

PROBABILITAS DAN STATISTIKA

**Bernadhita Herindri Samodera Utami, Wahyuni Ekasasmita,
Ahmad Fajri S, Riza Sawitri, Dwi Herinanto, Miftahulhairah,
Agus Irawan, Rahma Faelasofi**



PROBABILITAS DAN STATISTIKA

Bernadhita Herindri Samodera Utami

Wahyuni Ekasasmita

Ahmad Fajri S

Riza Sawitri

Dwi Herinanto

Miftahulkhairah

Agus Irawan

Rahma Faelasofi



GET PRESS INDONESIA

PROBABILITAS DAN STATISTIKA

Penulis :

Bernadhita Herindri Samodera Utami

Wahyuni Ekasasmita

Ahmad Fajri S

Riza Sawitri

Dwi Herinanto

Miftahulkhairah

Agus Irawan

Rahma Faelasofi

ISBN : 978-623-125-433-7

Editor : Diana Purnama Sari, S.E., M.E

Penyunting : Ari Yanto, M.Pd

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd

Penerbit : GET PRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :

Jln. Palarik Air Pacah No 26 Kel. Air Pacah

Kec. Koto Tangah Kota Padang Sumatera Barat

Website : www.getpress.co.id

Email : adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, Oktober 2024

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Segala Puji dan syukur atas kehadiran Allah SWT dalam segala kesempatan. Sholawat beriring salam dan doa kita sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW. Alhamdulillah atas Rahmat dan Karunia-Nya penulis telah menyelesaikan Probabilitas Dan Statistika ini.

Buku ini membahas Probabilitas Dan Statistika, Variabel Acak Dan Distribusi Peluang, Harapan Matematik, Distribusi Peluang Diskret, Distribusi Peluang Kontinu, Pengujian Hipotesis, Regresi Korelasi, Uji Validitas, Uji Reabilitas.

Proses penulisan buku ini berhasil diselesaikan atas kerjasama tim penulis. Demi kualitas yang lebih baik dan kepuasan para pembaca, saran dan masukan yang membangun dari pembaca sangat kami harapkan.

Penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung dalam penyelesaian buku ini. Terutama pihak yang telah membantu terbitnya buku ini dan telah mempercayakan mendorong, dan menginisiasi terbitnya buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi masyarakat Indonesia.

Padang, Oktober 2024

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR TABEL	v
BAB 1 PROBABILITAS DAN STATISTIKA.....	1
1.1 Pendahuluan.....	1
1.2 Ruang Sampel dan Kejadian.....	2
1.3 Probabilitas Beserta Sifat-sifatnya.....	9
1.4 Probabilitas Bersyarat dan Teorema Bayes.....	13
DAFTAR PUSTAKA.....	15
BAB 2 VARIABEL ACAK DAN DISTRIBUSI PELUANG.....	17
2.1 Pendahuluan.....	17
2.2 Variabel Acak.....	17
2.2.1 Variabel Acak Diskrit.....	18
2.2.2 Variabel Acak Kontinu.....	21
2.3 Distribusi Peluang.....	24
DAFTAR PUSTAKA.....	27
BAB 3 HARAPAN MATEMATIK.....	29
3.1 Pendahuluan.....	29
3.2 Harapan Matematik dari Suatu Peubah Acak.....	29
3.2.1 Peubah Acak Diskret	29
3.2.2 Peubah Acak Kontinu.....	31
3.3 Sifat-sifat Harapan Matematik	32
3.4 Harapan Matematik Peubah Acak Khusus.....	34
3.4.1 Peubah Acak Diskret Khusus.....	34
3.4.2 Peubah Acak Kontinu Khusus.....	37
3.5 Penerapan Harapan Matematik.....	41
DAFTAR PUSTAKA.....	47
BAB 4 DISTRIBUSI PELUANG DISKRET	49
4.1 Pendahuluan.....	49
4.2 Distribusi Bernoulli.....	50
4.3 Distribusi Binomial.....	51
4.4 Distribusi Geometrik.....	54
4.5 Distribusi Binomial Negatif.....	55
4.6 Distribusi Hipergeometrik	56
4.7 Distribusi Poisson.....	58

DAFTAR PUSTAKA.....	61
BAB 5 DISTRIBUSI PELUANG KONTINU	63
5.1 Pendahuluan.....	63
5.2 Distribusi Uniform/Seragam	64
5.3 Distribusi Gamma.....	66
5.4 Distribusi Eksponensial.....	67
5.5 Distribusi Chi Square	69
5.5 Distribusi Beta	70
5.6 Distribusi Normal	72
5.7 Distribusi Normal Baku.....	73
5.8 Distribusi Lognormal.....	74
DAFTAR PUSTAKA.....	76
BAB 6 PENGUJIAN HIPOTESIS.....	77
6.1 Pendahuluan.....	77
6.2 Pengujian Hipotesis Satu Rata-Rata.....	79
6.3 Pengujian Hipotesis Beda Dua Rata-Rata	82
6.3.1 Sampel Besar ($n > 30$)	82
6.3.2 Sampel Kecil ($n \leq 30$)	82
6.4 Pengujian Hipotesis Tentang Satu Proporsi.....	85
6.5 Pengujian Hipotesis Tentang Perbedaan Dua Proporsi ..	87
DAFTAR PUSTAKA.....	91
BAB 7 REGRESI DAN KORELASI.....	93
7.1 Pendahuluan.....	93
7.2 Regresi dan Koefisien Korelasi Sederhana.....	94
7.2.1 Persamaan Regresi Linear Sederhana	94
7.2.2 Koefisien Korelasi (r)	98
7.2.3 Koefisien Determinasi R^2	101
7.3 Regresi dan Korelasi Berganda.....	102
7.3.1 Persamaan Regresi Linear Berganda.....	102
7.3.2 Korelasi Berganda Tiga Variabel	106
7.3.3 Koefisien Determinasi Berganda.....	107
DAFTAR PUSTAKA.....	109
BAB 8 UJI VALIDITAS, UJI REABILITAS.....	111
8.1 Pendahuluan.....	111
8.2 Uji Validitas.....	112
8.3 Uji Reabilitas	114
8.4 Studi Kasus	116

DAFTAR PUSTAKA..... 120

BIODATA PENULIS

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1. Hasil Percobaan Keluarga Sony	52
Tabel 7.1. Kesadaran Politik dan Partisipasi Pemilu 10 responden	96
Tabel 7.2. Interpretasi Koefisien Korelasi.....	99
Tabel 7.3. Bantu metode <i>least square</i>	101
Tabel 7.4. Kecerdasan Emosional, Motivasi dan Prestasi Belajar	103

BAB 1

PROBABILITAS DAN STATISTIKA

Oleh Bernadhita Herindri Samodera Utami

1.1 Pendahuluan

Statistika dan probabilitas telah lama dikenal sebagai cabang ilmu yang sangat penting dan saling terkait dalam analisis data dan pengambilan keputusan berbasis informasi. Keduanya memainkan peran krusial, tidak hanya bagi matematika namun juga berbagai bidang lainnya. Mulai dari penelitian ilmiah, ekonomi, hingga ilmu sosial, dan kesehatan (Anggraeni *dkk.*, 2023).

Statistika berfokus pada pengumpulan, analisis, dan interpretasi data. Dengan menggunakan teknik-teknik statistika, kita dapat mengidentifikasi pola, membuat inferensi, dan merumuskan keputusan yang didasarkan pada data yang ada (Ye *dkk.*, 2012). Di sisi lain, probabilitas menyediakan kerangka kerja untuk memahami dan menghitung ketidakpastian. Hal ini memungkinkan kita untuk memperkirakan kemungkinan terjadinya kejadian tertentu dan membuat keputusan yang lebih baik dalam situasi yang melibatkan risiko.

Buku ini dirancang untuk memberikan pemahaman tentang konsep-konsep dasar statistika dan probabilitas, serta aplikasi praktisnya. Mata kuliah statistika hampir selalu ada di setiap jurusan karena statistika memberikan alat dan teknik untuk mengumpulkan, menganalisis, serta menginterpretasikan data.

Buku ini membahas berbagai metode dan teknik, mulai dari probabilitas dasar dan distribusi, hingga analisis regresi dan inferensi statistik. Dengan pendekatan yang jelas dan contoh yang relevan, buku ini bertujuan untuk menjadi panduan yang berguna bagi mahasiswa, peneliti, dan profesional yang ingin memperdalam pemahaman mereka tentang statistika dan probabilitas (Stolp *dkk.*, 1984).

Statistika memungkinkan pengambilan keputusan yang didasarkan pada analisis data yang objektif. Keputusan yang baik

sering kali bergantung pada data yang akurat dan analisis yang tepat (Turkman *dkk.*, 2012).

Di era informasi saat ini, kemampuan untuk memahami dan mengolah data menjadi keterampilan yang sangat penting mengingat hampir semua bidang ilmu mengandalkan penelitian untuk berkembang. Pemahaman tentang statistika menjadi kompetensi penting yang dicari oleh banyak pemberi kerja. Kemampuan untuk menganalisis data dan menginterpretasikan hasil adalah keterampilan yang berharga di dunia kerja.

Dalam banyak profesi, evaluasi kinerja dan pengukuran efektivitas program atau proses adalah hal yang penting. Statistika menyediakan cara untuk mengukur dan mengevaluasi dengan metode yang terstandarisasi. Selain itu, statistika menyediakan metodologi untuk merancang eksperimen, menguji hipotesis, dan menganalisis hasil penelitian dengan cara yang sistematis dan valid.

1.2 Ruang Sampel dan Kejadian

Materi statistika dan probabilitas selalu diawali dengan konsep ruang sampel dan kejadian karena keduanya merupakan fondasi dasar untuk memahami seluruh teori probabilitas dan aplikasinya.

Untuk menghitung probabilitas suatu kejadian, kita memerlukan pemahaman tentang ruang sampel dan kejadian karena probabilitas adalah rasio antara jumlah hasil kejadian tersebut dengan jumlah total hasil dalam ruang sampel (Pallant, 2001).

Pemahaman ruang sampel dan kejadian juga menjadi langkah awal dalam membangun model probabilitas yang akurat dalam membuat prediksi, estimasi, dan keputusan berbasis data. Lebih lanjut lagi, dalam inferensi statistika, kita menarik kesimpulan tentang populasi berdasarkan sampel.

Berikut diberikan definisi tentang ruang sampel dan kejadian.

Definisi 1.1

Himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan acak disebut ruang sampel dan dilambangkan dengan simbol S .

Definisi 1.2

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel dan dinotasikan dengan E . Dengan kata lain, kejadian adalah satu atau lebih hasil yang mungkin dari sebuah eksperimen acak.

Berdasarkan Definisi 1.1 dan Definisi 1.2, diperoleh hubungan antara ruang sampel dan kejadian bahwa setiap kejadian adalah subset dari ruang sampel. Lebih lanjut, ruang sampel itu sendiri juga bisa dianggap sebagai sebuah kejadian (kejadian pasti), dimana semua hasil eksperimen terjadi. Sebaliknya, kejadian kosong (himpunan kosong) adalah kejadian dimana tidak ada hasil yang terjadi, dilambangkan dengan $\emptyset$.

Berikut diberikan contoh-contoh ruang sampel dan kejadian dalam bidang kesehatan.

Contoh 1.1

- Eksperimen: Melakukan tes medis untuk mendiagnosa penyakit tertentu (misalnya, tes darah untuk mendeteksi diabetes).
- Ruang sampel: $S = \{\text{positif}, \text{negatif}\}$ dimana "positif" berarti tes menunjukkan adanya penyakit, dan "negatif" berarti tes tidak menunjukkan adanya penyakit.
- Kejadian A: Tes menunjukkan hasil positif, dinotasikan dengan kejadian $A = \{\text{positif}\}$.
- Kejadian B: Tes menunjukkan hasil negatif, dinotasikan dengan kejadian $B = \{\text{negatif}\}$.

Contoh 1.2

- Eksperimen: Memantau respons pasien terhadap pengobatan baru.
- Ruang sampel: $S = \{\text{sembuh}, \text{tidak sembuh}, \text{efek samping}\}$.
- Kejadian A: Pasien sembuh, dinotasikan dengan $A = \{\text{sembuh}\}$.
- Kejadian B: Pasien mengalami efek samping, dinotasikan dengan $B = \{\text{efek samping}\}$.

Contoh 1.3

- Eksperimen: Mengamati status kesehatan individu dalam sebuah populasi terkait paparan suatu faktor risiko (misalnya, merokok).
- Ruang sampel: $S = \{\text{sehat}, \text{sakit}\}$, dimana "sehat" berarti individu tidak menunjukkan tanda-tanda penyakit terkait faktor risiko, dan "sakit" berarti individu menunjukkan tanda-tanda penyakit.
- Kejadian A: Individu sakit, dinotasikan dengan $A = \{\text{sakit}\}$.
- Kejadian B: Individu sehat, dinotasikan dengan $B = \{\text{sehat}\}$.

Berikut adalah contoh-contoh ruang sampel dan kejadian dalam bidang teknik.

Contoh 1.4

- Eksperimen: Menguji kualitas produk di lini produksi (misalnya, menguji kekuatan bahan suatu produk).
- Ruang sampel: $S = \{\text{lulus uji}, \text{gagal uji}\}$, dimana "lulus uji" berarti produk memenuhi standar kualitas, dan "gagal uji" berarti produk tidak memenuhi standar kualitas.
- Kejadian A: Produk lulus uji kualitas, dinotasikan dengan $A = \{\text{lulus uji}\}$.
- Kejadian B: Produk gagal uji kualitas, dinotasikan dengan $B = \{\text{gagal uji}\}$.

Contoh 1.5

- Eksperimen: Menguji keandalan komponen elektronik (misalnya, resistor).
- Ruang sampel: $S = \{\text{berfungsi}, \text{tidak berfungsi}\}$.
- Kejadian A: Komponen berfungsi dengan baik, dinotasikan dengan $A = \{\text{berfungsi}\}$.
- Kejadian B: Komponen tidak berfungsi, dinotasikan dengan $B = \{\text{tidak berfungsi}\}$.

Contoh 1.6

- Eksperimen: Menguji keamanan jembatan di bawah beban tertentu.

- Ruang sampel: $S = \{\text{aman, tidak aman}\}$, dimana "aman" berarti jembatan dapat menahan beban tanpa kerusakan, dan "tidak aman" berarti jembatan mengalami kerusakan atau kegagalan struktural.
- Kejadian A: Jembatan aman di bawah beban tertentu, dinotasikan dengan $A = \{\text{aman}\}$.
- Kejadian B: Jembatan tidak aman di bawah beban tertentu, dinotasikan dengan $B = \{\text{tidak aman}\}$.

Berikut diberikan definisi tentang komplemen suatu kejadian.

Definisi 1.3

Komplemen suatu kejadian A terhadap ruang sampel S adalah himpunan bagian semua elemen S yang tidak ada dalam A . Komplemen A dilambangkan dengan simbol A^c atau A' .

Dengan kata lain, komplemen suatu kejadian dalam probabilitas adalah himpunan semua hasil yang tidak termasuk dalam kejadian tersebut. Dalam konteks olahraga, berikut adalah beberapa contoh komplemen suatu kejadian.

Contoh 1.7

- Eksperimen: Menonton hasil pertandingan sepak bola antara Tim A dan Tim B.
- Ruang sampel: $S = \{\text{Tim A menang, Tim B menang, Seri}\}$.
- Kejadian A: Tim A menang, dinotasikan dengan $A = \{\text{Tim A menang}\}$.
- Komplemen dari kejadian A (Tim A menang) adalah semua hasil yang bukan Tim A menang. Jadi, $A^c = \{\text{Tim B menang, Seri}\}$.

Contoh 1.8

- Eksperimen: Mengamati apakah Pelari A menyelesaikan perlombaan dalam waktu kurang dari 10 detik.
- Ruang sampel: $S = \{\text{kurang dari 10 detik, 10 detik atau lebih}\}$.
- Kejadian D: Pelari A menyelesaikan perlombaan dalam waktu kurang dari 10 detik, dinotasikan dengan $D = \{\text{kurang dari 10 detik}\}$.

- Komplement dari kejadian D (Pelari A menyelesaikan perlombaan dalam waktu kurang dari 10 detik) adalah Pelari A menyelesaikan perlombaan dalam waktu 10 detik atau lebih. Jadi, $D^c = \{10 \text{ detik atau lebih}\}$.

Berikut diberikan definisi tentang irisan kejadian.

Definisi 1.4

Irisan dua kejadian A dan B yang dilambangkan dengan simbol $A \cap B$ adalah kejadian yang memuat semua unsur persekutuan pada A dan B .

Irisan dua kejadian dalam probabilitas adalah himpunan hasil yang termasuk dalam kedua kejadian tersebut secara bersamaan. Berikut adalah beberapa contoh irisan dua kejadian di bidang pendidikan.

Contoh 1.9

- Eksperimen: Mengamati siswa di sebuah sekolah SMAN 1 Bandar Lampung.
- Ruang sampel: $S = \{\text{semua siswa di SMAN 1 Bandar Lampung}\}$.
- Kejadian A : Siswa yang memiliki nilai di atas rata-rata, dinotasikan dengan $A = \{\text{siswa dengan nilai di atas rata-rata}\}$.
- Kejadian B : Siswa yang aktif dalam kegiatan ekstrakurikuler, dinotasikan dengan $B = \{\text{siswa yang aktif dalam kegiatan ekstrakurikuler}\}$.
- Irisan dari kejadian A dan B adalah siswa yang memiliki nilai di atas rata-rata dan juga aktif dalam kegiatan ekstrakurikuler. Jadi, $A \cap B = \{\text{siswa dengan nilai di atas rata-rata dan aktif dalam kegiatan ekstrakurikuler}\}$.

Contoh 1.10

- Eksperimen: Mengamati mahasiswa yang mengikuti mata kuliah Teknik Sampling.
- Ruang sampel:
 $S = \{\text{semua mahasiswa yang mengikuti mata kuliah teknik sampling}\}$.

- Kejadian C: Mahasiswa yang hadir lebih dari 80% dari total pertemuan, dinotasikan dengan $C = \{\text{mahasiswa yang hadir lebih dari 80\%}\}$.
- Kejadian D: Mahasiswa yang lulus mata kuliah Teknik Sampling, dinotasikan dengan $D = \{\text{mahasiswa yang lulus mata kuliah Teknik Sampling}\}$.
- Irisan dari kejadian C dan D adalah mahasiswa yang hadir lebih dari 80% dari total pertemuan dan juga lulus mata kuliah Teknik Sampling. Jadi,
 $C \cap D = \{\text{mahasiswa yang hadir lebih dari 80\% dan lulus mata kuliah}\}$.

Berikut diberikan definisi tentang kejadian saling lepas.

Definisi 1.5

Dua kejadian A dan B saling lepas, jika $A \cap B = \emptyset$, yaitu jika A dan B tidak mempunyai unsur-unsur yang sama.

Kejadian saling lepas (*mutually exclusive events*) adalah dua kejadian yang tidak bisa terjadi secara bersamaan. Berikut adalah beberapa contoh dua kejadian saling lepas di bidang politik.

Contoh 1.11

- Eksperimen: Pemilu presiden di sebuah negara.
- Ruang sampel:
 $S = \{\text{Kandidat A menang, Kandidat B menang, kandidat C menang}\}$.
- Kejadian A: Kandidat A menang pemilu, dinotasikan dengan $A = \{\text{Kandidat A menang}\}$.
- Kejadian B: Kandidat B menang pemilu, dinotasikan dengan $B = \{\text{Kandidat B menang}\}$.
- Kandidat A dan Kandidat B tidak bisa menang secara bersamaan sehingga $A \cap B = \emptyset$. Jadi, kejadian A dan kejadian B adalah saling lepas.

Contoh 1.12

- Eksperimen: Hasil referendum mengenai suatu undang-undang.

- Ruang sampel: $S = \{\text{Undang - Undang disetujui, Undang - Undang ditolak}\}$.
- Kejadian C: Undang - Undang disetujui, dinotasikan dengan $C = \{\text{Undang - Undang disetujui}\}$.
- Kejadian D: Undang - Undang ditolak, dinotasikan dengan $D = \{\text{Undang - Undang ditolak}\}$.
- Undang - Undang tidak bisa disetujui dan ditolak secara bersamaan sehingga $C \cap D = \emptyset$. Jadi, kejadian C dan kejadian D adalah saling lepas.

Berikut diberikan definisi tentang gabungan kejadian.

Definisi 1.6

Gabungan dua kejadian A dan B yang dilambangkan dengan simbol $A \cup B$ adalah kejadian yang memuat semua unsur yang termasuk dalam A atau B atau kedua-duanya.

Gabungan dua kejadian (*union of events*) dalam probabilitas adalah himpunan hasil yang termasuk dalam setidaknya salah satu dari kedua kejadian tersebut. Berikut adalah beberapa contoh gabungan dua kejadian di bidang ekonomi.

Contoh 1.13

- Eksperimen: Mengamati perubahan ekonomi dalam suatu periode waktu.
- Ruang sampel: $S = \{\text{suku bunga naik, harga saham naik, harga saham turun}\}$.
- Kejadian A: Suku bunga naik, dinotasikan dengan $A = \{\text{suku bunga naik}\}$.
- Kejadian B: Harga saham naik, dinotasikan dengan $B = \{\text{harga saham naik}\}$.
- Gabungan dari kejadian A dan B adalah peristiwa dimana setidaknya salah satu dari suku bunga naik atau harga saham naik terjadi. Jadi, $A \cup B = \{\text{suku bunga naik, harga saham naik}\}$.

Contoh 1.14

- Eksperimen: Mengamati perilaku ekonomi rumah tangga.
- Ruang sampel:

$S = \{\text{pengeluaran konsumen naik, pengeluaran konsumen turun, pendapatan rumah tangga naik, pendapatan rumah tangga turun}\}.$

- Kejadian I : Pengeluaran konsumen naik, dinotasikan dengan $I = \{\text{pengeluaran konsumen naik}\}.$
- Kejadian J : Pendapatan rumah tangga naik, dinotasikan dengan $J = \{\text{pendapatan rumah tangga naik}\}.$
- Gabungan dari kejadian I dan J adalah peristiwa dimana setidaknya salah satu dari pengeluaran konsumen naik atau pendapatan rumah tangga naik terjadi. Jadi, $I \cup J = \{\text{pengeluaran konsumen naik, pendapatan rumah tangga naik}\}.$

1.3 Probabilitas Beserta Sifat-sifatnya

Dalam buku ini, digunakan notasi $\mathbb{P}(A)$ untuk setiap kejadian A .

Definisi 1.7

Probabilitas adalah suatu ukuran dari kemungkinan terjadinya suatu peristiwa atau kejadian. Probabilitas suatu kejadian A dinotasikan sebagai $\mathbb{P}(A)$ dan nilainya berkisar antara 0 dan 1, dimana 0 menunjukkan kejadian tersebut tidak mungkin terjadi dan 1 menunjukkan kejadian tersebut pasti terjadi.

Dalam teori probabilitas, terdapat beberapa sifat dasar yang penting untuk memahami bagaimana probabilitas bekerja dalam berbagai macam kondisi (kasus). Dua aturan yang paling mendasar adalah aturan penjumlahan (*addition rule*) dan aturan perkalian (*multiplication rule*), yang sering digunakan dalam menghitung probabilitas gabungan dari dua atau lebih peristiwa.

Aturan penjumlahan dalam probabilitas digunakan untuk menghitung probabilitas gabungan dari dua atau lebih kejadian yang mungkin terjadi. Ada dua aturan utama dalam penjumlahan probabilitas, yaitu untuk kejadian yang saling lepas dan kejadian yang tidak saling lepas.

Definisi 1.8

Aturan penjumlahan untuk kejadian saling lepas. Dua kejadian A dan B disebut saling lepas (*mutually exclusive*) jika tidak mungkin keduanya terjadi secara bersamaan, yaitu $A \cap B = \emptyset$. Untuk dua

kejadian saling lepas, probabilitasnya adalah $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Contoh 1.15

Misalkan ingin dihitung probabilitas bahwa seorang karyawan mengalami pemutusan hubungan kerja (PHK) atau mendapatkan kenaikan gaji di sebuah perusahaan. Kedua peristiwa ini merupakan contoh kejadian saling lepas (tidak ada karyawan yang bisa mengalami PHK dan pada saat yang sama mendapatkan kenaikan gaji). Didefinisikan dua kejadian:

Kejadian A: Peristiwa seorang karyawan mengalami PHK.

Kejadian B: Peristiwa seorang karyawan mendapatkan kenaikan gaji.

Misalkan diketahui:

$\mathbb{P}(A) = 0,2$ (probabilitas seorang karyawan dipecat/pengangguran adalah 20%).

$\mathbb{P}(B) = 0,3$ (probabilitas seorang karyawan mendapatkan kenaikan gaji adalah 30%).

Karena peristiwa ini saling lepas, dapat digunakan aturan penjumlahan untuk menghitung probabilitas seorang karyawan mengalami PHK atau mendapatkan kenaikan gaji.

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0,2 + 0,3 = 0,5$.

Jadi, probabilitas bahwa seorang karyawan di perusahaan tersebut mengalami PHK atau mendapatkan kenaikan gaji adalah 0,5 atau 50%.

Definisi 1.9

Aturan penjumlahan untuk kejadian tidak saling lepas. Jika dua kejadian A dan B tidak saling lepas (tidak *mutually exclusive*), maka probabilitasnya adalah $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Contoh 1.16

Misalkan sebuah perusahaan sedang mengukur probabilitas peningkatan penjualan dan menjalankan kampanye iklan secara bersamaan. Kedua peristiwa ini merupakan contoh kejadian tidak saling lepas karena kampanye iklan dapat memengaruhi peningkatan penjualan. Didefinisikan dua peristiwa:

Kejadian A: Peristiwa peningkatan penjualan di perusahaan.

Kejadian B: Peristiwa perusahaan menjalankan kampanye iklan.

Misalkan diketahui:

$\mathbb{P}(A) = 0,6$ (probabilitas peningkatan penjualan adalah 60%).

$\mathbb{P}(B) = 0,5$ (probabilitas perusahaan menjalankan kampanye iklan adalah 50%).

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0,3$ (probabilitas perusahaan mengalami peningkatan penjualan dan menjalankan kampanye iklan adalah 30%).

Untuk menghitung probabilitas terjadinya salah satu peristiwa, yaitu peningkatan penjualan atau menjalankan kampanye iklan, kita menggunakan aturan penjumlahan untuk peristiwa tidak saling lepas.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8.$$

Jadi, probabilitas perusahaan mengalami peningkatan penjualan atau menjalankan kampanye iklan adalah 0,8, atau 80%.

Aturan perkalian dalam probabilitas digunakan untuk menghitung probabilitas gabungan dari dua atau lebih kejadian yang terjadi secara bersamaan. Ada dua kasus utama dalam perkalian probabilitas, yaitu untuk kejadian yang independen dan kejadian yang tidak independen.

Definisi 1.10

Dua kejadian A dan B disebut independen jika terjadinya kejadian A tidak mempengaruhi terjadinya kejadian B, dan sebaliknya. Untuk kejadian yang independen, probabilitas kedua kejadian terjadi secara bersamaan adalah $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Contoh 1.17

Misalkan kita ingin menghitung probabilitas dua kejadian yang independen dari kejadian berikut.

Kejadian A: Seorang pemain sepak bola mencetak gol di pertandingan.

Kejadian B: Cuaca saat pertandingan cerah.

Probabilitas cuaca cerah tidak mempengaruhi apakah seorang pemain akan mencetak gol atau tidak, dan begitu pula sebaliknya. Misalkan diketahui:

$\mathbb{P}(A) = 0,4$ (probabilitas pemain mencetak gol adalah 40%).

$\mathbb{P}(B) = 0,7$ (probabilitas cuaca cerah adalah 70%).

Untuk menghitung probabilitas pemain mencetak gol dan cuaca cerah terjadi secara bersamaan, kita gunakan rumus kejadian independen.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28.$$

Jadi, probabilitas bahwa seorang pemain mencetak gol dan cuaca saat pertandingan cerah adalah 0,28, atau 28%.

Definisi 1.11

Jika dua kejadian A dan B tidak independen, maka probabilitas kedua kejadian terjadi secara bersamaan adalah

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A).$$

Dalam hal ini, $\mathbb{P}(BA)$ adalah probabilitas kejadian B terjadi dengan syarat bahwa kejadian A sudah terjadi. Notasi $\mathbb{P}(B|A)$ dikenal sebagai probabilitas bersyarat.

Contoh 1.18

Misalkan dalam sebuah kelas terdapat 60% siswa laki-laki dan 40% siswa perempuan. Dari 60% siswa laki-laki, 70% memperoleh nilai A dalam ujian. Kita ingin mencari probabilitas seorang siswa yang memperoleh nilai A adalah laki-laki dengan definisi kejadian sebagai berikut:

Kejadian A = siswa yang memperoleh nilai A.

Kejadian B = siswa yang laki-laki.

Berdasarkan data tersebut, probabilitas siswa yang laki-laki memperoleh nilai A adalah $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$.

Adapun probabilitas siswa yang memperoleh nilai A adalah: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$

dimana B^c adalah kejadian siswa perempuan. Misalkan 50% dari siswa perempuan memperoleh nilai A maka

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B^c) = 0,4 \times 0,5 = 0,20.$$

sehingga

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = 0,42 + 0,20 = 0,62.$$

Jadi, probabilitas seorang siswa yang memperoleh nilai A adalah laki-laki dihitung dengan cara

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,42}{0,62} = 0,6774.$$

1.4 Probabilitas Bersyarat dan Teorema Bayes

Probabilitas bersyarat digunakan untuk menghitung probabilitas suatu peristiwa terjadi dengan syarat bahwa peristiwa lain sudah terjadi. Probabilitas bersyarat memberikan pemahaman yang lebih spesifik tentang bagaimana informasi tambahan (terjadinya peristiwa lain) mempengaruhi probabilitas peristiwa yang sedang dianalisis.

Definisi 1.12

Probabilitas bersyarat adalah probabilitas terjadinya suatu kejadian B dengan syarat bahwa kejadian A telah terjadi. Probabilitas bersyarat dinotasikan dengan $\mathbb{P}(B|A)$ dan dihitung dengan menggunakan rumus

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

dimana:

$\mathbb{P}(B|A)$ adalah probabilitas kejadian B terjadi dengan syarat bahwa kejadian A telah terjadi.

$\mathbb{P}(A \cap B)$ adalah probabilitas bahwa kedua kejadian A dan B terjadi bersamaan.

$\mathbb{P}(A)$ adalah probabilitas kejadian A.

Definisi 1.13

Teorema Bayes adalah rumus dalam probabilitas yang digunakan untuk menghitung probabilitas bersyarat dengan menggunakan informasi baru berdasarkan informasi yang telah diketahui. Teorema Bayes dirumuskan sebagai

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

dimana:

$\mathbb{P}(A|B)$ adalah probabilitas kejadian A dengan syarat bahwa kejadian B telah terjadi.

$\mathbb{P}(B|A)$ adalah probabilitas kejadian B dengan syarat bahwa kejadian A telah terjadi.

$\mathbb{P}(A)$ adalah probabilitas awal kejadian A (sebelum adanya informasi baru).

$\mathbb{P}(B)$ adalah probabilitas kejadian B (yang dapat dihitung sebagai gabungan dari probabilitas B untuk semua kejadian A).

Contoh 1.19

Misalkan dalam sebuah populasi terdapat 10% orang yang memiliki penyakit diabetes. Sembilan puluh persen orang yang memiliki penyakit tersebut akan menunjukkan gejala, sementara 5% orang tanpa penyakit juga menunjukkan gejala. Kita ingin mengetahui probabilitas seseorang yang menunjukkan gejala benar-benar menderita penyakit tersebut maka didefinisikan:

Kejadian A = seseorang menderita penyakit diabetes.

Kejadian B = Seseorang menunjukkan gejala.

Diketahui:

$$\mathbb{P}(A) = 0,10$$

$$\mathbb{P}(A^c) = 0,90$$

$$\mathbb{P}(B|A) = 0,90$$

$$\mathbb{P}(B|A^c) = 0,05$$

Pertama, hitung $\mathbb{P}(B)$ menggunakan aturan total probabilitas:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c) \\ &= 0,90 \times 0,10 + 0,05 \times 0,90 \\ &= 0,135\end{aligned}$$

Kedua, hitung $\mathbb{P}(A|B)$ menggunakan teorema Bayes:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,90 \times 0,1}{0,135} = 0,667.$$

Jadi, probabilitas seseorang yang menunjukkan gejala benar-benar menderita penyakit tersebut adalah sekitar 66,7%.

DAFTAR PUSTAKA

- Anggraeni, L., A. Martin, D. Puspita, N. A. K. Dewi, M. Kristina, E. S. Nagara, B. H. S. Utami, N. Y. Sari, P. A. Pratomo, dan W. Andewi . 2023. *Metodologi Penelitian*. Indramayu, Jawa Barat: CV. Adanu Abimata.
- Pallant, J. 2001. *SPSS Survival Manual*. New York: Willey and Sons.
- Stolp, C., Dowdy, S. and Wearden, S. 1984. Statistics for Research. *Journal of Policy Analysis and Management*, 22(1), 25-45.
- Turkman, P. 2012. Business Analytics, Process Maturity, and Supply Chain Performance, *Lecture Notes in Business Information Processing*, 99(1), 111–122.
- Ye, K, R. E. Walpole, and H. Myers. 2012. *Probability and Statistics for Engineers and Scientistist*. Boston, Massachussets: Prentice Hall Pearson.

BAB 2

VARIABEL ACAK DAN DISTRIBUSI PELUANG

Oleh Wahyuni Ekasasmita

2.1 Pendahuluan

Dalam dunia statistik dan probabilitas, variabel acak dan distribusi peluang merupakan konsep fundamental yang digunakan untuk memahami dan menganalisis data yang bersifat acak. Variabel acak menyediakan cara untuk menggambarkan hasil dari eksperimen acak, sedangkan distribusi peluang menggambarkan bagaimana probabilitas didistribusikan di antara hasil-hasil tersebut. Bab ini akan membahas konsep-konsep ini secara mendetail, termasuk jenis-jenis variabel acak, fungsi probabilitas, distribusi peluang, serta aplikasi praktisnya (1).

2.2 Variabel Acak

Variabel acak adalah fungsi yang menghubungkan hasil dari eksperimen acak dengan nilai numerik. Ada dua jenis utama variabel acak:

Variabel Acak Diskrit: Memiliki nilai-nilai terpisah atau terhitung. Contohnya termasuk jumlah dadu yang muncul dalam satu lemparan. Variabel ini dapat mengambil nilai seperti 1, 2, 3, 4, 5, atau 6.

Variabel Acak Kontinu: Memiliki nilai dalam rentang kontinu. Contohnya termasuk tinggi badan seseorang. Variabel ini dapat memiliki nilai dalam rentang seperti 150 cm hingga 200 cm, dengan kemungkinan nilai pecahan seperti 172.5 cm.

Contoh 2.2: Misalkan eksperimen dua sepasang koin. Misalkan Y menunjukkan jumlah kepala yang muncul, maka Y adalah variabel acak yang dapat mengambil salah satu nilai 0, 1, 2 dengan probabilitas masing-masing.

$$P\{Y = 0\} = P\{(T, T)\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y = 1\} = P\{(T, T)\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y = 2\} = P\{(T, T)\} = \frac{1}{4}$$

Maka, $P\{Y = 0\} + P\{Y = 1\} + P\{Y = 2\} = 1$.

2.2.1 Variabel Acak Diskrit

Seperti yang disebutkan sebelumnya, variabel acak yang dapat mengambil setidaknya sejumlah nilai yang dapat dihitung dikatakan diskrit. Untuk variabel acak X diskrit, kita mendefinisikan fungsi massa probabilitas $p(a)$ dari X dengan

$$p(a) = P\{X = a\}$$

Fungsi massa probabilitas $p(a)$ adalah positif untuk setidaknya sejumlah nilai yang dapat dihitung dari a . Artinya, jika X harus mengasumsikan salah satu nilai $x_1, x_2, x_3, \dots$ maka

$$p(x_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p(x) = 0, \quad \text{untuk semua nilai } x$$

Karena X harus mengambil salah satu nilai x_i , diperoleh

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Fungsi distribusi kumulatif F dapat dinyatakan dalam $p(a)$ dengan

$$F(a) = \sum_{\text{semua } x_i \leq a} p(x_i)$$

Misalnya, katakanlah X memiliki fungsi massa probabilitas yang diberikan oleh

$$p(1) = \frac{1}{2}, \quad p(1) = \frac{1}{3}, \quad p(1) = \frac{1}{6}$$

Ini disajikan secara grafis dalam Gambar 2.1. variabel acak diskrit sering diklasifikasikan menurut fungsi massa probabilitas mereka. Sekarang kita mempertimbangkan beberapa variabel acak ini:

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq a < 2 \\ \frac{5}{6}, & 2 \leq a < 3 \\ 1, & 3 \leq a \end{cases}$$

Ini disajikan secara grafis dalam Gambar 2.1.

variabel acak diskrit sering diklasifikasikan menurut fungsi massa probabilitasnya. Sekarang kita mempertimbangkan beberapa variabel acak ini (2).

Variabel Acak bernoulli

Variabel acak Bernoulli adalah variabel acak diskret yang memiliki dua kemungkinan hasil: sukses (dengan probabilitas p) dan gagal (dengan probabilitas $(1-p)$). Nilai dari variabel ini biasanya diwakili oleh 1 (untuk sukses) dan 0 (untuk gagal).

Fungsi massa probabilitas (Probability Mass Function/PMF):

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \end{cases}$$

Dimana $0 \leq p \leq 1$.

Variabel Acak Binomial

Misalkan bahwa n percobaan independen, yang masing-masing menghasilkan “sukses” dengan probabilitas p dan “kegagalan” dengan Probabilitas $1 - p$. Jika x mewakili jumlah keberhasilan yang terjadi dalam n percobaan, maka X dikatakan sebagai variabel acak binomial dengan parameter (n, p) .

$$P(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\text{Dengan, } \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

yaitu jumlah kelompok objek yang berbeda yang dapat dipilih dari kumpulan objek n . Keakuratan persamaan diatas dapat diperiksa dengan pertama kali mencatat bahwa probabilitas dari setiap urutan

tertentu dari n hasil yang berisi i keberhasilan dan $n - i$ kegagalan adalah, oleh independensi percobaan yang diduga, $p^i(1 - p)^{n-i}$. Dari persamaan diatas karena ada $\binom{n}{i}$ sekuens yang berbeda dari n hasil yang mengarah ke i sukses dan $n - i$ kegagalan. Misalnya, jika $n = 3, i = 2$, maka ada $\binom{3}{2} = 3$ cara di mana tiga percobaan dapat menghasilkan dua kesuksesan. Dengan kata lain, salah satu dari tiga hasil (t, t, g), (t, g, t), (g, t, t) di mana hasilnya berarti bahwa dua percobaan pertama adalah keberhasilan dan yang ketiga adalah kegagalan. Karena masing-masing dari tiga hasil (t, t, g), (t, g, t), (g, t, t) memiliki probabilitas $p^2(1 - p)$ terjadi maka probabilitas yang diinginkan adalah $\binom{n}{i} p^i(1 - p)^{n-i}$.

Perhatikan bahwa, dengan teorema binomial, probabilitas berjumlah menjadi satu, yaitu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} p(i) \binom{n}{i} p^i(1 - p)^{n-i} = (p + (1 - p))^n = 1$$

Contoh : Empat koin dilempar. Jika hasilnya dibayangkan secara independen, berapa probabilitas bahwa dua kepala dan dua ekor akan diperoleh?

Penyelesaian : Jika X sama dengan jumlah kepala ("sukses") yang berpasangan, maka X adalah variabel acak binomial dengan parameter ($n = 4, p = \frac{1}{2}$).

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

Variabel Acak Geometri

Katakanlah bahwa uji coba independen, masing-masing memiliki probabilitas p untuk menjadi sukses, dilakukan sampai keberhasilan terjadi (3). Jika kita membiarkan X menjadi jumlah percobaan yang diperlukan sampai kesuksesan pertama, maka X dikatakan sebagai variabel acak geometris dengan

$$p(n) = P\{X = n\} = (1 - p)^{n-1}p, \quad n = 1, 2, \dots$$

karena urutan X sama dengan n diperlukan dan cukup bahwa uji pertama $n - 1$ adalah kegagalan dan percobaan n kedua adalah kesuksesan. Karena hasil uji coba berturut-turut dianggap independen.

Untuk memeriksa apakah $p(n)$ adalah fungsi massa probabilitas, perhatikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = 1$$

Variabel Acak Poisson

Variabel acak X , yang mengambil salah satu nilai $0, 1, 2, \dots$, dikatakan sebagai variabel Poisson acak dengan parameter λ , jika untuk beberapa $\lambda > 0$,

$$P(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Sifat penting dari variabel acak Poisson adalah bahwa variabel ini dapat digunakan untuk memperkirakan variabel acak binomial ketika parameter binomial n besar dan p kecil. Untuk melihat ini, asumsikan bahwa X adalah variabel acak binomial dengan parameter (n, p) , dan biarkan $\lambda = np$. Maka

$$\begin{aligned} P\{X = i\} &= \frac{n!}{(n-i)! i!} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \frac{n!}{(n-i)! i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{n^i} \frac{\lambda^i}{i!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i} \end{aligned}$$

Untuk n

besar dan p kecil,

$$P\{X = i\} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

Contoh : Misalkan bahwa jumlah kesalahan tipografi pada satu halaman buku ini berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda = 1$. Hitunglah kemungkinan ada setidaknya satu kesalahan pada halaman ini.

Penyelesaian :

$$P\{X \geq i\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1} \approx 0.633$$

2.2.2 Variabel Acak Kontinu

Variabel acak yang nilai yang mungkin tidak dapat dihitung. Misalkan X menjadi variabel acak. Kita katakan bahwa X adalah variabel acak berkelanjutan jika ada fungsi nonnegatif $f(x)$,

didefinisikan untuk semua real $x \in (-\infty, \infty)$, memiliki sifat yang untuk setiap set B dari bilangan real

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)dx$$

Fungsi $f(x)$ disebut fungsi kepadatan probabilitas variabel acak X . Probabilitas bahwa X akan berada di B dapat diperoleh dengan mengintegrasikan fungsi kepadatan probabilitas di atas himpunan B . Karena X harus menganggap beberapa nilai, $f(x)$ harus memenuhi

$$P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_B f(x)dx = 1$$

Semua pernyataan probabilitas tentang X dapat dijawab dalam hal $f(x)$. Misalkan $B = [a, b]$, didapatkan

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$$

Variabel Acak Seragam

Variabel acak dikatakan didistribusikan normal pada interval $(0, 1)$ jika fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Perhatikan bahwa yang sebelumnya adalah fungsi kepadatan karena $f(x) \geq 0$ dan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 dx = 1$$

Secara umum, dikatakan bahwa X adalah variabel acak yang seragam pada interval (a, b) jika fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Variabel Acak Seragam

Jika X berdistribusi seragam pada $(0, 10)$, hitunglah probabilitas bahwa (a) $X < 3$, (b) $X > 7$, (c) $1 < X < 6$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} P\{X < 3\} &= \int_0^3 \frac{1}{10} dx = \frac{3}{10} \\ P\{X > 7\} &= \int_7^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{3}{10} \\ P\{1 < X < 6\} &= \int_1^6 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Variabel Acak Eksponensial

Variabel acak berterusan yang fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan, untuk beberapa $\lambda > 0$, oleh :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

adalah variabel acak eksponensial dengan parameter λ . Fungsi distribusi kumulatif F (4):

$$F(a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda a}, \quad a \geq 0$$

Perhatikan bahwa $F(\infty) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$.

Variabel Acak Gamma

Variabel acak yang densitasnya ditentukan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

untuk beberapa $\lambda > 0, \alpha > 0$ dikatakan sebagai variabel acak gamma dengan parameter α, λ . Jumlah $\Gamma(\alpha)$ disebut fungsi gamma dan didefinisikan oleh

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

Misalkan, $\alpha = n, \Gamma(\alpha) = (n-1)!$

Variabel Acak Normal

X adalah variabel acak normal (atau hanya bahwa X berdistribusi normal) dengan parameter μ dan σ^2 jika kepadatan X diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

2.3 Distribusi Peluang

Distribusi peluang mengacu pada cara probabilitas dialokasikan di antara berbagai nilai variabel acak (5). Berikut adalah beberapa distribusi peluang yang umum digunakan.

Distribusi Binomial: Digunakan untuk menghitung probabilitas jumlah keberhasilan dalam n percobaan independen, di mana setiap percobaan memiliki probabilitas p keberhasilan. Formula probabilitasnya adalah:

$$P(X = x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Perhatikan bahwa, dengan teorema binomial, probabilitasnya berjumlah 1.

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1$$

Contoh : Empat koin diputar. Jika hasilnya diasumsikan secara independen, berapa probabilitas bahwa dua kepala dan dua ekor akan diperoleh?

Penyelesaian: Misalkan X sama dengan jumlah kepala ("sukses") yang muncul, maka X adalah variabel acak binomial dengan parameter $(n = 4, p = \frac{1}{2})$. Diperoleh

$$P\{X = 2\} = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

Contoh : Misalkan X adalah variable acak yang mempunyai distribusi binomial dengan $n = 10$ dan $Var[X] = 0,25 E[X]$. Hitunglah probabilitas untuk $X = 7$.

Penyelesaian: Karena X adalah variable acak yang mempunyai distribusi binomial dengan $n = 10$ maka $E[X] = 10p$ dan $Var[X] = 10p(1 - p)$ dengan p merupakan peluang sukses.

Karena $Var[X] = 0,25E[X]$ maka diperoleh $10p(1 - p) = 0,25 \cdot 10p$. Nilai p yang memenuhi adalah $p = 0,75$.

Distribusi Poisson: Digunakan untuk menghitung probabilitas jumlah kejadian dalam interval tetap, dengan rata-rata kejadian λ . Formula probabilitasnya adalah:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Dengan $E[X] = \lambda$ dan $V(X) = \lambda$.

Contoh : Jumlah kejadian dalam sebulan dapat dimodelkan dengan distribusi Poisson dengan Tingkat rata-rata $\lambda = 2$ jika kita membuat asumsi bagaimana kejadian itu terjadi. Kita dapat mendiskusikan bagaimana distribusi Poisson bekerja dengan baik untuk masalah ini. Berikut diberikan peluang, rata-rata dan variansinya. Jika X merupakan jumlah kecelakaan dalam sebulan.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{2^0 e^{-2}}{0!} \approx 0.13533 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \approx 0.27067 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \approx 0.27067 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \quad \text{dan} \quad V(X) = 2 \end{aligned}$$

Distribusi Normal: Merupakan distribusi kontinu yang berbentuk lonceng dengan rata-rata μ dan deviasi standar σ (6). Probabilitas didefinisikan oleh fungsi kepadatan probabilitas normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribusi Eksponensial: Digunakan untuk model waktu antara kejadian dalam proses Poisson dengan parameter λ (7). Fungsi kepadatan probabilitasnya adalah:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ untuk } x \geq 0$$

DAFTAR PUSTAKA

- Baldi P. Probability. In: Baldi P, editor. Probability: An Introduction Through Theory and Exercises [Internet]. Cham: Springer International Publishing; 2023 [cited 2024 Aug 7]. p. 41–114. Available from: https://doi.org/10.1007/978-3-031-38492-9_2
- Bertsekas DP, Tsitsiklis JN. Introduction To Probability. 2nd edition. Belmont: Athena Scientific; 2008. 528 p.
- Jaynes ET. Probability Theory: The Logic of Science. Annotated edition. Bretthorst GL, editor. Cambridge, UK ; New York, NY: Cambridge University Press; 2003. 753 p.
- Udemy [Internet]. [cited 2024 Aug 7]. Introduction to Probability and Statistics. Available from: <https://www.udemy.com/course/introduction-to-probability-and-statistics-o/>.
- Statistics Laminare Reference Chart: Parameters, Variables, Intervals, Proportions (Quickstudy: Academic): John Mijares Ph.D.: 8580001068756: Amazon.com: Books [Internet]. [cited 2024 Aug 7]. Available from: <https://www.amazon.com/Statistics-Laminare-Referen>
- Rumsey DJ. Statistics For Dummies. 2nd edition. Hoboken, NJ: For Dummies; 2016. 416 p.
- Frost J. Introduction to Statistics: An Intuitive Guide for Analyzing Data and Unlocking Discoveries. Statistics By Jim Publishing; 2020. 255 p.

BAB 3

HARAPAN MATEMATIK

Oleh Ahmad Fajri S

3.1 Pendahuluan

Harapan matematik atau seringkali disebut nilai harapan dari suatu peubah acak merupakan konsep dasar dalam probabilitas dan statistik yang mempunyai penerapan pada berbagai bidang seperti ekonomi dan keuangan, industri dan manufaktur, aktuaria, biologi dan kesehatan serta manajemen risiko. Konsep ini memberikan gambaran terhadap rata-rata nilai yang diharapkan dari semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan acak (Ross, 2014).

Pada bab ini, kita akan mempelajari definisi harapan matematik, sifat-sifat harapan matematik, harapan matematik fungsi peubah acak, dan contoh penerapan harapan matematik. Kita akan melihat bagaimana harapan matematik dapat digunakan untuk menghitung rata-rata dalam konteks probabilitas diskret dan kontinu serta bagaimana konsep ini diaplikasikan dalam berbagai masalah nyata. Tujuan dari bab ini adalah untuk:

1. Memperkenalkan definisi harapan matematik dari suatu peubah acak.
2. Menjelaskan sifat-sifat harapan matematik.
3. Mempelajari harapan matematik dalam konteks peubah acak diskret dan kontinu khusus.
4. Menerapkan konsep harapan matematik dalam berbagai masalah nyata.

3.2 Harapan Matematik dari Suatu Peubah Acak

3.2.1 Peubah Acak Diskret

Definisi 1. Jika X merupakan peubah acak diskret dengan himpunan semua kemungkinan nilai X adalah A dan memiliki fungsi massa peluang $p_X(x)$, maka harapan matematik dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{x \in A} x p_X(x)$$

jika jumlah di atas konvergen (Ghahramani, 2018). Dengan kata lain, harapan matematik dari X adalah rata-rata terboboti dari kemungkinan nilai-nilai X dimana setiap kemungkinan nilai X diberi bobot berdasarkan peluangnya masing-masing (Ross, 2014). Harapan matematik dari suatu peubah acak X juga dinotasikan dengan $E[X]$, EX , μ_X atau μ (Ghahramani, 2018).

Contoh 1

Misalkan kita melakukan suatu percobaan melempar tiga mata uang yang seimbang dimana X menyatakan banyaknya sisi belakang yang muncul. Tentukan harapan matematik dari X !

Solusi:

Kemungkinan nilai-nilai dari X adalah $A = \{0, 1, 2, 3\}$ dan fungsi massa peluang dari X diberikan oleh

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0 \\ \frac{3}{8}, & x = 1 \\ \frac{3}{8}, & x = 2 \\ \frac{1}{8}, & x = 3 \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 1, maka harapan matematik dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^3 x p_X(x) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) + 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Contoh 2

Misalkan kita melakukan suatu percobaan mengambil sebuah kelereng di dalam suatu kotak. Kotak tersebut berisi 6 buah kelereng yang terdiri dari 3 buah kelereng dengan label nomor 1, 2 buah kelereng dengan label 2 dan 1 buah kelereng dengan label nomor 3. Tentukan harapan matematik dari X dimana X menyatakan label nomor yang terambil!

Solusi:

Kemungkinan nilai-nilai dari X adalah $A = \{1, 2, 3\}$ dan fungsi massa peluang dari X diberikan oleh

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{3}, & x = 2 \\ \frac{1}{6}, & x = 3 \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 1, maka harapan matematik dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^3 x p_X(x) = 1 \cdot p_X(1) + 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

3.2.2 Peubah Acak Kontinu

Definisi 2. Jika X merupakan peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang $f_X(x)$, maka harapan matematik dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

jika jumlah di atas konvergen (Ghahramani, 2018). Harapan matematik dari suatu peubah acak X juga dinotasikan dengan $E[X]$, EX , μ_X atau μ . (Ghahramani, 2018).

Contoh 3

Misalkan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{jika } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Tentukan harapan matematik dari X !

Solusi

Berdasarkan Definisi 2, maka harapan matematik dari X adalah

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Contoh 4

Misalkan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2 - x) & \text{jika } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Tentukan harapan matematik dari X !

Solusi

Berdasarkan Definisi 2, maka harapan matematik dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_1^2 x f_X(x) dx = \int_1^2 x \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - x) dx \\ &= \int_1^2 \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 dx = \left. \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 \right|_1^2 = \frac{107}{24}. \end{aligned}$$

3.3 Sifat-sifat Harapan Matematik

Misalkan kita mempertimbangkan suatu fungsi dari suatu peubah acak X yaitu $Y = g(X)$. Karena Y merupakan suatu peubah acak, kita dapat menentukan harapan matematiknya dengan terlebih dahulu menemukan sebaran Y . Namun berdasarkan teorema berikut, kita dapat menggunakan sebaran X untuk menentukan harapan matematik dari Y .

Teorema 1. Misalkan X merupakan peubah acak dan $Y = g(X)$ untuk fungsi real g .

1. Misalkan X merupakan peubah acak diskret dengan himpunan semua kemungkinan nilai X adalah A dan memiliki fungsi massa peluang $p_X(x)$, maka harapan matematik dari Y adalah

$$E(Y) = \sum_{x \in A} g(x) p(x).$$

asalkan jumlah di atas konvergen.

2. Misalkan X merupakan peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang $f_X(x)$, maka harapan matematik dari Y adalah

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

asalkan jumlah di atas konvergen. (Hogg, 2019).

Contoh 5

Berdasarkan Contoh 1, tentukan harapan matematik dari X^2 !

Solusi

Misalkan $Y = X^2$. Berdasarkan Teorema 1 huruf a, maka harapan matematik dari Y adalah

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{x=0}^3 x^2 p_X(x) \\ &= 0^2 \cdot p_X(0) + 1^2 \cdot p_X(1) + 2^2 \cdot p_X(2) + 3^2 \cdot p_X(3) \\ &= 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3. \end{aligned}$$

Contoh 6

Berdasarkan Contoh 3, tentukan harapan matematik dari X^3 !

Solusi

Misalkan $Y = X^3$. Berdasarkan Teorema 1 huruf b, maka harapan matematik dari Y adalah

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^1 x^3 f_X(x) dx = \int_0^1 x^3 \cdot 3x^2 dx = \int_0^1 3x^5 dx = \frac{3}{6} x^6 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Teorema 2. Misalkan $g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X)$ merupakan fungsi real dari suatu peubah acak X . Misalkan pula harapan matematik dari $g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X)$ ada. Maka untuk sebarang konstanta real $c_1, c_2, \dots, c_n$ harapan matematik dari $c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X) + \dots + c_n g_n(X)$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} &E(c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X) + \dots + c_n g_n(X)) \\ &= c_1 E(g_1(X)) + c_2 E(g_2(X)) + \dots + c_n E(g_n(X)). \end{aligned}$$

Lebih lanjut, Teorema 2 mengimplikasikan jika a dan b adalah sebarang konstanta bilangan real, maka

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

(Ghahramani, 2018).

Contoh 7

Misalkan X merupakan peubah acak diskret dengan fungsi massa peluang

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{jika } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Tentukan harapan matematik dari $3X + 2X^2$!

Solusi

Berdasarkan Teorema 2, maka harapan matematik dari $3X + 2X^2$ adalah

$$\begin{aligned} E(3X + 2X^2) &= 3E(X) + 2E(X^2) \\ &= 3 \sum_{x=1}^3 x \cdot p_X(x) + 2 \sum_{x=1}^3 x^2 p_X(x) \\ &= 3 \sum_{x=1}^3 x \cdot \frac{x}{4} + 2 \sum_{x=1}^3 x^2 \cdot \frac{x}{4} = \frac{57}{2}. \end{aligned}$$

Contoh 8

Misalkan X merupakan peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{jika } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Tentukan harapan matematik dari $4X - 3X^2 + 2$!

Solusi

Berdasarkan Teorema 2, maka harapan matematik dari $4X - 3X^2 + 2$ adalah

$$\begin{aligned} E(4X - 3X^2 + 2) &= 4E(X) - 3E(X^2) + E(2) \\ &= 4 \int_0^1 x \cdot (3 - x) dx - 3 \int_0^1 x^2 \cdot (3 - x) dx + 2 \\ &= \frac{53}{12}. \end{aligned}$$

3.4 Harapan Matematik Peubah Acak Khusus

3.4.1 Peubah Acak Diskret Khusus

1. Peubah Acak Bernoulli

Misalkan X merupakan peubah acak Bernoulli dengan parameter p , maka harapan matematik dari X adalah

$$E(X) = \sum_{x=0}^1 x p_X(x) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Jadi, $E(X) = p$ menunjukkan bahwa jumlah keberhasilan yang diharapkan dalam satu kali percobaan adalah peluang bahwa percobaan tersebut sukses. (Ross, 2014)

Contoh 9

Jika dalam pelemparan sebuah dadu yang seimbang, kejadian diperolehnya angka 1 atau 3 disebut sukses dan peristiwa diperolehnya angka 2, 4, 5 atau 6 disebut gagal, maka

$$X = \begin{cases} 1 & \text{jika 1 atau 3} \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases}$$

adalah peubah acak Bernoulli dengan parameter $p = \frac{1}{3}$.
Tentukan harapan matematik dari X !

Solusi

$$E(X) = \sum_{x=0}^1 x p_X(x) = 0 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Peubah Acak Binomial

Misalkan X merupakan peubah acak Binomial dengan parameter n dan p , maka harapan matematik dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^n x p_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n \frac{n!}{(n-x)! (x-1)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-x)! (x-1)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} \\ &= np. \end{aligned}$$

Jadi, $E(X) = np$ menunjukkan bahwa jumlah keberhasilan yang diharapkan dalam n kali percobaan yang saling bebas

adalah n dikalikan dengan peluang bahwa suatu percobaan tersebut sukses. (Ross, 2014).

Contoh 10

Sebuah kota berpenduduk 500.000 jiwa terkena penyakit menular. Jika peluang seseorang tertular adalah 0,05, berapakah harapan matematik banyaknya orang yang tertular?

Solusi

Dengan mengasumsikan bahwa orang-orang terinfeksi secara independen satu sama lain, banyaknya orang yang akan tertular adalah peubah acak binomial dengan parameter $n = 500.000$ dan $p = 0,05$. Oleh karena itu, harapan matematik banyaknya orang yang tertular adalah $500.000 \times 0,05 = 25.000$.

3. Peubah Acak Geometrik

Misalkan X merupakan peubah acak Geometrik dengan parameter p , maka harapan matematik dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p(1-p)^{x-1} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^x = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1-p}{[1-(1-p)]^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Jadi, $E(X) = \frac{1}{p}$ menunjukkan bahwa untuk mendapatkan keberhasilan pertama kali, maka jumlah percobaan saling bebas yang diharapkan adalah sama dengan kebalikan dari peluang bahwa setiap percobaan menghasilkan keberhasilan. (Ghahramani, 2018).

Contoh 11

Dari setumpuk kartu remi yang berjumlah 52 kartu, diambil sebuah kartu secara acak dengan pengembalian. Kartu-kartu tersebut diambil dan dikembalikan secara terus-menerus hingga kartu yang terambil memiliki gambar *King*, *Queen*

atau *Jack*. Berapa nilai harapan matematik dari percobaan di atas?

Solusi

Misalkan X menyatakan banyaknya kartu yang diambil hingga muncul kartu bergambar *King*, *Queen* atau *Jack*. Peubah acak X adalah peubah acak Geometrik dengan parameter $p = \frac{3}{13}$. Oleh karena itu, harapan matematik dari X adalah $E(X) = \frac{13}{3}$.

4. Peubah Acak Poisson

Misalkan X merupakan peubah acak Poisson dengan parameter λ , maka harapan matematik dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

(Ghahramani, 2018).

Contoh 12

Misalkan, secara rata-rata, dalam setiap lima halaman buku terdapat dua kesalahan tipografi. Jika jumlah kesalahan tipografi pada satu halaman buku merupakan peubah acak Poisson, maka berapakah harapan matematik dari jumlah kesalahan suatu halaman?

Solusi

Misalkan X menyatakan banyaknya kesalahan pada halaman tertentu maka X merupakan peubah acak Poisson dengan parameter $\lambda = \frac{2}{5}$. Oleh karena itu, harapan matematik dari X adalah $E(X) = \frac{2}{5}$.

3.4.2 Peubah Acak Kontinu Khusus

1. Peubah Acak Seragam

Misalkan X merupakan peubah acak Seragam pada selang (a, b) , maka harapan matematik dari X adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} (b^2 - a^2) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Dengan kata lain, harapan matematika dari peubah acak Seragam pada selang (a, b) adalah titik tengah dari selang tersebut. (Ghahramani, 2018), (Ross, 2014).

Contoh 13

Seseorang tiba di stasiun kereta setiap hari pada pukul 08.00. Jika sebuah kereta tiba secara acak antara pukul 8:00 dan 08.30, berapa rata-rata waktu yang dihabiskan seseorang tersebut untuk menunggu?

Solusi

Jika kereta api tiba X menit setelah pukul 08.00 maka X adalah peubah acak Seragam pada selang $(0, 30)$. Oleh karena itu, rata-rata waktu yang dihabiskan seseorang tersebut untuk menunggu adalah

$$E(X) = \frac{0+30}{2} = 15 \text{ menit.}$$

2. Peubah Acak Eksponensial

Misalkan X merupakan peubah acak Eksponensial dengan parameter λ , maka harapan matematik dari X adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x (\lambda e^{-\lambda x}) dx.$$

Persamaan di atas diselesaikan dengan menggunakan integral parsial dimana $u = x$ dan $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$ sehingga

$$E(X) = -xe^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = 0 - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

(Ghahramani, 2018).

Contoh 14

Sebuah sistem komputer memiliki waktu antar kerusakan yang mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata 20 jam. Hitung harapan matematik dari waktu hingga terjadi kerusakan berikutnya.

Solusi

X menyatakan peubah acak Eksponensial yang mewakili waktu antar kerusakan. Karena rata-rata waktu antar kerusakan sebuah sistem komputer adalah 20 jam maka

$$\lambda = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ per jam.}$$

Harapan matematik dari waktu hingga terjadi kerusakan berikutnya adalah sama dengan rata-rata waktu yaitu

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ jam.}$$

Harapan matematik dari waktu hingga terjadi kerusakan berikutnya pada sistem komputer tersebut adalah 20 jam.

3. Peubah Acak Gamma

Misalkan X merupakan peubah acak Gamma dengan parameter (r, λ) . Untuk menentukan harapan matematik dari X , ditinjau untuk semua $n \geq 0$,

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{r-1}}{\Gamma(r)} dx = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty x^{n+r-1} e^{-\lambda x} dx.$$

Misalkan $t = \lambda x$ maka $dt = \lambda dx$ sehingga

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{t^{n+r-1}}{\lambda^{n+r-1}} e^{-t} \frac{1}{\lambda} dt \\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r) \lambda^{n+r}} \int_0^\infty t^{n+r-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r) \lambda^n}. \end{aligned}$$

Untuk $n = 1$, maka harapan matematik dari X adalah

$$E(X) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r) \lambda} = \frac{r \Gamma(r)}{\lambda \Gamma(r)} = \frac{r}{\lambda}.$$

(Ghahramani, 2018).

Contoh 15

Misalkan suatu naskah ujian terdiri atas 100 soal dan lama waktu yang diperlukan untuk menjawab setiap soal adalah peubah acak eksponensial yang saling bebas dengan harapan matematik $\frac{1}{2}$ menit. Tentukan harapan matematik dari lama waktu yang diperlukan untuk mengerjakan naskah ujian tersebut.

Solusi

Karena lama waktu untuk menjawab setiap soal mengikuti peubah acak Eksponensial yang saling bebas dengan harapan matematik $\frac{1}{2}$ menit maka diperoleh parameter $\lambda = 2$ menit. Misalkan X adalah waktu untuk mengerjakan naskah ujian maka X merupakan peubah acak Gamma dengan parameter $(100, 2)$ karena peubah acak Gamma merupakan penjumlahan dari peubah acak Eksponensial yang saling bebas. Jadi, harapan matematik dari lama waktu yang diperlukan untuk mengerjakan naskah ujian tersebut adalah $E(X) = \frac{100}{2} = 50$ menit.

4. Peubah Acak Normal

Misalkan X merupakan peubah acak Normal dengan parameter (μ, σ^2) , maka harapan matematik dari X adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx.$$

Dengan menuliskan x sebagai $(x - \mu) + \mu$ maka

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx.$$

Misalkan $y = x - \mu$ maka

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \mu f_X(x) dx$$

dimana $f_X(x)$ adalah fungsi kepekatan peluang peubah acak Normal. Secara simetri, integral pertama haruslah nol sebab memiliki fungsi ganjil sehingga

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu f_X(x) dx = \mu.$$

(Ghahramani, 2018).

Contoh 16

Sebuah perusahaan farmasi memproduksi kapsul vitamin A. Berat setiap kapsul vitamin tersebut diasumsikan mengikuti

sebaran Normal dengan rata-rata 100 mg dan simpangan baku 2 mg.

- a. Berapakah rata-rata berat kapsul yang diproduksi oleh perusahaan tersebut?
- b. Berapakah rata-rata berat total dari 50 kapsul?

Solusi

- a. Misalkan X menyatakan berat setiap kapsul vitamin A. X merupakan peubah acak Normal dengan parameter $(100, 2^2)$. Rata-rata berat kapsul yang diproduksi oleh perusahaan tersebut adalah $E(X) = \mu = 100$ mg.
- b. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_{50}$ menyatakan berat dari 50 kapsul vitamin A yang terpilih secara acak, maka total berat 50 kapsul adalah

$$T = X_1 + X_2 + \dots + X_{50}.$$

Harapan matematik dari total berat 50 kapsul vitamin A adalah

$$\begin{aligned} E(T) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_{50}) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{50}) \\ &= 50 E(X) = 50 \cdot 100 = 5000 \text{ mg.} \end{aligned}$$

3.5 Penerapan Harapan Matematik

Harapan matematik adalah konsep penting dalam teori probabilitas dan statistik yang banyak diterapkan dalam berbagai bidang. Berikut adalah beberapa contoh penerapan harapan matematik dalam berbagai bidang:

1. Ekonomi dan Keuangan

Harapan matematik sering kali digunakan di dalam bidang ekonomi dan keuangan, misalnya dalam investasi. Harapan matematik digunakan untuk menghitung nilai ekspektasi dari keuntungan investasi. Contohnya, dalam portofolio investasi, harapan matematik dapat membantu menentukan investasi mana yang memiliki nilai ekspektasi keuntungan tertinggi dengan mempertimbangkan peluang berbagai hasil (Bodie, 2018).

Contoh 17

Seorang investor memiliki dua opsi investasi yaitu:

Investasi A dengan kondisi kemungkinan 40% memperoleh keuntungan sebesar Rp 60 juta dan kemungkinan 60% mengalami kerugian sebesar Rp 15 juta.

Investasi B dengan kondisi kemungkinan 70% memperoleh keuntungan sebesar Rp 25 juta dan kemungkinan 30% mengalami kerugian sebesar Rp 5 juta.

Tentukan harapan matematik dari keuntungan untuk masing-masing investasi dan investasi mana yang lebih baik berdasarkan nilai harapan matematiknya.

Solusi

Jika X menyatakan kejadian investasi A, maka fungsi massa peluangnya adalah

$$p_X(x) = \begin{cases} 0,4 & \text{jika } x = 60 \text{ juta} \\ 0,6 & \text{jika } x = -15 \text{ juta} \end{cases}$$

Harapan matematik untuk investasi A adalah

$$E(X) = (60 \times 40\%) + (-15 \times 60\%) = 24 - 9 = \text{Rp } 13 \text{ juta.}$$

Jika Y menyatakan kejadian investasi B, maka fungsi massa peluangnya adalah

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0,7 & \text{jika } y = 25 \text{ juta} \\ 0,3 & \text{jika } y = -5 \text{ juta} \end{cases}$$

Harapan matematik untuk investasi B adalah

$$E(B) = (25 \times 70\%) + (-5 \times 30\%) = 17,5 - 1,5 = \text{Rp } 16 \text{ juta.}$$

Berdasarkan harapan matematiknya, maka Investasi B lebih baik karena memiliki nilai harapan matematik dengan keuntungan yang lebih tinggi yaitu Rp 16 juta dibandingkan dengan Rp 13 juta untuk Investasi A.

2. Industri dan Manufaktur

Harapan matematik sering kali digunakan di dalam bidang industri dan manufaktur, misalnya dalam pengendalian kualitas. Dalam produksi massal, harapan matematik digunakan untuk memperkirakan jumlah produk cacat berdasarkan peluang kesalahan dalam proses produksi. Ini membantu dalam pengambilan keputusan tentang perbaikan proses dan pengendalian kualitas (Montgomery, 2019).

Contoh 18

Sebuah pabrik memproduksi komponen elektronik. Dalam proses produksi, ada kemungkinan bahwa sebuah komponen akan cacat sebesar 5% dan sebuah komponen akan berfungsi dengan baik sebesar 95%. Setiap komponen yang cacat akan menimbulkan biaya tambahan sebesar Rp 50.000 untuk perbaikan sedangkan komponen yang berfungsi dengan baik tidak menimbulkan biaya tambahan. Jika pabrik memproduksi 5.000 komponen, hitunglah harapan matematik dari total biaya tambahan yang diakibatkan oleh komponen cacat.

Solusi

- a. Jika X menyatakan biaya tambahan untuk sebuah komponen elektronik, maka fungsi massa peluangnya adalah

$$p_X(x) = \begin{cases} 0,05 & \text{jika } x = 50.000 \\ 0,95 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$$

Harapan matematik dari biaya tambahan untuk sebuah komponen elektronik adalah

$$E(X) = (50.000 \times 0,05) + (0 \times 0,95) = \text{Rp. } 2.500.$$

- b. Jika $X_1, X_2, \dots, X_{5.000}$ menyatakan biaya tambahan dari 5.000 komponen elektronik yang dipilih secara acak, maka total biaya tambahan dari 5.000 komponen elektronik adalah

$$T = X_1 + X_2 + \dots + X_{5.000}.$$

Harapan matematik dari biaya tambahan untuk 5.000 komponen elektronik adalah

$$\begin{aligned} E(T) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_{5.000}) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{5.000}) \\ &= 5.000 E(X) = 5.000 \times 2.500 = \text{Rp. } 12.500.000. \end{aligned}$$

Harapan matematik dari total biaya tambahan yang diakibatkan oleh komponen cacat untuk produksi 5.000 komponen adalah Rp. 12.500.000. Ini berarti secara rata-rata, pabrik harus mengantisipasi biaya tambahan sebesar Rp 12.500.000 untuk menangani komponen cacat dari produksi tersebut.

3. Aktuaria

Harapan matematik sering kali digunakan di dalam bidang aktuaria, misalnya dalam asuransi. Perusahaan asuransi menggunakan harapan matematik untuk menetapkan premi asuransi berdasarkan ekspektasi kerugian. Ini melibatkan menghitung nilai ekspektasi dari kerugian yang diharapkan terjadi dan menyesuaikan premi agar perusahaan tetap menguntungkan (Dickson, 2013).

Contoh 19

Seorang aktuaris sedang menghitung premi tahunan yang harus dibayarkan oleh pemegang polis untuk sebuah asuransi jiwa berjangka. Asuransi ini memberikan santunan sebesar Rp 700.000.000 jika pemegang polis meninggal dalam tahun pertama masa asuransi. Peluang kematian pemegang polis dalam satu tahun adalah 1%. Hitunglah harapan matematik dari pembayaran santunan oleh perusahaan asuransi dalam satu tahun.

Solusi

Jika X menyatakan pembayaran santunan oleh perusahaan asuransi dalam satu tahun, maka fungsi massa peluangnya adalah

$$p_X(x) = \begin{cases} 0,01 & \text{jika } x = 700 \text{ juta} \\ 0,99 & \text{jika } x = 0 \text{ juta} \end{cases}$$

Harapan matematik dari pembayaran santunan oleh perusahaan asuransi dalam satu tahun adalah

$$E(X) = (0,01 \times 700) + (0,99 \times 0) = \text{Rp. 7 juta.}$$

Jadi, harapan matematik dari pembayaran santunan oleh perusahaan asuransi adalah Rp. 7 juta.

4. Biologi dan Kesehatan

Harapan matematik sering kali digunakan di dalam bidang biologi dan kesehatan, misalnya dalam epidemiologi. Harapan matematik digunakan dalam model penyebaran penyakit untuk memperkirakan jumlah rata-rata individu yang mungkin terinfeksi dalam populasi tertentu, berdasarkan peluang transmisi dan faktor-faktor lainnya (Giesecke, 2017).

Contoh 20

Misalkan dalam sebuah populasi terdapat risiko 3% terkena penyakit berbahaya dalam satu tahun. Jika populasi tersebut terdiri dari 100.000 orang, hitunglah harapan matematik dari jumlah orang yang akan terkena penyakit tersebut dalam satu tahun.

Solusi

Jika X menyatakan jumlah orang yang terkena penyakit berbahaya dalam satu tahun, maka fungsi massa peluangnya adalah

$$p_x(x) = \begin{cases} 0,03 & \text{jika } x = 100.000 \\ 0,97 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$$

Harapan matematik dari jumlah orang yang terkena penyakit berbahaya dalam satu tahun adalah

$$E(X) = (0,03 \times 100.000) + (0,97 \times 0) = 3.000 \text{ orang.}$$

Harapan matematik menunjukkan bahwa diperkirakan 3.000 orang dalam populasi tersebut akan terkena penyakit berbahaya satu tahun.

5. Manajemen Risiko

Harapan matematik sering kali digunakan di dalam bidang manajemen risiko. Harapan matematik digunakan untuk mengevaluasi risiko dengan menghitung ekspektasi kerugian potensial. Ini membantu organisasi dalam membuat keputusan terkait mitigasi risiko, seperti asuransi, cadangan modal, atau strategi diversifikasi (Khan, 2013).

Contoh 21

Sebuah perusahaan asuransi ingin mengevaluasi risiko kebakaran pada gedung komersial. Berdasarkan data historis, waktu antara terjadinya kebakaran (dalam tahun) mengikuti sebaran eksponensial dengan rata-rata 10 tahun. Perusahaan asuransi ingin menghitung harapan matematik dari waktu hingga terjadi kebakaran berikutnya.

Solusi

X menyatakan peubah acak Eksponensial yang mewakili waktu antar terjadinya kebakaran. Karena rata-rata waktu antar kebakaran adalah 10 tahun maka

$$\lambda = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ per tahun.}$$

Harapan matematik dari waktu hingga terjadi kebakaran berikutnya adalah

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ tahun.}$$

Harapan matematik dari waktu hingga terjadi kebakaran berikutnya adalah 10 tahun.

Dengan menggunakan harapan matematik, perusahaan asuransi dapat memperkirakan bahwa secara rata-rata kebakaran berikutnya di gedung tersebut diperkirakan terjadi dalam waktu 10 tahun. Hal ini memberikan informasi penting untuk pengelolaan risiko.

DAFTAR PUSTAKA

- Bodie, Z., Kane, A. and Marcus, A.J., 2018. *Investments*. 11th ed. New York: McGraw-Hill Education.
- Dickson, D.C.M., Hardy, M.R. and Waters, H.R., 2013. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ghahramani, S., 2018. *Fundamentals of Probability, with Stochastic Processes*. 4th ed. London: Pearson.
- Giesecke, J., 2017. *Modern Infectious Disease Epidemiology*. 3rd ed. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Hogg, R.V., McKean, J. and Craig, A.T., 2019. *Introduction to Mathematical Statistics*. 8th ed. London: Pearson.
- Khan, F.I. and Abbasi, T., 2013. *Introduction to Safety and Risk Engineering*. London: Elsevier.
- Montgomery, D.C., 2019. *Introduction to Statistical Quality Control*. 8th ed. Hoboken, NJ: Wiley.
- Ross, S.M., 2014. *Introduction to Probability Models*. 11th ed. Amsterdam: Academic Press.

BAB 4

DISTRIBUSI PELUANG DISKRET

Oleh Riza Sawitri

4.1 Pendahuluan

Dalam matematika, distribusi peluang merupakan suatu konsep yang sangat penting dalam menentukan abilitas suatu kejadian atau hasil dari suatu percobaan. Distribusi peluang diskret adalah salah satu jenis distribusi peluang yang memiliki nilai-nilai diskret atau terpisah. Mari kita jelaskan konsep ini lebih mendalam.

Distribusi peluang dapat didefinisikan sebagai suatu fungsi yang menggambarkan semua kemungkinan nilai yang dapat diambil oleh suatu variabel acak, beserta dengan probabilitasnya masing-masing. Dalam konteks distribusi peluang diskret, nilai-nilai yang mungkin hanya dapat berupa bilangan bulat atau nilai-nilai yang terbatas.

Distribusi peluang diskret adalah suatu distribusi probabilitas di mana variabel acak hanya dapat mengambil nilai-nilai diskret. Misalnya, distribusi Poisson atau distribusi binomial merupakan contoh dari distribusi peluang diskret.

Perbedaan utama antara distribusi peluang diskret dan kontinu terletak pada sifat nilai yang mungkin diambil oleh variabel acaknya. Distribusi peluang diskret memiliki nilai-nilai yang terbatas dan terpisah, sementara distribusi peluang kontinu memiliki nilai-nilai yang kontinu dan tidak terbatas.

Pemahaman yang baik mengenai distribusi peluang diskret sangat penting dalam analisis statistik. Dengan mengetahui distribusi peluang yang tepat, kita dapat memprediksi hasil dari suatu percobaan dengan lebih akurat dan mengambil keputusan berdasarkan informasi yang relevan.

Dengan pemahaman yang kuat mengenai konsep distribusi peluang diskret, kita dapat memberikan interpretasi yang benar terhadap data dan mengambil keputusan yang lebih tepat berdasarkan probabilitas yang terkait. Semakin dalam pemahaman

kita terhadap distribusi peluang diskret, semakin baik pula kita dalam menganalisis dan memanfaatkannya dalam berbagai bidang, seperti riset ilmiah, bisnis, dan pengambilan keputusan.

Beberapa distribusi peubah acak diskret yang akan dibahas adalah distribusi bernoulli, distribusi binomial, distribusi geometri, distribusi binomial negatif, distribusi hipergeometrik, dan distribusi poisson.

4.2 Distribusi Bernoulli

Distribusi Bernoulli berasal dari percobaan Bernoulli, yang merupakan percobaan acak yang hanya memiliki dua hasil yang tidak dapat terjadi secara bersamaan. Contoh umum dari percobaan Bernoulli adalah pelemparan mata uang logam, di mana hasilnya hanya angka atau gambar. Setiap kejadian dalam percobaan Bernoulli memiliki peluang yang dapat dihitung. Misalnya, jika peluang sukses adalah p , maka peluang gagal adalah $1 - p$.

Variabel acak X yang mengikuti distribusi Bernoulli dapat memiliki nilai 0 atau 1, di mana:

$X = 0$ jika kejadian gagal terjadi.

$X = 1$ jika kejadian sukses terjadi.

Fungsi peluang distribusi Bernoulli dapat dituliskan sebagai:

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$$

Jika $x = 0$, maka $P(X = 0) = (1 - p)$

Jika $x = 1$, maka $P(X = 1) = p$

Kita dapat menuliskan variabel acak Bernoulli dengan $X \sim BER(p)$.

Jika X adalah variabel random Bernoulli dengan parameter p , maka:

Rata-rata (Mean) yaitu:

$$\mu_x = p$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \sum_{x=0}^1 xf(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 xp^x(1 - p)^{1-x} \\ &= 0 \cdot p^0(1 - p)^{1-0} + 1 \cdot p^1(1 - p)^{1-1} \\ &= 0 + p \\ &= p.\end{aligned}$$

Untuk **varians X** , yakni:

$$\sigma_X^2 = p(1 - p)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \sum_0^1 (x - \mu_x)^2 f(x) \\ &= \sum_0^1 (x - p)^2 p^x (1 - p)^{1-x} \\ &= (0 - p)^2 p^0 (1 - p)^{1-0} + (0 - p)^2 p^0 (1 - p)^{1-0} \\ &= p^2 (1 - p) + p(1 - p)^2 \\ &= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1 - p).\end{aligned}$$

Kita dapat menentukan fungsi pembangkit momen dari distribusi Bernoulli, yaitu:

$$\begin{aligned}M(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \sum_{x=0}^1 e^{tX} p^x (1 - p)^{1-x} \\ &= (1 - P) + e^t p.\end{aligned}$$

4.3 Distribusi Binomial

Suatu eksperimen dikatakan sebagai eksperimen binomial jika dipenuhi sebagai berikut:

1. Eksperimen merupakan gabungan dari n trial identik yang saling bebas.
2. Setiap trial hanya mempunyai 2 hasil, yang biasanya disebut sukses (S) dan gagal (G).
3. Peluang mendapatkan sukses dalam setiap trial adalah $p = P(S)$ sedangkan peluang mendapatkan gagal adalah $q = P(G) = 1 - p$

Eksperimen binomial dapat diamati melalui percobaan pelambungan uang logam. Hamid melambungkan sekeping uang logam sebanyak 4 kali. Pada setiap pelemparan dilakukan pencatatan terhadap sisi angka. Eksperimen ini merupakan eksperimen binomial dengan alasan sebagai berikut:

1. Eksperimen dilakukan secara berulang-ulang yaitu pelemparan uang logam diulang sebanyak 4 kali.
2. Eksperimen bersifat saling bebas.

3. Trial mempunyai dua macam 2 hasil yaitu keluar sisi angka (sukses) dan keluar sisi gambar (gagal).
4. Karena uang logam dilambungkan kembali, maka peluang sisi angka dalam setiap trial selalu sama yaitu $\frac{1}{2}$.

Yang menjadi perhatian dalam suatu eksperimen binomial adalah menentukan berapa peluang mendapatkan suatu harga X yaitu harga peubah acak yang menyatakan banyaknya sukses dalam eksperimen binomial. Peubah acak yang ditentukan oleh eksperimen binomial disebut peubah acak binomial, sedangkan distribusi dari peubah acak tersebut biasa dikenal sebagai distribusi peluang binomial.

Sebagai contoh ilustrasi keluarga Sony yang akan merencanakan mempunyai 3 anak seperti terlihat pada Tabel 4.1. Setiap kelahiran anak perempuan dikatakan “sukses” dan setiap kelahiran anak laki-laki dikatakan “gagal”. Dengan demikian banyaknya anak perempuan dipandang sebagai sebuah peubah acak X yang mengambil bilangan dari 0 sampai dengan 3. Peubah acak X yang menyatakan banyaknya keberhasilan/kesuksesan dalam percobaan disebut peubah acak binomial.

Tabel 4.1. Hasil Percobaan Keluarga Sony

Ruang Contoh	Peubah X	Probabilitas
LLL	0	$1/8$
LLP	1	$1/8$
LPL	1	$1/8$
PLL	1	$1/8$
LPP	2	$1/8$
PLP	2	$1/8$
PPL	2	$1/8$
PPP	3	$1/8$

Sumber: (Wibisono,2009)

Selanjutnya kita akan mencari rumusan yang lebih umum dari distribusi binomial. Jika kelahiran anak perempuan dinyatakan dengan x , maka probabilitas kelahiran anak perempuan mempunyai nilai tetap yaitu $\frac{1}{2}$. Probabilitas kelahiran anak perempuan dianggap sukses adalah x dengan probabilitas p dan sebaliknya setiap kegagalan yaitu kelahiran anak laki-laki adalah $(n-x)$ dengan probabilitas $p = 1 - p$. Jadi, probabilitas untuk urutan tertentu dinyatakan $p^x \cdot q^{n-x}$.

Tersisa untuk menghitung banyaknya kombinasi yang mempunyai kesuksesan x dan kegagalan $(n-x)$. bilangan ini tidak lain adalah suatu bentuk kombinasi. Kemudian banyak kombinasi ini dikalikan dengan $p^x \cdot q^{n-x}$ untuk mendapatkan rumus umum distribusi binomial. Dapat disimpulkan jika suatu percobaan binomial mempunyai probabilitas kesuksesan p dan probabilitas kegagalan q , maka distribusi probabilitas peubah acak X yaitu banyaknya kesuksesan dalam n percobaan yang bebas dinyatakan:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

Dengan $x = 0, 1, 2, \dots, n$.

Bila suatu variabel acak X adalah variabel acak distribusi binomial, maka dapat dituliskan $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Contoh

Keluarga Sony ingin merencanakan 3 orang anak. Jika X menyatakan banyaknya kelahiran anak perempuan, maka probabilitas kelahiran 2 anak perempuan adalah:

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} \\ &= \frac{3!}{2!(3-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ &= \frac{3!}{2!(3-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Mean, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial dapat dihitung sebagai berikut:

$$\text{Mean : } \mu_x = p$$

$$\text{Varians: } \sigma_x^2 = npq$$

Fungsi Pembangkit Momen: $M(t) = [q + pe^t]^n$

4.4 Distribusi Geometrik

Distribusi geometrik adalah salah satu distribusi probabilitas diskret yang menggambarkan jumlah percobaan yang diperlukan hingga pertama kali terjadi keberhasilan dalam serangkaian percobaan Bernoulli yang identik dan independen. Dalam konteks ini, setiap percobaan hanya memiliki dua kemungkinan hasil: sukses atau gagal.

Distribusi peluang geometrik untuk variabel acak X , yang mewakili jumlah percobaan hingga keberhasilan pertama terjadi, diberikan oleh

$$f(x) = P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p$$

Untuk $x = 1, 2, 3, \dots, \infty$ dengan p menunjukkan peluang kesuksesan dalam satu percobaan Bernoulli.

Apabila X mempunyai distribusi Geometrik, kita dapat menyatakan dengan $X \sim GEO(p)$.

Distribusi geometrik sering digunakan dalam situasi di mana kita ingin mengetahui berapa kali kita harus melakukan percobaan sebelum mendapatkan hasil yang diinginkan untuk pertama kalinya.

Contoh

Xendy penjudi bermain roulette di Los Angeles dan terus berjudi, bertaruh dengan jumlah yang sama setiap kali di "Biru", hingga Xendy menang untuk pertama kalinya. Jika peluang "Biru" adalah $\frac{15}{39}$ dan Xendy hanya mempunyai cukup uang untuk 6 percobaan saja. Berapakah kemungkinan Xendy akan menang sebelum dia menghabiskan uang tersebut?

Penyelesaian:

Peluang sukses "Biru" = $p = P(Biru) = \frac{15}{39}$.

Kemungkinan Xendy akan menang sebelum menghabiskan uangnya, yakni:

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) &= 1 - P(X \geq 7) \\ &= 1 - (1 - p)^6 \\ &= 1 - \left(1 - \frac{15}{39}\right)^6 \end{aligned}$$

$$= 1 - 0,054$$

$$= 0,946.$$

Jika X adalah variabel random Geometrik dengan parameter p , maka Mean, varians, dan fungsi pembangkit momen dihitung sebagai berikut:

$$\text{Mean : } \mu_x = \frac{1}{p}$$

$$\text{Varians: } \sigma_X^2 = 1 - \frac{p}{p^2}$$

$$\text{Fungsi Pembangkit Momen: } M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

4.5 Distribusi Binomial Negatif

Distribusi peluang binomial negatif adalah salah satu distribusi probabilitas diskret yang menggambarkan jumlah percobaan yang diperlukan untuk mencapai keberhasilan ke- r (r sukses) dalam serangkaian percobaan Bernoulli yang identik dan independent. Distribusi binomial negatif sering disebut juga sebagai distribusi Pascal.

Distribusi peluang binomial negatif untuk variabel acak X yang mewakili jumlah total percobaan hingga terjadi keberhasilan ke- r , diberikan oleh:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

dengan:

$P(X = k)$ adalah peluang bahwa r sukses terjadi pada percobaan ke- k ;

p adalah peluang keberhasilan pada setiap percobaan;

r adalah jumlah keberhasilan yang diinginkan;

k adalah jumlah total percobaan hingga terjadi r sukses.

Apabila X mempunyai distribusi Binomial Negatif, kita dapat menyatakan dengan $X \sim \text{NBIN}(r, p)$.

Contoh

Seorang pemain basket mempunyai peluang 60% untuk memasukkan bola dalam setiap tembakan yang dia lakukan.

Berapakah peluang bahwa ia membutuhkan tepat 7 kali tembakan untuk mencapai 4 keberhasilan?

Penyelesaian:

$$P(X = 7) = \binom{7-1}{4-1} (0,6)^4 (1 - 0,6)^{7-4}$$

$$P(X = 7) = \binom{6}{3} (0,6)^4 (0,4)^3$$

$$P(X = 7) = \frac{6!}{3!(6-3)!} (0,6)^4 (0,4)^3$$

$$P(X = 7) = 20 \cdot 0,1296 \cdot 0,064$$

$$P(X = 7) = 0,166$$

Jadi, peluang bahwa pemain membutuhkan 7 kali tembakan untuk mencapai 4 kali keberhasilan adalah sekitar 0,166 atau 16,6%.

Untuk distribusi peluang binomial negatif dengan parameter r (jumlah keberhasilan yang diinginkan) dan p (peluang keberhasilan pada setiap percobaan), berikut adalah rumus untuk mean, varians, dan fungsi pembangkit momen yaitu:

$$\text{Mean : } \mu_x = \frac{r}{p}$$

$$\text{Varians: } \sigma_X^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$\text{Fungsi Pembangkit Momen: } M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^r$$

Distribusi binomial negatif adalah generalisasi dari distribusi geometrik. Jika $r = 1$ distribusi binomial negatif menjadi distribusi geometrik, yang menggambarkan jumlah percobaan yang diperlukan untuk mencapai keberhasilan pertama.

4.6 Distribusi Hipergeometrik

Distribusi hipergeometrik adalah salah satu distribusi probabilitas diskret yang digunakan untuk menggambarkan probabilitas mendapatkan sejumlah keberhasilan tertentu dalam serangkaian pengambilan sampel tanpa penggantian (*without replacement*) dari suatu populasi terbatas. Distribusi ini berbeda dari distribusi binomial, di mana pengambilan sampel dilakukan dengan penggantian.

Jika suatu populasi berukuran N terdiri atas k unsur yang diharapkan berhasil dan $(N-k)$ unsur gagal, maka pengambilan n

contoh dari populasi berukuran N , probabilitas mendapatkan x yang diharapkan mengikuti fungsi hipergeometrik.

Di sini semua pengambilan contoh dianggap mempunyai probabilitas terpilih yang sama dan banyaknya kombinasi yang berukuran n dari suatu populasi berukuran N adalah $\binom{N}{n}$. Analog dengan ini adalah untuk memilih x keberhasilan dari k keberhasilan yang tersedia terdapat $\binom{k}{x}$ macam kombinasi. Sedangkan banyaknya kombinasi kegagalan dari $(n-k)$ adalah $\binom{N-k}{n-x}$. Dengan demikian, banyaknya contoh yang memenuhi syarat di antara kombinasi $\binom{N}{n}$ adalah $\binom{N}{n} \binom{N-k}{n-x}$.

Distribusi probabilitas peubah acak X yang menyatakan banyaknya kejadian berhasil yang terpilih adalah jika dari populasi N yang digolongkan ke kelompok berhasil (k) dan kelompok gagal ($N-k$) unsur, dipilih sebanyak n , yaitu:

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

Contoh Distribusi Hipergeometrik

Dari 400 mahasiswa diambil 5 sampel acak tanpa penggantian. Dari 5 mahasiswa tersebut diberi pertanyaan apakah dia telah mengambil mata kuliah Statistika Dasar. Misalkan 50% mahasiswa benar pernah mengambil mata kuliah tersebut. Berapakah probabilitas 3 mahasiswa yang diwawancarai telah mengambil mata kuliah itu?

Penyelesaian:

Kita misalkan X adalah jumlah mahasiswa yang diwawancarai yang telah mengambil mata kuliah Statistika Dasar. Oleh sebab itu, kemungkinan tiga mahasiswa yang diwawancarai telah mengambil mata kuliah tersebut adalah:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{200}{3} \binom{400-200}{5-3}}{\binom{400}{5}}$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{200}{3} \binom{200}{2}}{\binom{400}{5}}$$

$$P(X = 3) = \frac{1.313.400 \cdot 19.900}{83.218.600.080}$$

$$P(X = 3) = 0,3141$$

Distribusi hipergeometrik sering muncul dalam konteks berikut:

1. Menarik kartu dari setumpuk kartu tanpa mengembalikannya, dan menghitung berapa banyak kartu tertentu (misalnya kartu As) yang didapatkan dalam beberapa kali penarikan.
2. Memilih sampel dari suatu kelompok orang untuk melakukan survei, dan menghitung berapa banyak orang dari kategori tertentu yang terdapat dalam sampel.
3. Mengambil bola dari kotak yang berisi bola berwarna berbeda, tanpa mengembalikan bola ke kotak, dan menghitung berapa banyak bola dengan warna tertentu yang terambil.

Berikut adalah rumus untuk mean, varians dari distribusi hipergeometrik yakni:

$$\text{Mean: } \mu = \frac{nk}{N}$$

$$\text{Varians: } \sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1} \right) n \frac{k}{N} \left(1 - \frac{k}{N} \right)$$

4.7 Distribusi Poisson

Distribusi poisson merupakan suatu distribusi untuk peristiwa yang probabilitas terjadinya kecil, dimana kejadian tergantung pada selang waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu dengan hasil pengamatan berupa variabel diskrit dan antar variabel prediktor saling independen. Selang waktu tersebut dapat berupa beberapa saja panjangnya, misalnya semenit, sehari, seminggu, sebulan bahkan setahun. Daerah tertentu yang dimaksudkan dapat berupa suatu garis, suatu luasan, suatu volume, atau mungkin sepotong bahan (Walpole,

2011).

Distribusi Poisson memiliki ciri - ciri sebagai berikut:

1. Banyaknya percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu, tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.
2. Peluang terjadinya satu hasil percobaan selama suatu selang waktu yang singkat sekali atau dalam suatu selang yang kecil. Sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya daerah tersebut dan tidak tergantung pada banyak hasil percobaan yang terjadi diluar selang waktu dan daerah tertentu.
3. Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat tersebut atau dalam daerah yang kecil tersebut diabaikan.(Wibisono, 2009)

Suatu variabel acak X dikatakan berdistribusi Poisson, ditulis dengan $X \sim POI(\lambda)$, jika

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Untuk $x = 0, 1, 2, \dots$ dan $\lambda > 0$.

Jika $X \sim POI(\lambda)$, maka berlaku:

Mean : $\mu_x = \lambda$

Varians: $\sigma_x^2 = \lambda$

Fungsi Pembangkit Momen: $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Contoh Distribusi Poisson

Jumlah kecelakaan lalu lintas per minggu di kota Lein mempunyai distribusi Poisson dengan mean sama dengan 4. Berapakah probabilitasnya tepatnya 3 kecelakaan terjadi dalam 3 minggu?

Penyelesaian:

Rata-rata kecelakaan lalu lintas yakni 4. Jadi, kecelakaan rata-rata ada di 4 minggu adalah $\lambda = 4 \cdot 3 = 12$

Diperoleh untuk probabilitas tepat 3 kecelakaan adalah

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{e^{-8} 8^3}{3!} = \frac{256}{2} e^{-8} .$$

DAFTAR PUSTAKA

- Guritno, Suryo. 1990. *Diktat Peluang dan Statistika*. Yogyakarta.
- Ross, S. M. 2014. *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Academic Press.
- Subanar. 2012. *Statistika Matematika: Probabilitas, Distribusi, dan Asintotis dalam Statistika*. Graha Ilmu. Yogyakarta.
- Sugiyarto. 2021. *Pengantar Statistika Matematika I*. Magnum Pustaka Utama. Yogyakarta
- Walpole, R.E., R. H. Myers, S. L. Myers and K. Ye. 2011. *Probability & Statistics for Engineers & Scientists* 9th Edition. Pearson Education Inc, Boston.
- Wibisono, Yusuf. 2009. *Metode Statistik*. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta.

BAB 5

DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

Oleh Dwi Herinanto

5.1 Pendahuluan

Distribusi peluang kontinu adalah jenis distribusi probabilitas dimana variabel acaknya bernilai kontinu dalam suatu interval. Distribusi probabilitas kontinu dinyatakan oleh fungsi kepadatan probabilitas (fkp) dan dinotasikan dengan $f(x)$ yang bernilai 1.

Distribusi probabilitas kontinu berperan penting dalam inferensia statistika, pemodelan dan analisis data, prediksi dan estimasi, pengujian hipotesis, analisis resiko dan keuangan, reliabilitas dan analisis survival, simulasi Monte Carlo, dan pengendalian mutu (Sugiyarto, 2021).

Dalam statistika inferensia, distribusi probabilitas kontinu digunakan untuk membuat inferensi tentang populasi berdasarkan sampel data. Misalnya, distribusi Normal sering digunakan dalam pengujian hipotesis dan interval kepercayaan karena banyak statistik sampel mengikuti distribusi ini berdasarkan Teorema Limit Tengah.

Banyak fenomena alam dan proses bisnis dapat dimodelkan menggunakan distribusi kontinu. Misalnya, distribusi Normal digunakan untuk menggambarkan tinggi badan atau berat badan dalam populasi manusia, sementara distribusi Eksponensial dapat digunakan untuk memodelkan waktu antar kejadian dalam proses Poisson (Wibowo, 2022).

Distribusi probabilitas kontinu berperan penting dalam prediksi dan estimasi. Sebagai contoh, dalam analisis regresi, asumsi bahwa error mengikuti distribusi Normal memungkinkan peneliti membuat prediksi yang lebih akurat dan estimasi parameter yang lebih baik (Syarifudin dan Choiruddin, 2021).

Dalam hal pengujian hipotesis, statistik uji yang berasal dari distribusi t , F , dan z digunakan dalam pengujian hipotesis untuk

menentukan apakah ada bukti statistik yang cukup untuk menolak hipotesis nol.

Dalam bidang keuangan, distribusi probabilitas kontinu digunakan untuk memodelkan harga aset, return investasi, dan mengukur risiko. Distribusi Log-normal, misalnya, sering digunakan untuk memodelkan harga saham.

Distribusi kontinu seperti distribusi Weibull dan distribusi Eksponensial digunakan dalam analisis reliabilitas dan survival untuk memodelkan waktu hingga kegagalan atau waktu hingga kejadian tertentu.

Distribusi probabilitas kontinu digunakan dalam simulasi Monte Carlo untuk memodelkan dan menganalisis sistem yang kompleks. Ini melibatkan pengambilan sampel dari distribusi yang diketahui untuk mensimulasikan berbagai kemungkinan hasil.

Dalam hal pengendalian mutu, distribusi Normal sering digunakan untuk memodelkan variabilitas dalam proses produksi dan untuk menetapkan batas kontrol dalam diagram kontrol.

Fenomena dalam ilmu fisika, biologi, kimia, dan teknik dapat dimodelkan menggunakan distribusi kontinu. Misalnya, distribusi Rayleigh digunakan dalam analisis gelombang elektromagnetik dan distribusi gamma dalam pemodelan waktu hidup partikel radioaktif.

Mengingat pentingnya distribusi probabilitas kontinu dalam analisis data, pengambilan keputusan, dan pemodelan berbagai fenomena di banyak bidang maka dalam bab ini dibahas definisi, fungsi kepadatan peluang, nilai harapan, varians, dan fungsi pembangkit momen distribusi peluang Seragam, distribusi Gamma, distribusi Eksponensial, distribusi Chi-square, distribusi Beta, distribusi Normal, distribusi Normal Baku, distribusi Log-normal, dan distribusi Log-logistik.

5.2 Distribusi *Uniform*/Seragam

Distribusi Seragam adalah jenis distribusi probabilitas dimana semua hasil dalam suatu interval tertentu memiliki probabilitas yang sama. Dalam distribusi Seragam, setiap nilai dalam interval tersebut memiliki peluang yang sama untuk terjadi. Dalam bab ini akan dibahas tentang distribusi Seragam kontinu.

Semua nilai dalam suatu interval $[a, b]$ memiliki probabilitas yang sama. Misalnya, jika kita memilih angka secara acak dari 0 hingga 10, setiap angka dalam interval tersebut memiliki probabilitas yang sama untuk dipilih.

Definisi 5.1

Variabel acak X dikatakan berdistribusi *Uniform*/Seragam pada interval $[a, b]$ jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$$

dimana a dan b adalah konstanta. Variabel acak X berdistribusi Seragam pada interval $[a, b]$ dinotasikan dengan $X \sim U(a, b)$.

Jika X berdistribusi Seragam pada interval $[a, b]$ maka mean, varians, dan fungsi pembangkit momennya adalah:

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \text{ jika } t \neq 0$$

Fenomena distribusi Seragam dalam kehidupan sehari-hari dapat dijumpai dalam permainan kartu *bridge*, pemilihan nomor undian, *random sampling*, dan waktu tunggu di lampu lalu lintas.

Dalam bermain (mengocok) kartu *bridge* yang berjumlah 52 kartu, kita mengharapkan setiap kartu memiliki peluang yang sama untuk muncul di bagian atas tumpukan. Fenomena ini mengikuti distribusi Seragam.

Begitu juga dalam sistem nomor undian, nomor-nomor dipilih secara acak dari rentang tertentu, dimana setiap nomor dalam rentang tersebut memiliki peluang yang sama untuk dipilih.

Dalam survei atau eksperimen, jika kita memilih sampel secara acak dari populasi tanpa bias, setiap anggota populasi memiliki peluang yang sama untuk dipilih.

Sama halnya dalam waktu tunggu di lampu lalu lintas. Jika lampu lalu lintas diatur untuk berubah warna secara acak dalam

rentang waktu tertentu, waktu tunggu untuk lampu berubah warna dianggap mengikuti distribusi Seragam.

5.3 Distribusi Gamma

Distribusi Gamma adalah distribusi probabilitas kontinu yang sering digunakan dalam statistika dan teori probabilitas untuk memodelkan waktu hingga peristiwa tertentu terjadi, terutama ketika peristiwa tersebut terjadi secara acak dan independen pada laju yang konstan.

Distribusi Gamma berkaitan dengan fungsi Gamma dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 5.2

Fungsi Gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

dimana z adalah bilangan riil positif.

Berikut ini sifat penting yang dimiliki fungsi Gamma.

Sifat 5.1

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Distribusi Gamma memiliki dua parameter; bentuk (α) dan skala (β) dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 5.3

Variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi Gamma jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & \text{jika } 0 < x < \infty \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

dimana $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$. Variabel acak X berdistribusi Gamma dinotasikan dengan $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$.

Jika $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ maka mean, varians, dan fungsi pembangkit momennya adalah:

$$E(X) = \alpha\beta$$

$$Var(X) = \alpha^2\beta$$

$$M(t) = \left(\frac{1}{1-\alpha t}\right)^\beta, \text{ jika } t < \frac{1}{\alpha}$$

Contoh aplikasi distribusi Gamma dalam kehidupan sehari-hari misalnya pemodelan waktu layanan, analisis keandalan, pemodelan asuransi, dan pemodelan waktu kambuh penyakit.

Distribusi Gamma sering digunakan untuk memodelkan waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan serangkaian tugas atau layanan. Misalnya, dalam manajemen proyek, waktu untuk menyelesaikan sejumlah tahap proyek tertentu dapat dimodelkan menggunakan distribusi Gamma.

Dalam studi keandalan, distribusi Gamma dapat digunakan untuk memodelkan waktu hingga kegagalan sistem atau komponen, terutama ketika kegagalan disebabkan oleh serangkaian proses acak yang independen.

Dalam industri asuransi, distribusi Gamma digunakan untuk memodelkan jumlah klaim yang terjadi dalam jangka waktu tertentu atau untuk memodelkan besarnya klaim dalam portofolio asuransi.

Dalam bidang kesehatan, distribusi Gamma dapat digunakan untuk memodelkan waktu sampai kejadian kesehatan tertentu, seperti waktu sampai kambuhnya penyakit setelah perawatan.

Distribusi Gamma juga digunakan untuk memodelkan waktu antar panggilan dalam jaringan telekomunikasi atau waktu hingga kegagalan dalam sistem komunikasi.

Distribusi Gamma sangat fleksibel dan dapat mengambil berbagai bentuk tergantung pada parameter α dan β hal ini membuatnya berguna dalam berbagai aplikasi statistika yang melibatkan waktu atau jumlah kejadian dalam interval waktu tertentu.

5.4 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial adalah distribusi probabilitas kontinu yang sering digunakan untuk memodelkan waktu antara kejadian dalam proses Poisson, dimana kejadian terjadi secara acak dan

independen pada laju yang konstan. Distribusi eksponensial memiliki satu parameter, yaitu laju (λ).

Definisi 5.4

Variabel acak kontinu disebut berdistribusi Eksponensial dengan parameter θ jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & \text{jika } x > 0 \\ 0, & \text{untuk selainnya.} \end{cases}$$

dengan $\theta > 0$. Variabel acak dengan fungsi kepadatan Eksponensial dinotasikan dengan $X \sim \text{Exp}(\theta)$.

Sifat 5.2

Distribusi Eksponensial merupakan kasus khusus dari distribusi Gamma. Jika parameter $\beta = 1$ maka distribusi Gamma menjadi distribusi Eksponensial.

Distribusi Eksponensial sering digunakan untuk memodelkan waktu antara kedatangan pelanggan di sistem antrian, seperti di bank, rumah sakit, atau pusat layanan pelanggan.

Di bidang analisis reliabilitas, distribusi Eksponensial digunakan untuk memodelkan waktu sampai kegagalan komponen elektronik atau mekanik yang mengalami kegagalan acak dengan laju konstan.

Dalam jaringan telekomunikasi, distribusi Eksponensial digunakan untuk memodelkan waktu antara panggilan masuk atau paket data yang tiba di server.

Distribusi Eksponensial juga digunakan untuk memodelkan durasi panggilan telepon dalam jaringan telekomunikasi, terutama ketika durasi panggilan mengikuti pola yang acak.

Di bidang industri manufaktur, distribusi Eksponensial digunakan untuk memodelkan waktu hidup lampu atau perangkat lain yang memiliki laju kegagalan yang konstan.

Dalam biologi, distribusi Eksponensial digunakan untuk memodelkan waktu antara mutasi genetik atau waktu antara dua kejadian biologis tertentu yang terjadi secara acak.

Distribusi Eksponensial sangat berguna dalam situasi dimana peneliti tertarik pada waktu tunggu atau durasi antara kejadian-kejadian yang terjadi secara acak dan independen dengan laju yang konstan.

5.5 Distribusi Chi Square

Distribusi Chi-square adalah distribusi probabilitas kontinu yang sangat penting dalam inferensi statistika, khususnya dalam uji hipotesis dan analisis varians. Distribusi ini muncul sebagai distribusi dari jumlah kuadrat variabel acak normal standar yang saling bebas.

Definisi 5.5

Variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi Chi-square dengan derajat kebebasan r jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) 2^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{jika } 0 < x < \infty \\ 0, & \text{untuk selainnya.} \end{cases}$$

Variabel acak dengan fungsi kepadatan Chi-square dinotasikan dengan $X \sim \chi^2(r)$.

Sifat 5.3

Distribusi Gamma dengan $\alpha = 2$ dan $\beta = \frac{r}{2}$ merupakan distribusi Chi-square. Jika $r \rightarrow \infty$ maka distribusi chi-square cenderung berdistribusi normal.

Aplikasi distribusi Chi-square dalam kehidupan sehari-hari yaitu digunakan dalam Uji Kebaikan Suai (*Goodness-of-Fit Test*), Uji Keterkaitan (*Test of Independence*), Analisis Varians (*Analysis of Variance*).

Dalam Uji Kebaikan Suai, distribusi Chi-square digunakan untuk menguji apakah data sampel berasal dari distribusi tertentu. Misalnya, dalam biologi, seorang peneliti ingin menguji apakah frekuensi gen dalam populasi sesuai dengan distribusi yang diharapkan.

Dalam uji tabel kontingensi, distribusi Chi-square digunakan untuk menguji apakah ada hubungan antara dua variabel kategori. Misalnya, menguji apakah ada hubungan antara jenis kelamin dan preferensi produk tertentu (Pramesti, 2012).

Dalam analisis varians, distribusi Chi-square digunakan untuk menguji apakah perbedaan rata-rata antara beberapa kelompok adalah signifikan. Analisis varians banyak digunakan dalam eksperimen ilmiah untuk membandingkan efek perlakuan yang berbeda (Wibowo, 2017).

Dalam estimasi variansi populasi, statistik uji yang digunakan untuk membandingkan variansi sampel dengan variansi populasi teoretis mengikuti distribusi Chi-square.

5.5 Distribusi Beta

Distribusi Beta adalah distribusi probabilitas kontinu yang didefinisikan pada interval $[0, 1]$. Distribusi ini sering digunakan untuk memodelkan variabel acak yang terbatas pada rentang ini, seperti probabilitas atau proporsi. Distribusi Beta berkaitan dengan fungsi Beta dengan definisi berikut.

Definisi 5.6

Fungsi beta $B(\alpha, \beta)$ didefinisikan sebagai

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Sifat 5.4

Jika α dan β bilangan riil positif maka

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

dengan

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

merupakan fungsi gamma.

Distribusi Beta memiliki dua parameter dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 5.7

Variabel acak X disebut memiliki fungsi kepadatan Beta jika fungsi probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & \text{jika } 0 < x < 1; \alpha > 0; \beta > 0 \\ 0, & \text{untuk selainnya.} \end{cases}$$

Variabel acak dengan fungsi kepadatan Beta dinotasikan dengan $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

Jika $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ maka

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Distribusi Beta sering digunakan untuk memodelkan probabilitas suatu kejadian. Misalnya, dalam pemrosesan sinyal atau *machine learning*, distribusi Beta dapat digunakan sebagai prior dalam distribusi Bayesian untuk memodelkan probabilitas keberhasilan suatu percobaan.

Dalam survei dan *polling*, distribusi Beta dapat digunakan untuk memodelkan proporsi populasi yang memiliki karakteristik tertentu, seperti persentase pemilih yang mendukung kandidat tertentu.

Distribusi Beta dapat digunakan untuk memodelkan proporsi produk cacat dalam batch produksi sehingga membantu manajer pengendalian mutu dalam mengidentifikasi dan memperbaiki masalah.

Dalam bidang keuangan, distribusi Beta dapat digunakan untuk memodelkan probabilitas default atau kerugian dari portofolio aset tertentu, membantu dalam pengambilan keputusan terkait manajemen risiko.

Distribusi beta sangat fleksibel dan dapat disesuaikan untuk mencerminkan berbagai jenis data dan situasi di mana variabel acak terbatas pada interval $[0, 1]$. Hal ini menjadikannya alat yang

berguna dalam berbagai bidang seperti statistik, keuangan, dan ilmu data.

5.6 Distribusi Normal

Distribusi Normal, juga dikenal sebagai distribusi Gaussian, adalah distribusi probabilitas kontinu yang sangat penting dalam statistika. Distribusi ini dicirikan oleh bentuknya yang simetris dan berbentuk lonceng, dimana kebanyakan nilai berpusat di sekitar mean dan probabilitas menurun secara eksponensial ketika bergerak menjauh dari mean.

Definisi 5.8

Variabel acak X disebut berdistribusi Normal jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

dengan $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma^2 < \infty$ adalah parameter. Jika X berdistribusi Normal maka dinotasikan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2 \\ M(t) &= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \end{aligned}$$

Distribusi Normal sangat penting dalam statistika karena banyak teknik analisis data didasarkan pada asumsi bahwa data mengikuti distribusi ini. Teorema Limit Tengah juga menjelaskan mengapa distribusi normal muncul begitu sering di alam dan dalam banyak aplikasi praktis.

Dalam ilmu pengetahuan dan teknik, kesalahan pengukuran sering kali diasumsikan mengikuti distribusi Normal, karena banyak kesalahan kecil yang independen akan terdistribusi secara Normal menurut Teorema Limit Tengah (Yuliara, 2016).

Model keuangan dan ekonomi mengasumsikan bahwa return investasi atau harga saham mengikuti distribusi Normal, meskipun asumsi ini tidak selalu akurat dalam praktik.

Dalam inferensi statistika, banyak uji hipotesis dan interval kepercayaan didasarkan pada asumsi bahwa data mengikuti distribusi Normal, terutama ketika ukuran sampel besar.

Dalam manufaktur, distribusi Normal digunakan dalam pengendalian kualitas untuk memodelkan variasi dalam proses manufaktur dan memastikan produk memenuhi spesifikasi.

5.7 Distribusi Normal Baku

Distribusi Normal Baku, atau distribusi Normal Standar, adalah distribusi normal khusus dengan mean $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$. Distribusi ini sering digunakan dalam statistik karena menyederhanakan perhitungan dan interpretasi data.

Definisi 5.9

Variabel acak disebut berdistribusi Normal Baku jika nilai tengah bernilai nol dan varians bernilai satu dengan fungsi kepadatan sebagai berikut.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty$$

Sifat 5.5

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka variabel random $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka variabel random $\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$.

Dalam bidang pendidikan, skor ujian sering kali dikonversi menjadi skor z untuk mengetahui seberapa jauh skor individu berada di atas atau di bawah rata-rata populasi. Skor z membantu dalam mengidentifikasi kinerja relatif terhadap rekan sejawat.

Dalam uji hipotesis dan pembuatan interval kepercayaan, data sering kali distandarkan menjadi skor z untuk mempermudah perbandingan dengan distribusi normal baku dan penggunaan tabel z .

Dalam analisis portofolio investasi, analis keuangan menggunakan skor z untuk menilai kinerja return investasi terhadap return rata-rata pasar. Misalnya, skor z yang tinggi menunjukkan kinerja yang lebih baik dibandingkan rata-rata pasar.

Dalam industri manufaktur, skor z digunakan untuk mengukur sejauh mana produk menyimpang dari spesifikasi rata-rata. Ini membantu dalam pengendalian kualitas dan deteksi cacat produk.

Dalam studi medis dan psikologis, distribusi normal baku digunakan untuk menstandarkan hasil pengukuran seperti tekanan darah, tingkat kolesterol, atau hasil tes kognitif sehingga hasil dapat dibandingkan antara populasi yang berbeda.

Di lingkungan kerja, skor kinerja karyawan sering kali dinormalisasi untuk memungkinkan perbandingan yang adil di antara karyawan dengan berbagai latar belakang dan posisi.

Distribusi Normal Baku adalah alat yang sangat berguna dalam analisis statistik karena menyederhanakan perhitungan dan interpretasi data yang berasal dari distribusi normal umum. Ini memungkinkan peneliti dan praktisi untuk membuat inferensi yang lebih mudah dipahami dan diinterpretasikan.

5.7 Distribusi Lognormal

Distribusi Log-normal adalah distribusi probabilitas kontinu dari variabel acak yang logaritmanya mengikuti distribusi normal.

Definisi 5.10

Variabel acak X disebut berdistribusi Log-normal jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}, & -\infty < x < \infty, \\ 0, & \text{untuk selainnya.} \end{cases}$$

dengan $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma^2 < \infty$ adalah parameter.

Distribusi pendapatan individu atau rumah tangga sering kali dianggap mengikuti distribusi Log-normal karena pendapatan tidak bisa bernilai negatif dan cenderung memiliki ekor panjang ke kanan.

Perubahan harga saham sering dimodelkan dengan distribusi Log-normal karena harga saham tidak bisa bernilai negatif dan fluktuasi harga cenderung memiliki sifat multiplikatif.

Dalam beberapa proses industri, waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan tugas tertentu dapat mengikuti distribusi Log-

normal, terutama ketika waktu tersebut dipengaruhi oleh banyak faktor independen yang saling berinteraksi.

Dalam ilmu material, distribusi ukuran partikel dari bahan yang dihancurkan atau digiling sering kali mengikuti distribusi Log-normal.

Dalam manajemen rantai pasokan, permintaan produk tertentu kadang-kadang dimodelkan dengan distribusi Log-normal karena permintaan tidak bisa bernilai negatif dan sering kali menunjukkan variasi yang besar.

Distribusi Log-normal sangat berguna dalam berbagai bidang karena sifatnya yang sesuai untuk memodelkan variabel positif dengan variasi yang besar dan distribusi yang asimetris.

DAFTAR PUSTAKA

- Pramesti, W. (2012). Tabel Kontingensi Untuk Mengetahui Hubungan Antara Jenis Penyakit, Jenis Kelamin, Usia, Lama Rawat dan Keadaan Keluar Pasien. *J Statistika: Jurnal Ilmiah Teori dan Aplikasi Statistika*, 4(1), 15–26.
- Sugiyarto. 2021. *Pengantar Statistika Matematika I*. Yogyakarta: Magnum Pustaka Utama.
- Syaifudin, W.H. and Choiruddin, A. (2021) *Pengantar Teori Probabilitas dan Statistika*. Bengkulu: Elmarkazi.
- Wibowo, A. (2017). Uji Chi-Square pada Statistika dan SPSS. *Jurnal Ilmiah SINUS*, 4(2), 37–46.
- Wibowo, A. 2022. *Statistik Probabilitas*. Semarang: Yayasan Prima Agus Teknik.
- Yuliara, I. M. 2016. *Regresi Linier Berganda*. Denpasar: Universitas Udayana.

BAB 6

PENGUJIAN HIPOTESIS

Oleh Miftahulkhairah

6.1 Pendahuluan

Hipotesis adalah suatu pernyataan atau asumsi yang dianggap mungkin benar, dan sering dijadikan dasar dalam pengambilan keputusan, penyelesaian masalah, atau sebagai landasan dalam melakukan pengamatan .

Hipotesis berasal dari dua kata "hupo" dan "tesis", kata hupo berarti 'rendah, di bawah, menempatkan dibawah" dan "tesis" yang berarti "kebenaran." Secara umum hipotesis dapat diartikan berada di bawah kebenaran (kebenaran sementara yang masih butuh pembuktian secara empiris), dan hanya dianggap sah jika didukung oleh bukti. Hipotesis dapat dijadikan solusi untuk masalah penelitian yang secara teoritis dianggap paling mungkin dan paling mendekati kebenaran. Dalam penelitian, terutama kuantitatif, hipotesis memiliki peran penting karena menjadi dasar asumsi peneliti tentang topik yang akan diuji secara metodologis, ilmiah, dan empiris

Kesalahan Hipotesis

1. Kesalahan tipe I

Kesalahan tipe I (*false positive*) terjadi ketika peneliti menolak hipotesis nol (H_0), padahal hipotesis tersebut sebenarnya benar. Kesalahan ini dikenal sebagai kesalahan alpha dan dilambangkan dengan simbol α , atau sering disebut juga sebagai tingkat signifikansi.

2. Kesalahan tipe II

Kesalahan tipe II (*false negative*) terjadi ketika peneliti menolak hipotesis alternatif (H_1), padahal hipotesis alternatif tersebut benar.

Contoh dalam bidang pertanian:

1. Kesalahan Tipe I (Error type I)

Anda meneliti pengaruh konsentrasi pestisida terhadap serapan nitrogen (N) tanaman padi. Hipotesis nol (H_0): “penambahan pestisida tidak meningkatkan serapan N tanaman”. Kesalahan tipe I terjadi ketika menemukan pengaruh penambahan pestisida terhadap serapan N tanaman. Seharusnya hipotesis H_0 benar, karena tidak ada pengaruh pestisida terhadap serapan N tanaman, tetapi karena data eksperimen yang buruk, adanya hasil yang ekstrim atau faktor kesalahan dalam penelitian lainnya, maka H_0 harus ditolak.

2. Kesalahan Tipe II (Error type II)

Anda meneliti pengaruh dosis urea terhadap serapan nitrogen (N) tanaman padi. Hipotesis nol (H_0): “penambahan urea tidak meningkatkan serapan N tanaman” Kesalahan tipe II terjadi ketika Anda tidak berhasil menemukan pengaruh penambahan urea terhadap serapan N tanaman. Seharusnya hipotesis nol salah, karena seharusnya ada pengaruh serapan N tanaman dengan penambahan urea, tetapi data dari percobaan yang Anda peroleh tidak mampu membuktikan bahwa H_0 salah. Oleh karenanya Anda harus menerima H_0 tersebut.

Secara ringkas, kesalahan tipe I terjadi ketika peneliti menolak hipotesis nol (H_0), padahal H_0 sebetulnya benar. Sebaliknya, kesalahan tipe II terjadi ketika peneliti menerima hipotesis nol (H_0), padahal H_0 seharusnya ditolak.

Dua jenis kesalahan ini merupakan hal yang harus dihindari oleh setiap peneliti. Kesalahan tipe II merupakan kesalahan yang cukup sering dilakukan dan ditemui, akan tetapi kesalahan ini tidak terlalu fatal. Sebaliknya kesalahan tipe I meskipun sangat sedikit kasusnya, tetapi merupakan sebuah kesalahan paling fatal. Cara untuk mengurangi kesalahan tipe I dan II, adalah dengan memperbanyak jumlah ulangan dan hanya mengambil sampel yang representative (mewakili).

6.2 Pengujian Hipotesis Satu Rata-Rata

Dalam pengujian hipotesis tentang satu rata-rata, urutan yang perlu diperhatikan adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan hipotesis

I. $H_0: \mu \leq \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$

II. $H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$

III. $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

2. Menetapkan nilai α sebagai tingkat signifikansi, yaitu peluang terjadinya kesalahan tipe I dan mencari nilai Z_α atau $Z_{\alpha/2}$ dari tabel distribusi normal.

3. Menghitung Z_0 sebagai kriteria pengujian normal.

Untuk sampel besar ($n > 30$) menggunakan uji Z:

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Uji t digunakan untuk sampel kecil ($n \leq 30$):

$$t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

di mana:

Z_0 = statistik uji Z

t_0 = statistik uji t

$\bar{X}$ = rata - rata sampel

μ_0 = rata - rata populasi yang dihipotesiskan

n = ukuran sampel

σ = Standar deviasi populasi

4. Uji Hipotesis dan aturan dalam pengambilan keputusan

I. $H_0: \mu \leq \mu_0$ apabila $Z_0 \geq Z_\alpha$, H_0 di tolak

$H_1: \mu > \mu_0$ apabila $Z_0 < Z_\alpha$, H_0 di terima

II. $H_0: \mu \geq \mu_0$ apabila $Z_0 \leq -Z_\alpha$, H_0 di tolak

$H_1: \mu < \mu_0$ apabila $Z_0 > -Z_\alpha$, H_0 di terima

III. $H_0: \mu = \mu_0$ apabila $Z_0 \geq Z_{\alpha/2}$ atau $Z_0 \leq -Z_{\alpha/2}$, H_0 di tolak

$H_1: \mu \neq \mu_0$ apabila $-Z_{\alpha/2} < Z_0 < Z_{\alpha/2}$, H_0 di terima

Untuk sampel kecil ($n \leq 30$), Z_0, Z_α , dan $Z_{\alpha/2}$ diganti dengan t_0, t_α , dan $t_{\alpha/2}$

Contoh Soal:

1. Seorang Pegawai dari Dinas Sosial Kota A berpendapat bahwa rata-rata pendapatan per hari dari anak-anak penjual keliling di Kota A sebesar Rp 7.000, dengan alternatif lebih besar dari itu. Diketahui simpangan baku dari pendapatan sebesar Rp 1.600. Untuk menguji pendapatnya, dilakukan dialog terhadap 256 anak penjual keliling di kota A yang dipilih secara acak, ternyata diketahui rata-rata pendapatan mereka sebesar Rp 7.100, dengan menggunakan $\alpha = 5\%$, ujliah pendapat tersebut.

Penyelesaian:

- a. Merumuskan hipotesis

$$H_0: \mu \leq 7000$$

$$H_1: \mu > 7000$$

- b. Menentukan nilai $\alpha = 5\%$, $Z_\alpha = 1,64$ dari tabel normal

- c. Menghitung Z_0 sebagai kriteria pengujian normal

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \\ &= \frac{(7100 - 7000)\sqrt{256}}{1600} = 1 \end{aligned}$$

- d. Kesimpulan

Karena $Z_0 = 1 < Z_\alpha = 1,64$, maka H_0 diterima, yang berarti bahwa rata-rata pendapatan per bulan anak-anak penjual keliling di Kota A adalah sebesar Rp 7000.

2. Pendapat manager keuangan salah satu perusahaan Swasta di kota X bahwa rata-rata biaya untuk pengeluaran sehari-hari bagi para staf marketing perusahaan swasta tersebut adalah sebesar Rp 1.760 per hari dengan alternatif lebih kecil dari Rp 1.760 rupiah. Untuk menguji

pendapatnya dilakukan tanya jawab terhadap 25 orang sampel yang dipilih secara acak dari staf marketing perusahaan tersebut dan ternyata rata-rata biaya untuk pengeluaran sehari-hari adalah sebesar Rp 1.700 rupiah dengan simpangan sebesar Rp 100. Dengan menggunakan $\alpha = 0.05$. ujilah pendapat tersebut.

Penyelesaian:

1. Merumuskan hipotesis yang akan diuji :

$$H_0 : \mu \geq 1760$$

$$H_1 : \mu < 1760$$

2. Menghitung t_{tabel} :

$$\alpha = 0,05$$

$$t_{0,05} : n-1 = t_{0,05} : 24 = 1,711 (t_{tabel} / t_{\alpha})$$

3. Mencari t_{hitung}

Diketahui:

$$\bar{x} = 1700$$

$$\sigma = 100$$

$$\mu_0 = 1760$$

$$n = 25$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$t_0 = \frac{1700 - 1760}{\frac{100}{\sqrt{25}}}$$

$$t_0 = -3 (t_{hitung} / t_0)$$

4. Kriteria penolakan hipotesis

$$t_0 < t_{\alpha}$$

$$-3 < 1,711 \rightarrow H_0 \text{ ditolak atau } H_1 \text{ diterima.}$$

5. Kesimpulan

Karena $t_0 = -3 < t_{\alpha} = 1,711$ sehingga H_0 ditolak, artinya rata-rata biaya untuk pengeluaran sehari-hari staf marketing perusahaan lebih kecil dari 1760.

6.3 Pengujian Hipotesis Beda Dua Rata-Rata

6.3.1 Sampel Besar ($n > 30$)

Untuk sampel besar atau ($n > 30$) kita menggunakan uji Z. Penjelasan lebih jelasnya: uji Z ini digunakan apabila sampelnya berukuran besar yang artinya $n > 30$ (n lebih besar dari 30). Diluar dari pada itu, maka terhitung sampel kecil.

Untuk menghitung uji Z atau sampel besar, maka menggunakan rumus:

1. Jika simpangan baku populasi diketahui:

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$
$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

2. Jika simpangan baku populasi tidak diketahui:

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Keterangan:

$\bar{X}_1$ = Rata-rata data X1

n_1 = Jumlah kelompok satu

$\bar{X}_2$ = Rata-rata data X2

n_2 = Jumlah kelompok dua

s_1^2 = Varians sampel 1

s_2^2 = Varians sampel 2

σ = Simpangan baku populasi

s = Simpangan baku contoh

6.3.2 Sampel Kecil ($n \leq 30$)

Untuk sampel kecil atau ($n \leq 30$) kita menggunakan uji t. Penjelasan lebih jelasnya: uji t ini digunakan apabila sampelnya

berukuran kecil yang artinya $n \leq 30$ (kurang dari atau sama dengan 30). Diluar dari pada itu, maka terhitung sampel besar.

Untuk menghitung uji t atau sampel kecil, maka menggunakan rumus:

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

t_0 mempunyai distribusi t dengan derajat kebebasan (db) yang dirumuskan $n_1 + n_2 - 2$.

Keterangan:

$\bar{X}_1$ = Rata-rata data X1

n_1 = Jumlah kelompok satu

$\bar{X}_2$ = Rata-rata data X2

n_2 = Jumlah kelompok dua

s_1^2 = Varians sampel 1

s_2^2 = Varians sampel 2

Contoh Soal

1. Pendapat seorang barista Kedai Kopi yang menyediakan dua jenis kopi merek X dan Y, bahwa tidak ada perbedaan rata-rata waktu dalam penyajian kedua merek kopi tersebut, dengan hipotesis alternatif bahwa ada perbedaan. Untuk menguji pendapat ini, dilakukan eksperimen dengan menyajikan 80 cangkir kopi merek X dan 60 cangkir kopi merek Y secara acak. Hasilnya, kopi merek X disajikan rata-rata dalam 10 menit, sedangkan merek Y rata-rata dalam 12 menit, dengan simpangan baku masing-masing 2 menit untuk merek X dan 3 menit untuk merek Y. Dengan taraf signifikansi $\alpha = 5\%$, ujlilah pendapat tersebut

Penyelesaian:

$$\begin{array}{llll} \text{Diketahui : } n_1 = 80 & \bar{X}_1 = 10 & \sigma_1 = 2 & \alpha = 5\% \\ & n_2 = 60 & \bar{X}_2 = 12 & \sigma_2 = 3 \end{array}$$

Dengan menggunakan langkah-langkah pada prosedur pengujian hipotesis, maka didapat:

a. Formula Hipotesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

b. Taraf Signifikansi & Nilai Z tabel (Z_α)

$$\alpha = 5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{0,05}{2} = 0,025$$

Untuk mencari $Z_{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow Z_{0,025}$ dapat dilakukan dengan:

$$0,5 - 0,025 = 0,475$$

Langkah selanjutnya, mencari nilai yang mendekati dan tidak lebih dari 0,475 pada tabel Z. Berdasarkan tabel Z, diperoleh nilai yang mendekati dan tidak lebih dari 0,475 Sehingga:

$$1,9 + 0,06 = 1,96$$

$$\text{Sehingga } Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

c. Uji Statistik

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Cari terlebih dahulu $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{2^2}{80} + \frac{3^2}{60}}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{4}{80} + \frac{9}{60}}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{0,05 + 0,15}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{0,02}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0,44721$$

Karena $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0,44721$ langsung saja masukkan ke dalam rumus:

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{10 - 12}}$$

$$Z_0 = \frac{-2}{0,44721}$$

$$Z_0 = -4,4721$$

d. Kriteria Pengujian dan Kesimpulan

Karena $Z_0 = -4,4721 < Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$, Maka H_0 diterima atau H_1 ditolak. Jadi, rata-rata lamanya penyajian kopi merek X & Y tersebut sama.

6.4 Pengujian Hipotesis Tentang Satu Proporsi

Uji Hipotesis proporsi adalah pengujian yang berkaitan dengan proporsi atau rasio dalam suatu populasi, berdasarkan data yang didapat dari sampel. Misalnya persentase mahasiswa tidak lulus = 13% ; masyarakat yang belum mendaftar BPJS = 20%, dan lain sebagainya. Pengujian hipotesisnya dinyatakan dalam proporsi.

$$H_0: p \leq p_0$$

$$H_1: p > p_0$$

$$H_0: p \geq p_0$$

$$H_1: p < p_0$$

$$H_0: p = p_0$$

$$H_1: p \neq p_0$$

Dalam pengujian hipotesis tentang proporsi dapat menggunakan rumus uji statistik berikut :

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

Dimana:

n = Banyaknya elemen sampel

X = Banyaknya elemen sampel dengan karakteristik tertentu

p_0 = Proporsi berdasarkan hipotesis

Untuk pengambilan keputusan atau kesimpulan hipotesis proporsi, kita dapat menggunakan Kriteria pengujian sebagai berikut.

1. Untuk $H_0: P \leq P_0$ dan $H_1: P > P_0$
apabila $Z_0 \geq Z_\alpha$ maka H_0 di tolak atau
 $Z_0 < Z_\alpha$ maka H_0 di terima
2. Untuk $H_0: P \geq P_0$ dan $H_1: P < P_0$
apabila $Z_0 \leq -Z_\alpha$ maka H_0 di tolak atau
 $Z_0 > -Z_\alpha$ maka H_0 diterima
3. Untuk $H_0: P = P_0$ dan $H_1: P \neq P_0$
apabila $-\frac{Z_\alpha}{2} < Z_0 < \frac{Z_\alpha}{2}$ Maka H_0 diterima atau
 $Z_0 \geq \frac{Z_\alpha}{2}$ atau $Z_0 \leq -\frac{Z_\alpha}{2}$ maka H_0 ditolak

Contoh soal:

Seorang Direktur Bank Kencana Biru berpendapat, bahwa Pengusaha yang mengambil kredit UMKM dan belum melakukan pengembalian kreditnya adalah sebesar 70%, dengan alternatif lebih kecil dari itu. Untuk menguji pendapatnya tersebut, dilakukan penelitian terhadap 255 orang pengusaha yang mengambil kredit UMKM. Hasil penelitiannya ada 150 orang pengusaha yang belum melakukan pengembalian kredit UMKN. Dengan $\alpha = 10\%$, ujliah pendapat tersebut.

Penyelesaian:

1. Menentukan formula Hipotesis
 $H_0: p \geq 0,70$
 $H_1: p < 0,70$
2. Menentukan taraf signifikan (α) dan Z_α tabel
Untuk $\alpha = 10\% = 0,1$ maka
 $Z_\alpha = 1,28$ (dari Tabel Distribusi Normal)
3. Menentukan statistik uji (Z_0)

Diketahui:

$$n = 225$$

$$np_0 = (225)(0,70) = 157,5$$

$$X = 150$$

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{150 - 225(0,70)}{\sqrt{225(0,7)(0,3)}} = \frac{150 - 157,5}{6,87} = -1,09$$

4. Menentukan kriteria pengujian
apabila $Z_0 \leq -Z_\alpha$ maka H_0 di tolak atau $Z_0 > -Z_\alpha$ maka H_0 di terima, diperoleh $Z_0 = -1,09$ dan $-Z_\alpha = -1,28$
5. Pengambilan kesimpulan
Karena $Z_0 = -1,09 > -Z_\alpha = -1,28$, maka H_0 **diterima**. Artinya, pendapat tersebut benar bahwa sebanyak 70% pengusaha peminjam kredit UMKM belum mengembalikan kreditnya.

6.5 Pengujian Hipotesis Tentang Perbedaan Dua Proporsi

Uji hipotesis untuk membandingkan dua proporsi merupakan metode statistik yang diterapkan untuk menentukan apakah dua populasi memiliki proporsi yang sama, atau apakah terdapat perbedaan proporsi yang lebih besar atau lebih kecil dari nilai tertentu sesuai dengan hipotesis yang telah dirumuskan.

Dalam penerapannya, seringkali muncul masalah terkait perbedaan antara dua proporsi (persentase). Sebagai contoh, bisa jadi tidak terdapat perbedaan persentase masyarakat yang mendukung program vaksin di dua distrik, tidak ada perbedaan persentase kepuasan pelanggan di dua pusat perbelanjaan, atau tidak ada perbedaan persentase produk yang cacat dari dua pabrik, dan sebagainya. Rumusan hipotesisnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} H_0: p_1 - p_2 \leq 0 & H_0: p_1 - p_2 \geq 0 & H_0: p_1 - p_2 = 0 \\ H_1: p_1 - p_2 > 0 & H_1: p_1 - p_2 < 0 & H_1: p_1 - p_2 \neq 0 \end{array}$$

Dalam pengujian hipotesis tentang proporsi dapat menggunakan rumus uji statistik berikut :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{x_1}{n_1} & p_2 &= \frac{x_2}{n_2} \\ p &= \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

$$Z_0 = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{(P)(1 - P) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

Dimana:

P = Proporsi

p_1 = Penduga satu

p_2 = Penduga dua

X = Banyaknya ukuran sampel dengan karakteristik tertentu

N = Banyaknya sampel

Contoh Soal:

Sebuah survei dilaksanakan diantara warga kota X dan daerah sekitarnya mengenai dukungan mereka terhadap rencana pembangunan taman kota baru. Untuk mengetahui apakah ada perbedaan dukungan antara proporsi warga kota X dan daerah sekitarnya, diambil sampel acak sebanyak 300 warga kota X dan 400 warga dari daerah sekitarnya. Jika dari hasil survei, 180 warga kota X dan 220 warga daerah sekitar mendukung rencana tersebut, apakah benar apabila dinyatakan bahwa proporsi warga kota X yang mendukung lebih rendah dari pada proporsi warga di daerah sekitarnya? Gunakan taraf signifikansi 1%.

Penyelesaian:

1. Menentukan Formula Hipotesis

$$H_0: p_1 \leq p_2$$

$$H_1: p_1 > p_2$$

2. Menentukan taraf signifikan α dan Z_α tabel

Untuk $\alpha = 1\% = 0,01$ maka

$$Z_\alpha = Z_{0,5-0,01} = Z_{0,49}$$

$$Z_\alpha = 2,33 \text{ (Dari Tabel Z)}$$

3. Menentukan statistik uji (Z_0)

$$X_1 = 180 \quad n_1 = 300$$

$$X_2 = 220 \quad n_2 = 400$$

- Mencari p_1

$$p_1 = \frac{X_1}{n_1}$$

$$p_1 = \frac{180}{300}$$

$$p_1 = 0,60$$

- Mencari p_2

$$p_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

$$p_2 = \frac{220}{400}$$

$$p_2 = 0,55$$

- Mencari P

$$P = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$$P = \frac{180 + 220}{300 + 400}$$

$$P = \frac{400}{700}$$

$$P = 0,571$$

- Mencari Z_0

$$Z_0 = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{(P)(1 - P) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

$$Z_0 = \frac{0,60 - 0,55}{\sqrt{(0,571)(1 - 0,571) \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{400} \right)}}$$

$$Z_0 = \frac{0,05}{\sqrt{(0,571)(0,429) \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{400} \right)}}$$

$$Z_0 = \frac{0,05}{\sqrt{(0,571)(0,429)(0,00333 + 0,0025)}}$$

$$Z_0 = \frac{0,05}{\sqrt{(0,244959)(0,00583)}}$$

$$Z_0 = \frac{0,05}{\sqrt{0,001428}}$$

$$Z_0 = \frac{0,05}{0,0378}$$

$$Z_0 = 1,3227$$

4. Menentukan kriteria pengujian

$$Z_0 = 1,3227$$

$$Z_\alpha = 2,33$$

$$1,3227 < 2,33$$

$$Z_0 > Z_\alpha$$

5. Pengambilan kesimpulan

Karena $Z_0 = 1,3227 < Z_\alpha = 2,33$ maka H_0 diterima.

Jadi, kita sepakat dengan pendapat yang menyatakan proporsi warga kota X yang setuju rencana itu lebih rendah dari pada proporsi warga di daerah sekitarnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Fauzy, Akhmad. 2008. *Statistik Industri*. Jakarta: Erlangga
- Supranto, J. 2016. *Statistik Teori & Aplikasi Edisi 8 Jilid 2*. Jakarta: Erlangga
- Tiro, Arif, M. 2006. *Dasar-Dasar Statistik*. Makassar: State University of Makassar Press.

BAB 7

REGRESI DAN KORELASI

Oleh Agus Irawan

7.1 Pendahuluan

Di dalam analisis data, memahami hubungan antara variabel-variabel merupakan salah satu elemen yang sangat krusial. Regresi dan korelasi adalah dua metode statistik yang digunakan untuk menilai dan memahami sejauh mana dua atau lebih variabel saling terkait. Kedua metode ini berperan penting dalam berbagai bidang penelitian, seperti ekonomi, sosial, pendidikan, hingga ilmu pengetahuan alam.

Korelasi mengukur seberapa kuat dan arah hubungan linier antara dua variabel. Nilai korelasi berkisar antara -1 hingga 1, dengan 1 menunjukkan hubungan positif sempurna, -1 menunjukkan hubungan negatif sempurna, dan 0 menunjukkan tidak adanya hubungan linier antara kedua variabel tersebut. Analisis korelasi sering digunakan untuk mengidentifikasi pola dalam data dan memeriksa apakah ada keterkaitan antara variabel-variabel tertentu.

Di sisi lain, regresi adalah teknik untuk memprediksi nilai suatu variabel berdasarkan variabel lain. Regresi linier, yang merupakan salah satu bentuk regresi yang paling umum, menggambarkan hubungan antara variabel bebas (prediktor) dan variabel terikat (respon) melalui persamaan garis lurus. Dengan analisis regresi, kita dapat memahami seberapa besar pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikat, sekaligus memprediksi hasil di masa depan.

Variabel bebas (*independent variable*) merupakan variabel yang dapat memengaruhi atau menentukan perubahan pada variabel lain, yang disebut sebagai variabel terikat, dilambangkan dengan X . Variabel bebas tidak dipengaruhi oleh variabel lainnya dalam penelitian. Sebaliknya, variabel terikat (*dependent variable*) adalah variabel yang menjadi objek pengaruh atau perubahan yang

dihasilkan oleh variabel bebas, dilambangkan dengan Y. Variabel ini bergantung pada variabel bebas dan mengalami perubahan sebagai respons terhadap perubahan variabel bebas. Keduanya digunakan untuk memahami hubungan sebab-akibat dalam suatu penelitian. (Atmaja, Lukas, 2009)

Melalui pemahaman yang baik tentang regresi dan korelasi, kita dapat membuat keputusan yang lebih akurat berdasarkan data dan lebih memahami hubungan antar variabel dalam berbagai konteks.

7.2 Regresi dan Koefisien Korelasi Sederhana

Regresi linear sederhana adalah sebuah metode statistik yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara dua variabel, di mana satu variabel digunakan untuk memprediksi nilai variabel lainnya. Variabel yang digunakan untuk prediksi disebut sebagai variabel independen (bebas), sedangkan variabel yang diprediksi disebut variabel dependen (terikat). Dalam regresi linear sederhana, hubungan antara kedua variabel direpresentasikan dengan sebuah garis lurus. Metode ini bertujuan untuk menemukan persamaan garis terbaik yang dapat menggambarkan hubungan antara variabel bebas dan terikat. (Asra and Rudiansyah, 2013)

Analisis korelasi sederhana adalah metode statistik yang digunakan untuk mengevaluasi hubungan antara dua variabel. Tujuannya adalah untuk menentukan seberapa kuat dan arah hubungan antar variabel tersebut, baik hubungan positif, negatif, maupun tidak ada hubungan sama sekali. Korelasi tidak berarti hubungan sebab-akibat, melainkan hanya menunjukkan adanya keterkaitan. (Asra and Rudiansyah, 2013)

7.2.1 Persamaan Regresi Linear Sederhana

Persamaan regresi linear Y terhadap X ditulis sebagai berikut:

$$Y = a + bX$$

Y : Variabel terikat (yang diprediksi)

X : Variabel bebas (yang mempengaruhi)

a : Konstanta (intersep)

b : koefisien regresi (kemiringan garis) yang menunjukkan seberapa besar perubahan Y untuk setiap perubahan

satu unit pada X

Regresi linear sederhana digunakan untuk memprediksi nilai di masa depan atau memahami pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikat. Untuk menghitung nilai a (intersep) dan b (koefisien kemiringan) dalam regresi linear sederhana, dilakukan dengan menggunakan rumus matematika yang didasarkan pada data yang diamati. Nilai b yang mewakili koefisien kemiringan, dihitung dengan membandingkan seberapa besar hubungan antara variabel bebas (X) dan variabel terikat (Y). Cara menentukan nilai a dan b dari persamaan regresi yang berbentuk $Y = a + bX$ adalah sebagai berikut : (Hasan, 2009)

1. Rumus 1

$$a = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{n(\sum X^2) - (\sum X)^2}$$
$$b = \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{n(\sum X^2) - (\sum X)^2}$$

2. Rumus 2

$$b = \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{n(\sum X^2) - (\sum X)^2}$$
$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

3. Sistem persamaan linear dua variabel

$$\begin{aligned}(\sum Y) &= a \cdot n + b \cdot \sum X \\ (\sum XY) &= a \cdot \sum X + b \cdot \sum X^2\end{aligned}$$

4. Pendekatan matriks

$$\begin{pmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y \\ \sum XY \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{pmatrix} \rightarrow \det C = (n)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum X)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \sum Y & \sum X \\ \sum XY & \sum X^2 \end{pmatrix} \rightarrow \det C_1 = (\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} n & \sum Y \\ \sum X & \sum XY \end{pmatrix} \rightarrow \det C_2 = (n)(\sum XY) - (\sum Y)(\sum X)$$

$$a = \frac{\det C_1}{\det C}$$

$$b = \frac{\det C_2}{\det C}$$

Contoh 7.1 Berikut ini adalah data dari 10 responden pada Pilkada 2024 mengenai X = Kesadaran Politik dan Y = Partisipasi Pemilu sebagai berikut :

Tabel 7.1. Kesadaran Politik dan Partisipasi Pemilu 10 responden

X	40	44	46	48	52	58	60	68	74	80
Y	6	10	12	14	16	28	22	24	26	32

- 1) Tentukan nilai a dan b (gunakan 4 cara)
- 2) Buatlah persamaan regresi liniernya,

Penyelesaian :

Responden	X	Y	XY	X ²	Y ²
1	40	6	240	1600	36
2	44	10	440	1936	100
3	46	12	552	2116	144
4	48	14	672	2304	196
5	52	16	832	2704	256
6	58	28	1624	3364	784
7	60	22	1320	3600	484
8	68	24	1632	4624	576
9	74	26	1924	5476	676
10	80	32	2560	6400	1024
Jumlah	570	190	11796	34124	4276

a) Menggunakan Rumus 1

$$a = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{(n)(\sum X^2) - (\sum X)^2}$$

$$= \frac{(190)(34.124) - (570)(11.796)}{(10)(34.124) - (570)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(6.483.560) - (6.723.720)}{(341.240) - (324.900)} \\
&= \frac{-(240.160)}{(16.340)} \\
&= -14,7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{(n)(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{(n)(\sum X^2) - (\sum X)^2} \\
&= \frac{(10)(11.796) - (570)(190)}{(10)(34.124) - (570)^2} \\
&= \frac{(117.960) - (108.300)}{(341.240) - (324.900)} \\
&= \frac{(9.660)}{(16.340)} \\
&= 0,59
\end{aligned}$$

b) Menggunakan Rumus 2

$$\begin{aligned}
b &= \frac{(n)(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{(n)(\sum X^2) - (\sum X)^2} \\
&= \frac{(10)(11.796) - (570)(190)}{(10)(34.124) - (570)^2} \\
&= \frac{(117.960) - (108.300)}{(341.240) - (324.900)} \\
&= \frac{(9.660)}{(16.340)} \\
&= 0,59
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \bar{Y} - b\bar{X} \\
&= 19 - (0,59)(57) \\
&= 14,7
\end{aligned}$$

c) Sistem persamaan linear

$$\begin{aligned}
(\sum Y) &= a \cdot n + b \cdot \sum X \\
(\sum XY) &= a \cdot \sum X + b \cdot \sum X^2
\end{aligned}$$

$$10 a + 570 b = 190 \quad \text{..... (1)}$$

$$570 a + 34124 b = 11796 \quad \text{..... (2)}$$

Eliminasi pers (1) dan (2)

$$\begin{array}{rclcl} (\times 57) & \rightarrow & 570 a & + & 32490 b & = & 10830 \\ (\times 1) & \rightarrow & 570 a & + & 34124 b & = & 11796 & - \\ \hline & & & & -1634 b & = & -966 \\ & & & & b & = & \frac{-966}{-1634} \\ & & & & b & = & 0,59 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 10 a & + & 570 b & = & 190 \\ 10 a & + & 570 (0,59) & = & 190 \\ & & a & = & -14,7 \end{array}$$

d) Matriks

$$\begin{pmatrix} 10 & 570 \\ 570 & 34124 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 11796 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 570 \\ 570 & 34124 \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} \sum Y & \sum X \\ \sum XY & \sum X^2 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} n & \sum Y \\ \sum X & \sum XY \end{pmatrix}$$

$$\det C = (10) \cdot (34124) - (570) \cdot (570) = 16340$$

$$\det C_1 = (190) \cdot (34124) - (570) \cdot (11796) = -240160$$

$$\det C_2 = (10) \cdot (11796) - (190) \cdot (570) = 9660$$

$$a = \frac{\det C_1}{\det C} = \frac{-240160}{16340} = -14,7$$

$$b = \frac{\det C_2}{\det C} = \frac{9660}{16340} = 0,59$$

1) Nilai $a = -14,7$ dan $b = 0,59$

2) Persamaan regresinya : $Y = -14,7 + 0,59X$

7.2.2 Koefisien Korelasi (r)

Dalam analisis ini, kita menghitung koefisien korelasi, biasanya menggunakan Koefisien Korelasi Pearson (r). Nilai koefisien ini berkisar antara -1 hingga 1. Jika $r = 1$, menunjukkan

hubungan positif sempurna, di mana kenaikan satu variabel diikuti oleh kenaikan variabel lainnya. Jika $r = -1$, menunjukkan hubungan negatif sempurna, di mana kenaikan satu variabel diikuti oleh penurunan variabel lainnya. Jika $r = 0$, menunjukkan tidak adanya hubungan linier antara kedua variabel. (Gunawan, 2016)

Secara lebih detail, untuk melihat interpretasi korelasi antar variabel, berikut ini kriteria hasil perhitungan :

Tabel 7.2. Interpretasi Koefisien Korelasi (Riduwan, 2006)

0,00 - 0,199	Hubungan sangat lemah
0,20 - 0,399	Hubungan lemah
0,40 - 0,599	Hubungan cukup kuat
0,60 - 0,799	Hubungan kuat
0,80 - 1,000	Hubungan sangat kuat

Sumber: Riduwan (2006)

Nilai koefisien korelasi yang tinggi (baik positif maupun negatif) menunjukkan hubungan yang lebih kuat antara dua variabel, sedangkan nilai yang mendekati nol menunjukkan hubungan yang lemah atau tidak ada sama sekali.

Untuk menghitung nilai koefisien korelasi (r) dapat digunakan rumus Pearson metode *product moment* dan *least square* sebagai berikut:

Rumus Pearson metode *product moment*

$$r = \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{(n(\sum X^2) - (\sum X)^2)(n(\sum Y^2) - (\sum Y)^2)}}$$

Keterangan :

- r : Koefisien korelasi Person
- X : Variabel X
- Y : Variabel Y
- $\sum X$: Jumlah nilai variabel X
- $\sum Y$: Jumlah nilai variabel Y
- $\sum XY$: Jumlah hasil perkalian X dan Y
- $\sum X^2$: Jumlah kuadrat nilai X
- $\sum Y^2$: Jumlah kuadrat nilai Y

Rumus Person metode *least square*

$$r = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{(\sum(X - \bar{X})^2) \cdot (\sum(Y - \bar{Y})^2)}}$$

Keterangan :

r : Koefisien korelasi Person

X : Variabel X

Y : Variabel Y

$\bar{X}$: Nilai rata-rata dari variabel X.

$\bar{Y}$: Nilai rata-rata dari variabel Y.

$X - \bar{X}$: Selisih nilai X dari rata-rata X

$Y - \bar{Y}$: Selisih nilai Y dari rata-rata Y.

$(X - \bar{X})^2$: Kuadrat selisih nilai X dari rata-rata X.

$(Y - \bar{Y})^2$: Kuadrat selisih nilai Y dari rata-rata Y.

Contoh 7.2 Pada Tabel 7.1 hitung lah korelasi menggunakan metode person (*least square* dan *product moment*)

Penyelesaian :

Metode product moment

$$\begin{aligned} r &= \frac{n \sum XY - \sum X \cdot \sum Y}{\sqrt{(n \sum X^2 - (\sum X)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\ &= \frac{(10)(11.796) - (570)(190)}{\sqrt{(10(34.124) - (570)^2)(10(4.276) - (190)^2)}} \\ &= \frac{117.960 - 108.300}{\sqrt{(341240 - 324900)(42760 - 36100)}} \\ &= \frac{9660}{\sqrt{(16340)(6660)}} \\ &= \frac{9660}{\sqrt{108824400}} \\ &= \frac{10431,8934}{9660} \\ &= 0,93 \end{aligned}$$

Tabel 7.3. Bantu metode *least square*.

$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
-17	-13	221	289	169
-13	-9	117	169	81
-11	-7	77	121	49
-9	-5	45	81	25
-5	-3	15	25	9
1	9	9	1	81
3	3	9	9	9
11	5	55	121	25
17	7	119	289	49
23	13	299	529	169
		966	1634	666

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{(\sum(X - \bar{X})^2) \cdot (\sum(Y - \bar{Y})^2)}} \\
 &= \frac{966}{\sqrt{(1634) \cdot (666)}} \\
 &= \frac{966}{\sqrt{1.088.244}} \\
 &= \frac{966}{1043,19} \\
 &= 0,93
 \end{aligned}$$

7.2.3 Koefisien Determinasi (R^2)

Koefisien Determinasi adalah ukuran statistik yang digunakan untuk menilai seberapa baik model regresi mampu menjelaskan variabilitas variabel dependen berdasarkan variabel independen. Nilai ini dinyatakan dalam bentuk persentase dan menunjukkan seberapa besar proporsi variasi total dalam variabel dependen yang dapat dijelaskan oleh model regresi. (Sudjana, 2013)

Jika koefisien korelasinya adalah r , maka koefisien determinasinya adalah :

$$\text{Koefisien Determinasi} = R^2 = r^2 \times 100\%$$

Contoh 9.3 Pada Tabel 9.1 tentukan koefisien determinasinya dan apa artinya.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 \times 100\% \\ &= (0,93)^2 \times 100\% \\ &= 0,8649 \times 100\% \\ &= 86,49\% \text{ dan sisanya } 13,51\% \end{aligned}$$

Artinya : Pengaruh variabel X (Kesadaran Politik) terhadap naik turunnya variabel Y (Partisipasi Pemilu) hanya sebesar 86,49%, selebihnya 13,51% berasal dari faktor lain.

7.3 Regresi dan Korelasi Berganda

Regresi Linear Berganda adalah teknik statistik yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara satu variabel dependen dengan dua atau lebih variabel independen. Tujuan dari metode ini adalah untuk menentukan seberapa baik variabel independen dapat memprediksi variabel dependen. (Gunawan, 2016)

Korelasi linear berganda adalah alat untuk mengukur hubungan antara variabel dependen (Y) dengan dua atau lebih variabel independen ($X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$). (Sudjana, 2013)

7.3.1 Persamaan Regresi Linear Berganda

Dalam regresi linear berganda, persamaan yang digunakan adalah bentuk umum dari regresi linear sederhana, tetapi melibatkan beberapa variabel independen. Persamaan matematisnya dapat ditulis sebagai: (Sudjana, 2013)

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + \dots + b_kX_k + e$$

Keterangan :

- | | |
|--------------------------------|---|
| Y | = Variabel terikat |
| a, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ | = Koefisien regresi |
| $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ | = Variabel bebas |
| e | = Kesalahan pengganggu (<i>disturbance term</i>) mengacu pada nilai-nilai dari variabel lain yang tidak dimasukkan ke |

dalam persamaan. Nilai-nilai ini biasanya diabaikan dalam perhitungan.

Persamaan regresi linear tiga variabel dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

Untuk menghitung harga – harga a, b_1, b_2 pada regresi linear berganda dua prediktor dapat menggunakan persamaan berikut :

$$\begin{aligned}\sum Y &= a.n + b_1 \sum X_1 + b_2 \sum X_2 \\ \sum X_1 Y &= a \sum X_1 + b_1 \sum X_1^2 + b_2 \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 Y &= a \sum X_2 + b_1 \sum X_1 X_2 + b_2 \sum X_2^2\end{aligned}$$

Contoh 7.4 Seorang mahasiswa dari jurusan Psikologi melaksanakan penelitian untuk menganalisis pengaruh Kecerdasan Emosional (X_1) dan Motivasi (X_2) terhadap Prestasi Belajar (Y). Penelitian ini menggunakan 10 responden sebagai sumber data pada semester genap tahun 2024, dengan hasil sebagai berikut.

Tabel 7.4. Kecerdasan Emosional, Motivasi dan Prestasi Belajar

Responden	Kecerdasan Emosional (X_1)	Motivasi (X_2)	Prestasi Belajar (Y)
1	116	96	56
2	136	106	69
3	96	136	76
4	156	126	76
5	176	146	86
6	236	196	96
7	116	76	46
8	296	156	103
9	96	116	56
10	156	86	66

Tentukan nilai a, b_1 dan b_2 , serta buatlah persamaan regresinya.

Penyelesaian :

Untuk menjawab soal di atas, gunakan tabel bantu seperti yang ditunjukkan berikut ini.

No	X ₁	X ₂	Y	X ₁ ²	X ₂ ²	Y ²	X ₁ Y	X ₂ Y	X ₁ X ₂
1	116	96	56	13456	9216	3136	6496	5376	11136
2	136	106	69	18496	11236	4761	9384	7314	14416
3	96	136	76	9216	18496	5776	7296	6	13056
4	156	126	76	24336	15876	5776	11856	9576	19656
5	176	146	86	30976	21316	7396	15136	12556	25696
6	236	196	96	55696	38416	9216	22656	18816	46256
7	116	76	46	13456	5776	2116	5336	3496	8816
8	296	156	103	87616	24336	9	10608	16068	46176
9	96	116	56	9216	13456	3136	5376	6496	11136
10	156	86	66	24336	7396	4356	10296	5676	13416
Σ	1580	1240	730	286800	165520	56278	124320	95710	209760

Persamaan berikut digunakan untuk menentukan nilai a, b₁ dan b₂

$$10a + 1580b_1 + 1240b_2 = 730 \quad \text{..... (1)}$$

$$1580a + 286800b_1 + 209760b_2 = 124320 \quad \text{..... (2)}$$

$$1240a + 209760b_1 + 165520b_2 = 95710 \quad \text{..... (3)}$$

Eliminasi pers (1) dan (2)

$$\begin{array}{rclcl} 10a & + & 1580b_1 & + & 1240b_2 & = & 730 & \left| \begin{array}{l} \times (1580) \\ \times (10) \end{array} \right. \\ 1580a & + & 286800b_1 & + & 209760b_2 & = & 124320 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} & & & & 1959200 & & \\ 15800a & + & 2496400b_1 & + & b_2 & = & 1153400 \\ & & & & 2097600 & & \\ \hline 15800a & + & 2868000b_1 & + & b_2 & = & 1243200 & - \end{array}$$

$$\underline{-371600 b_1 + -138400 b_2 = -89800 \quad \dots (4)}$$

Eliminasi pers (1) dan (3)

$$\begin{array}{rclcl} 10 a & + & 1580 b_1 & + & 1240 b_2 & = & 730 & \left| \begin{array}{l} \times (1240) \\ \times (10) \end{array} \right. \\ 1240 & & & & & & & \\ a & + & 209760 b_1 & + & 165520 b_2 & = & 95710 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 12400 a & + & 1959200 b_1 & + & 1537600 b_2 & = & 905200 \\ 12400 a & + & 2097600 b_1 & + & 1655200 b_2 & = & 957100 & - \end{array}$$

$$\underline{-138400 b_1 + -117600 b_2 = -51900 \quad \dots (5)}$$

Eliminasi pers (4) dan (5)

$$\begin{array}{rclcl} -371600 b_1 & + & -138400 b_2 & = & -89800 & \left| \begin{array}{l} \times (-1384) \\ \times (-3716) \end{array} \right. \\ -138400 b_1 & + & -117600 b_2 & = & -51900 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 514294400 b_1 & + & 191545600 b_2 & = & 124283200 \\ 514294400 b_1 & + & 437001600 b_2 & = & 192860400 & - \\ \hline & & -245456000 b_2 & = & -68577200 \\ & & b_2 & = & 0,28 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} -371600 b_1 & + & -138400 b_2 & = & -89800 & \left| \begin{array}{l} \times (-1176) \\ \times (-1384) \end{array} \right. \\ -138400 b_1 & + & -117600 b_2 & = & -51900 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 437001600 b_1 & + & 162758400 b_2 & = & 105604800 \\ 1915456000 b_1 & + & 162758400 b_2 & = & 71829600 & - \\ \hline 245456000 b_1 & & & = & 33775200 \\ & & b_1 & = & 0,14 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 10 a & + & 1580 (0,14) & + & 1240 (0,28) & = & 730 \\ 10 a & + & 221,2 & + & 347,2 & = & 730 \\ & & 10 a & & & = & 730 \\ & & a & & & = & 16,16 \end{array}$$

Persamaan regresinya adalah $Y = 16,16 + 0,14X_1 + 0,28X_2$

7.3.2 Korelasi Berganda Tiga Variabel

Koefisien korelasi linear berganda merupakan sebuah indeks atau nilai yang digunakan untuk menilai kekuatan hubungan antara tiga variabel atau lebih. Rumus koefisien korelasi linear berganda untuk tiga variabel adalah: (Sudjana, 2013)

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}$$

Dimana :

$$r_{yx_1} = \frac{n \sum X_1 Y - (\sum X_1)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}}$$

$$r_{yx_2} = \frac{n \sum X_2 Y - (\sum X_2)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}}$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{n \sum X_1 X_2 - (\sum X_1)(\sum X_2)}{\sqrt{(n \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2)(n \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2)}}$$

Keterangan :

$R_{yx_1x_2}$ = Korelasi antara variabel X_1 dan X_2 secara simultan dengan variabel Y

r_{yx_1} = Korelasi antara X_1 dan Y

r_{yx_2} = Korelasi antara X_2 dan Y

$r_{x_1x_2}$ = Korelasi antara X_1 dan X_2

Contoh 7.5 Pada Tabel 7.4, tentukan koefisien korelasi bergandanya dan jenis korelasinya?

$$\begin{aligned} r_{yx_1} &= \frac{n \sum X_1 Y - (\sum X_1)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\ &= \frac{(10)(124320) - (1580)(730)}{\sqrt{((10)(286800) - (1580)^2)((10)(156278) - (730)^2)}} \\ &= 0,85 \end{aligned}$$

$$r_{yx_2} = \frac{n \sum X_2 Y - (\sum X_2)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(10)(95710) - (1240)(730)}{\sqrt{((10)(286800) - (1580)^2)((10)(156278) - (730)^2)}} \\
&= 0,88
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{x_1x_2} &= \frac{n \sum X_1X_2 - (\sum X_1)(\sum X_2)}{\sqrt{(n \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2)(n \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2)}} \\
&= \frac{(10)(209760) - (1580)(1240)}{\sqrt{((10)(286800) - (1580)^2)((10)(165520) - (1240)^2)}} \\
&= 0,66
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{yx_1x_2} &= \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(0,85)^2 + (0,88)^2 - 2(0,85)(0,88)(0,66)}{1 - (0,66)^2}} \\
&= 0,95 \text{ (sangat kuat/dapat diandalkan)}
\end{aligned}$$

7.3.3 Koefisien Determinasi Berganda

Koefisien determinasi berganda digunakan untuk mengukur besarnya sumbangan dari beberapa variabel ($X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$) terhadap naik turunnya (variasi) variabel Y . (Sudjana, 2013)

$$\boxed{\text{KDB} = (R_{yx_1x_2})^2 \times 100\%}$$

Contoh 7.6 Pada Tabel 7.4, tentukan koefisien determinasi bergandanya dan apa artinya.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
\text{KDB} &= (R_{yx_1x_2})^2 \times 100\% \\
&= (0,95)^2 \times 100\% \\
&= 89,88 \%
\end{aligned}$$

Artinya : Pengaruh variabel X_1 (Kecerdasan Emosional) dan variabel X_2 (Motivasi) terhadap naik turunnya variabel Y (Prestasi Belajar) hanya sebesar 89,88%, selebihnya 10,12% berasal dari faktor lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Asra, A. and Rudiansyah (2013) *STATISTIKA TERAPAN*. Jakarta: Penerbit IN MEDIA.
- Atmaja, Lukas, S. (2009) *Statistika Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: ANDI OFFSET.
- Gunawan, I. (2016) *Pengantar Statistika Inferensial*. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada.
- Hasan, M. I. (2009) *POKOK-POKOK MATERI STATISTIK 1*. Jakarta: BUMI AKSARA.
- Riduwan (2006) *Metode dan Teknik Menyusun Tesis*. Bandung: Alfabeta.
- Sudjana (2013) *METODA STATISTIKA*. Bandung: PT. TARSITO BANDUNG.

BAB 8

UJI VALIDITAS, UJI REABILITAS

Oleh Rahma Faelasofi

8.1 Pendahuluan

Instrumen sebagai alat untuk menghitung suatu perangkat atau mengkollektifkan komponen yang ada di variabel (Yusup, 2018). Instrumen dinyatakan baik apabila memenuhi valid dan *reliable*. Ketentuan suatu item dari instrumen dinyatakan valid atau tidak valid berdasarkan hasil banding r -hitung dan r -tabel. Interpretasi pada koefisien reabilitas merupakan angka atau nilai relatif yang artinya tidak ada batasan yang memperlihatkan perolehan nilai atau angka yang diperoleh layak pada suatu pengukuran sehingga dapat dinyatakan *reliable*.

Pada penelitian kuantitatif terdapat variabel, seperti halnya variabel laten. Pada variabel ini, biasanya ingin mengetahui karakteristik yang dimiliki, misal karakteristik dari nilai mean, nilai median, atau nilai modus. Sehingga, untuk memperhitungkan variabel diperlukan perangkat yang disebut instrumen. Hamni (2019) menuliskan instrumen sebagai perangkat yang mengakomodir persyaratan akademis yang diimplementasikan sebagai alat untuk memperhitungkan objek ukur. Jenis instrumen ada dua yakni tes dan non-tes. Kelompok tes, seperti IQ, ESQ, sedangkan yang tergolong non-tes seperti wawancara, angket, lembar pengamatan, ataupun *form check list*. Matondang (2009) menguraikan pengukuran sebagai tahapan proses yang dilakukan secara fisik oleh pemerhati. Seperti, memperhitungkan perolehan hasil belajar, inteligensi, sikap, ataupun motivasi. Jika terdapat pertanyaan, yaitu apakah alat ukur yang dapat memperhitungkan sesuatu yang hendak dan seharusnya diperhitungkan kelayakan pada suatu instrumen, maka untuk menjawab pertanyaan tersebut dapat dilakukan dengan menunjukkan dua perolehan yaitu validitas dan reabilitas.

Menurut, Nurkanca (1992) alat pengukur dinyatakan valid jika dapat memperhitungkan apa yang hendak diperhitungkan secara tepat. Penentuan validitas dan reabilitas, didasarkan pada (1) konten instrumen, (2) subjek, serta (3) petugas. Berdasar pada (Hamni, 2019) menyatakan pengukuran yaitu penghitungan angka atas objek atau kejadian, atau sebagai perangkat yang berstandar sehingga dimanfaatkan dalam memperhitungkan keadaan tingkah laku individu (Intang, 2007). Dan berdasar Intang (2007), tes sebagai prosedur sistematis yang dikonstruksikan seperti penugasan yang distandarkan dan diberi kepada individu atau kelompok untuk diselesaikan baik secara tertulis, ataupun lisan. Silviri (1991) tes sebagai tahapan terurut dan terkoordinir untuk mengamati satu atau lebih penciri dalam bentuk item pada penskalaan numerik atau kategori. Azwar (1987) menerangkan tes sebagai tahapan yang sistematis, maksudnya (a) item yang dibangun menurut aturan yang berlaku, (b) tahapan tes administrasi dan pemerolehan angka (*scoring*) pada hasil harus spesifik, serta (c) subjek mendapatkan butir pertanyaan yang sama dalam kondisi yang setara.

8.2 Uji Validitas

Azwar (2003) mengungkapkan validitas berasal dari kata *validity* yang bermakna ketelitian instrumen (tes) dalam memenuhi fungsi ukur. Tes dinyatakan mengandung validitas yang tinggi apabila perangkat mempraktikkan fungsi ukur secara tepat. Artinya hasil pengukuran dapat menunjukkan perolehan nilai secara tepat sesuai kondisi.

Validitas menunjukkan apakah tes dapat memperhitungkan apa yang diukur. Artinya suatu tes dapat mempraktikkan dengan ciri atau kondisi yang sebenarnya. Sudjana (2004) mengungkapkan validitas terkait dengan kecermatan perangkat dalam memberikan pengukuran terhadap muatan yang diukur sehingga dapat memperhitungkan apa yang seharusnya diukur. Ada tiga jenis konsep validitas tes yaitu validitas isi (*content validity*), validitas konstruk (*construct validity*), dan validitas empiris.

Validitas isi memperlihatkan seberapa jauh tes memperhitungkan level pemahaman pada isi konten atau yang

dikuasai selaras dengan sejauhmana pertanyaan/ Pernyataan suatu instrumen mampu mengemban secara keseluruhan secara proporsional. Artinya tes valid apabila butir tes itu memperlihatkan isi atau materi yang diujikan secara proporsional.

Validitas konstruk (*construct validity*) adalah validitas yang memecahkan masalah pada butir tes yang mampu memperhitungkan sesuai isi dari definisi konseptual yang ditentukan. Validitas konstruk mengukur isi variabel, yang *performance* sepertihalnya instrumen untuk mengukur sikap, gaya pemimpin, motivasi, maupun yang sifatnya untuk mengukur inteligensi, ESQ, dan lain-lain. Dengan demikian, upaya untuk mendapatkan validitas konstruk perlu proses penelaahan teoritik dari suatu isi variabel, mulai dari perumusan konstruk, penentuan aspek dan indikator, sampai pengkonstruksian, dan penulisan item. Perumusan konstruk dipenuhi dasar sintesis dari teori mengenai pengembangan muatan variabel yang akan diperhitungkan.

Validitas empiris diperoleh berdasarkan kriteria, baik internal maupun eksternal. Kriteria internal merupakan tes instrumen yang menjadi kriteria, sedang kriteria eksternal merupakan perolehan ukur instrumen atau tes lain di luar instrumen yang menjadi kriteria. Ukuran lain yang ditimbang dapat dibuktikan dijadikan sebagai kriteria eksternal. Validitas didasarkan kriteria internal disebut validitas internal sedangkan validitas didasarkan kriteria eksternal disebut validitas eksternal.

Djaali (2000) menuliskan untuk memperhitungkan validitas internal pada skor butir dikotomi digunakan koefisien korelasi biserial (r_{bis}) dengan rumus:

$$r_{bis(i)} = \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_t}{S_t} \sqrt{\frac{p_i}{q_i}}$$

Keterangan:

- $r_{bis(i)}$: koefisien korelasi antara skor butir ke-i dengan skor total
- $\bar{X}_i$: rata-rata skor total responden yang menjawab dengan benar butir ke-i
- $\bar{X}_t$: rata-rata skor total semua responden
- S_t : standar deviasi skor total semua responden

p_i : proporsi jawaban yang benar untuk butir ke- i
 q_i : proporsi jawaban yang salah untuk butir ke- i

Selanjutnya, dikatakan bahwa untuk memperhitungkan koefisien validitas internal untuk skor butir politomi digunakan korelasi *product moment* (r) dengan rumus:

$$r_{it} = \frac{\sum x_i x_t}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum x_t^2}}$$

Dengan:

r_{it} : koefisien korelasi antara skor butir soal dengan skor total
 $\sum x_i$: jumlah kuadrat deviasi skor dari X_i
 $\sum x_t$: jumlah kuadrat deviasi skor dari X_t

Nilai koefisien korelasi dikotomi maupun politomi pada tiap butir dibandingkan dengan nilai koefisien korelasi yang ada di r tabel pada α (*alpha*) tertentu misalnya $\alpha=0,05$. Jika koefisien korelasi lebih besar dari koefisien korelasi dari r -table, dapat dinyatakan koefisien korelasi butir signifikan dan butir tersebut valid secara empiris.

8.3 Uji Reabilitas

Reabilitas berasal dari kata *reliability* artinya hasil pengukuran yang dipercaya, artinya pada beberapa kali penghitungan terhadap kelompok subjek yang sama, diperoleh penghitungan yang sama, selama komponen yang diukur dalam diri subjek tidak berubah. Reabilitas sebagai ukuran terkait dengan seberapa jauh skor deviasi individu, atau skor-z, relatif tetap apabila dilakukan pengulangan proses dengan tes yang mirip (Ida and Musyarofah, 2021).

Azwar (2003) menuliskan bahwa reabilitas sebagai ciri utama instrumen penghitungan yang baik. Arifin (1991) mengatakan tes dikatakan *reliable* jika dapat menyertakan perolehan yang identik jika diteskan pada kumpulan yang identik. Sudjana (2004) menuliskan reabilitas sebagai ketepatan atau keajegan alat dalam menilai apa yang dinilainya.

Djaali (2000) menuliskan bahwa ada dua macam reabilitas, yaitu reabilitas konsistensi tanggapan dan reabilitas konsistensi gabungan butir. Koefisien reabilitas konsistensi gabungan butir untuk skor butir dikotomi diperhitungkan dengan rumus *Kuder-Richardson* atau *KR-20* (Djaali, 2000):

$$KR - 20 = \frac{k}{k - 1} \left(1 - \frac{\sum p_i q_i}{S_t^2} \right)$$

Keterangan:

k : cacah butir

$p_i q_i$: varians skor butir

p_i : proporsi jawaban yang benar untuk butir nomor i

q_i : proporsi jawaban yang salah untuk butir nomor i

S_t^2 : varians skor total responden

Koefisien reabilitas gabungan butir skor butir politomi maka koefisien reabilitas diperhitungkan dengan koefisien *Cronbach's Alpha* (Djaali, 2000) rumus:

$$r_{ii} = \frac{k}{k - 1} \left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right)$$

Keterangan:

r_{ii} : koefisien reabilitas

k : cacah butir

s_i^2 : varians skor butir

s_t^2 : varians skor total responden

Instrumen dinyatakan dapat dipercayakan (*reliable*), jika perolehan nilai *Cronbach's alpha* > 0,60 (Ghozali, 2016). Maka kriteria keputusan pada uji reabilitas sebagai berikut:

- Jika nilai *Cronbach's alpha* > 0,60, maka item pada kuesioner dapat diandalkan (*reliable*)
- Jika nilai *Cronbach's alpha* < 0,60, maka item pada kuesioner tidak dapat diandalkan (*reliable*)

8.4 Studi Kasus

Berikut ini terdapat tujuh buah item dari kuesioner yang akan diuji validitas dan reabilitasnya.

No Resp	Butir Kuesioner							Total
	1	2	3	4	5	6	7	
1	2	3	2	2	2	4	5	20
2	4	5	4	4	4	4	2	27
3	1	1	3	3	3	3	2	16
4	2	2	2	2	2	4	4	18
5	3	3	3	4	4	4	4	25
6	2	3	3	4	4	3	3	22
7	3	3	3	1	3	3	3	19
8	4	3	4	4	5	4	5	29
9	3	3	2	4	3	3	2	21
10	4	4	4	3	5	4	4	28

Uji validitas pada butir 1

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{n \sum X_1 Y - (\sum X_1)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\
 &= \frac{10(667) - (28)(225)}{\sqrt{(10(88) - 28^2) - (10(5245) - 225^2)}} \\
 &= \frac{370}{418,569} \\
 &= 0,884
 \end{aligned}$$

Uji validitas pada butir 2

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{n \sum X_2 Y - (\sum X_2)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\
 &= \frac{10(707) - (30)(225)}{\sqrt{(10(100) - 30^2) - (10(5245) - 225^2)}} \\
 &= \frac{320}{427,2002} \\
 &= 0,7491
 \end{aligned}$$

Uji validitas pada butir 3

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{n \sum X_3 Y - (\sum X_3)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_3^2 - (\sum X_3)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\
 &= \frac{10(700) - (30)(225)}{\sqrt{(10(96) - 30^2) - (10(5245) - 225^2)}} \\
 &= \frac{250}{330,9078} \\
 &= 0,7555
 \end{aligned}$$

Uji validitas pada butir 4

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{n \sum X_4 Y - (\sum X_4)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_4^2 - (\sum X_4)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\
 &= \frac{10(723) - (31)(225)}{\sqrt{(10(107) - 31^2) - (10(5245) - 225^2)}} \\
 &= \frac{255}{446,0101} \\
 &= 0,5717
 \end{aligned}$$

Uji validitas pada butir 5

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{n \sum X_5 Y - (\sum X_5)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_5^2 - (\sum X_5)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\
 &= \frac{10(825) - (35)(225)}{\sqrt{(10(133) - 35^2) - (10(5245) - 225^2)}} \\
 &= \frac{375}{437,7499} \\
 &= 0,8567
 \end{aligned}$$

Uji validitas pada butir 6

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{n \sum X_6 Y - (\sum X_6)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_6^2 - (\sum X_6)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\
 &= \frac{10(822) - (36)(225)}{\sqrt{(10(132) - 36^2) - (10(5245) - 225^2)}} \\
 &= \frac{120}{209,2845} \\
 &= 0,5734
 \end{aligned}$$

Uji validitas pada butir 7

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{n \sum X_7 Y - (\sum X_7)(\sum Y)}{\sqrt{(n \sum X_7^2 - (\sum X_7)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\
 &= \frac{10(801) - (35)(225)}{\sqrt{(10(133) - 35^2) - (10(5245) - 225^2)}} \\
 &= \frac{135}{437,7499} \\
 &= 0,3084
 \end{aligned}$$

Selanjutnya bandingkan perolehan r hitung dengan r tabel, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukan df (*degree of freedom*), pada studi kasus ini ada $N=10$, maka nilai df nya adalah $df=N-2=10-2=8$
2. Ambil r table dengan $df=8$, dengan signifikansi 0,05 atau 5%.

Tabel R-Hitung

DF = n-2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
	r 0,005	r 0,05	r 0,025	r 0,01	r 0,001
1	0,9877	0,9969	0,9995	0,9999	1,0000
2	0,9000	0,9500	0,9800	0,9900	0,9990
3	0,8054	0,8783	0,9343	0,9587	0,9911
4	0,7293	0,8114	0,8822	0,9172	0,9741
5	0,6694	0,7545	0,8329	0,8745	0,9509
6	0,6215	0,7067	0,7887	0,8343	0,9249
7	0,5822	0,6664	0,7498	0,7977	0,8983
8	0,5494	0,6319	0,7155	0,7646	0,8721
9	0,5214	0,6021	0,6851	0,7348	0,8470
10	0,4973	0,5760	0,6581	0,7079	0,8233

Dari table tersebut diperoleh nilai r tabel = 0,6319

3. Bandingkan dengan semua nilai dari hasil perhitungan yang dilakukan. Suatu pernyataan dikatakan valid jika r tabel $< r$ hitung, berarti:
 - a. Pada butir 1 , karena r tabel $< r$ hitung, $0,6319 < 0,884$, dinyatakan butir 1 valid.
 - b. Pada butir 2 , karena r tabel $< r$ hitung, $0,6319 < 0,7491$, dinyatakan butir 2 valid.
 - c. Pada butir 3 , karena r tabel $< r$ hitung, $0,6319 < 0,7555$, dinyatakan butir 3 valid.
 - d. Pada butir 4 , karena r tabel $> r$ hitung, $0,6319 > 0,5717$, dinyatakan butir 4 tidak valid.

- e. Pada butir 5 , karena $r \text{ tabel} < r \text{ hitung}$, $0,6319 < 0,8567$, dinyatakan butir 5 valid.
- f. Pada butir 6 , karena $r \text{ tabel} > r \text{ hitung}$, $0,6319 > 0,5734$, dinyatakan butir 6 tidak valid.
- g. Pada butir 7 , karena $r \text{ tabel} > r \text{ hitung}$, $0,6319 > 0,3084$, dinyatakan butir 7 tidak valid.

Uji Reabilitas

Reabilitas pada studi kasus ini diproses pada butir yang valid yaitu pada butir 1, 2, 3, dan 5, menggunakan koefisien Alpha diperoleh:

$$\begin{aligned}
 r_{ii} &= \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right) \\
 &= \frac{4}{4-1} \left(1 - \left(\frac{1,067 + 1,111 + 0,667 + 1,167}{12,011} \right) \right) \\
 &= 1,333(0,666) = 0,888
 \end{aligned}$$

Dari perhitungan diperoleh nilai reabilitas sebesar 0,7466. Karena nilai reabilitas $0,7466 > 0,3120$ ($r \text{ table}$) maka dapat dinyatakan bahwa kuesioner tersebut dinyatakan terpercaya sebagai instrument yang *reliable*.

DAFTAR PUSTAKA

- Arifin, Zainal. (1991) 'Evaluasi Instruksional. Prinsip-teknik Prosedur', Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Azwar, Saifuddin. (2003) 'Sikap Manusia Teori dan Pengukurannya', Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Djaali, Pudji Muljono, Ramly (2000) 'Pengukuran Dalam Pendidikan', Jakarta: Program Pascasarjana.
- Ghozali, I. (2016) 'Aplikasi Analisis Multivariate dengan Program IBM SPSS 23, Edisi 8', Semarang: Badan Penerbit Universitas Diponegoro.
- Hamni, N. F. (2019) 'Konsep Instrumen Penelitian Pendidikan', *Journal Pendidikan dan Kebudayaan*, (May 2007), pp. 59–75.
- Ida, F. F. and Musyarofah, A. (2021) 'Validitas dan Reliabilitas dalam Analisis Butir Soal', *Al-Mu'Arrib: Journal of Arabic Education*, 1(1), pp. 34–44. doi: 10.32923/al-muarrib.v1i1.2100.
- Intang, S. B. (2007) 'Konsep Instrumen Penelitian Pendidikan', *Jurnal Pendidikan dan Kebudayaan*, 1(66), pp. 379–391.
- Matondang, Z. (2009) 'Validitas dan Reliabilitas Suatu Instrumen Penelitian', *Jurnal Tabularasa PPS Unimed*, 9(1), pp. 87–97. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.496-500.1510.
- Nurkancana, Wayan. PPN. (1992) 'Evaluasi Hasil Belajar', Surabaya: Usaha Nasional.
- Nur, Mohamad. (1987) 'Teori Tes', Surabaya: IKIP Surabaya.
- Silverius, Suke. (1991) 'Evaluasi Hasil Belajar dan Umpan Balik', Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.
- Sudjana, Nana. (2004) 'Penilaian Hasil Proses Belajar Mengajar', Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Suryabrata, Sumadi. (2020) 'Pengembangan Alat Ukur Psikologis', Yogyakarta: Andi.
- Yusup, F. (2018) 'UJI VALIDITAS DAN RELIABILITAS INSTRUMEN PENELITIAN KUANTITATIF', *Jurnal Tarbiyah: Jurnal Ilmiah Kependidikan*, 7(1), pp. 17–23. doi: 10.21831/jorpres.v13i1.12884.

BIODATA PENULIS



Bernadhita Herindri Samodera Utami, S.Si., M.Sc.

Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Lampung

Penulis lahir di Bantul, DIY pada 30 Juni 1992 dan dibesarkan oleh orangtua yang berprofesi sebagai guru. Hal ini juga yang memotivasi penulis untuk bercita-cita sebagai guru/pengajar pada masa kecil. Penulis lulus dari jurusan S1 Matematika FMIPA Universitas Lampung pada tahun 2014. Selanjutnya, penulis menamatkan S2 Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada pada tahun 2016. Pada tahun 2017-2022, penulis menjadi dosen tetap yayasan di STMIK Pringsewu, Lampung. Selanjutnya pada tahun 2022-2023, penulis menjadi dosen di Institut Bakti Nusantara (modifikasi STMIK Pringsewu). Pada tahun 2023-sekarang, penulis menjadi dosen di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Lampung mengampu mata kuliah Statistika Dasar, Statistika Matematika, Pengantar Model Linier, dan Sains Komputasi.

BIODATA PENULIS



Dr. Wahyuni Ekasasmita, S.Pd., M.Sc

Dosen Program Studi matematika

Jurusan Sains Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir di Bone tanggal 13 April 1991. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika Jurusan Sains Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika Bilingual Universitas Negeri Makassar, S2 pada Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada dan melanjutkan S3 pada Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin. Penulis menekuni bidang Menulis di bidang Matematika dan Matematika Aktuaria.

BIODATA PENULIS



Ahmad Fajri S, S.Si., M.Si.

Dosen Program Studi Matematika

Jurusan Sains Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir di Benteng, Kepulauan Selayar, Sulawesi Selatan pada tanggal 8 Mei 1995. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika, Jurusan Sains, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor dan melanjutkan Pendidikan S2 pada Departemen Matematika Terapan, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor. Penulis menekuni bidang menulis di bidang Matematika.

BIODATA PENULIS



Riza Sawitri, S.Pd., M.Sc.

Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Lampung

Penulis lahir di Purworejo tanggal 4 Mei 1989. Penulis adalah dosen tetap pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Semarang tahun 2011 dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada.

BIODATA PENULIS



Drs. Dwi Herinanto, S.E., S.Si., M.M., M.H., M.Si.

Dosen Program Studi Sistem Informasi
Fakultas Teknologi dan Ilmu Komputer
Institut Bakti Nusantara

Drs. Dwi Herinanto, S.E., S.Si., M.M., M.H., M.Si. lahir di Grobogan, 8 September 1965. Penulis meraih (Drs.) dari Prodi Pendidikan Matematika S1 IKIP PGRI Yogyakarta lulus tahun 1990. Penulis meraih (S.Si.) dari prodi Statistika S1 Universitas Terbuka pada tahun 2002. Pada tahun 2004, penulis meraih (S.E.) dari prodi Manajemen S1 Universitas Terbuka. Penulis meraih (M.Si.) dari Magister Matematika (Konsentrasi Statistika) Universitas Lampung pada tahun 2016. Pada tahun 2019, penulis berhasil meraih (M.H.) dari Magister Hukum (Hukum Bisnis) Universitas Bandar Lampung. Selanjutnya, pada tahun 2021 penulis menyelesaikan Magister Manajemen (M.M.) di Institut Bisnis dan Informatika Darmajaya Bandar Lampung.

Penulis pernah menjadi Guru Tetap Yayasan Xaverius Tanjungkarang ditempatkan pada unit kerja SMP Xaverius Pringsewu mengajar bidang studi matematika tahun 1992-2000 kemudian ditempatkan pada unit kerja SMP Xaverius Pagelaran pada tahun 2000-2018. Selain itu, penulis aktif menjadi mitra Badan Pusat Statistik untuk melaksanakan kegiatan Sensus Penduduk, Sensus Pertanian, Sensus Ekonomi, Susenas, Sakernas, Supas, Podes, dan pemetaan blok sensus di Kabupaten Pringsewu sejak tahun 1998-

2011. Penulis juga berpengalaman menjadi dosen tutorial S1 PGSD dan S1 Penyuluh Pertanian mengajar mata kuliah Statistika Non Parametrik di Universitas Terbuka sejak tahun 2002-2014.

Saat ini penulis menjadi dosen tetap di Institut Bakti Nusantara provinsi Lampung. Penulis mengajar mata kuliah Statistika dan Probabilitas serta Aljabar Linier Elementer di Fakultas Teknologi dan Ilmu Komputer, Institut Bakti Nusantara.

BIODATA PENULIS



Miftahulkhairah, M.Sc.

Dosen Program Studi Matematika

Jurusan Sains Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir di Bulukumba tanggal 22 September 1988. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika UNM dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika UGM.

BIODATA PENULIS



Dr. Agus Irawan, S.Pd., M.Si.

Dosen Program Studi Sistem Informasi

Fakultas Teknologi dan Ilmu Komputer, Institut Bakti Nusantara

Penulis lahir di Pringsewu. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sistem Informasi, Fakultas Teknologi dan Ilmu Komputer, Institut Bakti Nusantara. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Pringsewu Lampung, melanjutkan S2 pada Program Studi Matematika Universitas Lampung dan S3 Program studi doktor Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan bidang peminatan Matematika di Universitas Lampung. Semenjak kuliah, penulis aktif mengajar matematika dan fisika di SMP, SMA dan SMK. Pada tahun 2016 penulis menjadi Dosen tetap di STMIK Pringsewu, yang saat ini menjadi Institut Bakti Nusantara. Penulis mengampu mata kuliah Statistik Deskriptif, Statistik dan Probabilitas, Aljabar Linear dan Matematika Ekonomi.

BIODATA PENULIS



Rahma Faelasofi, S.Si., M.Sc.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan UMPRI

Penulis adalah Rahma Faelasofi, lahir di Tanjung Karang Barat pada tanggal 2 Februari 1985, merupakan anak keempat dari lima bersaudara, dari pasangan H. Sunanto (alm) dan Hj. Siti Chotijah. Semasa kecil melewati jenjang Pendidikan di SD N 8 Gedong Air pada tahun 1991 – 1997, SMP N 16 Bandar Lampung 1998 – 2000, SMA N 3 Bandar Lampung 2001 – 2003, selanjutnya melanjutkan S1 di Universitas Lampung tahun 2004 – 2007 dan melanjutkan S2 di Universitas Gadjah Mada pada tahun 2008 – 2010. Riwayat pekerjaan adalah dosen tetap di Universitas Muhammadiyah Pringsewu (UMPRI) pada tahun 2010 sampai sekarang. Amanah yang pernah diemban adalah sebagai staf Pusat Penjaminan Mutu 2014 - 2018, kepala Pusat Penjaminan Mutu 2018 – 2019, dan Dekan FKIP UMPRI tahun 2019-2023. Saat ini, penulis sedang menempuh studi lanjut S3 di Universitas Lampung.