah 1. Sehingga dialokasikan maksimal sebanyak 1 pada sel tersebut. Sisa *supply* pada pabrik ke 3 sebesar 2. Sisa *demand* pada gudang ke 3 sebesar 0.

7. Karena masih terdapat sisa pada *supply* pabrik ke 3 dan *variable basic* yang terakhir terpilih adalah  $X_{3,3}$ , selanjutnya pilih  $X_{i,j+1}$  yaitu  $X_{3,4}$ . Alokasikan semaksimal mungkin antara *supply* atau *demand* pada sel terpilih. Dapat terlihat pada Tabel 9.8

**Tabel 8.8 : Pengalokasian lanjutan**

|             |   | Gudang ke-j |           |           |                | Supply         |
|-------------|---|-------------|-----------|-----------|----------------|----------------|
|             |   | 1           | 2         | 3         | 4              |                |
| Pabrik ke-i | 1 | 6<br>3 →    | 14<br>2 ↓ | 12        | 8              | 0              |
|             | 2 | 4           | 8<br>1 →  | 6<br>1 ↓  | 4              | 0              |
|             | 3 | 8           | 6         | 16<br>1 → | 10<br>2        | <del>2</del> 0 |
| Demand      |   | 0           | 0         | 0         | <del>2</del> 0 |                |

Produk yang dialokasikan pada sel  $X_{3,4}$  sebanyak 2 yang didapatkan dari Min (*Demand* untuk Gudang ke-4, *Supply* dari Pabrik ke-3) yaitu Min (2,2). Sehingga dialokasikan maksimal sebanyak 2 pada sel tersebut. Supply dan demand sudah teralokasikan semua yang ditandai dengan sisa supply dan demand yang bernilai 0. Dengan demikian solusi optimal dengan metode NWS dapat terlihat pada Tabel 8.9.

**Tabel 8.8 : Solusi optimal menggunakan NWS**

|             |   | Gudang ke-j |           |           |         | Supply |
|-------------|---|-------------|-----------|-----------|---------|--------|
|             |   | 1           | 2         | 3         | 4       |        |
| Pabrik ke-i | 1 | 6<br>3 →    | 14<br>2 ↓ |           |         | 0      |
|             | 2 |             | 8<br>1 →  | 6<br>1 ↓  |         | 0      |
|             | 3 |             |           | 16<br>1 → | 10<br>2 | 0      |
| Demand      |   | 0           | 0         | 0         | 0       |        |

Biaya pendistribusian menggunakan metode NWS dapat dihitung sebagai berikut:

Biaya pendistribusian dari Pabrik ke-I ke Gudang ke-j

$$= \sum c_{ij}x_{ij}$$

$$= c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34}$$

$$= 6(3) + 14(2) + 8(1) + 6(1) + 16(1) + 10(2)$$

$$= 96$$



## DAFTAR PUSTAKA

- Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J. and Sherali, H.D., 2008. *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons.
- Hillier, F. S. and Gerald D. Lieberman. 2001. *Introduction To Operations Research*. 7th edn. McGraw-Hill.
- Taha, H. A. 2017. *Operations Research An Introduction*. 10th edn. Pearson Education.



# BAB 9

## METODE LEAST COST

*Oleh Rahimullaily*

### 9.1 Pendahuluan

Metode *Least Cost* merupakan salah satu teknik solusi dalam model transportasi. Metode ini digunakan untuk mendapatkan solusi layak awal dalam penyelesaian model transportasi sebagai upaya pendistribusian barang dapat dilakukan seefektif mungkin dengan biaya yang minimum. Dasar pemikiran metode ini yaitu memberikan prioritas pengalokasian ke sel-sel dengan biaya per unit minimum (Rinaldi *et al.*, 2021). Alokasi awal tidak jauh berbeda dengan metode Northwest Corner. Hanya saja alokasi tidak dilakukan dari sisi sel barat laut tabel, tetapi alokasi dilakukan pada sel yang mempunyai biaya per unit minimum. Jika ada beberapa sel yang biaya minimumnya sama, maka dipilih sembarang. Tahapan metode ini adalah (Lestari, Romadhon and Fauzi, 2021):

1. Memilih sel dengan biaya transportasi minimum kemudian mengalokasikan permintaan sebanyak mungkin atau disesuaikan berdasarkan kapasitas yang ada.
2. Ulangi langkah pertama dengan biaya transportasi minimum selanjutnya.

### 9.2 Contoh Kasus Seimbang

PT. Berjaya Tani beroperasi pada produksi pupuk yang memiliki tiga pabrik produksi. Masing-masing pabrik memiliki kapasitas (*supply*) sebanyak 150 ton, 90 ton, dan 70 ton yang akan didistribusikan ke tiga gudang. Permintaan dari masing-masing gudang adalah sebanyak 170 ton, 80 ton, dan 60 ton. Sementara itu,

biaya angkut dari pabrik pertama ke tiga gudang masing-masing adalah \$8, \$5, dan \$6. Biaya angkut dari pabrik kedua ke tiga gudang masing-masing \$12, \$10, dan \$10. Biaya angkut dari pabrik ketiga ke tiga gudang masing-masing adalah \$3, \$9, dan \$10. Berdasarkan data ini, pihak PT. Berjaya Tani ingin mengetahui berapa biaya minimum solusi awal untuk mendistribusikan pupuk tersebut.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan kasus tersebut, maka dilakukan pendataan jumlah suplay masing-masing pabrik secara tabel (ditunjukkan pada Tabel 9.1), pendataan jumlah permintaan masing-masing gudang secara tabel (ditunjukkan pada Tabel 9.2), dan pendataan biaya angkut dari setiap pabrik ke setiap gudang (ditunjukkan pada Tabel 9.3) sehingga lebih membantu untuk proses ke tahapan pembuatan tabel transportasi awal.

**Tabel 9.1 : Jumlah Suplay Pabrik**

| Sumber             | Suplay Pupuk |
|--------------------|--------------|
| Pabrik 1           | 150 ton      |
| Pabrik 2           | 90 ton       |
| Pabrik 3           | 70 ton       |
| Total Suplay Pupuk | 310 ton      |

**Tabel 9.2 : Jumlah Permintaan Gudang**

| Tujuan                 | Permintaan Pupuk |
|------------------------|------------------|
| Gudang A               | 170 ton          |
| Gudang B               | 80 ton           |
| Gudang C               | 60 ton           |
| Total Permintaan Pupuk | 310 ton          |

**Tabel 9.3 : Biaya Angkut Pupuk dari Pabrik ke Gudang**

|          | Gudang A | Gudang B | Gudang C |
|----------|----------|----------|----------|
| Pabrik 1 | \$8      | \$5      | \$6      |
| Pabrik 2 | \$12     | \$10     | \$10     |
| Pabrik 3 | \$3      | \$9      | \$10     |

Berdasarkan data pada Tabel 9.1, Tabel 9.2 dan Tabel 9.3 dibuat tabel awal transportasi yang ditunjukkan pada Tabel 9.4.

**Tabel 9.4 : Tabel Transportasi Awal**

| <div>Ke<br/>Dari</div> | Gudang A | Gudang B | Gudang C | Suplay |
|------------------------|----------|----------|----------|--------|
| Pabrik 1               | 8        | 5        | 6        | 150    |
| Pabrik 2               | 12       | 10       | 10       | 90     |
| Pabrik 3               | 3        | 9        | 10       | 70     |
| Permintaan             | 170      | 80       | 60       | 310    |

Perhatikan Tabel 9.4 bahwa sel 3A memiliki biaya angkut minimum sebesar \$3. Hal ini menunjukkan sel 3A sebagai sel pertama yang akan dialokasikan dalam metode Least Cost untuk penyelesaian permasalahan ini. Oleh karena itu perbanyak mungkin pupuk dialokasikan ke sel ini. Pilihannya adalah 70 ton atau 170 ton. Meskipun 170 ton dapat didistribusikan ke sel 3A, namun jumlah paling banyak yang dapat dialokasikan adalah 70 ton karena hanya 70 ton suplay pupuk yang ada pada pabrik 3. Alokasi ini ditunjukkan pada Tabel 9.5. Perhatikan Tabel 10.5

bahwa semua sel pada baris 3 sekarang telah dihilangkan, karena semua suplay pupuk dari pabrik 3 telah didistribusikan seluruhnya ke gudang A.

**Tabel 9.5 : Alokasi Biaya Sel Minimum Awal**

| <div> <div>Ke</div> <div>Dari</div> </div> | Gudang A | Gudang B | Gudang C | Suplay |
|--------------------------------------------|----------|----------|----------|--------|
| Pabrik 1                                   | 8        | 5        | 6        | 150    |
| Pabrik 2                                   | 12       | 10       | 10       | 90     |
| Pabrik 3                                   | 70 3     | X 9      | X 10     | 70     |
| Permintaan                                 | 170      | 80       | 60       | 310    |

Alokasi kedua dilakukan pada sel yang memiliki biaya angkut minumum selanjutnya berdasarkan Tabel 9.5. Sel tersebut adalah sel 1B dengan biaya angkut sebesar \$5. Jumlah terbanyak yang dapat dialokasikan adalah sebanyak 80 ton karena hanya 80 ton pupuk yang diminta oleh Gudang B. Alokasi ini ditunjukkan pada Tabel 9.6. Perhatikan Tabel 9.6 bahwa semua sel pada kolom B sekarang telah dihilangkan, karena semua pupuk yang diminta pada gudang B telah didistribusikan dari pabrik 1.

**Tabel 9.6 : Alokasi Biaya Sel Minimum Kedua**

| <div> <div>Ke</div> <div>Dari</div> </div> | Gudang A | Gudang B | Gudang C | Suplay |
|--------------------------------------------|----------|----------|----------|--------|
| Pabrik 1                                   | 8        | 80 5     | 6        | 150    |
| Pabrik 2                                   | 12       | 10       | 10       | 90     |
| Pabrik 3                                   | 70 3     | X 9      | X 10     | 70     |
| Permintaan                                 | 170      | 80       | 60       | 310    |

Alokasi ketiga dilakukan pada sel yang memiliki biaya angkut minimum selanjutnya berdasarkan Tabel 10.6. Sel tersebut adalah sel 1C dengan biaya angkut minimum sebesar \$6. Jumlah terbanyak yang dapat dialokasikan adalah sebanyak 60 ton karena hanya 60 ton pupuk yang diminta Gudang C dan masih tersedianya suplay pupuk dari pabrik 1 sebesar 70 ton. Alokasi ini ditunjukkan pada Tabel 9.7. Perhatikan Tabel 9.7 bahwa semua sel pada kolom C sekarang telah dihilangkan, karena semua pupuk yang diminta gudang C telah didistribusikan dari pabrik 1.

**Tabel 9.7 : Alokasi Biaya Sel Minumum Ketiga**

| <div>Ke<br/>Dari</div> | Gudang A | Gudang B | Gudang C | Suplay |
|------------------------|----------|----------|----------|--------|
| Pabrik 1               | 8        | 5        | 6        | 150    |
| Pabrik 2               | 12       | x        | 10       | 90     |
| Pabrik 3               | 70       | 3        | 9        | 70     |
| Permintaan             | 170      | 80       | 60       | 310    |

Alokasi keempat dilakukan pada sel yang memiliki biaya angkut minimum selanjutnya berdasarkan Tabel 9.7. Sel tersebut adalah sel 1A yaitu sebesar \$8. Jumlah terbanyak yang dapat dialokasikan adalah sebanyak 10 ton (150 ton dikurangi 80 ton dan 60 ton yang telah didistribusikan), dan alokasi terakhir adalah 90 ton dilakukan pada sel 2A. Alokasi-alokasi ini yang melengkapi sel biaya minimum awal ditunjukkan pada Tabel 9.8.



**Tabel 9.8 : Solusi Awal**

| <div> <div>Ke</div> <div>Dari</div> </div> | Gudang A         | Gudang B        | Gudang C        | Suplay |
|--------------------------------------------|------------------|-----------------|-----------------|--------|
| Pabrik 1                                   | 10 <div>8</div>  | 80 <div>5</div> | <div>6</div>    | 150    |
| Pabrik 2                                   | 90 <div>12</div> | <div>10</div>   | <div>10</div>   | 90     |
| Pabrik 3                                   | 70 <div>3</div>  | X <div>9</div>  | X <div>10</div> | 70     |
| Permintaan                                 | 170              | 80              | 60              | 310    |

Setelah mendapatkan solusi awal ini, maka perlu diperiksa kembali:

- 1) Apakah semua alokasi jika dijumlahkan ke bawah dan ke samping sudah sesuai dengan permintaan setiap gudang dan jumlah suplay yang tersedia pada pabrik?
- 2) Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yaitu jumlah kolom + jumlah baris - 1 = 3 + 3 - 1 = 5 sel terisi?

Jika jawaban dari kedua hasil pemeriksaan ini adalah "ya" maka tabel tersebut sudah benar. Perhatikan Tabel 9.8 bahwa semua alokasi yang dijumlahkan ke bawah dan ke samping sudah sesuai dengan permintaan pupuk setiap gudang dan jumlah suplay pupuk yang tersedia pada pabrik. Selanjutnya sel yang terisi sebanyak 5 sel. Oleh karena itu, solusi awal yang diperoleh sesuai Tabel 9.8 dinyatakan sudah benar.

Perhatikan rinci biaya solusi awal permasalahan ini:

1. Biaya mengirim 10 ton dari Pabrik 1 ke Gudang A adalah  $10 \text{ ton} \times \$8 = \$80$ .

2. Biaya mengirim 80 ton dari Pabrik 1 ke Gudang B adalah  $80 \text{ ton} \times \$5 = \$400$ .
3. Biaya mengirim 60 ton dari Pabrik 1 ke Gudang C adalah  $60 \text{ ton} \times \$6 = \$360$ .
4. Biaya mengirim 90 ton dari Pabrik 2 ke Gudang A adalah  $90 \text{ ton} \times \$12 = \$1.080$ .
5. Biaya mengirim 70 ton dari Pabrik 3 ke Gudang A adalah  $70 \text{ ton} \times \$3 = \$210$ .

Sehingga diperoleh total biaya solusi awal ini adalah sebesar \$2.130 (didapatkan dari total penjumlahan  $\$80 + \$400 + \$360 + \$1.080 + \$210$ ). Nilai total biaya solusi awal ini lebih rendah dibandingkan dengan total biaya sebesar \$2.830 untuk solusi Northwest Corner awal. Hal ini bukan kebetulan bahwa total biaya yang lebih rendah didapat dengan menggunakan metode least cost, tetapi hal ini berdasarkan kejadian yang logis. Metode Northwest Corner tidak memperhitungkan biaya sama sekali dalam melakukan alokasi-alokasinya, sedangkan metode Least Cost memperhitungkannya. Oleh karena itu, cukup logis bahwa biaya awal yang lebih rendah diperoleh menggunakan metode Least Cost. Hasil metode Least Cost merupakan solusi awal yang lebih baik dibandingkan hasil metode dengan hasil Northwest Corner. Solusi awal ini lebih dekat ke solusi optimal sehingga diperlukan pengurangan yang lebih sedikit untuk mencapai solusi optimal.

## DAFTAR PUSTAKA

- Lestari, R., Romadhon, T. and Fauzi, M. 2021. 'Implementasi Model Transportasi Distribusi Produk Vaksin Hepatitis B Menggunakan Metode Least Cost Dan Modified Distribution', *Jurnal Lebesgue: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika dan Statistika*, 2(2), pp. 180–193. doi: 10.46306/lb.v2i2.69.
- Rinaldi, D. *et al.* 2021. 'Optimalisasi Biaya Pengiriman Paket Menggunakan Metode Least Cost Dan Lingo Pada Pt. Sicepat Ekspres Indonesia', *Jurnal Bayesian : Jurnal Ilmiah Statistika dan Ekonometrika*, 1(2), pp. 121–132. Available at: <http://bayesian.lppmbinabangsa.id/index.php/home>.



# BAB 10

## VOGEL'S APPROXIMATION METHOD (VAM)

*Oleh Evi Yulawati*

### 10.1 Pendahuluan

Tipe khusus dari aplikasi program linier yang paling penting adalah permasalahan transportasi (Siagian, 1987). Pemodelan pada permasalahan ini memiliki sifat dan karakteristik yang penting sehingga disebut khusus. Permasalahan transportasi membahas pendistribusian produk dari sejumlah *supply* atau sumber ke sejumlah *destination* atau tujuan (Hillier and Gerald D. Lieberman, 2001). Pengalokasian diatur sedemikian rupa agar semua *demand* dapat dipenuhi dengan biaya transportasi yang minimal.

Karakteristik khusus pada persoalan transportasi adalah:

1. Terdapat sejumlah *supply* atau sumber dan sejumlah *destination* atau tujuan
2. Jumlah produk yang akan didistribusikan dari setiap sumber dan jumlah produk yang diperlukan oleh setiap tujuan, jumlahnya diketahui dan tertentu.
3. Produk yang dikirim dari sumber, jumlahnya sesuai kebutuhan yang diperlukan dan atau sesuai dengan kapasitas sumber.
4. Biaya transportasi dari setiap sumber ke setiap tujuan diketahui nilainya.

Langkah penyelesaian permasalahan transportasi menurut Dimiyati and Dimiyati (1992) adalah sebagai berikut:

1. Menentukan alokasi *feasible* awal
2. Menentukan kondisi optimum
3. Menghitung solusi baru

Pada bab ini hanya membahas Vogel's Approximation Method atau Metode Pendekatan Vogel, sebagai salah satu metode untuk menentukan alokasi *feasible* awal pada permasalahan transportasi. Sedangkan metode alokasi *feasible* awal yang lain, yaitu Metode *North West Corner* dan Metode *Least Cost* telah dibahas pada bab sebelumnya.

## 10.2 Vogel's Approximation Method (VAM)

Metode Pendekatan Vogel merupakan metode yang terbaik dalam menentukan alokasi *feasible* awal pada permasalahan transportasi. Metode ini lebih cepat dan mudah dalam mengalokasikan *supply* dan *demand* dari sejumlah sumber ke sejumlah tujuan (Subagyo *et al.*, 1992).

### 10.2.1 Langkah-langkah VAM

Langkah menyelesaikan metode VAM (Taha, 2017) adalah sebagai berikut:

1. Menyusun *supply* masing-masing sumber, *demand* masing-masing tujuan serta biaya transportasi dalam sebuah matriks.
2. Menghitung nilai *penalty* (P) untuk setiap kolom dan baris. Nilai *penalty* diperoleh dari pengurangan biaya transportasi terkecil dari biaya terkecil kedua. Nilai ini dicari untuk masing-masing kolom dan baris.
3. Pilih nilai *penalty* dari keseluruhan nilai, baik pada kolom dan baris, yang terbesar. Jika terdapat dua nilai *penalty* yang sama, pilih salah satu.

4. Alokasikan semaksimal mungkin *supply* atau *demand* pada sel yang memiliki biaya transportasi terkecil. Tandai kolom atau baris yang telah terpenuhi, jika kolom dan baris terpenuhi keduanya secara bersamaan tandai keduanya.
5. Ulangi langkah no 2, kecuali pada kolom atau baris yang telah diberi tanda.
6. Jika tersisa satu kolom atau baris, STOP. Semua *supply* dan *demand* telah teralokasi.

### 10.2.2 Contoh Soal

Sebuah perusahaan memiliki empat pabrik yaitu S1, S2, S3 dan S4 dengan kapasitas *supply* masing-masing sebesar 70, 30, 60 dan 70. Keseluruhan pabrik dapat melayani lima gudang penjualan T1, T2, T3, T4 dan T5. Permintaan masing-masing gudang penjualan berturut-turut adalah sebesar 45, 35, 40, 70 dan 40. Jika biaya transportasi dari masing-masing pabrik ke masing-masing gudang penjualan adalah sebagai berikut:

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| - Dari S1 ke T1 = 4 | - Dari S3 ke T3 = 2 |
| - Dari S2 ke T1 = 3 | - Dari S4 ke T3 = 2 |
| - Dari S3 ke T1 = 4 | - Dari S1 ke T4 = 1 |
| - Dari S4 ke T1 = 1 | - Dari S2 ke T4 = 2 |
| - Dari S1 ke T2 = 3 | - Dari S3 ke T4 = 3 |
| - Dari S2 ke T2 = 2 | - Dari S4 ke T4 = 1 |
| - Dari S3 ke T2 = 1 | - Dari S1 ke T5 = 2 |
| - Dari S4 ke T2 = 4 | - Dari S2 ke T5 = 3 |
| - Dari S1 ke T3 = 2 | - Dari S3 ke T5 = 3 |
| - Dari S2 ke T3 = 2 | - Dari S4 ke T5 = 2 |

Bagaimana alokasi pendistribusian produk yang optimal serta berapa biaya transportasinya.

#### Jawaban:

Untuk menyelesaikan soal diatas, digunakan langkah-langkah metode VAM seperti yang telah dijelaskan sebelumnya:

1. Mengitung nilai *penalty* setiap kolom dan baris.

Nilai *pinalty* pada kolom T1 diperoleh dari biaya transportasi terkecil (1) dari terkecil kedua (3), yaitu  $3-1=2$ . Perhitungan nilai *penalty* kolom dan baris yang lain dilakukan menggunakan cara yang sama. Sehingga keseluruhan nilai *penalty* pada kolom dan baris diperoleh seperti pada Tabel 10.1 berikut.

**Tabel 10.1** : Perhitungan nilai *penalty* awal

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    | Supply | P1 |
|--------|------------------|----|----|----|----|--------|----|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 |        |    |
| S1     |                  |    |    |    |    | 70     | 1  |
|        | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  |        |    |
| S2     |                  |    |    |    |    | 30     | 0  |
|        | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  |        |    |
| S3     |                  |    |    |    |    | 60     | 1  |
|        | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  |        |    |
| S4     |                  |    |    |    |    | 70     | 0  |
|        | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  |        |    |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 40 | 230    |    |
| P1     | 2                | 1  | 0  | 0  | 0  |        |    |

2. Memilih nilai *penalty* yang terbesar baik dari kolom maupun baris.

Nilai *pinalty* terbesar adalah pada kolom T1 yaitu dengan nilai 2. Selanjutnya mengalokasikan *supply* atau *demand* semaksimal mungkin pada sel dengan biaya transportasi terkecil. Pada kolom T1 yang memiliki biaya transportasi terkecil adalah pada S4 yang bernilai 1. Sehingga pada sel S4T1 dialokasikan sebesar 45, dan kemudian kolom T1 ditandai karena keseluruhan *demand* telah terpenuhi. Sedangkan pada baris S4, *supply* yang tersisa sebanyak 75-



45=25. Tabel 10.2 memperlihatkan alokasi pada kolom T1 yang telah ditandai.

**Tabel 10.2 :** Alokasi *supply* dan *demand* awal

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    | Supply | P1 |
|--------|------------------|----|----|----|----|--------|----|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 |        |    |
| S1     | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 70     | 1  |
|        |                  |    |    |    |    |        |    |
| S2     | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 30     | 0  |
|        |                  |    |    |    |    |        |    |
| S3     | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 60     | 1  |
|        |                  |    |    |    |    |        |    |
| S4     | 45               |    |    |    |    | 70     | 2  |
|        | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  |        | 5  |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 40 | 230    | 0  |
| P1     | 2                | 1  | 0  | 0  | 0  |        |    |

- Mengitung ulang nilai *penalty* setiap kolom dan baris.  
 Pada langkah sebelumnya kolom T1 telah terpenuhi sehingga tidak diikutkan dalam perhitungan nilai *penalty* selanjutnya. Menggunakan cara yang sama dengan sebelumnya, hasil perhitungan nilai *penalty* dapat dilihat pada Tabel 10.3.

**Tabel 10.3 : Perhitungan nilai *penalty***

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    | Supply | P1 | P2 |
|--------|------------------|----|----|----|----|--------|----|----|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 |        |    |    |
| S1     | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 70     | 1  | 1  |
| S2     | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 30     | 0  | 0  |
| S3     | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 60     | 1  | 1  |
| S4     | 45               |    |    |    |    | 70     | 2  |    |
|        | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  |        | 5  | 0  |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 40 | 230    |    | 1  |

|    |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|
| P1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| P2 | - | 1 | 0 | 0 | 0 |

4. Memilih nilai *penalty* yang terbesar baik dari kolom maupun baris.

Nilai *pinalty* terbesar adalah 1. Terdapat beberapa kolom dan baris yang memiliki nilai *penalty* 1 yaitu T2, S1, S3 dan S4. Sehingga untuk alokasi berikutnya dipilih kolom T2. Alokasi *supply* atau *demand* dilakukan pada sel yang biaya transportasinya terkecil. Pada kolom T2, biaya transportasi terkecil adalah pada S3. Selanjutnya pada sel S3T2 dialokasikan sebesar 35. *Demand* pada kolom T2 telah terpenuhi seluruhnya sehingga kolom T2 kemudian ditandai. Sedangkan untuk baris S3 *supply* yang tersisa sebesar  $60-35=25$ . Tabel 10.4 memperlihatkan alokasi pada kolom T2 yang telah ditandai.

**Tabel 10.4 : Alokasi *supply* dan *demand***

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    | Supply |    |    |
|--------|------------------|----|----|----|----|--------|----|----|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 |        | P1 | P2 |
| S1     |                  |    |    |    |    | 70     |    |    |
|        | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  |        | 1  | 1  |
| S2     |                  |    |    |    |    | 30     |    |    |
|        | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  |        | 0  | 0  |
| S3     |                  | 35 |    |    |    | 60     | 2  |    |
|        | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  |        | 5  | 1  |
| S4     | 45               |    |    |    |    | 70     | 2  |    |
|        | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  |        | 5  | 0  |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 40 | 230    |    |    |
| P1     | 2                | 1  | 0  | 0  | 0  |        |    |    |
| P2     | -                | 1  | 0  | 0  | 0  |        |    |    |

5. Melanjutkan langkah metode VAM sampai semua *supply* dan *demand* teralokasi.

Berikut pada Tabel 10.5 keseluruhan alokasi *supply* dan *demand*.

**Tabel 10.5 : Matriks hasil alokasi metode VAM**

| Pabrik     | Gudang Penjualan |        |        |        |        | Suppl<br>y | P<br>1 | P2 | P3 | P4 | P5 |
|------------|------------------|--------|--------|--------|--------|------------|--------|----|----|----|----|
|            | T<br>1           | T<br>2 | T<br>3 | T<br>4 | T<br>5 |            |        |    |    |    |    |
| S1         |                  |        |        | 7<br>0 |        | 70         | 1      | 1  | 1  | -  | -  |
|            | 4                | 3      | 2      | 1      | 2      |            |        |    |    |    |    |
| S2         |                  |        | 3<br>0 |        |        | 30         | 0      | 0  | 0  | 1  | -  |
|            | 3                | 2      | 2      | 2      | 3      |            |        |    |    |    |    |
| S3         |                  | 3<br>5 | 1<br>0 |        | 1<br>5 | 60         | 1      | 1  | 1  | 1  | 1  |
|            | 4                | 1      | 2      | 3      | 3      |            |        |    |    |    |    |
| S4         | 4<br>5           |        |        |        | 2<br>5 | 70         | 0      | 1  | 1  | 0  | 0  |
|            | 1                | 4      | 2      | 1      | 2      |            |        |    |    |    |    |
| Deman<br>d | 4<br>5           | 3<br>5 | 4<br>0 | 7<br>0 | 4<br>0 | 230        |        |    |    |    |    |
| P1         | 2                | 1      | 0      | 0      | 0      |            |        |    |    |    |    |
| P2         | -                | 1      | 0      | 0      | 0      |            |        |    |    |    |    |
| P3         | -                | -      | 0      | 0      | 0      |            |        |    |    |    |    |
| P4         | -                | -      | 0      | -      | 1      |            |        |    |    |    |    |
| P5         | -                | -      | 0      | -      | 1      |            |        |    |    |    |    |

Dari Tabel 10.5 diatas, alokasi optimal yang diperoleh adalah:

S1T4 = 70 ; S2T3 = 30 ; S3T2 = 35 ; S3T3 = 10 ; S3T5 = 15 ;

S4T1 = 45 ; S4T5 = 25

Dengan biaya transportasi sebesar :

$$\begin{aligned} Z &= (70) (1) + (30) (2) + (35) (1) + (10) (2) + (15) (3) + (45) (1) \\ &\quad + (25) (2) \\ &= 310 \end{aligned}$$

### 10.3 Permasalahan Pada VAM

Permasalahan transportasi dianggap seimbang, jika total *supply* (sumber) dan total *demand* (tujuan) adalah sama. Namun batasan tersebut tidak selalu dapat terpenuhi. Dengan kata lain, total *supply* mungkin lebih besar atau lebih kecil daripada total *demand*. Model seperti ini dikenal dengan kondisi *unbalanced*. Persoalan pada transportasi yang lain adalah tentang *degeneracy*. Kondisi ini terjadi jika *supply* dan *demand* bersamaan terpenuhi pada alokasi awal. Sehingga jumlah sel yang teralokasi kurang dari  $p+q-1$  (dimana  $p$  adalah jumlah baris dan  $q$  adalah jumlah kolom). Bila ditemukan persoalan total *supply* tidak sama dengan total *demand*, maka untuk menyelesaikannya menambahkan kolom atau baris semu (*dummy*). Tujuannya adalah untuk menyamakan total *supply* dan *demand*, supaya persoalan dapat diselesaikan dengan langkah-langkah penyelesaian dengan menggunakan Metode Vogel yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut adalah contoh soal untuk total  $supply \neq demand$ .

#### 10.3.1 Contoh Soal Persoalan $Supply > Demand$ (Persoalan A)

Berikut adalah contoh untuk persoalan dimana total *supply* lebih besar daripada total *demand*. Dilihat dari Tabel 10.6 bahwa total *supply* sebesar 260 dan total *demand* sebesar 230. Untuk menyeimbangkannya keduanya ditambahkan *dummy* pada kolom.

**Tabel 10.6 :** Persoalan  $Supply > Demand$  (A)

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    |       | Supply |
|--------|------------------|----|----|----|----|-------|--------|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 | Dummy |        |
| S1     | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 0     | 70     |
| S2     | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 0     | 30     |
| S3     | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 0     | 60     |
| S4     | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  | 0     | 100    |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 40 | 30    | 260    |

Selanjutnya untuk menyelesaikan persoalan tersebut menggunakan langkah-langkah pada metode Vogel seperti yang telah dijelaskan sebelumnya.

1. Mengitung nilai *penalty* setiap kolom dan baris.

**Tabel 10.7 :** Perhitungan nilai *penalty* awal Persoalan A

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    |       | Supply |   |
|--------|------------------|----|----|----|----|-------|--------|---|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 | Dummy |        |   |
| S1     |                  |    |    |    |    |       | 70     | 1 |
|        | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 0     |        |   |
| S2     |                  |    |    |    |    |       | 30     | 2 |
|        | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 0     |        |   |
| S3     |                  |    |    |    |    |       | 60     | 1 |
|        | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 0     |        |   |
| S4     |                  |    |    |    |    |       | 100    | 1 |
|        | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  | 0     |        |   |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 40 | 30    | 260    |   |
| P1     | 2                | 1  | 0  | 0  | 0  | 0     |        |   |

2. Memilih nilai *penalty* yang terbesar baik dari kolom maupun baris, kemudian melakukan alokasi pada sel yang biaya transportasinya minimal. Tandai kolom atau baris yang telah terpenuhi.

**Tabel 10.8 :** Alokasi *supply* dan *demand* awal Persoalan A

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    |       | Supply |          |
|--------|------------------|----|----|----|----|-------|--------|----------|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 | Dummy |        |          |
| S1     |                  |    |    |    |    |       | 70     | P1<br>1  |
|        | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 0     |        |          |
| S2     |                  |    |    |    |    |       | 30     | 2        |
|        | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 0     |        |          |
| S3     |                  |    |    |    |    |       | 60     | 1        |
|        | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 0     |        |          |
| S4     | <b>45</b>        |    |    |    |    |       | 100    | 5<br>5 1 |
|        | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  | 0     |        |          |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 40 | 30    | 260    |          |
| P1     | 2                | 1  | 0  | 0  | 0  | 0     |        |          |

3. Mengitung ulang nilai *penalty* setiap kolom dan baris.

**Tabel 10.9 :** Perhitungan nilai *penalty* Persoalan A

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    |       | Supply |  | P1     | P2  |
|--------|------------------|----|----|----|----|-------|--------|--|--------|-----|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 | Dummy |        |  |        |     |
| S1     |                  |    |    |    |    |       | 70     |  | 1      | 1   |
|        | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 0     |        |  |        |     |
| S2     |                  |    |    |    |    |       | 30     |  | 2      | 2   |
|        | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 0     |        |  |        |     |
| S3     |                  |    |    |    |    |       | 60     |  | 1      | 1   |
|        | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 0     |        |  |        |     |
| S4     | <b>45</b>        |    |    |    |    |       | 100    |  | 5<br>5 | 1 1 |
|        | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  | 0     |        |  |        |     |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 40 | 30    | 260    |  |        |     |
| P1     | 2                | 1  | 0  | 0  | 0  | 0     |        |  |        |     |
| P2     | -                | 1  | 0  | 0  | 0  | 0     |        |  |        |     |

4. Memilih nilai *penalty* yang terbesar baik dari kolom maupun baris. Selanjutnya alokasi pada sel dengan biaya transportasi terkecil, dan tandai kolom atau baris yang telah terpenuhi

**Tabel 10.10 :** Alokasi *supply* dan *demand* Persoalan A

| Pabrik | Gudang Penjualan |        |        |        |        |       | Supply |        |        |
|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
|        | T<br>1           | T<br>2 | T<br>3 | T<br>4 | T<br>5 | Dummy |        | P<br>1 | P<br>2 |
| S1     | 4                | 3      | 2      | 1      | 2      | 0     | 70     | 1      | 1      |
|        |                  |        |        |        |        | 30    |        | 2      | 2      |
| S2     | 3                | 2      | 2      | 2      | 3      | 0     | 30     | 1      | 1      |
|        | 4                | 1      | 2      | 3      | 3      | 0     | 60     | 5      | 5      |
| S3     | 4                |        |        |        |        |       | 100    | 1      | 1      |
|        | 1                | 4      | 2      | 1      | 2      | 0     |        |        |        |
| S4     | 4                |        |        |        |        |       |        |        |        |
|        | 5                |        |        |        |        |       |        |        |        |
| Demand | 45               | 35     | 40     | 70     | 40     | 30    | 260    |        |        |
| P1     | 2                | 1      | 0      | 0      | 0      | 0     |        |        |        |
| P2     | -                | 1      | 0      | 0      | 0      | 0     |        |        |        |

5. Melanjutkan langkah metode VAM sampai semua *supply* dan *demand* teralokasi.  
Berikut pada Tabel 10.11 keseluruhan alokasi *supply* dan *demand*.





**Tabel 10.11 : Matriks hasil alokasi metode VAM Persoalan A**

| Pabrik | Gudang Penjualan |         |         |         |         |         | Supply | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 |
|--------|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|----|----|----|----|----|
|        | T1               | T2      | T3      | T4      | T5      | Dummy   |        |    |    |    |    |    |
| S1     | 4                | 3       | 2       | 70<br>1 | 2       | 0       | 70     | 1  | 1  | 1  | 1  | -  |
| S2     | 3                | 2       | 2       | 2       | 3       | 0<br>30 | 30     | 2  | 2  | -  | -  | -  |
| S3     | 4                | 35<br>1 | 25<br>2 | 3       | 3       | 0       | 60     | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| S4     | 45<br>1          | 4       | 15<br>2 | 1       | 40<br>2 | 0       | 100    | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  |
| Demand | 45               | 35      | 40      | 70      | 40      | 30      | 260    |    |    |    |    |    |
| P1     | 2                | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       |        |    |    |    |    |    |
| P2     | -                | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       |        |    |    |    |    |    |
| P3     | -                | 2       | 0       | 0       | 0       | -       |        |    |    |    |    |    |
| P4     | -                | -       | 0       | 0       | 0       | -       |        |    |    |    |    |    |
| P5     | -                | -       | 0       | -       | 1       | -       |        |    |    |    |    |    |

Alokasi optimal dari persoalan diatas adalah sebagai berikut:

S1T4 = 70 ; S2D = 30 ; S3T2 = 35 ; S3T3 = 25 ; S4T1 = 45 ;  
S4T3 = 15 ; S4T5 = 40

Dengan biaya transportasi sebesar :

$$\begin{aligned}
 Z &= (70) (1) + (30) (0) + (35) (1) + (25) (2) + (45) (1) + (15) (1) + \\
 &\quad (40) (2) \\
 &= 295
 \end{aligned}$$

### 10.3.2 Contoh Soal Persoalan *Supply < Demand* (Persoalan B)

Berkebalikan dengan sebelumnya contoh berikut adalah persoalan dimana total *supply* lebih kecil daripada total *demand*. Dilihat dari Tabel 10.12 bahwa total *supply* sebesar 230 dan total *demand* sebesar 260. Untuk menyeimbangkannya keduanya ditambahkan *dummy* pada baris. Selanjutnya untuk menyelesaikan persoalan tersebut menggunakan langkah-langkah pada metode Vogel seperti yang telah dijelaskan sebelumnya.

**Tabel 10.12 : Persoalan *Supply* > *Demand* (B)**

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    | Supply |
|--------|------------------|----|----|----|----|--------|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 |        |
| S1     | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 70     |
| S2     | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 30     |
| S3     | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 60     |
| S4     | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  | 70     |
| Dummy  | 0                | 0  | 0  | 0  | 0  | 30     |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 70 | 260    |

1. Mengitung nilai *penalty* setiap kolom dan baris.

**Tabel 10.13 : Perhitungan nilai *penalty* awal Persoalan B**

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    | Supply | P1 |
|--------|------------------|----|----|----|----|--------|----|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 |        |    |
| S1     | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 70     | 1  |
| S2     | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 30     | 0  |
| S3     | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 60     | 1  |
| S4     | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  | 70     | 0  |
| Dummy  | 0                | 0  | 0  | 0  | 0  | 30     | 0  |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 70 | 260    |    |
| P1     | 1                | 1  | 2  | 1  | 2  |        |    |

2. Memilih nilai *penalty* yang terbesar baik dari kolom maupun baris, kemudian melakukan alokasi pada sel yang biaya transportasinya minimal. Tandai kolom atau baris yang telah terpenuhi.

**Tabel 10.14 :** Alokasi *supply* dan *demand* awal Persoalan B

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    | Supply | P1 |
|--------|------------------|----|----|----|----|--------|----|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 |        |    |
| S1     | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 70     | 1  |
| S2     | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 30     | 0  |
| S3     | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 60     | 1  |
| S4     | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  | 70     | 0  |
| Dummy  | 0                | 0  | 30 | 0  | 0  | 30     | 0  |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 70 | 260    |    |

10

P1                      1    1    2    1    2

3. Mengitung ulang nilai *penalty* setiap kolom dan baris

**Tabel 10.15** : Perhitungan nilai *penalty* Persoalan B

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    | Supply | P1 | P2 |
|--------|------------------|----|----|----|----|--------|----|----|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 |        |    |    |
| S1     | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 70     | 1  | 1  |
| S2     | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 30     | 0  | 0  |
| S3     | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 60     | 1  | 1  |
| S4     | 1                | 4  | 2  | 1  | 2  | 70     | 0  | 0  |
| Dummy  | 0                | 0  | 0  | 0  | 0  | 30     | 0  | -  |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 70 | 260    |    |    |

|    |   |   |    |   |   |
|----|---|---|----|---|---|
|    |   |   | 10 |   |   |
| P1 | 1 | 1 | 2  | 1 | 2 |
| P2 | 2 | 1 | 0  | 0 | 0 |

4. Memilih nilai *penalty* yang terbesar baik dari kolom maupun baris. Selanjutnya alokasi pada sel dengan biaya transportasi terkecil, dan tandai kolom atau baris yang telah terpenuhi.

**Tabel 10.16 :** Alokasi *supply* dan *demand* Persoalan B

| Pabrik | Gudang Penjualan |    |    |    |    | Supply | P1 | P2 |
|--------|------------------|----|----|----|----|--------|----|----|
|        | T1               | T2 | T3 | T4 | T5 |        |    |    |
| S1     | 4                | 3  | 2  | 1  | 2  | 70     | 1  | 1  |
| S2     | 3                | 2  | 2  | 2  | 3  | 30     | 0  | 0  |
| S3     | 4                | 1  | 2  | 3  | 3  | 60     | 1  | 1  |
| S4     | 45               | 4  | 2  | 1  | 2  | 70     | 0  | 0  |
| Dummy  | 0                | 0  | 0  | 0  | 0  | 30     | 0  | -  |
| Demand | 45               | 35 | 40 | 70 | 70 | 260    |    |    |

10

P11212

P221000

5. Melanjutkan langkah metode VAM sampai semua *supply* dan *demand* teralokasi.  
Berikut pada Tabel 10.17 keseluruhan alokasi *supply* dan *demand*.

Tabel 10.17 : Matriks hasil alokasi metode VAM Persoalan B

| Pabrik     | Gudang Penjualan |             |             |             |             | Supl<br>y | -- | P<br>2 | P<br>3 | P<br>4 | P<br>5 | P<br>6 |
|------------|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------|----|--------|--------|--------|--------|--------|
|            | T<br>1           | T<br>2      | T<br>3      | T<br>4      | T<br>5      |           |    |        |        |        |        |        |
| S1         | 4                | 3           | 2           | 7<br>0<br>1 | 2           | 70        | 1  | 1      | 1      | 1      | -      | -      |
| S2         | 3                | 2           | 1<br>0<br>2 | 2           | 2<br>0<br>3 | 30        | 0  | 0      | 0      | 0      | 1      | 1      |
| S3         | 4                | 3<br>5<br>1 | 2           | 3           | 2<br>5<br>3 | 60        | 1  | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| S4         | 4<br>5<br>1      | 4           | 2           | 1           | 2<br>5<br>2 | 70        | 0  | 0      | 1      | 1      | 0      | -      |
| Dumm<br>y  | 0                | 0           | 3<br>0<br>0 | 0           | 0           | 30        | 0  | -      | -      | -      | -      | -      |
| Dema<br>nd | 4<br>5           | 3<br>5      | 4<br>0      | 7<br>0      | 7<br>0      | 260       |    |        |        |        |        |        |
| P1         | 1                | 1           | 2           | 1           | 2           |           |    |        |        |        |        |        |
| P2         | 2                | 1           | 0           | 0           | 0           |           |    |        |        |        |        |        |
| P3         | -                | 1           | 0           | 0           | 0           |           |    |        |        |        |        |        |
| P4         | -                | -           | 0           | 0           | 0           |           |    |        |        |        |        |        |
| P5         | -                | -           | 0           | -           | 1           |           |    |        |        |        |        |        |
| P6         | -                | -           | 0           | -           | 0           |           |    |        |        |        |        |        |

Alokasi optimal dari persoalan diatas adalah sebagai berikut:

$S1T4 = 70$  ;  $S2T3 = 10$  ;  $S2T5 = 20$  ;  $S3T2 = 35$  ;  $S3T5 = 25$  ;  
 $S4T1 = 45$  ;  $S4T5 = 25$  ;  $DT3 = 30$

Dengan biaya transportasi sebesar :

$$\begin{aligned} Z &= (70) (1) + (10) (2) + (20) (3) + (35) (1) + (25) (3) + (45) (1) + \\ &\quad (25) (2) + (30) (0) \\ &= 355 \end{aligned}$$



## DAFTAR PUSTAKA

- Dimyati, T. T. and Dimyati, A. 1992. *Operation Research : Model-model Pengambilan Keputusan*. Edited by 2nd. Sinar Baru Bandung.
- Hillier, F. S. and Gerald D. Lieberman. 2001. *Introduction To Operations Research*. 7th edn. McGraw-Hill.
- Siagian, P. 1987. *Penelitian Operasional: Teori dan Praktek*. UI Press.
- Subagyo, P., Asri, M. and Handoko, H. 1992. *Dasar-Dasar Operations Research*. 8th edn. BPFE Yogyakarta.
- Taha, H. A. 2017. *Operations Research An Introduction*. 10th edn. Pearson Education.

# **BAB 11**

## **METODE MODI (*MODIFIED DISTRIBUTION*)**

*Oleh Sulistyowati*

### **11.1 Pendahuluan**

Pada bab sebelumnya telah dibahas bagaimana menyelesaikan persoalan transportasi dengan metode North West Corner, metode Least Cost, ataupun metode Vogel Approximation Method. Namun belum tentu solusi awal yang dihasilkan pada langkah pertama ini sudah optimal.

Metode MODI (*Modified Distribution*) adalah metode yang digunakan untuk menentukan apakah solusi awal yang diperoleh pada langkah pertama sudah optimal. Metode MODI merupakan modifikasi dari metode Stepping Stone. Metode ini hampir sama dengan metode Stepping Stone, karena keduanya sama-sama mencari solusi akhir/solusi optimum agar diperoleh biaya distribusi atau biaya alokasi yang minimum. Perbedaannya adalah pada metode Stepping Stone, perubahan biaya alokasi ditentukan dengan cara mengidentifikasi setiap lintasan sel-sel yang kosong. Sedangkan pada metode MODI, perubahan biaya alokasi ditentukan secara matematis, tanpa harus mengidentifikasi semua lintasan sel kosong.

### **11.2 Langkah-langkah Metode MODI**

Berikut adalah langkah-langkah pada metode MODI :

1. Tentukan solusi awal dengan menggunakan metode transportasi yang ada (North West Corner, Least Cost, atau Vogel Approximation Method).

2. Menentukan nilai baris dan kolom.  
 Jika B adalah baris dan K adalah kolom serta C adalah biaya alokasi yang terjadi di jalur tersebut, maka:
  - a. Anggap  $B_i = 0$  (baris pertama selalu diberi nilai 0).
  - b. Untuk semua jalur yang terpakai, hitung :
 
$$B_i + K_j = C_{ij} \dots\dots\dots (1)$$
3. Menghitung Indeks Perbaikan pada tiap jalur yang tidak terpakai dengan rumus :
 
$$I_{ij} = C_{ij} - B_i - K_j \dots\dots\dots (2)$$
4. Menentukan titik perubahan, yaitu memilih Indeks dengan nilai negatif terbesar. Mengapa dipilih nilai negatif yang terbesar? Karena nilai negatif yang terbesar ini akan dapat menurunkan biaya alokasi yang paling banyak.
5. Memperbaiki biaya alokasi.  
 Dengan cara membuat **jalur atau lintasan tertutup**. Pembentukan jalur/lintasan tertutup selalu dimulai dari sel yang kosong (**sel tempat titik perubahan**), dilanjutkan ke sel-sel yang telah teralokasi. Kemudian berilah tanda positif (+) dan negatif (-) pada sel-sel yang berada di lintasan secara bergantian. Dimulai dari sel awal diberi tanda positif, dilanjutkan sel berikutnya diberi tanda negatif, dan seterusnya secara bergantian. Arah lintasan harus mengikuti arah jarum jam. Kemudian pilih isian (biaya alokasi) terkecil pada sel yang bertanda negatif. Selanjutnya, kurangkan atau tambahkan setiap sel pada lintasan tertutup dengan nilai terkecil yang terpilih tadi. Pengurangan dilakukan jika tanda pada sel adalah negatif, sedangkan penjumlahan dilakukan jika tanda pada sel adalah positif.
6. Ulangi langkah 2 sampai 5 sampai tidak ada lagi Indeks Perbaikan yang bernilai negatif. Dengan demikian akan diperoleh nilai biaya alokasi terkecil/terendah, sehingga alokasi yang dihasilkan sudah OPTIMAL

### 11.3 Contoh Penyelesaian

PT. Sepatu Kaca adalah sebuah perusahaan yang memproduksi sepatu olahraga dan memiliki 3 tempat produksi. PT tersebut mendistribusikan produk sepatunya ke 4 outlet sepatu pada setiap minggunya.

Kapasitas produksi masing-masing tempat produksi dan besar permintaan tiap outlet dapat dilihat pada Tabel 11.1 dan Tabel 11.2.

**Tabel 11.1 :** Kapasitas produksi pabrik

| Tempat produksi | Kapasitas produksi (unit/minggu) |
|-----------------|----------------------------------|
| Arjuna          | 100                              |
| Bromo           | 125                              |
| Campa           | 110                              |
| <b>Jumlah</b>   | <b>335</b>                       |

(Sumber : pribadi)

**Tabel 11.2 :** Besar permintaan outlet

| Outlet        | Besar permintaan (unit/minggu) |
|---------------|--------------------------------|
| K-Sporty      | 90                             |
| Lee Sport     | 86                             |
| Max Health    | 79                             |
| Next Star     | 80                             |
| <b>Jumlah</b> | <b>335</b>                     |

(Sumber : pribadi)

Biaya transportasi untuk pengiriman produk dari tempat produksi ke setiap outlet disajikan dalam Tabel 11.3.

**Tabel 11.3 :** Biaya transportasi pengiriman produk

| Tempat produksi | Outlet   |           |            |           |
|-----------------|----------|-----------|------------|-----------|
|                 | K-Sporty | Lee Sport | Max Health | Next Star |
| Arjuna          | 20       | 5         | 10         | 8         |
| Bromo           | 15       | 9         | 10         | 15        |
| Campa           | 25       | 10        | 14         | 19        |

(Sumber : pribadi)

Berapakah total biaya optimal yang harus dikeluarkan oleh PT. Sepatu Kaca dalam pendistribusian produk sepatunya?

**Penyelesaian :**

**ITERASI - 1**

**Langkah 1. Menentukan solusi awal dengan salah satu metode (misal metode North West Corner)**

Dalam penyelesaian ini, tempat produksi Arjuna diinisialkan A, Bromo diinisialkan B, dan Campa diinisialkan C. Sedangkan Outlet K-Sporty diinisialkan K, Lee Sport diinisialkan L, Max Health diinisialkan M, dan Next Star diinisialkan N.

Diperoleh tabel fisible awal seperti pada Tabel 11.4.

**Tabel 11.4 :** Fisible awal dengan metode NWC

| Dari \ Ke  | K  |    | L  |    | M  |    | N  |    | Kapasitas |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------|
| A          | 90 | 20 | 10 | 5  |    | 10 | 8  |    | 100       |
| B          |    | 15 |    | 9  |    | 10 |    |    |           |
| C          |    | 25 |    | 10 | 30 | 14 | 80 | 19 | 110       |
| Permintaan | 90 |    | 86 | 79 |    |    | 80 |    |           |

(Sumber : pribadi)

Dari solusi awal diatas, maka dapat dihitung biaya alokasinya.

$$\begin{aligned}\text{Biaya alokasi} &= (90 \times 20) + (10 \times 5) + (76 \times 9) + (49 \times 10) + (30 \times 14) + \\ &\quad (80 \times 19) \\ &= 4964\end{aligned}$$

## Langkah 2. Menentukan nilai baris dan kolom

Nilai baris pertama atau baris A ( $B_A$ ) = 0

Mencari nilai kolom K ( $K_K$ ) menggunakan rumus 1 :

- $B_A + K_K = C_{AK} \rightarrow 0 + K_K = 20$  , maka  $K_K = 20$   
Nilai Kolom K =  $K_K = 20$

Mencari nilai kolom dan baris yang lain **yang terdapat alokasi.**

- $B_A + K_L = C_{AL} \rightarrow 0 + K_L = 5$  , maka  $K_L = 5$
- $B_B + K_L = C_{BL} \rightarrow B_B + 5 = 9$  , maka  $B_B = 4$
- $B_B + K_M = C_{BM} \rightarrow 4 + K_M = 10$  , maka  $K_M = 6$
- $B_C + K_M = C_{CM} \rightarrow B_C + 6 = 14$  , maka  $B_C = 8$
- $B_C + K_N = C_{CN} \rightarrow 8 + K_N = 19$  , maka  $K_N = 11$

Nilai-nilai yang telah diperoleh tersebut kemudian diletakkan pada baris atau kolom yang bersesuaian, sehingga dapat dilihat pada Tabel 5.

**Tabel 11.5 : Hasil nilai baris dan kolom pada iterasi 1**

| Dari \ Ke      | K<br>$K_K = 20$ | L<br>$K_L = 5$ | M<br>$K_M = 6$ | N<br>$K_N = 11$ | Kapasitas |
|----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------|
| A<br>$B_A = 0$ | 20<br>90        | 5<br>10        | 10             | 8               | 100       |
| B<br>$B_B = 4$ | 15              | 9<br>76        | 10<br>49       | 15              | 125       |
| C<br>$B_C = 8$ | 25              | 10             | 14<br>30       | 19<br>80        | 110       |
| Permintaan     | 90              | 86             | 79             | 80              | 335       |

(Sumber : pribadi)

### Langkah 3. Menghitung Indeks Perbaikan pada tiap jalur yang tidak terpakai

Perhitungan indeks perbaikan dilakukan dengan menguji apakah terdapat sel yang masih kosong dalam tabel. Karena dimungkinkan dari sel-sel yang kosong tersebut masih dapat memberikan penurunan biaya alokasi.

Dari tabel 5 diatas, terdapat beberapa sel yang masih kosong, yaitu :

- Sel pada baris A kolom M (AM)
- Sel pada baris A kolom N (AN)
- Sel pada baris B kolom K (BK)
- Sel pada baris B kolom N (BN)
- Sel pada baris C kolom K (CK)
- Sel pada baris C kolom L (CL)

Dengan menggunakan rumus 2, Indeks Perbaikan pada sel AM :

= (Biaya alokasi pada baris A kolom M) –

$$(\text{nilai baris A}) - (\text{nilai kolom M})$$

$$= 10 - 0 - 6$$

$$= 4$$

Indeks Perbaikan pada sel AN :

$$= (\text{Biaya alokasi pada baris A kolom N}) - (\text{nilai baris A}) - (\text{nilai kolom N})$$

$$= 8 - 0 - 11$$

$$= -3$$

Indeks Perbaikan pada sel BK :

$$= (\text{Biaya alokasi pada baris B kolom K}) - (\text{nilai baris B}) - (\text{nilai kolom K})$$

$$= 15 - 4 - 20$$

$$= -9$$

Indeks Perbaikan pada sel BN :

$$= (\text{Biaya alokasi pada baris B kolom N}) - (\text{nilai baris B}) - (\text{nilai kolom N})$$

$$= 15 - 4 - 11$$

$$= 0$$

Indeks Perbaikan pada sel CK :

$$= (\text{Biaya alokasi pada baris C kolom K}) - (\text{nilai baris C}) - (\text{nilai kolom K})$$

$$= 25 - 8 - 20$$

$$= -3$$

Indeks Perbaikan pada sel CL :

$$= (\text{Biaya alokasi pada baris C kolom L}) - (\text{nilai baris C}) - (\text{nilai kolom L})$$

$$= 10 - 8 - 5$$

$$= -3$$

Hasil perhitungan Indeks Perbaikan disajikan pada Tabel 11.6.



**Tabel 11.6 : Indeks Perbaikan pada iterasi 1**

| <b>Sel kosong</b> | <b><math>C_{ij} - B_i - K_j</math></b> | <b><math>I_{ij}</math> (Indeks Perbaikan)</b> |
|-------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------|
| AM                | 10 - 0 - 6                             | 4                                             |
| AN                | 8 - 0 - 11                             | -3                                            |
| BK                | 15 - 4 - 20                            | -9                                            |
| BN                | 15 - 4 - 11                            | 0                                             |
| CK                | 25 - 8 - 20                            | -3                                            |
| CL                | 10 - 8 - 5                             | -3                                            |

(Sumber : pribadi)

#### **Langkah 4. Menentukan titik perubahan**

Yaitu dengan cara memilih Indeks Perbaikan yang memiliki nilai negatif terbesar, agar dapat menurunkan biaya alokasi yang paling banyak.

Pada Tabel 6, Indeks Perbaikan dengan nilai negatif terbesar adalah pada sel BK, yaitu sebesar -9 inilah yang terpilih sebagai titik perubahan.

Artinya dengan pengiriman/pengalokasian produk ke sel BK akan menurunkan biaya alokasi paling sedikit 9.

#### **Langkah 5. Memperbaiki biaya alokasi**

Dengan cara membuat **jalur atau lintasan tertutup** dimulai dari sel tempat titik perubahan, dilanjutkan dengan memberikan tanda negatif (-) dan positif (+) pada jalur tertutup tersebut, seperti yang disajikan pada Tabel 11.7.

**Tabel 11.7 : Lintasan tertutup pada iterasi 1**

| Dari \ Ke      | K<br>$K_K = 20$ | L<br>$K_L = 5$ | M<br>$K_M = 6$ | N<br>$K_N = 11$ | Kapasitas |
|----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------|
| A<br>$B_A = 0$ | 90<br>(-)       | 10<br>(+)      | 10             | 8               | 100       |
| B<br>$B_B = 4$ | 15<br>(+)       | 9<br>(-)       | 10             | 15              | 125       |
| C<br>$B_C = 8$ | 25              | 10             | 14             | 19              | 110       |
| Permintaan     | 90              | 86             | 79             | 80              | 335       |

(Sumber : pribadi)

Kemudian pada sel yang bertanda negatif, pilih nilai alokasi yang terkecil, yaitu 76 (pada sel BL). Ini adalah **nilai terpilih**. Selanjutnya lakukan pengurangan atau penjumlahan biaya alokasi pada masing-masing sel dengan nilai terpilih sesuai dengan tandanya. Sehingga perbaikan biaya alokasi dapat dihitung sebagai berikut :

- Pada sel BK = biaya alokasi sel BK + nilai terpilih  
=  $0 + 76 = 76$
- Pada sel AK = biaya alokasi sel AK – nilai terpilih  
=  $90 - 76 = 14$
- Pada sel AL = biaya alokasi sel AL + nilai terpilih  
=  $10 + 76 = 86$
- Pada sel BL = biaya alokasi sel BL – nilai terpilih  
=  $76 - 76 = 0$

Hasil perbaikan biaya alokasi dapat dilihat pada Tabel 8.

**Tabel 11.8 :** Hasil perbaikan biaya alokasi pada iterasi 1

| Ke<br>Dari            | K<br>$K_K = 20$ | L<br>$K_L = 5$ | M<br>$K_M = 6$ | N<br>$K_N = 11$ | Kapasitas  |
|-----------------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|------------|
| <b>A</b><br>$B_A = 0$ | (-) 20<br>14    | (+) 5<br>86    | 10             | 8               | <b>100</b> |
| <b>B</b><br>$B_B = 4$ | (+) 15<br>76    | (-) 9<br>0     | 10<br>49       | 15              | <b>125</b> |
| <b>C</b><br>$B_C = 8$ | 25              | 10             | 14<br>30       | 19<br>80        | <b>110</b> |
| <b>Permintaan</b>     | <b>90</b>       | <b>86</b>      | <b>79</b>      | <b>80</b>       | <b>335</b> |

(Sumber : pribadi)

Dari Tabel 11.8 dapat dihitung besar perubahan biaya alokasi, yaitu :

$$\begin{aligned}
 \text{Biaya alokasi} &= (14 \times 20) + (86 \times 5) + (76 \times 15) + (49 \times 10) + (30 \times 14) \\
 &\quad + (80 \times 19) \\
 &= \mathbf{4280}
 \end{aligned}$$

Dari biaya alokasi pada solusi awal, terlihat adanya penurunan biaya alokasi sebesar **684**.

Apakah solusi ini sudah OPTIMAL? Harus dilakukan pengecekan dengan mengulang lagi langkah 2 sampai 5, **sampai tidak ada lagi nilai Indeks Perbaikan yang bernilai negatif**.

### ITERASI - 2

#### **Langkah 2. Menentukan nilai baris dan kolom**

Nilai baris pertama atau baris A ( $B_A$ ) = 0

- $B_A + K_K = C_{AK} \rightarrow 0 + K_K = 20$ , maka  $K_K = 20$
- $B_A + K_L = C_{AL} \rightarrow 0 + K_L = 5$ , maka  $K_L = 5$
- $B_B + K_K = C_{BK} \rightarrow B_B + 20 = 15$ , maka  $B_B = -5$

- $B_B + K_M = C_{BM} \rightarrow -5 + K_M = 10$  , maka  $K_M = 15$
- $B_C + K_M = C_{CM} \rightarrow B_C + 15 = 14$  , maka  $B_C = -1$
- $B_C + K_N = C_{CN} \rightarrow -1 + K_N = 19$  , maka  $K_N = 20$

Nilai-nilai yang telah diperoleh tersebut kemudian diletakkan pada baris atau kolom yang bersesuaian, sehingga dapat dilihat pada Tabel 11.9.

**Tabel 11.9 :** Hasil nilai baris dan kolom pada iterasi 2

| Dari \ Ke              | K<br>$K_K = 20$ | L<br>$K_L = 5$ | M<br>$K_M = 15$ | N<br>$K_N = 20$ | Kapasitas  |
|------------------------|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|------------|
| <b>A</b><br>$B_A = 0$  | 20<br><b>14</b> | 5<br><b>86</b> | 10              | 8               | <b>100</b> |
| <b>B</b><br>$B_B = -5$ | 15<br><b>76</b> | 9              | 10<br><b>49</b> | 15              | <b>125</b> |
| <b>C</b><br>$B_C = -1$ | 25              | 10             | 14<br><b>30</b> | 19<br><b>80</b> | <b>110</b> |
| <b>Permintaan</b>      | <b>90</b>       | <b>86</b>      | <b>79</b>       | <b>80</b>       | <b>335</b> |

(Sumber : pribadi)

### Langkah 3. Menghitung Indeks Perbaikan pada tiap jalur yang tidak terpakai

Hasil perhitungan Indeks Perbaikan disajikan pada Tabel 11.10.

**Tabel 11.10 :** Indeks Perbaikan pada iterasi 2

| Sel kosong | $C_{ij} - B_i - K_j$ | $I_{ij}$ (Indeks Perbaikan) |
|------------|----------------------|-----------------------------|
| AM         | $10 - 0 - 15$        | -5                          |
| AN         | $8 - 0 - 20$         | -12                         |
| BL         | $9 - (-5) - 5$       | 9                           |
| BN         | $15 - (-5) - 20$     | 0                           |
| CK         | $25 - (-1) - 20$     | 6                           |
| CL         | $10 - (-1) - 5$      | 6                           |

(Sumber : pribadi)

#### Langkah 4. Menentukan titik perubahan

Pada Tabel 10, Indeks Perbaikan dengan nilai negatif terbesar adalah pada sel AN, yaitu sebesar -12. Sel inilah yang terpilih sebagai titik perubahan.

#### Langkah 5. Memperbaiki biaya alokasi

Hasil perbaikan biaya alokasi dapat dilihat pada Tabel 11.11.

**Tabel 11.11 :** Lintasan tertutup pada iterasi 2

| <div>Ke</div> <div>Dari</div>                 | <div>K</div> <div><math>K_K = 20</math></div> | <div>L</div> <div><math>K_L = 5</math></div> | <div>M</div> <div><math>K_M = 15</math></div> | <div>N</div> <div><math>K_N = 20</math></div> | Kapasitas |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------|
| <div>A</div> <div><math>B_A = 0</math></div>  | <div>14</div> <div>(-)</div>                  | <div>20</div> <div>86</div>                  | <div>5</div> <div>10</div>                    | <div>8</div> <div>(+)</div>                   | 100       |
| <div>B</div> <div><math>B_B = -5</math></div> | <div>(+)</div> <div>76</div>                  | <div>15</div> <div>9</div>                   | <div>10</div> <div>(-)</div> <div>49</div>    | <div>15</div>                                 | 125       |
| <div>C</div> <div><math>B_C = -1</math></div> | <div>25</div>                                 | <div>10</div> <div>14</div>                  | <div>(+)</div> <div>30</div>                  | <div>19</div> <div>(-)</div> <div>80</div>    | 110       |
| Permintaan                                    | 90                                            | 86                                           | 79                                            | 80                                            | 335       |

(Sumber : pribadi)

Kemudian pada sel yang bertanda negatif, pilih nilai alokasi yang terkecil, yaitu 14 (pada sel AK). Ini adalah **nilai terpilih**. Sehingga perbaikan biaya alokasi dapat dihitung sebagai berikut :

- Pada sel AN = biaya alokasi sel AN + nilai terpilih  
=  $0 + 14 = 14$
- Pada sel CN = biaya alokasi sel CN – nilai terpilih  
=  $80 - 14 = 66$
- Pada sel CM = biaya alokasi sel CM+ nilai terpilih  
=  $30 + 14 = 44$

- Pada sel BM = biaya alokasi sel BM – nilai terpilih  
=  $49 - 14 = 35$
- Pada sel BK = biaya alokasi sel BK – nilai terpilih  
=  $76 + 14 = 90$
- Pada sel AK = biaya alokasi sel AK – nilai terpilih  
=  $14 - 14 = 0$

Hasil perbaikan biaya alokasi dapat dilihat pada Tabel 11.12.

**Tabel 11.12 :** Hasil perbaikan biaya alokasi pada iterasi 2

| Dari \ Ke      | K<br>$K_K = 20$ |    | L<br>$K_L = 5$ |        | M<br>$K_M = 6$ |        | N<br>$K_N = 11$ |     | Kapasitas |
|----------------|-----------------|----|----------------|--------|----------------|--------|-----------------|-----|-----------|
| A<br>$B_A = 0$ | (-) 0           | 20 | 86             | 5      | 10             | (+) 14 | 8               | 100 |           |
| B<br>$B_B = 4$ | (+) 90          | 15 |                | 9      | (-) 35         | 10     | 15              |     |           |
| C<br>$B_C = 8$ |                 | 25 | 10             | (+) 44 | 14             | (-) 66 | 19              | 110 |           |
| Permintaan     | 90              |    | 86             |        | 79             |        | 80              |     | 335       |

(Sumber : pribadi)

Dari Tabel 11.12 dapat dihitung besar perubahan biaya alokasi, yaitu :

$$\begin{aligned}
 \text{Biaya alokasi} &= (86 \times 5) + (14 \times 8) + (90 \times 15) + (35 \times 10) + (44 \times 14) \\
 &\quad + (66 \times 19) \\
 &= \mathbf{4112}
 \end{aligned}$$

Dari biaya alokasi pada solusi awal, terlihat adanya penurunan biaya alokasi sebesar **168**.

Apakah solusi ini sudah OPTIMAL? Harus dilakukan pengecekan dengan mengulang lagi langkah 2 sampai 5, **sampai tidak ada lagi nilai Indeks Perbaikan yang bernilai negatif.**

**ITERASI – 3**

**Langkah 2. Menentukan nilai baris dan kolom**

Nilai baris pertama atau baris A ( $B_A$ ) = 0

- $B_A + K_L = C_{AL} \rightarrow 0 + K_L = 5$  , maka  $K_L = 5$
- $B_A + K_N = C_{AN} \rightarrow 0 + K_N = 8$  , maka  $K_N = 8$
- $B_C + K_N = C_{CN} \rightarrow B_C + 8 = 19$  , maka  $B_C = 11$
- $B_C + K_M = C_{CM} \rightarrow 11 + K_M = 14$ , maka  $K_M = 3$
- $B_B + K_M = C_{BM} \rightarrow B_B + 3 = 10$ , maka  $B_B = 7$
- $B_B + K_K = C_{BK} \rightarrow 7 + K_K = 15$  , maka  $K_K = 8$

Nilai-nilai yang telah diperoleh tersebut kemudian diletakkan pada baris atau kolom yang bersesuaian, sehingga dapat dilihat pada Tabel 11.13.

**Tabel 11.13 :** Hasil nilai baris dan kolom pada iterasi 3

| Dari \ Ke       | K         |    | L         |    | M         |    | N         |    | Kapasitas |
|-----------------|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|
|                 | $K_K = 8$ |    | $K_L = 5$ |    | $K_M = 3$ |    | $K_N = 8$ |    |           |
| A<br>$B_A = 0$  |           | 20 |           | 5  |           | 10 |           | 8  | 100       |
|                 |           |    | 86        |    |           |    | 14        |    |           |
| B<br>$B_B = 7$  |           | 15 |           | 9  |           | 10 |           | 15 | 125       |
|                 |           |    |           |    | 35        |    |           |    |           |
| C<br>$B_C = 11$ |           | 25 |           | 10 |           | 14 |           | 19 | 110       |
|                 |           |    |           |    | 44        |    | 66        |    |           |
| Permintaan      | 90        |    | 86        |    | 79        |    | 80        |    | 335       |

(Sumber : pribadi)

**Langkah 3. Menghitung Indeks Perbaikan pada tiap jalur yang tidak terpakai**

Hasil perhitungan Indeks Perbaikan disajikan pada Tabel 11.14.

**Tabel 11.14 :** Indeks Perbaikan pada iterasi 3

| Sel kosong | $C_{ij} - B_i - K_j$ | $I_{ij}$ (Indeks Perbaikan) |
|------------|----------------------|-----------------------------|
| AK         | 20 - 0 - 8           | 12                          |
| AM         | 10 - 0 - 3           | 7                           |
| BL         | 9 - 7 - 5            | -3                          |
| BN         | 15 - 7 - 8           | 0                           |
| CK         | 25 - 11 - 8          | 6                           |
| CL         | 10 - 11 - 5          | -6                          |

(Sumber : pribadi)

**Langkah 4. Menentukan titik perubahan**

Pada Tabel 11.14, Indeks Perbaikan dengan nilai negatif terbesar adalah pada sel CL, yaitu sebesar -6. Sel inilah yang terpilih sebagai titik perubahan.

**Langkah 5. Memperbaiki biaya alokasi**

Hasil perbaikan biaya alokasi dapat dilihat pada Tabel 11.15.



**Tabel 11.15 :** Lintasan tertutup pada iterasi 3

| Dari \ Ke       | K<br>$K_K = 8$ | L<br>$K_L = 5$ | M<br>$K_M = 3$ | N<br>$K_N = 8$ | Kapasitas |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------|
| A<br>$B_A = 0$  | 20             | 86<br>(-)      | 10             | 14<br>(+)      | 100       |
| B<br>$B_B = 7$  | 15             | 9              | 10             | 15             | 125       |
| C<br>$B_C = 11$ | 25             | 10             | 14             | 19             | 110       |
| Permintaan      | 90             | 86             | 79             | 80             | 335       |

(Sumber : pribadi)

Kemudian pada sel yang bertanda negatif, pilih nilai alokasi yang terkecil, yaitu 66 (pada sel CN). Ini adalah **nilai terpilih**. Sehingga perbaikan biaya alokasi dapat dihitung sebagai berikut :

- Pada sel CL = biaya alokasi sel CL + nilai terpilih  
=  $0 + 66 = 66$
- Pada sel AL = biaya alokasi sel AL - nilai terpilih  
=  $86 - 66 = 20$
- Pada sel AN = biaya alokasi sel AN + nilai terpilih  
=  $14 + 66 = 80$
- Pada sel CN = biaya alokasi sel CN - nilai terpilih  
=  $66 - 66 = 0$
- Pada sel BK = biaya alokasi sel BK - nilai terpilih  
=  $76 + 14 = 90$

Hasil perbaikan biaya alokasi dapat dilihat pada Tabel 16.

**Tabel 11.16 :** Hasil perbaikan biaya alokasi pada iterasi 3

| Dari \ Ke              | K<br>$K_K = 8$ | L<br>$K_L = 5$ | M<br>$K_M = 3$ | N<br>$K_N = 8$ | Kapasitas |
|------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------|
| <b>A</b><br>$B_A = 0$  | 20             | (-) 5<br>20    | 10             | (+) 8<br>80    | 100       |
| <b>B</b><br>$B_B = 7$  | 15<br>90       | 9              | 10<br>35       | 15             | 125       |
| <b>C</b><br>$B_C = 11$ | 25             | (+) 10<br>66   | 14<br>44       | (-) 19<br>0    | 110       |
| <b>Permintaan</b>      | 90             | 86             | 79             | 80             | 335       |

(Sumber : pribadi)

Dari Tabel 11.16 dapat dihitung besar perubahan biaya alokasinya.  
 Biaya alokasi =  $(20 \times 5) + (80 \times 8) + (90 \times 15) + (35 \times 10) + (66 \times 10) + (44 \times 14) = 3716$

Dari biaya alokasi pada solusi awal, terlihat adanya penurunan biaya alokasi sebesar **396**.

Apakah solusi ini sudah OPTIMAL? Harus dilakukan pengecekan dengan mengulang lagi langkah 2 sampai 5, **sampai tidak ada lagi nilai Indeks Perbaikan yang bernilai negatif**.

#### ITERASI - 4

##### **Langkah 2. Menentukan nilai baris dan kolom**

Nilai baris pertama atau baris A ( $B_A$ ) = 0

- $B_A + K_L = C_{AL} \rightarrow 0 + K_L = 5$ , maka  $K_L = 5$
- $B_A + K_N = C_{AN} \rightarrow 0 + K_N = 8$ , maka  $K_N = 8$
- $B_C + K_L = C_{CL} \rightarrow B_C + 5 = 10$ , maka  $B_C = 5$
- $B_C + K_M = C_{CM} \rightarrow 5 + K_M = 14$ , maka  $K_M = 9$
- $B_B + K_M = C_{BM} \rightarrow B_B + 9 = 10$ , maka  $B_B = 1$

- $B_B + K_K = C_{BK} \rightarrow 1 + K_K = 15$ , maka  $K_K = 14$

Nilai-nilai yang telah diperoleh tersebut kemudian diletakkan pada baris atau kolom yang bersesuaian, sehingga dapat dilihat pada Tabel 11.17.

**Tabel 11.17 :** Hasil nilai baris dan kolom pada iterasi 4

| Dari \ Ke             | K<br>$K_K = 14$ | L<br>$K_L = 5$ | M<br>$K_M = 9$ | N<br>$K_N = 8$ | Kapasitas  |
|-----------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|------------|
| <b>A</b><br>$B_A = 0$ | 20              | 5              | 10             | 8              | <b>100</b> |
|                       |                 | <b>20</b>      |                | <b>80</b>      |            |
| <b>B</b><br>$B_B = 1$ | 15              | 9              | 10             | 15             | <b>125</b> |
|                       | <b>90</b>       |                | <b>35</b>      |                |            |
| <b>C</b><br>$B_C = 5$ | 25              | 10             | 14             | 19             | <b>110</b> |
|                       |                 | <b>66</b>      | <b>44</b>      |                |            |
| <b>Permintaan</b>     | <b>90</b>       | <b>86</b>      | <b>79</b>      | <b>80</b>      | <b>335</b> |

(Sumber : pribadi)

### Langkah 3. Menghitung Indeks Perbaikan pada tiap jalur yang tidak terpakai

Hasil perhitungan Indeks Perbaikan disajikan pada Tabel 11.18.

**Tabel 11.18 :** Indeks Perbaikan pada iterasi 4

| Sel kosong | $C_{ij} - B_i - K_j$ | $I_{ij}$ (Indeks Perbaikan) |
|------------|----------------------|-----------------------------|
| AK         | $20 - 0 - 14$        | 6                           |
| AM         | $10 - 0 - 9$         | 1                           |
| BL         | $9 - 1 - 5$          | 3                           |
| BN         | $15 - 1 - 8$         | 6                           |
| CK         | $25 - 5 - 14$        | 6                           |
| CN         | $19 - 5 - 8$         | 6                           |

(Sumber : pribadi)

Berdasarkan Tabel 11.18, Indeks Perbaikan sudah tidak ada yang bernilai negatif. Sehingga jalur distribusi/alokasi yang disajikan pada Tabel 11.17 **sudah optimal**.

## DAFTAR PUSTAKA

- Taha, Hamdy A. 2017. *Operations Research An Introduction, 10<sup>th</sup> Edition*. New York: Pearson Education
- Murthy, P. Rama. 2007. *Operations Research*. New Delhi: New Age International Publishers
- Siswanto. 2007. *Operations Research, Jilid I*. Jakarta: Erlangga

## **BIODATA PENULIS**



**Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd.**

Dosen FKIP Universitas Simalungun

Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd, lahir di Medan, Pendidikan S1, S2 dan S3 Prodi Pendidikan Matematika dan Matematika FMIPA USU Medan. Dosen di FKIP dan SPS Program S2 serta Kepala Pusat Komputer Universitas Simalungun. Penulis aktif mengikuti sebagai pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional dan aktif menulis Buku, Jurnal OJS, Sinta, dan Scopus.

## BIODATA PENULIS



**Isna Nugraha, S.T., M.T.**

Dosen Program Studi Teknik Industri  
Fakultas Teknik

Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur

Penulis lahir di Karanganyar tanggal 1 Maret 1995. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Industri Fakultas Teknik, Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur. Penulis memperoleh gelar Magister Teknik Industri dari Universitas Sebelas Maret pada tahun 2021 dan Sarjana Teknik (S1) Teknik Industri dari Universitas Islam Indonesia, Yogyakarta pada tahun 2017. Penulis memiliki *research interest* atau fokus riset di bidang: Sistem Logistik dan Rekayasa Bisnis, *Supply Chain Management, Logistics Management, Inventory and Distribution System, Supply Chain Design, Pemodelan / Modelling, Simulasi.*

## **BIODATA PENULIS**



### **Puji Aryani**

Dosen Program Studi Perbankan Syariah Fakultas Agama Islam  
Universitas Muhammadiyah Aceh

Penulis lahir di Yogyakarta tanggal 13 Maret 1969. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Perbankan Syariah Fakultas Agama Islam Universitas Muhammadiyah Aceh. Menyelesaikan pendidikan S2 pada program studi Pentadbiran Pendidikan Fakultas Pendidikan Universiti Putra Malaysia, dan S3 pada program studi Pendidikan Ekonomi Fakultas Pendidikan Universiti Kebangsaan Malaysia.



## **BIODATA PENULIS**



**Pratiwi Dwi Warih Sitaresmi, S.Si, M.Pd.**

Dosen STAI Muhammadiyah Probolinggo  
Program Studi Tadris Matematika

Penulis lahir di Probolinggo tanggal 23 Januari 1991. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Tadris Matematika, STAI Muhammadiyah Probolinggo. Penulis menyelesaikan S1 pada Jurusan Matematika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika. Penulis meekuni bidang menulis sejak tahun 2019.

## BIODATA PENULIS



**Ir. Tungga Bhimadi, MT.**

Dosen Program Studi Teknik Mesin  
Fakultas Teknik dan Informatika  
Universitas Gajayana

Penulia lahir di kota pecel Madiun tanggal 31 Agustus 1961, adalah dosen yayasan pada Program Studi Teknik Mesin, Fakultas Teknik dan Informatika, Universitas Gajayana. Menyelesaikan pendidikan S1 sebagai Sarjana Teknik Mesin Sub Jurusan Teknik Dirgantara Institut Teknologi Bandung lulus 22 Desember 1986 dan pendidikan S2 sebagai Magister Teknik Mesin Institut Teknologi Sepuluh Nopember Lulus Tahun 20 Maret 1998. 8(delapan) tahun sebagai karyawan PT-IPTN Bandung, kemudian hijrah ke Surabaya sebagai dosen yayasan ITATS-Surabaya sampai tahun 2014, dan kemudian dosen yayasan Teknik Mesin Universitas Gajayana Malang sampai sekarang. Pekerjaan parallel sebagai: Konsultan Teknik Mesin level madya dengan Sertifikat Keahlian (SKA) dari **Lembaga Pengembangan Jasa Konstruksi (LPJK)** sampai tahun 2017, kemudian konsultan Mekanikal dan Konsultan Pompa-Plumbing level madya dengan Sertifikat Keahlian Khusus (SKK) dari **Badan Nasional Sertifikasi Profesi (BNSP)** dan pengurus Ikatan Konsultan Sertifikat Laik

Fungsi (IKA-SLF) Jawa Timur sejak 2018 sampai 2021, dan Konsultan Mekanikal level utama dengan Sertifikat Keahlian Khusus (SKK) sejak tahun 2022-sekarang dari **Lembaga Pengembangan Jasa Konstruksi** (LPJK-PUPR). Berkontribusi dalam Book Chapter ini karena, membahas matematika terapan yang mempunyai keasyikan tersendiri.

## BIODATA PENULIS



**Ida Fitriana Ambarsari, S.Pd., M.Si**  
Dosen Prodi Pendidikan Matematika

**Ida Fitriana Ambarsari, S.Pd., M.Si** Lahir di Situbondo Kec. Panji Jawa Timur, pada tanggal 18 Maret 1994, putri pertama dari pasangan ayah **Dede Yusmana (Alm)** dan ibu **Sri Hartatik**. Tahun 2000 – 2006 menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SDN 6 Mimbaan, Situbondo. Tahun 2006 – 2009 menempuh pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMPN 1 Situbondo, Situbondo. Tahun 2009 – 2012 menempuh pendidikan Sekolah Menengah Atas menempuh pendidikan di SMAN 2 Situbondo, Situbondo. Dan tahun 2012 – 2016 menempuh Pendidikan Tinggi di Universitas Negeri Malang, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Matematika, Program Studi Pendidikan Matematika. Lulus pada bulan April 2016 dengan gelar sarjana pendidikan (S.Pd). Kemudian pada awal tahun 2017 bekerja di PT BTPN Syariah selama 6 bulan. Setelah itu, melanjutkan Pendidikan Tinggi di Universitas Negeri Malang, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Matematika, Program Studi S2

Matematika. Lulus pada bulan Oktober 2020 dengan gelar magister sains (M.Si).

Karir atau profesi staf pengajar (dosen) dimulai sejak tahun 2021 di STKIP PGRI Situbondo dan sekarang tinggal di Situbondo.

Saat berstatus mahasiswa pascasarjana di Universitas Negeri Malang, aktif mengikuti seminar dan konferensi prosiding internasional dan mampu mempublikasikan tiga artikel terindeks Scopus. Selain itu, memiliki pengalaman mengikuti kegiatan *mobility programme* di Universiti Malaya, Malaysia, serta aktif berpartisipasi mengikuti kegiatan pengabdian masyarakat yang diselenggarakan oleh Universitas Negeri Malang.

## **BIODATA PENULIS**



**Novita Aswan**

Dosen di Fakultas Pertanian Universitas Graha Nusantara  
Padangsidempuan

Novita Aswan lahir di Desa Napa Batangtoru pada 9 November 1987. Ia tercatat sebagai Dosen di Fakultas Pertanian Universitas Graha Nusantara Padangsidempuan. Novita merupakan anak dari pasangan Irwan Basril Siregar (ayah) dengan Sulastri Tanjung, S.Pd (Ibu). Ia menyelesaikan Pendidikan Sarjana dari Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara pada tahun 2010. Kemudian ia melanjutkan Pendidikan Magister di Program Studi Magister Ilmu Matematika Universitas Andalas Padang dan lulus pada tahun 2014. Pada tahun yang sama telah tercatat sebagai dosen tetap di Universitas Graha Nusantara Padangsidempuan dan masih aktif melaksanakan tridarma sampai dengan saat ini.

## BIODATA PENULIS



**Nur Rahmawati, ST., MT.**

Dosen Program Studi Teknik Industri  
Fakultas Teknik

Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jatim

Penulis lahir di Gresik tanggal 1 Agustus 1987. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Industri Fakultas Teknik, Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jatim. Menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Teknik Industri Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya. Penulis memiliki *research interest* di bidang: *supply chain engineering, logistics management* dan *operations management*.

## **BIODATA PENULIS**



**Rahimullaily, S.Si., M.Si.**

Dosen Program Studi Sistem Informasi  
Universitas Metamedia

Penulis lahir di Banda Aceh tanggal 7 Desember 1985. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sistem Informasi Universitas Metamedia, Kota Padang. Menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Andalas.



## BIODATA PENULIS



**Dr. Ir. Evi Yuliawati, ST., MT. IPM.**

Dosen Program Studi Teknik Industri Fakultas Teknologi Industri  
Institut Teknologi Adhi Tama Surabaya

Penulis lahir di Surabaya tanggal 10 Juli 1974. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Industri Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Adhi Tama Surabaya. Menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Teknik Industri Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya dan melanjutkan S3 pada Jurusan Teknik Mesin (Konsentrasi Teknik Industri Manufaktur) Fakultas Teknik, Universitas Brawijaya. Penulis memiliki *research interest* di bidang: *supply chain engineering, logistics management* dan *operations management*.

## **BIODATA PENULIS**



### **Sulistyowati, S.T., M.Kom.**

Dosen Jurusan Sistem Informasi  
Fakultas Teknik Elektro dan Teknologi Informasi  
Institut Teknologi Adhi Tama Surabaya

Penulis lahir di Banyuwangi tanggal 5 April 1977. Penulis adalah dosen tetap pada Jurusan Sistem Informasi Fakultas Teknik Elektro dan Teknologi Informasi, Institut Teknologi Adhi Tama Surabaya mulai tahun 2000 sampai sekarang. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Teknik Informatika di Institut Teknologi Adhi Tama Surabaya dan melanjutkan pendidikan S2 pada Jurusan Teknik Informatika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Bidang riset penulis adalah di bidang Riset Operasi, Rekayasa Perangkat Lunak, Sistem Pendukung Manajemen, dan Pemrograman. Kritik dan saran yang membangun dapat disampaikan melalui email [sulis\\_tyowati@itats.ac.id](mailto:sulis_tyowati@itats.ac.id).