

PENGANTAR APLIKASI MAPLE

Wira Bahari Nurdin



GET PRESS INDONESIA

PENGANTAR APLIKASI MAPLE

Penulis: Wira Bahari Nurdin

ISBN:

Editor : Mila Sari, M.Si.

Penyunting: Yuliatrini Novita, M.Hum.

Desain Sampul dan Tata Letak : Tri Putri Wahyuni, S.Pd.

Penerbit: GETPRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi:

Jl. Palarik RT 01 RW 06, Kelurahan Air Pacah
Kecamatan Koto Tangah, Padang, Sumatera Barat

website: www.getpress.co.id
email: adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, Mei 2024

Hak cipta dilindungi undang-undang
dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Buku ini merupakan pengantar dalam penggunaan program komputer Maple. Dengan munculnya komputer yang cepat dan murah, program aplikasi seperti Maple akan menggantikan kalkulator tangan dan buku pegangan matematika (seperti tabel integral) untuk sebagian besar pembelajar fisika. Departemen Fisika telah melihat kemampuan aplikasi ini, sehingga buku ini diciptakan untuk memberikan pengenalan kepada mahasiswa tentang penggunaan program.

Hal berikut dalam buku ini adalah bagaimana buku ini digunakan dalam praktikum yang menjalankan program Maple. Peserta praktikum dapat mengerjakan bab-bab dalam buku catatan yang dibantu oleh instruktur dan asisten praktikum. Soal yang ditugaskan untuk setiap periode laboratorium berdurasi 3 jam diberikan dalam bab terakhir buku ini dalam bentuk tugas laboratorium. Kuliah hanya akan menjadi jawaban atas pertanyaan yang sedikit terlihat. Tidak ada ujian dan pekerjaan rumah tertulis yang terdapat dalam buku ini. Setelah semua soal yang diberikan telah diselesaikan, peserta menghubungi asisten dan menunjukkan kepada mereka yang telah dilakukan. Untuk fisika lanjutan terdapat tiga proyek: dengan mengerjakan tiga masalah pekerjaan rumah yang signifikan dari kursus matematika atau fisika menggunakan lembar kerja Maple. Sebaiknya tanyakan kepada asisten atau instruktur sebelumnya untuk melihat signifikansi dari masalah yang ditemukan. Terdapat poin ekstra untuk tingkat kesulitan.

Untuk membantu masalah terdapat indeks hyperlink ke topik Maple di bagian berikutnya. Selain itu, untuk menemukan kata atau frasa tertentu dalam teks ini dapat dilakukan dengan menggunakan pilihan Find di bawah item Edit pada bilah alat. Ketika terjadi kesalahan, terdapat dua bagian koreksi (debugging). Salah satunya ada di Bab 1 di mana proses debugging diperkenalkan. Yang kedua adalah setelah Bab 9 dimana kesalahan spesifik dan solusinya diilustrasikan dan didiskusikan.

Akhirnya penulis sangat senang jika ada seseorang yang bersedia mengoreksi tentang kesalahan dalam teks atau masalah dengan Maple yang terdapat dalam buku ini. Kesalahan teks yang akan diperbaiki dan masalah Maple akan ditambahkan ke bagian Debugging di akhir buku.

Padang, Mei 2024
Penulis

DAFTAR ISI

KATA Pengantar	i
DAFTAR ISI	ii
BAB 1 Bagian Awal	1
1.1 Eksekusi Grup dan Paragraf.....	1
1.2 Petunjuk Praktis Cara Membuat Worksheet	2
1.3 Bantuan Online.....	4
1.4 Konstanta khusus.....	4
1.5 Nama Variabel.....	5
1.6 Apa yang dinyatakan oleh sebuah variabel?.....	6
1.7 Cara memperoleh jawaban.....	9
1.8 Debugging	9
1.9 Materi yang bisa digunakan sekarang.....	12
 BAB 2 Membuat Plot.....	 19
2.1 Membuat Plot x-y	19
2.2 Tinjauan Fungsi Dasar.....	21
2.3 Analisis Fourier.....	23
2.4 Plotting Data.....	25
2.5 Plot Parametrik.....	27
2.6 Fungsi Spesial	29
2.7 Animasi.....	33
2.8 Memvisualisasikan Bidang Vektor	36
2.9 Plot Permukaan 3D dan Plot Kontur	36
 BAB 3 Kalkulus.....	 39
3.1 Limit	39
3.2 Diferensiasi.....	39
3.3 Integrasi.....	43
3.4 Ekspansi Seri.....	51
3.5 Penjumlahan	55
 BAB 4 Bilangan Kompleks dan Fungsi	 57
4.1 Aritmatika Kompleks.....	57
4.2 Fungsi Kompleks Dasar	61

4.3	Fungsi Kompleks Khusus	64
4.4	Interferensi Gelombang.....	64
4.5	Elektrostatika dengan Muatan Listrik.....	69
BAB 5	Aljabar Linier.....	72
5.1	Matriks, Vektor, dan Operasi Dasar	72
5.2	Memecahkan Sistem Persamaan Linear.....	76
5.3	Vectors: Dot and Cross Products.....	77
5.4	Nilai Eigen dan Vektor Eigen	77
5.5	Kalkulus Vektor: Grad, Div, dan Curl	79
BAB 6	Menyelesaikan Persamaan.....	82
6.1	Persamaan dalam Satu Variabel.....	82
6.2	Sistem Persamaan.....	84
BAB 7	Persamaan Diferensial Biasa	87
7.1	Persamaan Diferensial Orde Pertama.....	87
7.2	Persamaan Diferensial Orde Kedua	89
7.3	Sistem Persamaan Diferensial.....	92
7.4	Persamaan Diferensial Numerik	94
7.5	Apa yang dimaksud dengan Persamaan Diferensial?	99
7.6	Dinamika dan Gangguan Nonlinier	102
BAB 8	Pemrograman - Logika, Loop, dan Prosedur	105
8.1	Logika: if-then-else-end if.....	105
8.2	Loops: for-do-end do-while-break	108
8.3	Prosedur: Menempatkan Loop dan Logika untuk Bekerja	112
8.4	Contoh: Memplot Hasil dari fsolve	115
BAB 9	Aljabar Simbolik	118
9.1	Aljabar pada Matriks Penuh dengan Ekspresi	123
	Referensi.....	140
	Debugging.....	130
	Uji Kompetensi	140

BAB 1

BAGIAN AWAL

1.1 Eksekusi Grup dan Paragraf

Hal pertama yang akan diperhatikan saat menggunakan Maple adalah adanya tanda kurung siku di paling kiri dan tanda > di dalamnya. Kedua simbol ini adalah bagian paling dasar dari antarmuka pengguna grafis Maple. Ruang jendela yang ditandai dengan tanda kurung siku disebut grup eksekusi dan semuanya terjadi di dalam grup tersebut. Dalam Maple semua yang ada sebelum tanda > adalah teks atau persamaan, dan bagian yang muncul setelahnya adalah kode Maple yang akan dieksekusi untuk menyelesaikan masalah yang umumnya berwarna merah. Hasil keluaran dari Maple akan dicetak setelahnya yang umumnya berwarna biru. Untuk mencobanya gunakan fungsi sinus berikut,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

```
> sin(Pi/4);
```

Tujuan dari bagian teks adalah untuk mendokumentasikan apa yang akan dilakukan. Kelompok eksekusi adalah subunit yang disebut paragraf. Sebuah paragraf mungkin merupakan bagian dari teks, perintah Maple, atau hasil Maple. Cara termudah untuk melihat paragraf adalah dengan mengklik ikon paragraf kecil yang terlihat di bilah alat (*tools*). Ini akan mencetak karakter khusus di lembar kerja dan akan menunjukkan di mana paragraf berada.

Perhatikan bahwa Maple mengharuskan setiap pernyataan yang dapat dieksekusi diakhiri dengan tanda titik koma atau titik dua. Dengan menggunakan titik koma (;) maka baris akan dieksekusi dan Maple akan menampilkan hasilnya. Untuk tanda titik dua (:) maka baris akan dieksekusi juga, tetapi tidak ada hasil yang ditampilkan.

Bila terdapat kesalahan cara mengatasinya adalah dengan membersihkannya menggunakan perintah Hapus Paragraf di menu Edit pada bilah alat, atau cukup dengan mengetik Ctrl-Del. Cara lainnya adalah menyorot teks yang akan dihapus dengan mengeklik dan menahan di awal teks lalu menyeret kursor untuk menyorot semua yang harus dihapus. Kemudian tekan

Delete.

Maple memungkinkan untuk melakukan lebih dari satu perhitungan di dalam grup eksekusi yang dapat dilakukan dengan beberapa perintah pada satu baris yang dipisahkan oleh titik koma, atau beberapa perintah yang ditumpuk secara vertikal, masing-masing dengan tanda $>$. Untuk mendapatkan ekstra $>$, cukup dengan menggerakkan kursor ke kiri $>$ pertama lalu menekan Enter. Simbol # dapat digunakan untuk menambahkan baris komentar.

```
> 1+1; 2+2; 3+3; #tiga tambahan berturut-turut
> 1+1;
> 2+2;
> 3+3;
```

Untuk pengenalan yang lebih menyeluruh tentang pengelolaan jendela dengan mengeklik Bantuan dan mencoba Tur Pengguna Baru. Untuk menutup layar Bantuan, menggunakan Ctrl-F4 atau X di sudut kanan atas jendela (di Windows).

Soal 1.1

Buatlah grup eksekusi dan dokumentasikan sebelum tanda $>$ dengan frasa: Tambahkan bilangan bulat dari 1 hingga 10. Kemudian buat baris perintah Maple untuk mendapatkan jawaban $1 + 2 + 3 + \dots + 10$.

1.2 Petunjuk Praktis Cara Membuat Lembar Kerja (Worksheet)

Untuk membuat grup eksekusi dengan menggunakan alternatif Ctrl-j untuk membuat satu setelah paragraf grup eksekusi tempat kursor berada dan alternatif Ctrl-k untuk membuat satu sebelum paragraf grup eksekusi tempat kursor berada.

Untuk menambahkan $>$ yang lain ke grup eksekusi dengan menggunakan tombol panah atau mouse, untuk memindahkan kursor ke kiri $>$ yang sudah ada di grup.

Untuk membuat paragraf teks di dalam grup eksekusi dengan alternatif Shift-Ctrl-j yang membuat satu setelah kursor dan alternatif Shift-Ctrl-k yang membuat satu sebelum kursor.

Untuk menyelipkan paragraf teks di antara dua grup eksekusi dengan

mengklik pada [besar di sebelah kiri grup maka akan menjadi garis ganda, lalu mengetik alternatif Shift-Ctrl-k untuk mendapatkan satu sebelumnya, dan alternatif Shift-Ctrl-j untuk mendapatkan satu setelahnya.

Untuk menghapus paragraf atau grup eksekusi dengan meletakkan kursor di paragraf atau grup eksekusi yang akan dihapus dan ketik Ctrl-Del. Cara Memasukkan persamaan atau ekspresi dalam teks yaitu dengan mengklik "Sigma" pada toolbar (bilah alat) atau mengetik alternatif Ctrl-r lalu perhatikan persamaan yang diketik di jendela bilah alat. Sintaks untuk memasukkan matematika typeset adalah sintaks Maple sendiri. Misalnya, untuk menampilkan integral fungsi sinus dari 0 hingga 1, $\text{int}(\sin(x), x=0..1)$ lalu dengan Ctrl-r diaktifkan, seperti ini

$$\int_0^1 \sin(x) dx$$

Untuk kembali ke mode teks dengan mengklik T pada bilah alat atau menggunakan alternatif Ctrl-t. Pada beberapa sistem perlu untuk mengklik tanda centang dua tombol di sebelah kiri jendela penyisipan matematika pada bilah alat, diikuti dengan Ctrl-t (atau mengklik T).

- Untuk memisahkan atau menggabungkan grup eksekusi terdapat pada menu Edit pada toolbar.
- Untuk menghapus semua output Maple dari lembar kerja terdapat pada menu Edit.
- Untuk menutup semua bagian dan subbagian dalam lembar kerja terdapat pada bagian bawah menu View pada toolbar.
- Untuk menghapus output dan menutup semua bagian sepenuhnya mengembalikan buku ini ke kondisi aslinya.

Trik menarik lainnya adalah dengan menjelajahi bilah alat :

- (a) Ubin di menu Jendela memungkinkan untuk melihat lembar kerja dan melakukan tugas di jendela berdampingan.
- (b) Mendapatkan teks tebal, miring, dan bergaris bawah dengan B, I, dan u di bilah alat.
- (c) Menggunakan ikon kaca pembesar pada bilah alat untuk mengubah ukuran jenisnya.
- (d) Perhatikan ikon panah melengkung pada toolbar yang berfungsi membatalkan operasi terakhir dan mengulang pembatalan terakhir.
- (e) Tanda berhenti akan mematikan perhitungan yang sudah berlangsung begitu lama.

Soal 1.2

Buka lembar kerja baru. Di bagian atas lembar kerja, di atas grup eksekusi pertama, buka beberapa ruang putih dan beri judul tebal yang bertuliskan Soal 1.2.

Di bawah judul ini, dalam huruf miring, tuliskan nama masing-masing. Kemudian perluas grup eksekusi sehingga berisi empat tanda > dan letakkan baris komentar yang bertuliskan "Komentar 1", "Komentar 2", dll., di atas masing-masing >.

1.3 Bantuan Online

Cara menggunakan bantuan online dalam program, yaitu dengan mengklik ikon Bantuan di bagian atas halaman. Adapun cara yang lebih cepat untuk mendapatkan bantuan langsung di permintaan Maple: cukup gunakan tanda tanya. Misalnya,

```
> ?ifactor;  
> ifactor(5040);
```

Soal 1.3

Gunakan bantuan online untuk menemukan perintah Maple terkait cara mengintegrasikan suatu fungsi dan mengambil turunan dari suatu fungsi.

Soal 1.4

Gunakan bantuan online untuk menemukan perintah Maple terkait cara mengambil turunan kedua dari suatu fungsi.

1.4 Konstanta Khusus

Ada beberapa konstanta yang dimuat dalam Maple yang berguna untuk fisika, yaitu:

```
> Pi;I;infinity;
```

Pi adalah angka Pi untuk angka penting sebanyak yang diinginkan. Untuk melihat digitnya, dengan menggunakan perintah Maple `evalf` untuk mengonversi angka ke bentuk floating point

```
> evalf(Pi,100);
```

I adalah unit imajiner, yaitu $I = \sqrt{-1}$

```
> sqrt(-5);
```

infinity bukan angka, dan hanya masuk akal dalam limit, seperti

```
> limit(exp(-x),x=infinity);
```

atau

```
> sum('1/2n', 'n'=1..infinity);
```

Soal 1.5

Bandingkan perintah Maple `cos(pi)` dan `cos(Pi)` dengan mencobanya di grup eksekusi. Jelaskan mengapa mereka tidak berperilaku dengan cara yang sama.

Soal 1.6

Hitung masalah pembagian kompleks $(3 + 4i)/(7 - 6i)$ dalam grup eksekusi Maple.

Soal 1.7

Hitung limit, saat x mendekati tak terhingga, dari ekspresi $\frac{3-5x}{7+3x}$ menggunakan grup eksekusi Maple.

1.5 Nama Variabel

Seperti semua bahasa komputer modern lainnya, Maple memungkinkan untuk memberi nama variabel apa saja yang diinginkan, dengan beberapa pengecualian. Dalam C dan Fortran, misalnya, tidak dapat menggunakan "sin" sebagai nama variabel karena nama ini dicadangkan untuk fungsi sinus. Dalam Maple terdapat sekitar 3000 perintah yang namanya dicadangkan untuk penggunaan sistem. Perhatikan contoh berikut.

```
>
Newtons_Gravitational_Constant*Mass_1*Mass_2/Distance_Between_The_Masses^2;
```

Cara tersebut akan menghabiskan banyak waktu dalam pemrograman mengetik kode dan membaca kode yang telah diketik, lebih baik menggunakan cara berikut

```
> G*m1*m2/r12^2;
```

Maple memiliki kemampuan untuk melangkah lebih jauh menuju gaya fisika standar karena memiliki huruf Yunani. Untuk mendapatkannya cukup dengan menuliskan dalam bahasa Inggris, seperti pada contoh di bawah ini.

```
> alpha*beta/delta;
```

Huruf kapital Yunani juga tersedia, seperti pada contoh berikut

```
> Alpha*A;Beta+B;Chi/Gamma;
```

Namun tidak semua huruf kapital Yunani diproduksi dengan cara tersebut, misalnya

```
> CHI;
```

Perhatikan bahwa beberapa tidak tersedia untuk digunakan:

```
> gamma:=4;Chi:=3;
```

Hindari menempatkan subskrip pada variabel, meskipun kemampuan pengaturan huruf Maple memungkinkan untuk dilakukan. Misalnya untuk variabel x_1 dan x_2 yang didapatkan dengan melakukan kode berikut

```
> x[1]:=1;x[2]:=2;
```

Namun perhatikan yang terjadi jika memberi x suatu nilai lalu menunjukkan display x_1

```
> x:=3;
```

```
> x[1];
```

Soal 1.8

Tetapkan variabel θ untuk memiliki nilai $5/3$ lalu gunakan perintah Maple $\cos(\theta)$ untuk memberi $\cos(5/3)$ sebagai angka floating point.

1.6 Apa yang dinyatakan oleh sebuah variabel?

Dalam bahasa komputasi standar seperti Fortran, C, dan variabel Matlab hanya dapat mewakili sejumlah hal yang berbeda, seperti bilangan bulat,

bilangan floating point, bilangan kompleks, dan string karakter, untuk menyebutkan hampir semuanya. Tetapi di Maple ada lebih dari 100 hal berbeda yang dapat diwakili oleh variabel. Misalnya, di Fortran atau Matlab pernyataan $a = 5$ akan menetapkan ke variabel a nilai 5. Tapi di Maple pernyataan

```
> a=5;
```

tidak mengerjakan tugas sama sekali. Maple mampu memecahkan persamaan ini dan menemukan bahwa a adalah 5, tetapi itu bukan pernyataan yang memberikan nilai. Agar Maple dapat bekerja secara langsung terhadap persamaan dengan ekspresi yang mengandung simbol $=$, yaitu dengan menetapkan variabel a menjadi sebuah nilai 5

```
> a:=5;
```

atau

```
> Eq:=a=5;
```

Soal 1.9

Pada lembar kerja yang bersih gunakan perintah Maple $b:=a=5$ dan kemudian gunakan perintah `type` untuk memeriksa tipe b dengan menggunakan perintah `type(b, integer)`, `type(b, float)`, dan `type(b, equation)`. Jelaskan mengapa hasil dari ketiga perintah ini masuk akal bagi Maple.

Bagian di bawah ini berisi contoh tipe data terpenting yang akan digunakan dalam buku ini.

1. Bilangan Kompleks

Perhatikan bahwa $I = \sqrt{-1}$.

```
> cn1:=(1+3*I)*(5-2*I);
```

2. Persamaan

```
> Eq1:=sin(x)=x;
```

3. Floating Point Numbers

Maple biasanya menyimpan 10 angka penting dalam perhitungan floating point (bilangan real). Tetapi angka ini dapat ditingkatkan dengan mengubah nilai digit konstanta Maple, seperti ini:

```
> f1:=4./3.;
```

```
> Digits:=50;
```

```
> f1:=4./3.;  
> Digits:=10;
```

4. Ekspresi dan Fungsi

Ekspresi adalah kombinasi dari variabel dan fungsi, misalnya

```
> Fn1:=cosh(x^3)/(1+x^2);
```

Fn1 akan berjalan jika x didefinisikan seperti ini

```
> x:=2.;
```

Lalu mengevaluasi Fn1

```
> Fn1;
```

Fungsi Maple didefinisikan dengan sintaks berikut

```
> Fn2:=x->cosh(x^3/(1+x^2));
```

```
> Fn2(2.);
```

Atau mendefinisikan fungsi dengan beberapa argumen seperti ini

```
> Fn3:=(x,y,z)->x*y^2*z^3;
```

```
> Fn3(1,2,3);
```

Ekspresi Maple terlihat seperti fungsi pada umumnya, sedangkan fungsi Maple adalah mesin yang menerima input dan memberikan output kembali.

5. Bilangan Bulat

```
> I1:=12345678987654321;
```

6. Matriks

```
> M1:=matrix([[1,2],[3,4]]);
```

7. Polinomial

```
> P1:=y^3+y^2+y-1;
```

8. Strings

```
> S1:="Mary had a little lamb.";
```

9. Vektor

```
> V1:=Vector([1,2,3]);
```

10. Lists and Sets

Daftar dalam Maple merupakan urutan angka, ekspresi, atau tipe data legal lainnya yang diapit dalam tanda kurung siku.

```
> s1:=[1,2,4,6,8,12];
```

```
> s2:=[seq(2*n^2-3*n+2,n=1..6)];
```

Elemennya dapat dirujuk dengan notasi subskrip kurung siku Maple

```
> s1[3];s2[2..5];
```

Set dalam Maple diapit dalam kurung kurawal. Perbedaan yang paling penting adalah bahwa daftar mungkin berisi elemen berulang, tetapi satu

set mungkin tidak. Set sering digunakan dalam argumen perintah Maple. Dalam contoh di bawah ini, perhatikan bahwa daftar tetap seperti yang ditentukan saat kumpulan diurutkan ulang dan direduksi menjadi elemen unik.

```
> s1:=[1,3,2,6,4,3,2];
> s2:={1,3,2,6,4,3,2};
```

1.7 Cara Memperoleh Jawaban

Misalkan untuk mengetahui sinus dari angka 1 dalam radian,

```
> restart;
> sin(1);
```

Maple mengalami masalah di sini karena tidak masuk akal untuk mengambil sinus dari konstanta bilangan bulat, sehingga ditambahkan titik desimal

```
> sin(1.);
```

Atau dengan perintah berikut

```
> sin(1);
> evalf(%);
```

Tanda % berarti hasil terakhir yang dihitung Maple, dalam hal ini `evalf` adalah singkatan dari "*evaluate as a floating point number*".

1.8 Debugging

Sering kali program yang dijalankan tidak berfungsi dengan baik. Keterampilan terpenting yang dapat dimiliki adalah kemampuan untuk mengetahui kekeliruan pada program. Berikut adalah beberapa tip awal untuk men-debug Maple. Informasi selengkapnya ada di bagian Debugging pada bagian akhir buku ini.

1. `evalf()`

Perhatikan fungsi berikut

$$\frac{\sin(a^2x^2)}{\sin(ax)^2}$$

Fungsi tersebut dapat didefinisikan menggunakan perintah `plot` Maple. Perintah `restart` berikut untuk memuat sintaks yang baru

```
> restart: f:=x-> sin(a^2*x^2)/sin(a*x)^2;
```

maka digunakan

```
> plot(f(x), x=-1..1);
```

Ketika dijalankan akan ditemukan sesuatu yang salah dengan fungsi $f(x)$. Ini dapat diantisipasi dengan menggunakan perintah `evalf`. Untuk mendapatkan petunjuk tentang apa yang salah dengan memeriksa nilai tertentu dari fungsi berikut

```
> evalf(f(1.));
```

Dengan memasukkan nilai a maka plot akan bekerja.

Berikut contoh lain. Misalkan untuk mencari nilai $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ maka dapat digunakan sebagai berikut

```
> sin(Pi/2.);
```

2. **check := vs =**

Tanda `=` hanya digunakan untuk mendefinisikan persamaan, tanda `:=` digunakan untuk mendefinisikan variabel, misal `a:=5`.

3. **plot (membuat gambar)**

Terkadang perlu untuk melihat lebih dari satu angka agar dapat melihat bagian yang salah, dan cara terbaik untuk melihat seribu angka adalah dengan membuat gambar. Misalnya, untuk integral berikut

```
> restart;
```

```
> int(sin(x)/(1-cos(x)), x=0..Pi);
```

Maple akan memberi tak terbatas. Untuk memeriksa fungsi tersebut dengan menggunakan argumen floating point seperti ini

```
> sin(1.)/(1-cos(1.));
```

Untuk memeriksa sejumlah besar nilai pada rentang integrasi, dengan membuat plot menggunakan plot perintah Maple:

```
> plot(sin(x)/(1-cos(x)), x=0..Pi);
```

Integran singular di $x = 0$, jadi Maple benar bahwa jawabannya tak terhingga. Membuat plot adalah cara yang bagus untuk melakukan debug.

4. **assume**

Terkadang Maple tidak dapat melakukan apa yang diinginkan untuk masalah tertentu karena Maple berpikir secara umum. Misalnya, integral berikut

```
> restart;
```

```
> int(exp(-a^2*x^2), x=0..infinity);
```

Hasil yang diinginkan adalah formula yang mengandung a , tetapi hasil yang keluar tidak sesuai dengan itu. Solusi dari masalah ini yaitu dengan menggunakan asumsi, misal

```
> assume(a, real);
```



```
> int(exp(-a^2*x^2), x=0..infinity);
```

Namun, setelah menggunakan asumsi pada suatu variabel mungkin akan terjadi kesulitan untuk mendapatkan hasil berupa angka. Dengan mengasumsikan sesuatu tentang variabel a , menggunakan variabel a dalam ekspresi tetapi menetapkan ke variabel lain (misalnya b), kemudian memberikan nilai, dan akhirnya mencoba mengevaluasi b .

Perhatikan:

```
> restart;
> assume(a, real);
> b:=cos(a);
> a:=2.;
> evalf(b);
```

Sekarang perhatikan apa yang terjadi pada urutan yang sama tanpa asumsi

```
> restart;
> b:=cos(a);
> a:=2.;
> evalf(b);
```

Pelajaran di sini ialah hanya menggunakan `assume` ketika benar-benar diperlukan. Terakhir, untuk mengasumsikan dua kondisi pada variabel, seperti $c > 0$ dan $c < 1$. Maple memungkinkan untuk dilakukan dengan dua cara, yaitu dapat menempatkan kedua kondisi di dalam satu perintah `assume` seperti ini

```
> assume(c>0, c<1);
```

atau dapat melakukannya dalam dua atau lebih langkah menggunakan `additionally`, seperti ini

```
> assume(c>0);
> additionally(c<1);
```

Alasan mengapa tidak bisa menggunakan dua perintah `assume` adalah bahwa setiap kali menggunakan asumsi pada variabel, itu akan menghapus semua asumsi sebelumnya yang ditetapkan pada variabel tersebut.

5. **restart** (*punt*)

Terkadang Maple mengalami kesulitan memberikan hasil yang diinginkan karena lembar kerja menjadi sangat berantakan dengan semua yang telah dilakukan dalam satu sesi. Misalkan dalam fungsi Bessel $J_0(x)$ dengan memeriksa beberapa nilai seperti ini

```
> restart;
> x:=1.5;BesselJ(0,x);
```

Dan kemudian setelah mencoba beberapa nilai yang berbeda dari x dilakukan plot fungsi seperti ini

```
> plot(BesselJ(0,x),x=0..5);
```

Maka hasilnya tidak akan sesuai. Jadi perlu untuk melakukan restart dengan perintah berikut

```
> restart: plot(BesselJ(0,x),x=0..5);
```

Perintah restart setara dengan Maple untuk me-reboot. Begitu pula bila menggunakan nama variabel yang tidak ditetapkan dapat berfungsi dengan baik.

```
> plot(BesselJ(0,t),t=0..5);
```

1.9 Materi yang bisa digunakan sekarang

1. Integrasi

Integrasi dilakukan dengan perintah `int`. Berikut integral tak tentu

$$\int e^{-x} \sin(x) dx$$

```
> restart;
> int(exp(-x)*sin(x),x);
```

dan

$$\int_0^1 e^{-x} \sin(x) dx$$

```
> s1:=int(exp(-x)*sin(x),x=0..1);
```

Untuk mendapatkan bentuk angka dengan menggunakan

```
> evalf(s1);
```

Inilah yang tidak bisa dilakukan Maple integral

```
> s2:=int(exp(-x^4)*cos(x),x=0..1);
> evalf(s2);
```

Soal 1.10

Temukan jawaban numerik untuk $\int_0^2 e^{\sqrt{x}} dx$. Beri komentar pada baris yang sama dengan perintah dengan notasi #.

2. Diferensiasi

Mengambil turunan dari suatu fungsi menggunakan `diff`

```
> restart;
> f:=sin(x)/sqrt(1+x^2);
> d1:=diff(f,x);
```

Untuk mendapatkan bentuk normal dapat diperoleh dengan cara berikut

```
> normal(d1);
```

Untuk mendapatkan turunan kedua, yaitu dengan

```
> d2:=diff(exp(-x)*tan(x),x$2);
```

Cara untuk menyederhanakan bentuknya dengan menggunakan perintah berikut

```
> simplify(d2);
```

Selanjutnya mengeluarkan faktor eksponensial persekutuan dengan

```
> factor(%);
```

dan kemudian mendapatkan polinomial $\tan(x)$ yang berada dalam urutan yang benar

```
> sort(%);
```

Menetapkan jawaban akhir, misal ke `d2`, dengan

```
> d2:=%;
```

Soal 1.11

Ambil turunan pertama dari fungsi $\cos(\cos(\cos(\cos(x))))$. Berikan komentar tentang apa yang dilakukan dalam teks di dalam grup eksekusi dan dengan menggunakan perintah `diff`.

3. Build a sequence

Dalam kalkulus, barisan bilangan yang dipelajari cenderung ke limit dan jumlah tak terhingga dari barisan tersebut. Dalam urutan Maple hal ini dibangun dengan perintah `seq`. Yang bekerja dengan cara berikut

```
> restart;
> s:=seq((5+n)/(3+n),n=1..50);
> evalf(s);
```

Petunjuk yang diberikan bahwa barisan tersebut mendekati limit 1.

Berikut adalah istilah dalam deret untuk fungsi eksponensial:

```
> seq(x^n/n!,n=1..20);
```

Soal 1.12

Hasilkan 15 suku pertama dari barisan yang ditentukan oleh

$$s_n = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\cos(x)}{1+x} \right)$$

Berikan komentar tentang apa yang dilakukan dalam teks dengan menggunakan perintah seq, tetapi dalam grup eksekusi yang sama.

4. Penjumlahan Seri

Untuk menemukan rumus untuk jumlah bilangan bulat yang dipangkatkan ke-6 menggunakan sum

```
> restart;
> s1:=sum(k^6, k=1..n);
```

Untuk menemukan hasil penjumlahan kebalikan dari bilangan bulat yang dipangkatkan ke-6 dari 1 ke ∞

```
> s2:=sum(1/n^6, n=1..infinity);
```

kemudian dengan mengubahnya menjadi nilai numerik dengan

```
> evalf(s2);
```

Soal 1.13

Temukan jumlah kebalikan kuadrat dari bilangan bulat ganjil dari 1 hingga ∞ . Berikan komentar tentang apa yang dilakukan di paragraf terpisah di atas dan di luar grup eksekusi yang berisi perintah sum.

5. Deret Taylor

Salah satu alat yang paling berguna yang digunakan oleh fisikawan untuk mendapatkan jawaban perkiraan untuk masalah yang sulit adalah deret Taylor. Fungsi apa pun $f(x)$ yang terdiferensiasi tak terhingga dapat didekati dalam lingkungan $x = a$ dengan suatu polynom dalam $(x - a)$ yang diberikan oleh rumus terkenal Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2/2! + f'''(a)(x - a)^3/3! + \dots$$

Ini sangat berguna dalam mendapatkan perkiraan. Misalnya, kuantitas

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

yang digunakan

```
> restart;
> taylor(1/sqrt(1-x^2), x, 5);
```

di mana angka 5 menunjukkan persyaratan melalui x^5 dalam ekspansi. Syarat $O(x^6)$ dalam jawaban berarti bahwa kesalahan dalam ekspansi ini adalah pangkat x^6 .

Soal 1.14

Temukan rumus perkiraan untuk fungsi $e^{\cos(x)}$ termasuk suku melalui x^{10} . Tampilkan koefisien deret dalam bentuk rasional dan floating point. Berikan komentar tentang apa yang dilakukan di paragraf teks di luar dan di bawah grup eksekusi yang berisi perintah taylor.

6. Fungsi Plot

Fungsi `plot` digunakan untuk mengetahui dengan cepat seperti apa beberapa fungsi yang dijalankan,

```
> restart;
> plot(exp(sin(x)), x=0..50);
```

Soal 1.15

Buatlah plot dari fungsi $e^{-\frac{x}{25}}\cos(x)$ dari $x = 0$ ke $x = 100$. Kemudian beri komentar tentang apa yang dilakukan dalam paragraf di antara dua grup eksekusi.

7. Menyelesaikan Persamaan Sulit

Untuk mendapatkan solusi dari $e^{-x} = x$ dengan menggunakan perintah `solve`

```
> restart;
> sol:=solve(exp(-x)=x, x);
> evalf(sol);
```

Untuk menyelesaikan persamaan ini secara numerik saja dengan menggunakan pemecah persamaan numerik `fsolve`, yang memberi tahu Maple untuk mulai mencari solusi di dekat $x = 1$

```
> fsolve(exp(-x)=x, x=1);
```

Soal 1.16

Temukan solusi dari persamaan $\cos(x) = x$. Berikan komentar tentang apa yang dilakukan dalam paragraf di dalam grup eksekusi tepat di atas perintah. Dalam paragraf teks ini gunakan mode matematika Maple (σ pada toolbar) untuk mencakup $\cos(x) = x$.

Maple juga dapat menyelesaikan persamaan secara simbolis. Sebagai contoh, berikut adalah bagaimana Maple menyelesaikan persamaan kuadrat secara simbolis:

```
> Q:=a*x^2+b*x+c=0;
> solve(Q, x);
```

Dan inilah solusi simbolis dari masalah umum dua persamaan, dengan x dan y tidak diketahui dan $a - f$ sebagai koefisien:

```
> E1:=a*x+b*y=e; E2:=c*x+d*y=f;
> solve(E1, E2, x, y);
```

8. Menyelesaikan Persamaan Diferensial

Misalkan dibutuhkan dua solusi mendasar dari persamaan diferensial orde kedua berikut

$$f'' + xf' + f = 0$$

di mana ' menunjukkan diferensiasi dengan x . Untuk itu digunakan perintah penyelesaian persamaan diferensial `dsolve`

```
> restart;
> dsolve(diff(f(x), x$2)+x*diff(f(x), x)+f(x)=0);
```

Variabel `_C1` adalah pengali arbitrer dari solusi fundamental pertama dan `_C2` adalah pengali dari yang kedua. Ini melibatkan fungsi $\operatorname{erf}(x)$.

Soal 1.17

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut

$$y' = x + y$$

Selanjutnya carilah nilai konstanta arbitrer dari kondisi $y(0) = 1$. Berikan komentar tentang apa yang dilakukan dalam paragraf teks di bawah dan di

luar grup eksekusi.

Maple juga dapat menangani kondisi awal, seperti menggunakan $f(0) = 1$ dan $\frac{\partial}{\partial x} f(0) = 2$:

```
> Eq:=diff(f(x), x$2)+x*diff(f(x), x)+f(x)=0;
> dsolve(Eq, f(0)=1, D(f)(0)=2, f(x));
```

9. Menangani Matriks dan Menyelesaikan Sistem Persamaan

Ada seluruh paket di Maple yang dikhususkan untuk matriks, vektor, dan aljabar linier. Perhatikan sistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 6 \\4x + 5y + 6z &= 15 \\7x + 8y + 10z &= 25\end{aligned}$$

yang telah dibangun dengan cermat sehingga solusinya adalah $[x, y, z] = [1, 1, 1]$. Menggunakan paket aljabar linier dengan menggunakan command `with(LinearAlgebra)`. Kemudian memuat matriks dengan perintah `Matrix`, memuat vektor sisi kanan dengan perintah `Vector`, dan terakhir menyelesaikan sistem dengan perintah `LinearSolve`.

```
> restart;
> with(LinearAlgebra);
A:=Matriks([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,10]]);
b:=Vektor([6,15,25]);
c:=Pemecahan Linier(A,b);
```

Soal 1.18

Jack dua kali lebih tua dari Jill. Umur Jill ditambah umur Jack sama dengan umur Joan. Jumlah ketiga umur mereka adalah 48. Berapa umur mereka masing-masing?

Selesaikan masalah ini dengan menyalin dan memodifikasi contoh di atas. Beri komentar tentang apa yang dilakukan antara grup eksekusi `Vector` dan `LinearSolve`.

10. Do algebra

Aljabar merupakan salah satu hal utama yang dirancang untuk dilakukan Maple. Deskripsi perintah aljabar umum akan didapatkan pada Bab 9.

Soal 1.19

Gunakan perintah Maple untuk menempatkan ekspresi $\frac{1}{x} - \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}$ menjadi bentuk yang lebih sederhana. Berikan komentar tentang apa yang dilakukan dalam teks di atas dan di luar grup eksekusi pertama.

BAB 2

MEMBUAT PLOT

Maple merupakan program yang hebat untuk membuat plot. Dalam bab ini akan dipelajari cara membuat plot dan menggunakannya untuk meninjau beberapa ide matematika penting dalam fisika.

2.1 Membuat Plot x-y

Jenis plot yang paling sederhana adalah plot $2 - d$, atau xy . Maple akan memplot fungsi dan ekspresi, tetapi sintaksnya berbeda untuk masing-masing dari kedua tipe data ini. Berikut adalah plot dari ekspresi rasional $\frac{x+1}{x-1}$ dari $x = -5$ ke $x = 0$. Pertama tetapkan ekspresi rasional ke variabel g , kemudian plot g . Perhatikan bahwa g adalah ekspresi, bukan fungsi, sehingga notasi $g(x)$ tidak dapat digunakan untuk memplotnya.

```
> g := (x+1) / (x-1);  
> plot(g, x=-5..0);
```

Plot yang sama dapat diperoleh dengan menggunakan notasi fungsi Maple, seperti ini

```
> f := (x, y) -> (x+y) / (x-y);
```

Untuk membuat plot di x cukup beri nilai y melalui daftar argumen ($y = 1$ mereproduksi plot sebelumnya) dan plot di x

```
> plot(f(x, 1), x=-5..0);
```

Selanjutnya menggambarkan fungsi yang sama pada rentang yang lebih besar. Perhatikan bahwa suatu ekspresi bisa diletakkan di baris perintah plot

```
> plot((x+1)/(x-1), x=-5..5);
```

Untuk fungsi tunggal di $x = 1$, Maple mencoba memberi jangkauan vertikal yang sangat besar. Berikut cara untuk membatasi rentang vertikal

```
> plot((x+1)/(x-1), x=-5..5, -5..5);
```

Untuk mencari diskontinuitas dalam fungsi dan menghapus plotting dot-to-dot dengan menggunakan opsi `discont=true`

```
> plot((x+1)/(x-1), x=-5..5, -5..5, discont=true);  
> plot([(x+1)/(x-1), cos(x)], x=-5..5, -5..5, discont=true, color=[navy, tan], thickness=2);
```

Kedua fungsi ditempatkan dalam daftar Maple yang merupakan daftar

hal-hal yang dipisahkan dengan koma dan berada di dalam tanda kurung siku. Opsi apa pun yang berlaku secara terpisah untuk setiap plot juga ditentukan dalam daftar. Misalkan untuk membuat plot gerak osilator harmonik teredam,

dengan rumus $e^{-\frac{t}{100}}\cos(t)$ dari $t = 0$ hingga $t = 600$

```
> plot(exp(-t/100)*cos(t), t=0..600);
```

```
> plot(exp(-t/100)*cos(t), t=0..600, numpoints=400);
```

Satu hal terakhir, tetapi sangat penting; Ekspresi untuk diplot didefinisikan menggunakan perintah penetapan Maple (`:=`), seperti ini:

```
> F:=cos(omega*t^3;
```

Dengan memberikan nilai untuk ω dan karena bergantung pada t sehingga sintaks plot diberikan

```
> omega:=1.;plot(F, t=0..20);
```

Membatalkan pengaturan t ke 7 bila program tidak berjalan dengan perintah `unassign` dengan ' t ' sebagai argumennya,

```
> unassign('t');omega:=1;plot(F, t=0..20);
```

atau

```
> t:='t';omega:=1;plot(F, t=0..20);
```

Cara membaca adalah "tetapkan t ke namanya sendiri, hapus tugas sebelumnya."

Selanjutnya untuk memberi label pada sumbu plot dengan menggunakan opsi `labels`, seperti ini: `labels=["x", "y"]`. Untuk memberi judul gunakan `title="Ini adalah judul"`. Berikut plot yang menggambarkan opsi ini.

```
>
```

```
plot(sin(x^2), x=0..2*Pi, labels=["x", "y(x)"], title=
"sin(x^2) function");
```

Perhatikan bahwa `sin(x^2)` tidak dicetak dalam mode matematika, hal ini karena terbatasnya huruf Yunani dalam Maple sehingga `labelfont` atau `titlefont` diubah menjadi `SYMBOL`, seperti ini

```
>
```

```
plot(exp(x/6), x=0..2*Pi, labels=["abcdefghijklmnopq
rstuvwxyz", "y(x)"], title="ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
YZ", labelfont=[SYMBOL], titlefont=[SYMBOL]);
```

2.2 Tinjauan Fungsi Dasar

Pada bagian ini akan diulas fungsi dasar matematika fisika dengan membuat plot.

Soal 2.1

Dengan menggunakan rentang horizontal -2π hingga 2π dan rentang vertikal -2 hingga 2, plot fungsi $\sin(x)$, $\cos(x)$, dan $\tan(x)$. Plot ketiganya di plot yang sama dengan meletakkan ketiga ekspresi ini dalam daftar di baris perintah plot. Pilih warna khusus untuk masing-masing.

Soal 2.2

Dengan menggunakan rentang horizontal -3 hingga 3 dan rentang vertikal -3 hingga 3, plot fungsi $\sinh(x)$, $\frac{e^x}{2}$, dan $\frac{e^{-x}}{2}$. Pilih warna khusus untuk masing-masing dan pelajari alurnya. Selanjutnya pada gambar lain plot fungsi $\frac{e^x}{2}$ dan $\frac{e^{-x}}{2}$ bersama dengan $\cosh(x)$. Terakhir, plot fungsi $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, dan $\tanh(x)$ pada gambar yang sama.

Soal 2.3

Buktikan dengan menggambar grafik yang sesuai bahwa identitas berikut ini benar.

$$e^x e^{2x} = e^{3x}$$

$$\ln(x) + \ln(2x) = \ln(2x^2)$$

$$5 \ln(x) = \ln(x^5)$$

Untuk menghindari pengambilan logaritma angka negatif, buat plot hanya di atas nilai positif x . Catatan: akan lebih mudah untuk melihat bahwa kedua ekspresi tersebut setara secara grafis jika diplot dengan warna dan ketebalan yang berbeda dengan menggunakan baris opsi ini dalam perintah plot:

```
color=[red,green],thickness=[2,10]
```

Soal 2.4

Tunjukkan dengan melakukan eksperimen grafis bahwa fungsi eksponensial tumbuh lebih cepat daripada pangkat x mana pun dan bahwa fungsi log natural tumbuh lebih lambat daripada pangkat pecahan mana pun dari x .

Catatan: (1) saat melakukan fungsi eksponensial, biasanya akan mengalami kesalahan floating point karena angka yang diplot terlalu besar. Cara standar untuk menghindari masalah ini adalah dengan memplot log fungsi sebagai gantinya. Lebih mudah untuk mengetahui seberapa besar angkanya jika menggunakan fungsi $\log_{10}(x)$. (2) ketika melakukan perbandingan kekuatan fraksional, harus menggunakan nilai x yang begitu besar. Jadi sebagai pengganti x gunakan $\log_{10}(x)$, yaitu, gunakan $x = 10^t$ dan buat plot versus t alih-alih x .

Soal 2.5

Buktikan secara grafis identitas trigonometri berikut. Alih-alih melapisi dua plot, plot sisi kiri dikurangi sisi kanan.

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x); \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x); \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 &= \frac{1 - \cos(x)}{2}; \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 &= \frac{1 + \cos(x)}{2};\end{aligned}$$

Soal 2.6

Tunjukkan secara grafis bahwa dengan menambahkan $\sin(x)$ dan $\cos(x)$ secara bersama-sama akan didapatkan fungsi sinusoidal lain dengan amplitudo baru dan pergeseran fase. Buat plot dengan menugaskan jumlah dari kedua fungsi ini ke fungsi Maple F dan kemudian memplot $F(x)$. Dari grafik, temukan amplitudo baru dan pergeseran fasa relatif terhadap fungsi cosinus, yaitu, temukan rumus untuk penambahan sinus dan cosinus dalam

bentuk $A\cos(x - \phi)$.

2.3 Analisis Fourier

Pada bagian ini akan dipelajari beberapa teknik dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang disebut Analisis Fourier. Tinjau sintaks berikut dengan menambahkan dua fungsi kosinus untuk frekuensi yang berbeda

```
> restart;
> f:=t-> cos(t)+cos(1.1*t);
> plot(f(t),t=0..200*Pi,numpoints=1000);
```

Soal 2.7

Dengan menggunakan grafik temukan hubungan perbedaan antara dua frekuensi ($\omega_1 = 1$ dan $\omega_2 = 1.1$ pada contoh di atas) dengan frekuensi yang didefinisikan oleh

$$f = \frac{1}{T_{beat}}$$

di mana T_{beat} adalah waktu antara bagian suara keras yang berurutan.

Teorema Fourier menunjukkan bahwa setiap fungsi periodik dapat diwakili oleh jumlah tak terbatas dari sinus dan cosinus yang memiliki periode yang sama dengan fungsi tersebut. Dalam penjumlahan ini, fungsi sinus dan cosinus dikalikan dengan koefisien yang biasanya menjadi kecil jika indeks penjumlahan menjadi besar. Sebagai contoh, sejumlah fungsi periodik kosinus dengan koefisien yang jatuh seperti $\frac{1}{n}$ dikodekan menggunakan perintah penjumlahan Maple

```
> g:=x-> sum(cos(n*x)/n,n=1..100);
> plot(g(x),x=0..6*Pi);
```

Soal 2.8

Pertimbangkan jumlah Fourier

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^n \cos((2n-1)t)}{2n-1}$$

Plot dari $t = 0$ ke $t = 2\pi$ dengan menetapkan jumlah ini ke fungsi Maple. Selanjutnya ubah bentuk penjumlahannya sehingga faktor dalam penyebutnya dapat dikuadratkan, dipangkat tiga, hingga pangkat empat dengan mengalihkan cosinus ke sinus, lalu buatlah masing-masing plot untuk tiap perubahan bentuk penjumlahan. Fungsi yang diskontinu memiliki deret Fourier yang sukunya menjadi nol seperti $\frac{1}{n}$ dan pada diskontinuitas fungsi memiliki fenomena Gibbs. Fungsi yang memiliki turunan pertama terputus akan seperti $\frac{1}{n^2}$. Fungsi yang memiliki turunan kedua diskontinu akan turun seperti $\frac{1}{n^3}$. Dan fungsi yang tidak memiliki diskontinuitas atau turunan diskontinu dari sembarang urutan harus turun lebih cepat daripada pangkat $\frac{1}{n}$, yang berarti fungsi harus turun secara eksponensial di n , seperti e^{-n} , $\frac{1}{\cosh(n)}$, dll.

Topik lanjutan: paket gelombang

Analisis Fourier dapat digunakan untuk membangun paket gelombang dan menguji prinsip ketidakpastian. Prinsip ketidakpastian merupakan hasil dari analisis Fourier, tidak hanya dalam kerangka mekanika kuantum.

Untuk membangun paket gelombang, sejumlah kosinus atau sinus dijumlahkan dengan frekuensi yang berjarak dekat di sekitar beberapa frekuensi pusat. Hasilnya adalah gelombang pada frekuensi pusat di dalam selubung disebabkan oleh interferensi destruktif dari gelombang tetangga. Perhatikan sintaks berikut dengan menggunakan Gaussian yang berpusat di $\omega = 4$ sebagai distribusi frekuensi dalam paket

```
> A:=w-> exp(-(w-4)^2*20);
```

Membuat plot untuk melihat distribusi frekuensi

```
> plot(A(w), w=0..5, labels=['w', 'A']);
```

Penting untuk memiliki cara dalam menggambarkan seberapa luas distribusi ini. Istilah umumnya adalah *Full Width at Half Maximum* (FWHM). Bahwa lebar ω antara dua titik dalam distribusi $A(\omega)$ di mana A adalah setengah dari nilai maksimumnya.

$$\delta\omega = 2 \sqrt{\frac{\ln(2)}{20}}$$

Membangun fungsi waktu yang terdiri dari superposisi gelombang dengan frekuensi antara $\omega = 3,5$ dan $\omega = 4,5$.

```
> f:=t-> sum(cos((3.5+n/100)*t)*A(3.5+n/100),n=0..100);
```

Perhatikan bahwa n berkisar dari 0 hingga 100, kuantitas $3,5 + \frac{n}{100}$ berkisar dari 3,5 hingga 4,5, seperti yang diinginkan untuk ω . Sekarang sinyal waktu dapat diplot untuk melihat fungsi waktu $f(t)$ dihasilkan oleh fungsi frekuensi $A(\omega)$.

```
> plot(f(t),t=-50..50);
```

Sehingga distribusi amplitudo dalam ruang frekuensi (ω) membuat distribusi yang persis seperti paket gelombang. Teorema dalam prinsip ketidakpastian mengatakan bahwa hasil kali lebar fungsi amplitudo $A(\omega)$, yang disebut $\delta\omega$, dan lebar sinyal waktu δt (lebar paket gelombang yang diplot di atas) tidak lebih kecil dari sejumlah urutan kesatuan. Dalam praktiknya biasanya sama dengan 5,5 jika lebarnya diukur menggunakan lebar penuh dengan setengah maksimum. Atau dalam simbol $5.5 \leq \delta\omega\delta t$

Soal 2.9

Buktikan prinsip ketidakpastian yang diberikan di atas pada grafik yang dibuat. Kemudian ubah lebar fungsi amplitudo $A(w)$ dengan mengubah parameter 20 dalam definisi $A(w)$ menjadi sesuatu yang lain dan membuat satu set plot baru. Buktikan bahwa hubungan ketidakpastian berlaku untuk plot baru.

2.4 Plotting Data

Maple menyimpan dan memplot data dalam bentuk matriks. Cara membaca data adalah dengan menggunakan `readdata`, seperti ini:

```
> d:=readdata("datafile",2);
```

di mana 2 berarti jumlah kolom data dalam file dan `datafile` menunjukkan file bernama `datafile` yang tersimpan dalam direktori yang dikerjakan. Untuk membuat `datafile` ini dengan menggunakan editor notepad Windows

0	1.0
1	1.5
2	1.9

3	2.6
4	3.7
5	5.4
6	7.3
7	10.4
8	14.2
9	20.0
10	29.0

Bila sintaks tidak dapat dijalankan maka ditambahkan jenis eksistensi file ke dalam nama file seperti

```
> d:=readdata("datafile.txt",2);
```

Bila Maple tidak dapat mencari file dalam direktori yang benar. Untuk memperbaikinya dengan menggunakan perintah `currentdir("directory name")`, misalnya,

```
> currentdir("c:Physics 230");
```

Untuk mengetahui direktori saat ini dengan menggunakan

```
> currentdir();
```

Atau jika menjalankan drive a: yang digunakan ialah

```
> currentdir("a:");
```

Perhatikan bahwa untuk memastikan direktori yang benar dengan memeriksa menggunakan `textttcurrentdir()`.

Sekarang data disimpan sebagai matriks, Maple dapat memplotnya menggunakan perintah `pointplot`. Karena paket yang berisi `pointplot` sangat besar sehingga Maple tidak dapat memuatnya kecuali diperlukan, sehingga digunakan `with(plots)`

```
> with(plots):
```

```
> pointplot(d);
```

Sekarang mencocokkan data ini dengan rumus $e^{\frac{x}{3}}$. Dengan menetapkan plot titik ke satu nama variabel dan plot formula ke yang lain, lalu menampilkannya bersama-sama, seperti ini

```
> p1:=pointplot(d):
```

```
> p2:=plot(exp(x/3),x=0..10):
```

```
> display(p1,p2);
```

Paket statistik Maple melakukan hal serupa, dan bahkan akan melakukan beberapa penyesuaian.

2.5 Plot Parametrik

Salah satu cara terbaik untuk membuat plot yang rumit adalah dengan representasi parametrik. Pertimbangkan, suatu lingkaran dengan rumus $x^2 + y^2 = R^2$, untuk membuat grafik lingkaran dengan rumus ini menggunakan $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ dan $y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Ini membutuhkan dua plot terpisah dan fungsinya memiliki turunan tak terbatas pada $x = R$ dan $x = -R$. Namun, dengan menggunakan representasi parametrik bentuknya akan menjadi

$$\begin{aligned}x(s) &= R\cos(s) \\y(s) &= R\sin(s) \\s &= 0..2\pi\end{aligned}$$

Berikut adalah perintah plot Maple untuk melakukan plot lingkaran dengan cara $y(x)$ dan cara parametrik, dengan cara parametrik pada radius yang lebih kecil sehingga dapat dilihat bentuk keduanya.

```
> with(plots):
> p1:=plot([sqrt(1-x^2), -sqrt(1-x^2)], x=-1..1):
> p2:=plot([.8*cos(s), .8*sin(s)], s=0..2*Pi):
> display(p1, p2);
```

Bila plot yang didapatkan berupa bentuk lingkaran yang terlihat seperti elips karena sumbu x dan y memiliki skala yang berbeda. Maple memiliki perbaikan yang sangat mudah untuk masalah ini, yaitu dengan membatasi skala yang sama pada sumbu x dan y , seperti ini

```
> display(p1, p2, scaling=constrained);
```

Soal 2.10

Bagian kerucut klasik memiliki bentuk parametrik. Gunakan perintah plot parametrik untuk membuat sketsa masing-masing kurva menggunakan penskalaan terbatas.

Elips: $x(s) = 3\cos(s)$; $y(s) = 1.3\sin(s)$; $s = 0..2\pi$.

Hiperbola: $x(s) = 3\cosh(s)$; $y(s) = 1.3\sinh(s)$; $s = -1.5..1.5$.

Parabola (berotasi): $x(s) = s\cos(\phi) - s^2\sin(\phi)$; $y(s) = s^2\cos(\phi) + s\sin(\phi)$; $s = -3..3$.

Gunakan ini untuk beberapa sudut yang berbeda. Selanjutnya, gambar parabola yang diputar menggunakan bentuk $y(x)$.

Soal 2.11

Dimungkinkan juga untuk menggambar kurva dalam koordinat polar, misalnya elips. Untuk memahami hal ini, diperlukan beberapa relasi geometri elips. Misalkan bentuk (x, y) elips seperti yang diberikan di atas, $x(s) = a \cos(s)$; $y(s) = b \sin(s)$ dengan $b < a$. Maka jarak a disebut sumbu semi mayor dan jarak b disebut sumbu semi minor. Eksentrisitas elips didefinisikan sebagai

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Elips memiliki dua fokus, satu fokus di kiri tengah sepanjang sumbu panjang (semi-mayor) dan yang lainnya di kanan tengah. Jarak dari pusat elips ke salah satu fokus adalah $f = ea$. Gambar elips menggunakan parameterisasi (x, y) yang memiliki asal koordinat pada fokus kanan elips dengan $a = 2$ dan $b = 1$. Bentuk parametrik elips dengan asal koordinat pada fokus yang tepat dalam koordinat silinder

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\phi)}$$

Letakkan grafik koordinat silinder ini di atas grafik xy dari elips dan buktikan bahwa keduanya cocok. Bentuk plot parametrik Maple dalam koordinat silinder adalah `plot([r(s), phi(s), s=s1..s2], coords=polar, options)`. Misalnya, untuk membuat spiral,

```
>
plot([s/10, s, s=0..16*Pi], coords=polar, scaling=constrained);
```

Soal 2.12

Dalam perintah plot polar yang diberikan di bawah ini, perlakukan dua angka yang disesuaikan, j dan k , dan lihat jenis gambar berbeda apa yang dapat dibuat. Nilai pecahan j menarik jika menggunakan nilai k yang besar.

```
> j:=3;k:=2;
>
plot([cos(j*s), s, s=0..k*Pi], coords=polar, scaling=c
```

```
onstrained, axes=None);
```

2.6 Fungsi Spesial

Ada banyak fungsi yang belum ditemui yang disebut fungsi khusus, artinya fungsi tersebut tidak seperti fungsi sinus, cosinus, eksponensial, log, pangkat, dan hiperbolik sederhana yang dapat ditemukan di kalkulator tangan. Ini adalah fungsi yang muncul dalam pekerjaan yang lebih lanjut dalam fisika matematika.

1. Polinomial Legendre

Soal 2.13

Fungsi ini muncul saat mengerjakan soal listrik dan mekanika kuantum dalam koordinat bola. Simbolnya adalah $P_n(x)$ yang merupakan bentuk polinomial dalam x dan memiliki sifat yang sangat khusus pada interval $[-1, 1]$.

- (i) $P_n(1) = 1$ dan $P_n(-1) = (-1)^n$
- (ii) Nilai n besarnya selalu lebih kecil dari 1 di dalam interval $(-1, 1)$.
Buatlah plot dengan menggunakan 8 polinomial Legendre pertama di atas satu sama lain.

Misalkan untuk menghasilkan urutan fungsi x^n dari $n = 1..8$, gunakan

```
> seq(x^n, n=1..8);
```

Hal yang sama dapat pula dilakukan dengan $P(n, x)$ pada perintah plot di bawah ini.

```
> with(orthopoly);
```

```
> seq(P(n, x), n=0..8);
```

Masukkan perintah urutan ini dengan benar ke dalam perintah plot berikut sehingga plot dari semua fungsi ini dari $n = 0$ hingga $n = 8$ muncul.

```
> plot(....., x=-1..1);
```

2. Fungsi Bessel

Soal 2.14

Fungsi yang digunakan terkait kelistrikan dan konduksi termal dalam geometri silinder diantaranya adalah $J_n(x)$, $Y_n(x)$, $I_n(x)$, dan $K_n(x)$ dan perintah Maple untuk ini adalah `BesselJ(n, x)`, `BesselY(n, x)`, `BesselI(n, x)`, dan `BesselK(n, x)`. Huruf J dan Y seperti sinus dan

kosinus silinder, sedangkan huruf I dan K seperti eksponensial dalam silinder. Perhatikan bahwa Y dan K adalah singular pada $x = 0$. Singularitas dapat dikontrol dengan memilih rentang vertikal plot menjadi terbatas. Perintah Maple di bawah memplot dua J pertama.

- (a) Plot $J_0(x)$ dan $Y_0(x)$ pada satu bingkai plot dari $x = 0$ hingga $x = 30$. Atur `numpoints` cukup besar untuk melihat singularitas logaritmik dari $Y_0(x)$ dekat $x = 0$.
 - (b) Plot $J_n(x)$ dan $Y_n(x)$ untuk $n = 1, 4$ dengan J di satu bingkai plot dan Y di bingkai lainnya. Plot dari $x = 0$ hingga $x = 30$. Gunakan urutan perintah `seq`.
 - (c) Plot $I_n(x)$ untuk $n = 1, 4$ semuanya dalam satu bingkai plot. Lakukan dari $x = 0$ hingga $x = 10$.
 - (d) Plot $K_n(x)$ dari $n = 1, 4$, semuanya dalam satu bingkai plot. Lakukan dari $x = 0$ hingga $x = 10$.
- ```
> plot([BesselJ(0,x),BesselJ(1,x)],x=0..50);
```

Sekarang gunakan grafik yang dibuat untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. (a) Fungsi  $J$  dan  $Y$  terlihat seperti sinus dan cosinus setelah  $x = 10$ ; berapa periode dari fungsi yang hampir periodik ini? (b) Amplitudonya menurun pada nilai  $x$  yang besar. Faktor penurunan adalah hukum pangkat, yaitu,  $\frac{A}{x^p}$ . Temukan nilai  $p$  dengan memplot  $J_0(x)$  dan  $\frac{A}{x^p}$  pada plot yang sama dan dengan menyesuaikan  $A$  dan  $p$  hingga yang kedua fungsi berbaris dengan bagian fungsi Bessel.
2. Fungsi  $I$  dan  $K$  terlihat seperti eksponensial ( $e^{ax}$ ) setelah sekitar  $x = 10$ . Temukan perkiraan fungsi eksponensial yang cocok dengan mereka di luar sana. Akan terdapat kesulitan dalam melakukan ini karena selain perilaku  $e^{ax}$  fungsi ini juga memiliki faktor drop-off power-law yang sama  $\frac{A}{x^p}$  seperti  $J$  dan  $Y$ . Jadi, ketika mencari fungsi eksponensial yang hampir menggambarkan apa yang dilakukan, buat plot perbandingan antara eksponensial dan  $I_n(x)x^p$  dan  $K_n(x)x^p$ . Buktikan bahwa logaritma fungsi  $I_n(x)x^p$  sejajar satu sama lain dan juga sejajar dengan garis  $y = ax$  untuk pilihan  $a$  yang sesuai; lalu lakukan hal yang sama untuk fungsi  $K_n(x)x^p$ .

### 3. Fungsi Gamma

**Soal 2.15**

Fungsi Gamma adalah kelanjutan analitik ke garis bilangan real dari fungsi faktorial untuk bilangan bulat,  $\gamma(n + 1) = n!$ . Buatlah plot menggunakan Maple dari  $-5,5$  dan buktikan bahwa fungsi ini memiliki nilai yang benar pada bilangan bulat positif dengan menggunakan `GAMMA(x)` ;

#### 4. Melengkapi Integral Eliptik

##### Soal 2.16

Fungsi integral elips lengkap  $K(k)$  dan  $E(k)$  ditentukan oleh integral tertentu

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin(\phi)}} d\phi$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin(\phi)} d\phi$$

Gunakan `EllipticK(k)` dan `EllipticE(k)` dalam Maple. Fungsi ini biasanya digunakan dengan  $k$  dalam rentang  $0, 1$ , tetapi dapat dilanjutkan secara analitis ke seluruh bidang kompleks. Baik  $K(k)$  dan  $E(k)$  adalah  $\pi/2$  untuk  $k = 0$ . Di ujung yang lain,  $k = 1$ ,  $K(k)$  singular secara logaritmik dan  $E(k)$  adalah  $1$ . Plot kedua fungsi pada plot yang sama pada rentang ini menggunakan `numpoints=200` dan `numpoints=1000`. Untuk mengetahui mengapa perilaku plot ini menunjukkan singularitas yang lemah, berikut adalah tampilan pasangan plot untuk singularitas yang kuat:

```
> plot(1/(1-x), x=0..1, numpoints=200);
> plot(1/(1-x), x=0..1, numpoints=1000);
```

#### 5. The Error Function

##### Soal 2.17

Fungsi kesalahan  $\text{erf}(X)$  selalu muncul dalam teori probabilitas dan Maple menyebutnya `erf(x)`. Jika distribusi probabilitas Gaussian sebanding dengan  $e^{-x^2}$ , maka probabilitas bahwa variabel  $x$  terletak di antara  $-\infty$  dan  $z$  sebanding dengan  $\int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx$ , yang merupakan fungsi kesalahan  $\text{erf}(z)$ . Tetapi fungsi dasar  $\text{erf}$  harus didefinisikan sebagai integral yang dimulai dari 0 alih-alih  $-\infty$ , jadi didefinisikan sebagai

$$\text{erf}(z) = \frac{2(\int_0^z e^{-x^2} dx)}{\int \pi}$$

Probabilitas bahwa variabel Gaussian terletak di antara  $-\infty$  dan  $z$  diberikan oleh

$$\frac{1 + \text{erf}(z)}{2}$$

Plot  $\operatorname{erf}(x)$  dan  $(1 + \operatorname{erf}(x))/2$  dalam rentang  $-3, 3$ .

## 2.7 Animasi

Rumus gelombang berjalan adalah  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ . Maple dapat menunjukkan bahwa rumus ini bergerak dengan perintah `animate`. Pertama memberikan nilai numerik  $A$ ,  $k$ , dan  $\omega$ , lalu menganimasikan fungsi dengan memplot banyak plot dalam  $x$  pada waktu yang berurutan. Untuk membuat animasi pada plot bergerak yaitu dengan mengkliknya lalu menjalankannya dengan kontrol pemutar yang muncul di bilah alat. Perhatikan sintaks berikut.

```
> restart:with(plots):
> A:=1.5;k:=3*Pi/2.;omega:=Pi/2.;
> animate(A*cos(k*x-
omega*t), x=0..20, t=0..20, numpoints=50, frames=10);
```

### Soal 2.18

Ubah perintah `animate` di atas agar fungsinya lebih mulus di  $x$  dengan pengaturan `numpoints` dan `frame`. Tunjukkan, dengan menggunakan animasi, bahwa kecepatan pergerakan puncak gelombang (*kecepatan fase*) diberikan oleh

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$$

Dan tunjukkan bahwa dengan mengubah tanda  $k$  dapat mengubah arah pergerakan gelombang.

### Soal 2.19

Ubah animasi di atas dengan memplot fungsi gelombang berikut:

$$y(x, t) = A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Gunakan rentang dalam  $x$  sehingga gelombang memiliki 3 nol antara titik akhir dan juga ujung tetap.

**Soal 2.20**

Tunjukkan dengan membuat animasi bahwa jumlah dari dua gelombang dengan amplitudo yang sama yang bergerak berlawanan arah adalah gelombang berdiri.

Topik lanjutan: paket gelombang

Selain properti gelombang dasar, animasi juga dapat mengilustrasikan perilaku paket gelombang yang lebih kompleks, termasuk konsep kecepatan grup dan difusi paket gelombang. Cara membuat paket gelombang adalah dengan mengambil banyak gelombang dalam bentuk  $A \sin(kx - \omega t)$  dengan  $k$  yang berbeda dan menjumlahkannya bersama-sama, seperti yang dilakukan pada bagian analisis Fourier terkait prinsip ketidakpastian. Hal yang sama dapat pula dilakukan dengan  $k$ , menggunakan fungsi amplitudo  $A(k)$  yang berpusat di  $k_0$  dengan lebar  $\Delta k$  untuk membuat paket gelombang dalam ruang dengan panjang gelombang  $\frac{2\pi}{k_0}$  dan lebar  $\Delta x$ . Perilakunya ditentukan oleh hubungan dispersi  $\omega = \omega(k)$  dari gelombang yang dijumlahkan. Setiap efek yang akan ditampilkan pada bagian ini diwujudkan secara fisik dalam beberapa jenis gelombang elektromagnetik yang terdapat pada plasma yang mengelilingi matahari dan planet-planet tata surya.

Misalkan hubungan dispersi merupakan hubungan non-dispersif standar yang mengatur cahaya dan suara:  $\omega = kv$ , di mana  $v$  adalah kecepatan fase gelombang. Dalam hal ini setiap gelombang superposisi bergerak dengan kecepatan yang persis sama, sehingga setiap bagian dari paket gelombang bergerak dengan kecepatan  $v$ , seperti yang ditunjukkan pada contoh di bawah ini. Menentukan relasi dispersi

```
> v:=1;w:=k->k*v;
```

Menentukan spektrum dalam  $k$ .

```
> ko:=1;A:=k->exp(-(k-ko)^2*40);
```

Dapat dilihat paket gelombang pada waktu  $t = 0$ .

```
> f:=(x,t)->sum(sin((ko-.5+n/40)*x-w(ko-.5+n/40)*t)*A(ko-.5+n/40),n=0..40);
```

```
> with(plots):plot(f(x,0),x=-60..60);
```

Selanjutnya menggunakan perintah animasi untuk membuatnya bergerak.



```
>animate(f(x,t),x=-60..60,t=0..180,frames=80,
numpoints=400,color=navy);
```

### Soal 2.21

Jika relasi dispersi bukan hanya fungsi linier  $\omega = kv$ , maka hal yang lebih menarik dapat terjadi. Yang pertama adalah gelombang dalam paket di mana paket secara keseluruhan tidak lagi bergerak dengan kecepatan yang sama. Berikut bentuk relasi dispersi menggunakan rumus

$$\omega = kv \left( 1 + \frac{ak}{k_0} \right)$$

Dalam analisis Fourier ditunjukkan bahwa puncak gelombang bergerak pada kecepatan fase yang diberikan oleh

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k}$$

paket secara keseluruhan bergerak dengan kecepatan grup yang diberikan oleh

$$v_{group} = \frac{d\omega}{dk}$$

- (a) Temukan kecepatan fase dan grup untuk hubungan dispersi yang diberikan dalam pengantar masalah ini. Pilih  $k = k_0$  dan dapatkan  $v_\phi$  dan  $v_g$  (fase standar dan notasi kecepatan grup) sebagai fungsi dari parameter  $a$ . Ubah relasi dispersi dalam grup eksekusi Maple yang diberikan di bagian pertama soal dan jalankan lagi dengan  $a = 1$ . Cobalah untuk melihat puncak gelombang bergerak lebih lambat daripada paket gelombang secara keseluruhan (puncak gelombang akan bergerak mundur melalui paket karena kecepatan grup lebih besar daripada kecepatan fase). Untuk melihatnya, animasi diperlambat menggunakan kontrol pada bilah alat. Selanjutnya memasukkannya ke mode pemutaran berkelanjutan dan menyesuaikan waktu simulasi sehingga kecepatan grup mencakup jarak dari  $x = 0$  hingga  $x = 60$ .
- (b) Pilih  $a$  sehingga kecepatan grup nol dan jalankan animasi lagi. Paket harus diam sementara puncak gelombang bergerak melewatinya.

**Soal 2.22**

Pada bagian (b) dari Soal 2.21 bahwa meskipun paket tidak banyak bergerak, namun bentuknya sedikit berubah. Alasannya adalah bahwa paket gelombang juga dapat melebar dalam waktu melalui difusi, seperti hot spot kecil di sepotong logam yang menyebar melalui difusi termal. Koefisien difusi untuk perluasan paket gelombang sebanding dengan besarnya turunan kedua dari hubungan dispersi (terhadap  $k$ ). Artinya, jika relasi dispersi memiliki turunan bukan nol detik, maka paket gelombang akan menyebar dalam waktu. Waktu proses ini berada di urutan beberapa kali nilai absolut  $1/(w''\Delta k^2)$  dalam masalah ini, di mana  $\Delta k$  adalah lebar dari  $A(k)$  (menggunakan FWHM). Hitung  $w''$  dan pastikan bahwa hasilnya bukan nol, kemudian jalankan simulasi untuk Soal 2.21 cukup lama untuk melihat penyebarannya.

**Soal 2.23**

Ciptakan relasi dispersi yang memiliki kecepatan fase positif dan kecepatan grup negatif dan buktikan bahwa hal tersebut dapat berfungsi dengan memodifikasi dan menjalankan animasi.

**2.8 Memvisualisasikan Bidang Vektor**

Perintah `fieldplot` Maple memungkinkan untuk memvisualisasikan bidang vektor dalam dua dimensi. Misalkan, medan magnet yang diberikan oleh rumus

$$B_x = \frac{B_0 y}{a}$$

$$B_y = \frac{B_0 y x}{a}$$

Untuk memvisualisasikan garis bidang dengan mengatur  $B_0 = 1$  dan  $a = 1$

```
> restart; with(plots):
> fieldplot([y,x], x=-1..1, y=-1..1, grid=[20,20], color=red, arrows=SLIM);
```

Ada juga perintah `fieldplot3d` yang bekerja serupa dalam tiga dimensi.

**Soal 2.24**

- (a) Gunakan `fieldplot` untuk memvisualisasikan medan listrik muatan listrik, diberikan oleh

$$E = \frac{\lambda(xi + yj)}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

di mana  $i$  dan  $j$  adalah vektor satuan  $x$  dan  $y$ .

- (b) Gunakan `fieldplot` untuk memvisualisasikan medan magnet kawat panjang, diberikan oleh

$$B = \frac{\mu_0 I(-yi + xj)}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

Eksperimen dengan pengaturan grid yang berbeda dan pilihan untuk opsi `arrows`. Catatan: jangan gunakan angka besar dalam perintah grid karena akan memakan waktu lama.

## 2.9 Plot Permukaan 3D dan Plot Kontur

Untuk memvisualisasikan data 2 dimensi dalam bentuk fungsi  $f(x, y)$  Maple memberikan dua pilihan: (1) memplot nilai fungsi sebagai ketinggian permukaan di atas bidang  $xy$  atau (2) menggambar kontur konstanta  $f(x, y)$  pada bidang  $xy$ . Berikut adalah contoh yang dilakukan dua arah. Pertimbangkan fungsi berikut.

$$f(x, y) = e^{-|x - \sin(y)|} \left( 1 + 0.2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) \left( 1 + \frac{0.4}{0.3 + y^2} \right)$$

Plot permukaan tiga dimensi dilakukan dengan `plot3d` seperti ini

```
> restart;
> f:=exp(-abs(x-sin(y)))*(1+.2*cos(x/2))*(1+.4/(.3+y^2));
> plot3d(f, x=-6..6, y=-6..6);
```

Dengan mengeklik gambar dan menggerakkan kursor sambil menahan tombol kiri maka tampilan akan berputar. Dalam menu Opsi pada bilah alat dan mengubah tampilan plot dari sebaris ke jendela, akan didapatkan gambar

dengan seperangkat alatnya sendiri yang memungkinkan untuk mengubah banyak hal tentang tampilannya. Berikut adalah plot yang ditingkatkan menggunakan opsi di baris perintah:

```
> plot3d(f,x=-6..6,y=-6..6,grid=[60,60],labels=["x","y","f"],orientation=[45,30],axes=boxed,shading=xy,view=0..3);
```

Grid permukaan dikontrol oleh opsi `grid=[m,n]`, labels pada sumbu dikontrol oleh opsi label, dan sudut pandang dikontrol oleh orientasi. Dalam Maple umumnya menggunakan  $\phi$  menjadi sudut dalam koordinat bola yang turun dari sumbu  $z$  dan  $\theta$  menjadi sudut azimuth yang berputar di sekitar sumbu  $z$  di pesawat  $xy$ . Jadi agar konsisten dengan koordinat bola dalam fisika, bentuk opsi orientasi adalah `orientation=[ $\phi$ , $\theta$ ]`. Selain itu, sudut  $\phi$  menunjukkan arah yang dilihat, bukan posisi sudut. Ukuran vertikal kotak plotting dikontrol oleh opsi `view=zmin..zmax`. Terakhir, tampilan plot diubah oleh perintah shading yang dapat berupa `shading=z`, `shading=xy`, `shading=xyz`.

```
> restart;
> with(plots):
> f:=exp(-abs(x-sin(y)))*(1+.2*cos(x/2))*(1+.4/(.3+y^2));
> contourplot(f,x=-6..6,y=-6..6,contours=40,grid=[30,30],coloring=[green,blue]);
```

Perhatikan bahwa `coloring=[green,blue]` memplot nilai rendah fungsi dalam warna hijau, nilai tinggi dalam warna biru, dan nilai di antara warna antara hijau dan biru.

```
> ?plot[colors]
```

# BAB 3

## KALKULUS

Maple dapat digunakan dalam perhitungan kalkulus. Diantaranya ialah dengan mengambil turunan, integral, membuat ekspansi deret, melakukan jumlah tak terbatas, dan lainnya. Kalkulus dalam bab ini akan dipelajari yang difokuskan pada dasar-dasarnya.

### 3.1 Limit

Ide paling dasar dalam kalkulus adalah perhitungan limit. Misalnya, untuk mencari nilai limit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$ , menggunakan perintah pada ekspresi berikut

```
> limit(sin(3*x)/x, x=0);
```

Perhitungan ini dapat pula dilakukan dengan fungsi Maple

```
> y:=x->sin(3*x)/x; limit(y(x), x=0);
```

#### Soal 3.1

Carilah nilai limit berikut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

### 3.2 Diferensiasi

Maple dapat mengambil turunan dari fungsi dasar dan fungsi khusus. Perhatikan sintaks berikut untuk mengambil bentuk turunan dari fungsi tangen.

```
> diff(tan(x), x);
> diff(tan(x), x$2);
> d:=Diff(tan(x), x$3);
> d:=value(d);
> d:=simplify(d);
```

Mendefinisikan fungsi

```
> f:=x->tan(x)/x;
```

Perintah `Diff` tidak dapat bekerja pada fungsi, sehingga dibutuhkan perintah `D` yang dapat mengambil beberapa turunan dari beberapa fungsi

```
> fp:=D(f);
```

Hasil  $D(f)$  yang ditetapkan ke  $fp$  menghasilkan fungsi  $fp(x)$ .

```
> fpp:=D[1$2](f);
```

Dalam tanda kurung siku, 1 sebagai pembeda sehubungan dengan variabel pertama dalam daftar argumen dan \$2 berarti melakukannya dua kali seperti pada `diff`.

### Soal 3.2

Carilah turunan yang ditunjukkan dari beberapa bentuk fungsi berikut.

(a)  $\frac{d^3}{dx^3} \sqrt{1+x^3}$

(b)  $\frac{d}{dx} J_0(x)$

(c)  $\frac{d}{dx} I_1(x)$

(d)  $\frac{d^2}{dx^2} e^{\tan(x)}$

(e)  $\frac{d}{dx} \Gamma(x)$

(f)  $\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x)$

(g)  $\frac{d}{dk} K(k)$

### Soal 3.3

Pertimbangkan fungsi

$$\ln(x)J_0(x)$$

(a) Plot fungsi pada interval  $[0,10]$ .

(b) Perhatikan grafik dan temukan nilai dari  $x$  di mana fungsi tersebut memiliki maksimum dan minimum. Kemudian ambil turunan dari fungsi dan gunakan perintah `fsolve` untuk menemukan nilai  $x$  ini dengan tepat. Jika ekspresi untuk turunannya disebut  $f$ , dan jika ingin menemukan nolnya di dekat 1,1, gunakan: `fsolve(f, x=1.1)`;

**Soal 3.4**

Dalam mekanika kuantum, selain fungsi Legendre  $P_n(x)$  terdapat pula fungsi yang disebut fungsi Associated Legendre  $P_n^m$ . Untuk setiap bilangan bulat  $n$  fungsi ini didefinisikan untuk nilai  $m$  dalam interval  $[0, n]$ , dengan fungsi  $m = 0$  menjadi  $P_n(x)$  biasa. Fungsi-fungsi ini didefinisikan dalam bentuk turunan dari fungsi Legendre:

$$P_n^m = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \right)$$

Berikut bentuk sintaksnya

```
> with(orthopoly);
> Pnm:=(n,m,x)-> (-1)^m*(1-x^2)^(m/2)*diff(P(n,x),x$m);
```

Sebelum itu lakukan pengujian dengan memasukkan angka untuk  $n$ ,  $m$ , dan  $x$ .

```
> Pnm(3,1,.5);
```

Fungsi ini menghasilkan bentuk polinomial untuk menghasilkan bentuk numerik, gunakan sintaks berikut

```
> a:=Pnm(3,1,t);t:=0.5;a;
```

Selanjutnya membuat plot dari 5 fungsi Legendre terkait yang sesuai dengan  $P(5x)$ , yaitu,  $n = 5$  dan  $m = 1\ 2\ 3\ 4\ 5$ . Plot dari  $x = -1, 1$ .

Letakkan kelima plot pada satu set sumbu untuk  $m$  berkisar dari 1 hingga  $n = 5$ .

**Soal 3.5**

Fungsi potensial untuk belahan bermuatan dengan jari-jari  $R$  dengan kerapatan muatan permukaan  $\sigma$  sebagai fungsi dari  $z$  diberikan oleh ekspresi berikut, di mana  $z$  naik ke atas sumbu simetri belahan,

```
> V:=-1/2*sigma*R*(-sqrt(R^2+z^2)+sqrt((z-R)^2))/(z*e0);
```

di mana  $\epsilon_0$  adalah singkatan untuk konstanta listrik  $\epsilon_0$ .

Komponen medan listrik  $E_z$  dapat diperoleh dari potensial  $V$  dengan

membedakan:

$$E_z = -\left(\frac{\partial}{\partial z} V\right)$$

Dengan mencari turunan dan bentuk ekspresi untuk  $E_z$  akan didapatkan fungsi asing yang disebut `csign`; . Kemudian atur  $\sigma = 1$ ,  $R = 1$ , dan  $e_0 = 1$  dan plot  $V$  dan  $E_z$  dari  $z = -4$  ke  $z = 4$ .

Ini adalah teorema dalam elektromagnetisme bahwa ketika melintasi suatu kerapatan muatan permukaan, medan listrik melonjak sebesar  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Buat dan jelaskan plot yang didapatkan.

### Soal 3.6

Berikut bentuk diferensiasi implisit dari persamaan yang melibatkan  $x$  dan  $y$ , misal  $x^2 + y^3 = 3$ . Carilah  $\frac{dy}{dx}$  tanpa menyelesaikan  $y(x)$ . Cara melakukannya adalah dengan menurunkan persamaan ini secara implisit untuk mendapatkan

$$2x + 3y^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} y \right) = 0$$

lalu selesaikan  $\frac{dy}{dx}$ . Gunakan sintaks berikut

```
> restart;
> eq:=x^2 + y(x)^3 = 3;
> deq:=diff(eq,x)
> dydx:=solve(deq,diff(y(x),x));
```

Untuk mengubah  $y$  menjadi  $y(x)$  gunakan sintaks berikut

```
> restart;
> alias(y=y(x));
> eq:=x^2 + y^3 = 3;
> deq:=diff(eq,x);
> dydx:=solve(deq,diff(y,x));
```

Hubungan dispersi untuk gelombang elektromagnetik dalam plasma adalah

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$$

di mana  $\omega_p$  adalah frekuensi yang disebut frekuensi plasma.

Kecepatan fase gelombang ini diberikan oleh  $\frac{\omega}{k}$  sedangkan kecepatan grup diberikan oleh  $\frac{d\omega}{dk}$ . Pertama-tama gunakan Maple untuk menemukan rumus



untuk fase dan kecepatan grup dalam hal  $\omega$ ,  $k$ , dan  $c$  dengan memecahkan  $\omega(k)$  dan membedakan. Kemudian gunakan diferensiasi implisit untuk mendapatkan kecepatan grup dalam bentuk  $k$ ,  $c$ , dan  $\omega$ .

Perhatikan fungsi  $x$  dan  $y$  berikut untuk mendapatkan turunan parsial

$$f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{y}$$

Berikut adalah turunannya terhadap  $x$ ,  $y$ , dan keduanya  $x$  dan  $y$ , menggunakan bentuk ekspresi

```
> restart; f:=cos(x*y)/y;
> diff(f,x); diff(f,y); diff(f,x,y);
```

dan ini adalah hal yang sama menggunakan notasi fungsi Maple

```
> restart; f:=(x,y)->cos(x*y)/y;
> D[1](f); D[2](f); D[1,2](f);
```

### Soal 3.7

Temukan bentuk turunan dari fungsi berikut

$$K\left(\sqrt{\frac{4xy}{(x+y)^2}}\right)$$

di mana  $K$  adalah integral eliptik lengkap `EllipticK`. Gunakan notasi ekspresi dengan `diff`. Gunakan `expand` dan `simplify` untuk membersihkan kekacauan yang dihasilkan.

## 3.3 Integrasi

### 1. Integral Dasar

Perintah untuk melakukan integrasi adalah `int`,

```
> int(sin(x), x);
```

atau

```
> f:=sin(x)*x; int(f, x);
```

$f(x)$  tidak digunakan sebagai argumen jika  $f$  adalah sebuah ekspresi.

Dengan fungsi, perintah integrasi berfungsi seperti ini

```
> g:=(x,y)->sin(x*y)*x;
> int(g(x,y), x);
```

Terdapat pula bentuk inert dari int, yaitu `Int`, yang digunakan untuk menampilkan integral.

```
> s1:=Int(exp(x), x);
> s1:=value(s1);
```

Dapat pula mengerjakan integral tertentu, seperti ini

```
> s2:=Int(tan(x), x=0..1);
> s2:=value(s2);
> evalf(s2);
```

atau

```
> s2:=Int(tan(x), x=0..1.);
> value(s2);
```

### Soal 3.8

Kerjakan integral berikut dengan Maple menggunakan notasi ekspresi untuk (a)-(d) dan notasi fungsi untuk (e)-(g). Dapatkan nilai numerik untuk (e) dan (f).

(a)  $\int \ln(x) dx$

(b)  $\int \sqrt{1-x^2} dx$

(c)  $\int \frac{x}{1+x^3} dx$

(d)  $\int \cosh(x) dx$

(e)  $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

(f)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^3-1} dx$

(g)  $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(x) dx$

### Soal 3.9

Pertimbangkan belahan yang dijelaskan dalam koordinat bola oleh  $r = R$  dan  $\theta = 0 \dots \frac{\pi}{2}$  dengan kerapatan muatan permukaan  $\sigma$ . Carilah potensial elektrostatik (tegangan)  $V(z)$  di sepanjang sumbu  $z$ . Jarak vektor ke titik pengamatan pada sumbu  $z$  adalah  $\mathbf{r} = z \mathbf{k}$ , dengan  $\mathbf{k}$  adalah vektor satuan pada arah  $z$ . Jarak vektor ke muatan  $dq = \sigma R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$  adalah  $\mathbf{r}' = R \mathbf{r}'$  di mana  $\mathbf{r}'$  adalah vektor satuan. Dengan menggunakan hukum

cosinus,

$$V(z) = \frac{\int \int \frac{\sigma R^2 \sin(\theta)}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos(\theta)}} d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0}$$

Integral  $\phi$  memberikan  $2\pi$  sehingga

$$V(z) = \frac{\int_0^\pi \frac{\sigma R^2 \sin(\theta)}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos(\theta)}} d\theta}{2\epsilon_0}$$

Gunakan perintah Int Maple untuk membuat fungsi  $V(z)$ . Sintaks untuk membangun fungsi adalah ini (mengatur  $V(z)$  ke fungsi eksponensial yang sekarat).

```
> V:=z->exp(-z);
> restart:e0:=8.854e-12;sigma:=1e-10;
> R:=0.5;V:=z-
>int(sigma*R^2*sin(theta)/sqrt(R^2+z^2-
2*R*z*cos(theta)
> theta = 0 .. Pi/2)/(2*e0);
```

Buatlah plot sebagai fungsi dari  $z$ , dari  $z = -5$  hingga  $z = 5$ . Sekarang hitung total muatan di belahan bumi dan overlay plot dari potensi sebenarnya dan potensi muatan titik yang sesuai, di mana  $|z| \gg R$  dan rumus potensial muatan titik adalah

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

### Soal 3.10

Pertimbangkan persamaan gerak bandul:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta = -\Omega^2 \sin(\theta)$$

di mana  $\Omega$  adalah frekuensi osilasi kecil pendulum. Jika persamaan ini dikalikan dengan  $\frac{d\theta}{dt}$  dan diintegrasikan satu kali terhadap waktu, maka akan didapatkan teorema kekekalan energi:

$$\frac{d\theta^2}{2} = \Omega^2 \cos(\theta) - \Omega^2 \cos(\theta_0)$$

dimana  $\theta_0$  adalah posisi sudut awal pendulum sebelum dilepaskan dari keadaan diam. Berapa lama bandul bergerak dari sudut awalnya ke  $\theta = 0$ ? karena  $\frac{T}{4}$ , seperempat periode bandul dengan amplitudo awal  $\theta_0$ .

- (a) Tunjukkan bahwa persamaan energi di atas dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$\frac{d\theta}{\Omega\sqrt{2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} = dt$$

Ini berarti bahwa periode seperempat gerak diberikan oleh integral

$$\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\Omega\sqrt{2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} d\theta = \frac{T}{4}$$

- (b) Dapatkan rumus periode T bandul, menggunakan  $s$  dan  $s_0$  sebagai pengganti  $\theta$  dan  $\theta_0$ .

> assume(theta0, real, 0 < theta0, theta0 < Pi);

Integralkan dengan menggunakan identitasnya untuk mengubah fungsi di dalam akar kuadrat.

$$\cos(\theta) = 1 - 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$$

- (c) Plot periode T sebagai fungsi sudut awal  $\theta_0$  dari 0 ke  $\pi$ .

### Soal 3.11

Momen inersia ditentukan oleh integral

$$\int s^2 \rho dV$$

di mana  $s$  adalah jarak tegak lurus dari sumbu putar ke titik di objek,  $\rho$  adalah kerapatan massa, dan  $dV$  adalah elemen volume diferensial.

- (a) Carilah momen inersia bola berjari-jari  $R$  terhadap sumbu yang melalui pusatnya.

$$dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

Jika menggunakan sumbu  $z$  sebagai sumbu putar, maka  $s = r \sin(\theta)$ .

Asumsikan kerapatan massa konstan sehingga

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

Jawabannya adalah

$$\frac{2MR^2}{5}$$

(b) Carilah momen inersia kerucut dengan tinggi  $L$  dan jari-jari alas  $R$  terhadap sumbu simetri kerucut, di mana  $dV = r dr d\phi dz$  dan  $s = r$ . Asumsikan bahwa kerapatan massa adalah konstan sehingga

$$\rho = \frac{M}{\frac{\pi R^2 L}{3}}$$

## 2. Mengintegrasikan Fungsi Khusus

Perhatikan fungsi Bessel berikut

$$\int_0^1 J_0(x) dx$$

dan bentuk sintaksnya

```
> restart;
> s1:=Int(BesselJ(0,x),x=0..1.);
> value(s1);
```

### Soal 3.12

Lakukan integral fungsi Bessel berikut baik pada integral tak tentu maupun sebagai integral tertentu pada interval  $[1.0..2.0]$ .

- (a)  $\int J_0(x) dx$
- (b)  $\int J_0(x) x dx$
- (c)  $\int K_0(x) dx$
- (d)  $\int I_1(x) dx$

(Dapatkan fungsi ini dengan  $\text{BesselJ}(0,x)$ ,  $\text{BesselK}(0,x)$ , dan  $\text{BesselI}(1,x)$ )

### Soal 3.13

Hitung integral polinomial Legendre berikut sebagai integral tak tentu dan integral tertentu pada interval  $[-1,0,1,0]$ .

- (a)  $\int P_2(x) x^2 dx$
- (b)  $\int P_3(x) P_5(x) dx$

(Gunakan perintah `with(orthopoly)`, kemudian `P(3, x)`, dll..)

### Soal 3.14

Perhatikan bentuk integral berikut.

$$\int_{-1}^1 P_3(x)P_5(x)dx$$

Pada setiap nilai  $x$  kedua nilai fungsi dikalikan bersama dan integral menjumlahkan semuanya sehingga bentuk integral tersebut adalah ortogonal.

- (a) Tunjukkan bahwa fungsi  $\sin(mx)$  dan  $\cos(mx)$  adalah ortogonal satu sama lain ketika diintegrasikan pada interval  $[0, 2\pi]$  dengan mencari nilai integral berikut keduanya dengan  $m$  dan  $n$  tidak sama dan dengan  $m = n$ .

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx$$

(Petunjuk: gunakan perintah `assume` untuk mengasumsikan bahwa  $m$  dan  $n$  adalah bilangan bulat yang sama, `m:=n`.)

- (b) Tunjukkan bahwa fungsi Legendre  $P_n(x)$  ortogonal satu sama lain ketika dua fungsi dengan nilai  $n$ -berbeda diintegrasikan selama interval  $[-1.0..1.0]$ . Cari juga nilai dari

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx$$

Gunakan perintah `with(orthopoly)` dalam fungsi tersebut.

- (c) Tunjukkan bahwa fungsi Bessel  $J_0(\alpha_n x)$  saling ortogonal terhadap integral

$$\int_0^1 J_0(\alpha_p x)J_0(\alpha_q x)x dx$$

dengan angka  $\alpha_p$  dan  $\alpha_q$  adalah nol dari  $J_0(x)$ . Nol ini tersedia dari fungsi Maple `BesselJZeros(n, m)`,

di mana  $n$  adalah urutan fungsi Bessel, yaitu,  $n = 0$  untuk  $J_0$ ,  $n = 1$

untuk  $J_1$ , dan di mana  $m$  menghitung nol ( $p$  dan  $q$  adalah  $m$ -nilai).  
Dapatkan rumus untuk integral tersebut ketika  $p = q$ .

### Soal 3.15

Berikut adalah definisi fungsi Legendre terkait dari Soal 3.4

```
> Pnm := (n, m, x) -> (-1)^m * sqrt(1 - x^2)^m * diff(P(n, x), x$m);
```

Besaran fungsi ini diperoleh dari

$$|P_{nm}| = \sqrt{\int_{-1}^1 P_{nm}(x)^2 dx}$$

Ulangi plot pada Soal 3.4, lakukan pembagian setiap fungsi yang diplot dengan besaran ini dan perhatikan agar semuanya memiliki ukuran yang hampir sama pada plot yang baru.

### Soal 3.16

Kerjakan bagian (a-c) baik sebagai integral tak tentu maupun sebagai integral tertentu antara 0,5 dan 1. Untuk bagian (d) kerjakan hanya sebagai integral tak tentu.

(a)  $\int \Gamma(x) dx$

(b)  $\int \operatorname{erf}(x) dx$

(c)  $\int K(x) dx$  (EllipticK Maple)

(d)  $\int_0^1 e^{-x^{2.3}} dx$  (Catatan: untuk integral ini gunakan bilangan bulat 1 dan floating point 1 sebagai batas atas.)

## 3. Beberapa Integral

Beberapa integral muncul sepanjang waktu dalam masalah fisika, seperti

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{erf}(x \sin(y)) dx dy$$

Integral ganda seperti ini dapat dilakukan di Maple dengan perintah int, seperti ini

```
> restart;
```

```
> s1:=Int(Int(erf(x*sin(y)),x=0..1),y=0..1);
> s1:=value(s1);
```

Gunakan perintah `evalf` untuk mendapatkan hasil berupa angka

```
> evalf(s1);
```

Atau dengan melakukan integral secara numerik menggunakan perintah berikut

```
> evalf(Int(Int(erf(x*sin(y)),x=0..1.),y=0..1.));
```

Variasi pada perintah berikut memberi tahu Maple untuk hanya menghitung integral numerik yang akurat hingga 6 (atau angka lainnya) dari angka signifikan (angka 6 setelah rentang integrasi menentukan jumlah digit.)

```
> evalf(Int(Int(erf(x*sin(y)),x=0..1.,6),y=0..1.,6));
```

### Soal 3.17

Dapatkan jawaban numerik untuk integral ganda berikut

$$\int_1^2 \int_1^2 J_0(\sqrt{xy}) dx dy$$

Integral rangkap tiga:

Untuk melakukan integral rangkap tiga, misalnya

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{erf}(x \sin(yz)) dx dy dz$$

Perintah yang digunakan adalah

```
> restart;
>
s1:=int(int(int(cos(x)*erf(x*sin(y*z)),x=0..1),y=0
..1),z=0..1);
> evalf(s1);
```

Untuk menggunakan perintah integrasi numerik dengan angka penting dalam jumlah terbatas,

```
>
evalf(Int(Int(Int(cos(x)*erf(x*sin(y*z)),x=0..1.,4
),y=0..1.,4),z=0..1.,4));
```



**Soal 3.18**

Gunakan metode integral rangkap tiga untuk mendapatkan nilai numerik dari integral rangkap tiga berikut dalam koordinat bola

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 r^6 \sin(\theta)^3 \cos(r\theta\phi)^2 (1 + \sin(\theta)^2) dr d\theta d\phi$$

Dapatkan jawaban akurat hingga 4 angka penting. Integral tersebut selain dikerjakan dengan metode integral rangkap tiga, juga dapat dikerjakan secara analitik yaitu mengerjakan salah satu integral sehingga hanya perlu mengerjakan integral ganda menggunakan paket `student`.

`> with(student);`

**3.4 Ekspansi Seri**

Salah satu ide matematika terpenting dalam semua fisika adalah ide solusi deret untuk suatu masalah. Ini sangat penting dalam fisika karena biasanya solusi yang ingin didapatkan bukanlah yang paling tepat untuk suatu masalah, melainkan pada solusi yang paling mendekati dari suatu masalah. Perkiraan untuk sebagian besar fungsi dapat ditemukan menggunakan Maple. Perintah yang menemukan perkiraan ini adalah `taylor`, `series`, dan `asympt`. Teorema Taylor adalah bahwa jika suatu fungsi  $f(x)$  terdefinisi dan memiliki turunan yang terdefinisi dengan baik di titik  $x = a$ , maka untuk  $x$  dekat  $a$  fungsi tersebut dapat didekati dengan deret

$$f(x) = f(a) + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(a)\right)(x-a) + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a)\right)(x-a)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(a)\right)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

Misalnya, untuk salah satu fungsi berikut

`> taylor(sech(x), x=0, 20);`

Opsi  $x = 0$  digunakan untuk mengambil ekspansi sekitar 0 dan 20.

**Soal 3.19**

Temukan perluasan Taylor dari fungsi berikut di mana  $x = 0$  dan pertahankan sukunya menjadi  $x^{10}$ .

- (a)  $\sin(x)$
- (b)  $\cos(x)$
- (c)  $\arctan(x)$
- (d)  $e^x$
- (e)  $\ln(1 + x)$
- (f)  $(1 + x)^p$

**Soal 3.20**

Maple juga dapat melakukan perluasan fungsi khusus Taylor. Temukan perluasan dari (a)  $J_0(x)$ , (b)  $I_2(x)$ , (c)  $K(x)$  (integral eliptik lengkap `EllipticK`), dan (d)  $\Gamma(x)$ . Kerjakan (a)-(c) untuk  $x = 0$  dan (d) untuk  $x = 1$ . Lakukan masing-masing hingga  $x^{10}$ .

**Soal 3.21**

Kembangkan fungsi Bessel  $K_0(x)$  sekitar  $x = 0$ . Jika fungsi tersebut memiliki semacam singularitas pada titik ekspansi, maka fungsi atau beberapa turunannya tidak dapat ditemukan pada titik tersebut dengan menggunakan deret Taylor. Deret lain yang dapat memperkirakan fungsi, yaitu `series(BesselK(0, x), x=0, 3);`.

Perhatikan bahwa  $K_0$  adalah logaritma singular. (Perhatikan juga bahwa konstanta  $\gamma$  Euler muncul dalam perluasan ini. Lakukan hal yang sama pada fungsi berikut:

- (a)  $\cot(x)$

(b)  $\frac{1}{\tanh(x)}$

(c)  $\frac{\sqrt{x}}{\sin(x^2)}$

Gunakan angka yang berbeda sebagai pengganti 3 dalam rangkaian perintah di atas.

### Soal 3.22

Ada jenis pemuaian yang sangat berguna dalam fisika matematika, yaitu pemuaian asimptotik yang merupakan perluasan  $\infty$ , yang berarti bahwa untuk mengetahui bagaimana suatu fungsi berperilaku ketika argumennya sangat besar. Perintah Maple yang digunakan adalah `asympt(f, x, 2)` atau `series(f, x=infinity, 2)` di mana  $f$  adalah ekspresi Maple. Gunakan perintah ini pada fungsi berikut menggunakan rangkaian pada bagian (a)-(b) dan menggunakan `asympt` pada (c)-(d).

(a)  $J_0(x)$

(b)  $I_1(x)$

(c)  $K_0(x)$

(d)  $\Gamma(x)$

### Soal 3.23

Persamaan gerak bandul adalah

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta = -\frac{g \sin(\theta)}{L}$$

di mana sudut  $\theta$  adalah nol jika pendulum menggantung lurus ke bawah dan  $\pi$  jika pendulum menyeimbangkan lurus ke atas.

Carilah persamaan ini di dekat beberapa nilai khusus  $\theta$  (seperti lurus ke bawah:  $\theta = 0$  dan lurus ke atas:  $\theta = \pi$ )

(i)  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} x = -\omega^2 x$

(ii)  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} x = \omega^2 x$

Yang pertama adalah osilator harmonik sederhana yang solusinya berbentuk sinusoidal pada frekuensi  $\omega$  seperti ini:  $\cos(\omega t)$  atau  $\sin(\omega t)$ ; yang kedua memiliki eksponensial  $e^{\omega t}$  untuk salah satu solusinya, sehingga mewakili gerakan yang tidak stabil.

Persamaan pendulum dengan  $\sin(\theta)$  di dalamnya dapat dibuat seperti persamaan sederhana dengan menggunakan perluasan deret.

- Perluas ruas kanan persamaan pendulum terhadap posisi kesetimbangan ke bawah pada  $\theta = 0$  dan dengan membandingkannya dengan (i) dan (ii) tunjukkan hasil osilasi harmonik sederhana.
- Perluas ruas kanan persamaan pendulum terhadap posisi kesetimbangan vertikal di  $\theta = \pi$ . Buat  $u$ -substitusi  $\theta = \phi + \pi$  dalam persamaan pendulum  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta = -\frac{g\sin(\theta)}{L}$  untuk mendapatkan persamaan diferensial di  $\phi$ . Bandingkan persamaan yang dihasilkan dengan (i) dan (ii) untuk menunjukkan bahwa persamaan baru ini memiliki solusi yang tidak stabil.

### Soal 3.24

Dalam teori relativitas Einstein, energi suatu benda bermassa  $m$  yang bergerak dengan kecepatan  $v$  diberikan oleh

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Untuk energi kinetik

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Asumsikan bahwa objek bergerak dengan kecepatan yang jauh lebih kecil dari kecepatan cahaya dan buatlah perluasan deret dari rumus Einstein dalam  $v$ , dengan mempertahankan dua suku.

### Soal 3.25

Rumus potensi (tegangan) dari muatan titik diberikan sebagai berikut

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Dipol adalah sepasang muatan titik, satu dengan muatan  $q$  dan yang lainnya dengan muatan  $-q$ , dipisahkan oleh jarak  $d$ . Momen dipol dilambangkan dengan simbol  $p$  dengan besarnya  $p = qd$ . Menempatkan muatan positif

pada sumbu  $z$  di  $d/2$  dan muatan negatif pada sumbu  $z$  di  $-d/2$ . Jika menggunakan koordinat bola maka potensial sebagai fungsi jarak  $r$  dari asal dan sudut polar  $\theta$  adalah

$$V_{r,\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - r d \cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + r d \cos(\theta)}} \right) \right)$$

Buatlah perluasan deret dari rumus ini dalam jarak pisah yang kecil  $d$  dan pertahankan suku depannya untuk menemukan rumus potensial dipol dalam koordinat bola. Gunakan `assume(r>0)`.

### 3.5 Sums

Perhatikan sintaks berikut yang menggunakan perintah `sum`

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

```
> restart;
> sum(1/'n' 2, 'n'=1..infinity);
```

Indeks  $n$  dalam tanda kutip tunggal yang memberi tahu Maple untuk menggunakan ini sebagai variabel dummy dalam perintah untuk mengabaikan kemungkinan penugasan sebelumnya dari sesuatu ke variabel  $n$ .

Perintah `sum`, dan bentuk lembamnya `Sum`, juga bekerja dengan fungsi.

```
> fn:=n->1/n 2;
> s1:=Sum(fn(n), n=1..infinity);
> value(s1);
```

#### Soal 3.26

Temukan setiap penjumlahan berikut menggunakan bentuk ekspresi untuk (a)-(c) dan bentuk fungsi untuk (d)-(f).

(a)  $\sum_{n=1}^N n^3$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(d)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \right)$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

## BAB 4

# BILANGAN KOMPLEKS DAN FUNGSI

Dalam bilangan kompleks,  $i$  disebut sebagai bilangan imajiner yang bernilai  $\sqrt{-1}$ . Dalam Maple bilangan kompleks  $i$  dituliskan dengan menggunakan variabel  $I$ . Misalkan bilangan kompleks  $5 + 3i$  maka akan ditulis sebagai berikut

```
> z1:=5 + 3*I;
```

Bilangan kompleks dalam Maple tidak dituliskan dengan variabel  $i$

```
> z2:=5+3*i;
```

Karena dalam Maple variabel  $i$  hanyalah variabel lain yang belum memiliki nilai sehingga bila dituliskan demikian tidak akan didapatkan nilai yang sesuai.

Dalam bab ini akan ditinjau berbagai hal dalam bidang kompleks, termasuk aritmatika, kalkulus, serta fungsi khusus seperti  $J_0$  dan  $\Gamma(z)$ .

Catatan: dalam bab ini terdapat bentuk variabel seperti  $z$ ,  $z1$ ,  $z2$ , dan lain-lain yang merupakan variabel kompleks dari bentuk

$$z = x + yI$$

### 4.1 Aritmatika Kompleks

Perhatikan bentuk penjumlahan dan pengurangan berikut di mana bilangan real sebagai sumbu  $x$  dan bilangan imajiner sebagai sumbu  $y$ , yang membentuk bidang  $xy$  kompleks. Penjumlahan dan pengurangan kompleks merupakan bentuk vektor dalam bidang 2 dimensi.

```
> z1:=5+3*I;
```

```
> z2:=1-6*I;
```

```
> z3:=z2+z1;
```

Menuliskan bentuk penjumlahan dan pengurangan bidang kompleks di atas dalam perintah `plottools` sebagai berikut

```
> with(plottools):
```

```
l1 := arrow([0,0], [5,3], .2, .5, .1,
color=green):
```

```
l2 := arrow([0,0], [1,-6], .2, .5, .1,
```

```

color=blue):
l3 := arrow([0,0], [6,-3], .2, .5, .1, color=red):
> plots[display](l1,l2,l3, axes=normal, view=[-
10..10, -10..10]);

```

Selanjutnya operasi perkalian dan pembagian kompleks dengan memperlakukan bagian real dan imajiner seperti variabel dalam aljabar. Misalnya untuk perkalian berikut, dengan mengingat bahwa  $I^2 = -1$ , maka  $(5 + 3I) * (1 - 6I) = (5 + 3I - 30I + 18) = 23 - 27I$ .

```
> z1*z2;
```

Tanda bagian imajiner pada konjugat kompleks  $z_1$  diubah tandanya, seperti berikut

```
> conjugate(6+4*I);
```

Konjugat berguna karena hasil kali bilangan kompleks dan konjugatnya menjadi:

```

> conjugate(6+4*I)*(6+4*I);
> assume(x, real); assume(y, real);
> conjugate(x+y*I)*(x+y*I);
> expand(%);

```

Ini menghasilkan bilangan real yang sama dengan kuadrat besaran bilangan kompleks.

#### Soal 4.1

Selesaikan bentuk pembagian berikut secara analitis

$$\frac{3 + 4I}{2 - 5I}$$

lalu selesaikan juga dengan menggunakan Maple dan tunjukkan perbandingan jawaban yang didapatkan.

Terdapat gambar di bidang kompleks yang memungkinkan visualisasi arti perkalian dan pembagian. Untuk memahaminya diperlukan cara berpikir lain tentang bilangan kompleks. Misalnya untuk  $5 + 4I$  dengan menggunakan koordinat Cartesian pada bidang kompleks. Dalam koordinat polar  $5 + 4I$  akan diwakili oleh radius besarnya  $\sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$ , dan sudut  $\theta$  diukur berlawanan arah jarum jam dari sumbu sebenarnya, dengan  $\theta = \arctan\left(\frac{4}{5}\right)$ , seperti berikut.



```

> with(plottools):
 l1 := arrow([0,0], [5,4], .2, .5, .1,
 color=green):
 l2 := arc([0,0],4,0..arctan(.8),color=red):
> plots[display](l1,l2,axes=normal,view=[-5..5,-
 5..5],scaling=constrained);

```

Koordinat polar merupakan alternatif untuk memvisualisasikan bilangan kompleks. Hubungan bilangan kompleks yang diwakili oleh  $x + iy$  dan bentuk polar  $(r \theta)$  terkait dalam trigonometri  $x = r\cos\theta$  dan  $y = r\sin(\theta)$ . Ahli matematika Swiss Leonhard Euler menemukan bahwa fungsi eksponensial yang diterapkan pada bilangan imajiner murni memberikan hasil yang luar biasa

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Ini berarti bahwa hubungan antara bentuk bilangan kompleks Cartesian dan polar dapat ditulis dalam bentuk

$$x + iy = re^{i\theta}$$

Bentuk tersebut dikombinasikan dengan sifat fungsi eksponensial perkalian dan pembagian. Produk dari  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  dan  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  dapat ditulis sebagai

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Sehingga dapat dinyatakan bahwa hasil kali memiliki besaran yang merupakan perkalian dari besaran  $z_1$  dan  $z_2$  serta sudut yang merupakan jumlah sudut  $z_1$  dan  $z_2$ .

```

> with(plottools):
> l1 := arrow([0,0], [1,2], .1, .3, .1,
 color=green):
 l1a := arc([0,0],1.5,0..arctan(2),color=green):
> l2 := arrow([0,0], [1,.8], .1, .3, .1,
 color=green):
 l2a := arc([0,0],.75,0..arctan(.8),color=green):
> l3 := arrow([0,0], [-.6,2.8], .1, .3, .1,
 color=red):
 l3a := arc([0,0],2.5,0..arctan(2.8,-
 .6),color=red):
>

```

```
plots[display](l1,l2,l3,l1a,l2a,l3a,axes=normal,view=[-3..3,-3..3],scaling=constrained);
```

Pembagian bekerja dengan cara yang sama, tetapi dua besarannya dibagi dan dilakukan pengurangan untuk dua sudut:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i(\theta_1 - \theta_2)}}{r_2}$$

Maple memiliki beberapa perintah yang digunakan dalam bilangan kompleks, seperti  $\text{Re}(z)$  yang memberikan bagian real dari  $z$ ,  $\text{Im}(z)$  yang memberikan bagian imajiner,  $\text{abs}(z)$  yang memberikan besaran polar, dan  $\text{arctan}(\text{Im}(z), \text{Re}(z))$  yang memberikan besar sudut, seperti ini

```
> z:=5-3*I;
> Re(z); Im(z); abs(z); arctan(Im(z), Re(z));
```

Maple juga memiliki perintah yang dapat mengubah  $z$  dalam bentuk Cartesian menjadi bentuk polar

```
> readlib(polar);
> polar(z);
```

Serta bentuk kompleks konjugat

```
> conjugate(3+4*I);
```

#### Soal 4.2

Kerjakan operasi yang ditunjukkan di bawah pada bilangan kompleks  $z_1$  dan  $z_2$  dan nyatakan jawaban dalam bentuk Cartesian  $(x + iy)$  dan bentuk polar.

Gunakan definisi  $z_1$  dan  $z_2$  dalam soal ini:

```
> z1:=3-5*I; z2:=-2+3*I;
```

- (a)  $z_1 + z_2$
- (b)  $z_1 - z_2$
- (c)  $z_1 z_2$
- (d)  $\frac{z_1}{z_2}$

#### Soal 4.3

Tunjukkan secara grafis, dengan membuat plot panah Maple. Lakukan dengan mendefinisikan bilangan kompleks  $z_1$  dan memplotnya sebagai panah, lalu

mengalikan  $z1$  dengan  $e^{i\theta}$  untuk beberapa sudut  $\theta$  yang dipilih lalu lakukan plot untuk bilangan kompleks baru sebagai panah. Gunakan angka floating point dalam argumen perintah panah. Maple mungkin akan memberikan jawaban yang memiliki akar kuadrat dari bilangan bulat di dalamnya dan bentuk panah tidak akan muncul jika angka-angka tersebut hanya disalin ke dalam perintah. Gunakan evalf untuk menempatkan bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks ke dalam perintah panah:  $[\text{Re}(z), \text{Im}(z)]$ .

## 4.2 Fungsi Kompleks Dasar

Bidang kompleks dapat memberikan gambaran yang lebih terpadu dari suatu fungsi. Perhatikan fungsi eksponensial dari persamaan Euler berikut

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

properti dari fungsi eksponensial memungkinkan untuk  $e^z$  (dengan  $z = x + iy$ ), sehingga

$$e^{iy+x} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Membuat plot permukaan 3-D dari bagian real dan bagian imajiner menggunakan Perintah `plot3d` untuk melihat perilaku fungsi tersebut pada seluruh bidang kompleks.

```
> restart;
> plot3d(Re(exp(x+I*y)), x=-6..6, y=-6..6, shading=z, axes=framed, labels=["x", "y", "Re(f)"], orientation=[-60, 60], title="Real Part");
> plot3d(Im(exp(x+I*y)), x=-6..6, y=-6..6, shading=z, axes=framed, labels=["x", "y", "Im(f)"], orientation=[-60, 60], title="Imaginary Part");
```

Perhatikan bahwa pada  $x$  negatif sangat kecil dan untuk  $x$  positif sangat besar, ini merupakan perilaku  $e^x$ . Di  $y$ , fungsinya hanya berosilasi seperti sinus dan kosinus. Pencampuran fungsi eksponensial serta sinus dan kosinus ini menghasilkan beberapa rumus menarik yang akan diverifikasi dalam soal berikutnya.

### Soal 4.4

Gunakan Maple untuk memverifikasi identitas fungsional berikut.

$$(a) \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$(b) \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$(c) \cos(ix) = \cosh(x)$$

$$(d) \sin(ix) = i \sinh(x)$$

#### Soal 4.5

Buat plot permukaan 3-D di atas bagian real bidang kompleks dari bagian real dari  $\cos(z)$  dan  $\sin(z)$ , serta bagian imajiner dari  $\tan(z)$ , di mana

$$z = iy + x$$

Gunakan  $x$  dalam rentang  $-9,9$  dan  $y$  dalam rentang  $-5,5$ , untuk  $\sin$  dan  $\cos$   $-5,5$  dan  $-3,3$  untuk  $\tan$ . Lakukan ini dengan menggunakan opsi `view` di plot, `view=-5..5`. Membatasi ukuran vertikal untuk mencegah Maple memplot tak terhingga. Gunakan `grid=[30,30]` untuk membentuk kisi yang lebih halus.

Perhatikan fungsi hukum pangkat di bidang kompleks dengan menggunakan representasi polar sebagai berikut

$$z^p = r^p e^{ip\theta}$$

#### Soal 4.6

Buat plot 3-D bagian real dari fungsi  $z^2$  dan  $z^5$  menggunakan rentang  $-3,3$  di  $x$  dan  $y$  untuk  $z^2$  dan rentang yang lebih kecil untuk  $z^5$ .

Untuk non-bilangan bulat pertimbangkan fungsi akar kuadrat,

$$p = \frac{1}{2}$$

Perhatikan tiga plot 3-D dari fungsi tersebut

```
> plot3d(abs((x+I*y)^(1/2)), x=-1..1, y=-1..1, shading=z, axes=framed, labels=["x", "y", "|f|"], orientation=[-60, 45], title="Magnitude", grid=[40, 40]);
```

```
> plot3d(Re((x+I*y)^(1/2)), x=-1..1, y=-1..1, shading=z, axes=framed, labels=["x", "y", "Re(f)"], orientation=[-60, 35], title="Real Part", grid=[40, 40]);
> plot3d(Im((x+I*y)^(1/2)), x=-1..1, y=-1..1, shading=z, axes=framed, labels=["x", "y", "Im(f)"], orientation=[-60, 35], title="Imaginary Part", grid=[40, 40]);
```

Maple mendefinisikan sudut polar  $\theta$  berada di kisaran  $-\pi, \pi$ . Untuk fungsi akar kuadrat terhadap dua nilai  $z$  yang berbeda yaitu  $z_1 = e^{i\pi}$  dan  $z_2 = e^{-i\pi}$ . Perhatikan bahwa  $z_1$  dan  $z_2$  adalah angka yang persis sama, yaitu  $-1$ . Selanjutnya fungsi akar kuadrat mengubah yang pertama menjadi  $i$  dan yang kedua menjadi  $-i$ . Jadi akar kuadrat dari  $-1$  memiliki jawaban yang berbeda tergantung sudut yang digunakan untuk mendapatkan  $-1$  pada bidang kompleks. Inilah asal usul permukaan tebing di plot bagian imajiner, dan garis pada bidang kompleks tempat tebing itu muncul disebut potongan cabang.

#### Soal 4.7

Lakukan hal yang sama pada fungsi  $\ln(z)$  lalu temukan potongan cabang dan jelaskan sesuai pembahasan sebelumnya. Catatan: pastikan untuk menggunakan fungsi  $\ln(x + Iy)$  dalam perintah plot.

#### Soal 4.8

Lakukan satu set plot permukaan 3-D dari fungsi berikut di sepanjang sumbu real

$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^2}$$

(ingat bahwa  $z = x + Iy$ ). Pertama buat plot  $f(x)$  sepanjang sumbu real. Gunakan rentang  $x - 4..4$ . Kemudian buat plot permukaan dari bagian real, bagian imajiner, dan besarnya (gunakan `abs`), menggunakan `-4..4` di kedua dimensi. Gunakan juga opsi `view = -3..3`.

### 4.3 Fungsi Kompleks Khusus

#### Soal 4.9

Gunakan Maple untuk menunjukkan bahwa fungsi Bessel  $J_0(z)$  dan  $I_0(z)$  terkait dalam bidang kompleks dengan mengevaluasi  $I_0(ix)$  dan  $I_0(ix)$ . Lakukan untuk beberapa perintah fungsi Bessel, misalnya  $n=1,2,3$ . Lakukan hal yang sama untuk fungsi Bessel  $Y_0$ .

$$Y_0(ix) = iI_0(x) - \frac{2K_0(x)}{\pi}$$

Verifikasi identitas tersebut secara numerik. Gunakan  $z = xI$  untuk beberapa nilai real  $x$ .

#### Soal 4.10

Lakukan eksplorasi plotting 3-D dari perilaku integral elips  $K(z)$  pada bidang kompleks. Fungsi ini diperoleh dengan perintah Maple `EllipticK(z)`. Lihatlah bagian real dan imajineranya dengan  $x$  dan  $y$  dalam rentang  $-2..2$ .

### 4.4 Interferensi Gelombang

Bidang kompleks dapat diterapkan dalam fenomena fisika, seperti pergeseran fasa dan pola interferensi. Fase adalah segala sesuatu yang muncul sebagai argumen dari fungsi sinus atau cosinus. Misalnya, jika osilasi dalam waktu dijelaskan oleh fungsi  $\cos(\omega t)$ , maka fase osilasi berubah secara linier dalam waktu dan diberikan oleh  $\omega t$ . Jika osilasi digeser dalam waktu yang diberikan oleh fungsi  $\cos(\omega t + \phi)$ , maka fase baru dari osilasi adalah  $\omega t + \phi$ , hal tersebut relatif terhadap osilasi sebelumnya, yang memiliki pergeseran fasa  $\phi$ .

$$\cos(\omega t) = \Re(e^{i\omega t})$$

Misalkan terdapat 12 osilasi berbeda seperti  $\cos(\omega t + \phi_n)$ , di mana gelombang ke- $n$  memiliki pergeseran fasa yang diberikan oleh

$$\phi_n = \frac{2n\pi}{13}$$

Menjumlahkan osilasi tersebut didapatkan

```
> restart;
> s1:=Sum(cos(omega*t+2*Pi*'n'/13),'n'=1..12);
> s1:=value(s1);
> simplify(s1);
```

Selanjutnya menjumlahkan 12 eksponensial kompleks

$$\sum_{n=1}^{12} e^{i\omega t + i\phi_n}$$

Menghilangkan faktor persekutuan  $e^{i\omega t}$  lalu menulis eksponensial kompleks yang tersisa dengan cara berikut

$$e^{\frac{i2\pi n}{13}} = (e^{\frac{i2\pi}{13}})^n$$

Sehingga

$$e^{i\omega t} \left( \sum_{n=1}^{12} z^n \right)$$

di mana  $e^{\frac{i2\pi}{13}}$

```
> z:=exp(I*2*Pi/13);
> s:=Sum(z^n,n=1..12);
> s:=simplify(value(s));
```

Sehingga didapatkan

$$\sum_{n=1}^{12} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi n}{13}\right) = -\cos(\omega t)$$

#### Soal 4.11

Gunakan Maple untuk mendapatkan pola difraksi dua celah dalam pendekatan medan jauh. Untuk dua sumber cahaya dengan jarak  $d$  terpisah dan tegak lurus dengan garis di antara keduanya pada jarak  $L$  adalah layar. Tentukan intensitas gelombang sebagai fungsi jarak  $y$  pada layar,

```
> restart:with(plots):
> l1:=listplot([[0,0],[2,0]]): #jarak ke layar
```

```

> t1:=textplot([1,-.1,"L"]): #label L
> l2:=listplot([[-.08,-.2],[-.1,-.2],[-.1,.2],[-.08,.2]]): #tanda kurung d
> t2:=textplot([-0.15,0,"d"]): #label d
> p1:=pointplot([0,-.2],symbol=circle): #sumber rendah
> p2:=pointplot([0,.2],symbol=circle): #sumber atas
> l3:=listplot([2,-1.25],[2,1.25]): #layar
> t3:=textplot([2.08,.5,"y"]): #label y
> l4:=listplot([0,.2],[2,.6]): #sinar atas
> t4:=textplot([1.5,.6,"r1"]): #label r1
> l5:=listplot([0,-.2],[2,.6]): #sinar rendah
> t5:=textplot([1.5,.3,"r2"]): #label r2
>
plots[display]([l1,t1,l2,t2,p1,p2,l3,t3,l4,t4,l5,t5],axes=none,thickness=3,view=[-.5..2.1,-1.25..1.25],font=[HELVETICA,14]);

```

Untuk mempelajari gangguan dari kedua sumber dengan akurasi sebanyak mungkin, pertimbangkan bidang dari masing-masing sumber jatuh seperti

$e^{i(kr-\omega t)}$  dari sumbernya. Dua jarak diberikan oleh

$$r_1 = \sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2}$$

$$r_2 = \sqrt{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2}$$

Dengan menjumlahkan kedua bidang untuk mendapatkan bidang total di layar, akan didapatkan jenis gangguan yang diciptakan Maple untuk ditangani:

Tentukan fungsi untuk  $r_1(y)$  dan  $r_2(y)$

```

> R1:=y-> sqrt((y-d/2)^2+L^2);
> R2:=y-> sqrt((y+d/2)^2+L^2);

```

Tambahkan fungsi gelombang dari dua sumber terhadap bagian real, dan kuadratkan untuk mendapatkan intensitas

```

> Intensity:= y-> Re(exp(I*k*R1(y) - I*omega*t) / R1(y) + exp(I*k*R2(y) - I*omega*t) / R2(y));

```



$$I \cdot \omega \cdot t) / R^2 (y) )^2;$$

Jika dipilih  $t = 0$ , maka akan dibandingkan intensitas sesaat di tempat yang berbeda dan di setiap tempat intensitasnya bervariasi antara nol dan beberapa nilai maksimum. Rata-rata waktu dari besaran yang berosilasi didefinisikan sebagai berikut:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{\int_0^T f(t) dt}{T}$$

di mana  $T$  adalah periode osilasi. Lakukan hal berikut (i) jumlahkan semua poin data (integrasi adalah penambahan sejumlah besar  $f \cdot dt$ ) dan (ii) bagi dengan jumlah titik (dibagi dengan interval integrasi). Koneksi berfungsi seperti ini

$$\frac{\int_0^T f(t) dt}{T} = \frac{\sum f(t_i) dt}{T}$$

Di mana  $\frac{T}{dt} = N$ , sehingga

$$\frac{\int_0^T f(t) dt}{T} = \frac{\sum f(t_i)}{N}$$

Tentukan rata-rata waktu dari sinus, cosinus, dan hasil perkaliannya:

```
> Int(sin(t), t=0..2*Pi) / (2*Pi); value(%);
> Int(cos(t), t=0..2*Pi) / (2*Pi); value(%);
> Int(cos(t)*sin(t), t=0..2*Pi) / (2*Pi);
> value(%);
> Int(cos(t)^2, t=0..2*Pi) / (2*Pi);
> value(%);
> Int(sin(t)^2, t=0..2*Pi) / (2*Pi); value(%);
> value(%);
```

Waktu rata-rata dari  $\sin(t)$ ,  $\cos(t)$ , dan  $\sin(t)\cos(t)$  bernilai nol. Waktu rata-rata  $\cos(t)^2$  dan  $\sin(t)^2$  adalah  $1/2$ .  $\sin$ ,  $\cos$ , dan  $\sin * \cos$  membutuhkan waktu yang sama untuk bernilai positif dan negatif, jadi rata-ratanya nol. Kuadratnya berosilasi secara simetris antara 0 dan 1, jadi rata-ratanya adalah  $1/2$ .

Menentukan intensitas dalam bentuk ekspresi

```
>
assume(k, real, r1, real, r2, real, omega, real, t, real);
> Intense:=Re(exp(I*k*r1-I*omega*t)/r1+exp(I*k*r2-I*omega*t)/r2)^2;
```

Untuk membuat perhitungan lebih sederhana, definisikan ulang argumen dari fungsi kosinus menjadi  $x_1$  dan  $x_2$ , masing-masing:

```
> Intense:=(cos(x1)/r1+cos(x2)/r2)^2;
```

Sekarang kembangkan seperti ini

```
> Intense:=expand(Intense);
```

Dua suku kuadrat baik  $x_1$  dan  $x_2$  memiliki  $\omega t$  di dalamnya sehingga rata-rata waktu hanya menjadi  $1/2$  (pergeseran fase karena  $kr_1$  hanya menggeser fungsi; masih menghabiskan jumlah waktu yang sama antara 0 dan

1.) Lakukan kombinasi dengan identitas trigonometri:

```
> combine(cos(x1)*cos(x2));
```

(Catatan: untuk mendapatkan identitas trigonometri gunakan perintah `expand`, `simplify`, dan `combine`.) Istilah  $x_1 + x_2$  seperti  $2\omega t$  dan rata-rata waktu menjadi nol, sehingga

```
> Intense:=1/(2*r1^2)+cos(x1-x2)/(r1*r2)+1/(2*r2^2);
```

Selanjutnya definisikan ulang fungsi intensitas posisi  $y$

```
> Intensity:=y->1/(2*R1(y)^2)+cos(k*R1(y)-k*R2(y))/(R1(y)*R2(y))+1/(2*R2(y)^2);
```

Sekarang tentukan detail situasi fisik dengan  $d = 0.1 \text{ mm}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ , dan lampu merah dengan panjang gelombang  $600 \text{ nm}$

```
> d:=1e-5;L:=1;k:=2*Pi/600e-9;
```

Terakhir, plot intensitas sebagai fungsi dari  $y$  untuk melihat seperti apa pola yang terlihat di layar. Maka hanya akan dilihat jendela selebar  $1 \text{ m}$  di dekat bagian tengah pola.

```
> plot(Intensity(y),y=-0.5..0.5);
```

#### Soal 4.12

Serway mengatakan bahwa jarak minimum pertama dari  $y = 0$  adalah di tempat di mana  $k d \sin(\theta) = \pi$ , di mana  $\theta$  adalah sudut yang ditunjukkan di bawah ( $y = L \tan(\theta)$ ). Buktikan bahwa interferensi minimum pertama pada plot di atas berada di tempat yang benar dengan mengukur nilai  $y$  pada plot 4.11 dan mengubah  $y$  menjadi sudut  $\theta$ . Gunakan nilai yang sama dari variabel yang digunakan pada Soal 4.11:

```
> restart:with(plots):
```

```

> l1:= listplot([[0,0],[2,0]]): #jarak ke layar
> t1:= textplot([1,-.1,"L"]): #label L
> l3:= listplot([[2,-1.25],[2,1.25]]): #layar
> t3:= textplot([2.08,.5,"y"]): #label y
> l4:= listplot([[0,0],[2,.6]]): #sisi miring
> t4:= textplot([.6,.1,"q"]): #label theta
>
p1:=plots[display]([l1,t1,l3,t3,l4],axes=none,thickness=3,view=[-.5..2.1,-1.25..1.25],font=[HELVETICA,14]):
>
p2:=plots[display]([t4],axes=none,thickness=3,view=[-.5..2.1,-1.25..1.25],font=[SYMBOL,20]):
> display(p1,p2);

```

#### Soal 4.13

Sesuatu yang Serway tidak lakukan adalah menunjukkan apa yang terjadi ketika layar semakin dekat ke sumbernya. Kedua bidang tidak lagi memiliki besaran yang sama dan fungsi jarak  $r_1$  dan  $r_2$  bervariasi lebih cepat dengan  $y$ . Jalankan kembali perhitungan pada Soal 4.11 sebanyak dua kali, untuk  $L = 10d$  dan  $L = 2d$  dan beri komentar seperti apa pola medan tersebut.

## 4.5 Elektrostatis dengan Muatan Listrik

Bidang kompleks digunakan untuk memvisualisasikan medan listrik dan permukaan ekuipotensial. Fungsi kompleks diberikan oleh

$$F(z) = -\frac{\lambda \ln(z - z_0)}{2\pi\epsilon_0}$$

yang memiliki sifat bahwa bagian riilnya adalah potensial elektrostatis dari muatan garis dengan muatan/panjang  $\lambda$  terletak di bidang  $xy$  pada posisi kompleks  $z_0$ , dan garis di bidang kompleks tempat imajiner bagian konstan adalah garis medan listrik. Fungsi ini dikombinasikan menggunakan Maple yang memungkinkan untuk memvisualisasikan dengan cepat permukaan ekuipotensial dan garis medan untuk berbagai pengaturan muatan garis. Berikut adalah contourplot yang menunjukkan permukaan ekuipotensial dan

garis medan listrik untuk muatan satu baris,

```
> restart:with(plots):
> p1:=contourplot(Re(-ln(x+I*y)),x=-5..5,y=-5..5,grid=[30,30],contours=30,coloring=[cyan,blue]):
> p2:=contourplot(Im(-ln(x+I*y)),x=-5..5,y=-5..5,grid=[30,30],contours=30,coloring=[red,red]):
> plots[display]([p1,p2],scaling=constrained);
```

Cara lain memvisualisasikan medan listrik dengan menggunakan perintah `fieldplot`.

#### Soal 4.14

Buat plot kontur untuk: (a) dua muatan garis dengan kerapatan sama, satu pada  $z = i$  dan yang lainnya pada  $z = -i$ , (b) dua muatan garis dengan besaran kerapatan sama tetapi berlawanan tanda yang terletak di bagian (a), dan (c) beri muatan garis berkekuatan 2 di  $z = -i$  dan salah satu berkekuatan 1 di  $z = i$ . Pada bagian ini gunakan kisi yang lebih halus dan lebih banyak kontur. Identifikasikan tempat yang medan listriknya nol.

Dimungkinkan juga menggunakan fungsi kompleks untuk mempelajari perilaku potensial dan tegangan di dekat sudut konduktor. Pertimbangkan plot kontur berikut dari fungsi  $iz^2$ .

```
> restart:with(plots):
> p1:=contourplot(Re(I*(x+I*y)^2),x=0..5,y=0..5,grid=[30,30],contours=40,coloring=[cyan,blue]):
> p2:=contourplot(Im(I*(x+I*y)^2),x=0..5,y=0..5,grid=[30,30],contours=40,coloring=[red,red]):
> plots[display]([p1,p2],scaling=constrained);
```

Mengingat bahwa potensi diberikan oleh bagian real dan garis medan oleh bagian imajiner

$$iz^2 = -xy + i(x^2 - y^2)$$

dengan

$$V = -xy$$

baik sumbu  $x$  dan sumbu  $y$  dibumikan. Garis medan berjauhan satu sama

lain di sudut, menunjukkan bahwa medan listrik di sana adalah nol.

$$E_x = -\left(\frac{\partial}{\partial x} V\right)$$

$$E_y = -\left(\frac{\partial}{\partial y} V\right)$$

$E_x$  sebanding dengan  $y$  dan  $E_y$  sebanding dengan  $x$ , jadi saat mendekati sudut di mana  $x = 0$  dan  $y = 0$ , kedua bidang secara linier menuju nol.

Fungsi yang mewakili cara bidang berperilaku di sekitar sudut cembung alih-alih cekung dengan menggunakan

$$e^{-\frac{i\pi}{6} z^{\frac{2}{3}}}$$

```
> restart:with(plots):
> p1:=contourplot(Re(exp(-
I*Pi/6)*(x+I*y)^(2/3)),x=-5..5,y=-
5..5,grid=[30,30],contours=40,coloring=[blue,blue]
):
> p2:=contourplot(Im(exp(-
I*Pi/6)*(x+I*y)^(2/3)),x=-5..5,y=-
5..5,grid=[30,30],contours=40,coloring=[red,red]):
> plots[display]([p1,p2],scaling=constrained);
```

Untuk mendapatkan bidang sudut, abaikan kuadran ketiga dan fokus pada kuadran 1, 2, dan 4. Ekipotensial ditarik dengan kuat di sekitar sudut, dan garis bidang memancar keluar dari sudut. Dalam koordinat silinder, potensial ini sebanding dengan  $r^{\frac{2}{3}}$  sehingga medan listrik, yang merupakan turunan dari potensial, sebanding dengan  $\frac{1}{r^{\frac{1}{3}}}$ , yang mengarah ke tak terhingga.

#### Soal 4.15

Gunakan fungsi  $\sqrt{(z)}$ . Buatlah gambaran potensi dan E-lines. Identifikasi keadaan medan listrik di mana potensial bervariasi dengan  $r$  dalam koordinat silinder serta medan listrik berjalan seperti turunan- $r$ .

# BAB 5

## ALJABAR LINIER

Aljabar linier dalam fisika adalah seni menggunakan matriks dan vektor untuk memecahkan masalah fisik. Gunakan paket berikut sebelum melakukan operasi aljabar linier dalam Maple

```
> with(LinearAlgebra):
```

### 5.1 Matriks, Vektor, dan Operasi Dasar

#### 1. Mendefinisikan Matriks dan Vektor

Ada beberapa cara untuk membuat matriks dan vektor di Maple, salah satunya dengan cara berikut karena ini mirip dengan cara yang dilakukan di Matlab, yang merupakan bahasa komputer lain (seperti sintaks HP-48.) Untuk membuat matriks  $A$   $2 \times 2$  yang berisi 1,2,3,4 gunakan

```
> A:=Matrix([[1,2],[3,4]]);
```

Untuk merujuk ke elemen matriks gunakan notasi  $A[\text{baris}, \text{kolom}]$ , yaitu  $A[1,2]$  seperti ini:

```
> A[1,2];
```

Dan jika hanya ingin mendefinisikan matriks  $B$   $2 \times 2$  yang belum memuat nilai, gunakan

```
> B:=Matrix(1..2,1..2);
```

Setelah  $B$  ditentukan, elemennya dapat dimuat

```
> B[1,1]:=2;B[1,2]:=3;B[2,1]:=7;B[2,2]:=4;
```

Cara lain dari Maple untuk memasukkan matriks dengan mengklik View pada toolbar, lalu pilih Palettes, lalu Matrix Palettes. Akan muncul pilihan berbagai ukuran matriks. Klik pada salah satu ukuran dan perintah Maple berikut akan muncul, selanjutnya masukkan elemen matriks sebagai pengganti tanda tanya.

```
> Matrix([[? , ? , ?], [? , ? , ?], [? , ? , ?]]);
```

Selanjutnya membuat vektor kolom dan baris menggunakan perintah Vector, seperti ini:

```
> b:=Vector([5,6]);
```

Untuk membuat vektor baris tambahkan keterangan berikut

```
> b:=Vector[row]([5,6]);
```

Untuk mengisi vektor dengan angka dari baris atau kolom matriks gunakan perintah `Column` dan `Row`. Misalnya, untuk memuat `c` dengan kolom kedua dari matriks `A` di atas gunakan

```
> c:=Column(A,2);
```

Untuk memuat `c` dengan baris pertama dari `A` gunakan

```
> c:=Row(A,1);
```

Vektor kolom dapat pula didefinisikan menggunakan sintaks `<...>`:

```
> s:=<1,2,3>;
```

Matriks merupakan kumpulan vektor kolom, sehingga matriks dapat didefinisikan dengan cara yang sama

```
> R:=<<1,2,3>|<4,5,6>|<7,8,10>>;
```

Dapat pula menyatakan bentuk matriks dan vektor dengan memasukkan rumus, seperti ini

```
> d:=Matrix([[x11,x12],[x21,x22]]);
```

```
> e:=Matrix([[x^2*y,y*x],[sin(x),1/x]]);
```

Selanjutnya dengan memberikan nilai `x` dan `y` lalu mengevaluasi untuk melihat bentuk matriksnya menggunakan perintah `eval` di bagian dalam untuk menetapkan nilai `x` dan `y` langsung ke elemen `e` dan `evalf` di bagian luar untuk memaksa evaluasi floating point.

```
> evalf(eval(e,x=1,y=2));
```

## 2. Add, Subtract, and Multiply

```
> restart:with(LinearAlgebra):
```

Untuk menjumlahkan dua matriks  $3 \times 3$  `B` dan `C` gunakan perintah `Add`.

```
> B:=Matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]);
```

```
> C:=Matrix([[3,2,1],[5,6,4],[9,7,8]]);
```

```
> E:=Add(B,C);
```

Untuk melakukan pengurangan gunakan cara berikut

```
> E:=Add(B,-C);
```

Sebelum melakukan penjumlahan dan pengurangan matriks terlebih dahulu perhatikan ukuran matriksnya

```
> F:=Matrix([[5,7],[1,3]]);
```

```
> Add(E,F);
```

Untuk perkalian matriks dan vektor dapat dilakukan dengan perintah

Multiply:

```
> G:=Multiply(B,C);
```

### Soal 5.1

Buktikan bahwa Maple melakukan ini dengan benar dengan menghitung  $G_{22}$  secara manual.

Perkalian matriks dan vektor juga dapat dilakukan, seperti ini

```
> b:=<5,6,7>;
```

```
> Multiply(B,b);
```

Seperti yang diketahui, jika matriks persegi dikali vektor kolom maka hasilnya berbentuk vektor kolom. Jika vektor baris dikali matriks persegi maka hasilnya berbentuk vektor baris

```
> c:=Vector[row]([1,2,3]);
```

atau

```
> c:=<1|2|3>;
```

```
> Multiply(c,C);
```

Selanjutnya melakukan perkalian matriks dan vektor dengan skalar menggunakan operator perkalian biasa

```
> 3*b;
```

```
> 5*B;
```

### Soal 5.2

Aplikasi penting dari perkalian matriks adalah rotasi vektor dalam ruang tiga dimensi. Dapat ditunjukkan bahwa jika vektor  $\mathbf{v}$  diputar dengan sudut  $\theta$  terhadap sumbu  $x$  berlawanan arah jarum jam ketika dilihat dari positif  $x$  ke titik asal, maka vektor baru hanya diberikan oleh matriks  $\mathbf{R}_x$  dikalikan dengan  $\mathbf{v}$ , di mana  $\mathbf{R}_x$  diberikan oleh

```
> Rx:=Matrix([[1,0,0],[0,cos(theta),-sin(theta)],[0,sin(theta),cos(theta)]]);
```

Demikian pula, matriks rotasi sumbu  $y$  dan  $z$  melalui sudut  $\phi$  dan  $\psi$  diberikan oleh

```
> Ry:=Matrix([[cos(phi),0,sin(phi)],[0,1,0],[-sin(phi),0,cos(phi)]]);
```



```
> Rz:=Matrix([[cos(psi), -sin(psi), 0], [sin(psi), cos(psi), 0], [0, 0, 1]]);
```

(Catatan: Tanda sinus dalam matriks ini berbeda dengan tanda pada Rx dan Rz karena rotasi selalu ditentukan sehubungan dengan aturan tangan kanan pada sudut) Gunakan rotasi matriks untuk memeriksa di mana vektor  $[1,0,0]$  berakhir setelah urutan rotasi berikut: (a) dengan  $\phi = \frac{\pi}{2}$  sumbu y, lalu (b) oleh  $\phi = \frac{\pi}{4}$  sumbu x, dan (c) oleh  $\phi = \frac{\pi}{2}$  sumbu z.

Setelah terdapat hasil, lakukan pembuktian bahwa hasil yang didapatkan benar dengan membuat sistem koordinat dengan jari dan melakukan rotasi. Kemudian mulailah dengan vektor yang sama  $[1,0,0]$  tetapi lakukan rotasi dalam urutan terbalik. Rotasi tidak boleh mengubah besaran vektor; apakah urutan perkalian matriks ini mempertahankan besarnya vektor? Untuk mendapatkan besaran vektor  $\mathbf{v}$  gunakan perintah `Norm(v, 2)`.

### 3. Inverse, Determinant, Norm, etc.

Ada banyak operasi matriks lain yang dapat dilakukan pada Maple

```
> restart:with(LinearAlgebra):
> B:=Matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]);
> C:=Matrix([[3,2,1],[5,6,4],[9,7,8]]);
```

Perintah `MatrixInverse` digunakan untuk mendapatkan invers dari matriks, misalkan untuk matriks C,

```
> MatrixInverse(C);
```

Untuk memeriksanya lakukan ini

```
> Multiply(C, MatrixInverse(C));
```

Perintah `Determinant` digunakan untuk mendapatkan determinan matriks

```
> Determinant(B); Determinant(C);
```

Perintah `Transpose` diperoleh dengan menukar baris dengan kolom

```
> Transpose(C);
> E:=Matrix([[1,2,3]]);
> Transpose(E);
```

Dan dalam mekanika kuantum terdapat perintah yang digunakan untuk mendapatkan transpos dari konjugasi kompleks, yang disebut `HermitianTranspose`:

```
> F:=<<1,I>|<2*I,2>>;
> HermitianTranspose(F);
```

Perintah `Trace` merupakan jejak matriks persegi adalah jumlah elemen diagonal.

```
> Trace(C);
```

Perintah `Norm` vektor memiliki banyak definisi. Mengkuadratkan elemen, menjumlahkannya, lalu mengambil akar kuadrat. Definisi ini digunakan hampir secara eksklusif dalam fisika, tetapi Maple lebih pintar dari ini, dengan mengambil akar ke- $k$  dari jumlah pangkat ke- $k$  dari unsur-unsur. Menggunakan  $k = 2$  sebagai standar dalam definisi ini,

```
> Norm(E, 2);
```

Untuk matriks normanya lebih rumit; lihat di bawah `?LinearAlgebra[Norm]`.

### Soal 5.3

Temukan invers dari matriks  $B$  yang didefinisikan di bagian ini. Jelaskan mengapa didapatkan pesan kesalahan alih-alih jawaban.

## 5.2 Memecahkan Sistem Persamaan Linear

Perhatikan contoh soal berikut:

Alice, Bob, dan Chuck saling berteman di mana jumlah umur Alice dan Bob adalah 1,5 kali umur Chuck. Umur Chuck dikurangi umur Bob adalah 6. Umur Alice ditambah umur Chuck adalah 2,25 sama dengan umur Bob. Bentuk matematis dari soal dalam aljabar linier berbentuk  $Ax = b$ , dengan urutan umur [Alice, Bob, Chuck]. Berikut adalah  $A$  dan  $b$ :

```
> restart; with(LinearAlgebra):
```

```
> A:=Matrix([[1,1,-3/2],[0,-1,1],[1,-2-1/4,1]]);
```

```
> b:=Vector([0,6,0]);
```

Untuk memecahkan vektor  $x$  dari usia mereka digunakan perintah `LinearSolve`

```
> LinearSolve(A,b);
```

### Soal 5.4

Pertimbangkan 5 pegas dengan konstanta pegas  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  yang dihubungkan bersama sepanjang sumbu  $x$ . Jika setiap pegas diketahui

panjangnya  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$ , cari panjang yang tidak diketahui dari setiap pegas  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  ketika pegas diregangkan sampai jumlah panjangnya dua kali total panjang yang tidak diregangkan. Gunakan Maple untuk mendapatkan solusi aljabar umum terkait masalah ini, lalu dapatkan jawaban numerik menggunakan  $k_1 = 0.5, k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 3, k_5 = 3.5$ . Asumsikan semua panjang menjadi sama dengan 10 cm. Gaya yang diberikan oleh pegas diberikan dengan rumus

$$F = -k(x - l)$$

### 5.3 Vectors: Dot and Cross Products

Untuk melakukan perkalian titik, perkalian silang, dan mencari sudut antara dua vektor dilakukan dengan perintah `DotProduct`, `CrossProduct`, dan `VectorAngle`.

```
> restart:with(LinearAlgebra):
> v1:=<1|2|3>;v2:=<4|5|6>;
> DotProduct(v1,v2);CrossProduct(v1,v2);
```

Untuk mendapatkan sudut perintah yang digunakan ialah

```
> VectorAngle(v1,v2);
```

atau,

```
> evalf(VectorAngle(v1,v2));
```

### 5.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Salah satu ide terpenting dari aljabar linier yang diterapkan pada fisika adalah nilai eigen dan vektor eigen. Nilai eigen dan vektor eigen biasanya muncul dalam mekanika klasik, fisika matematika, mekanika kuantum, serta analisis numerik.

Masalah nilai eigen yang diterapkan pada matriks adalah sebagai berikut: diberi matriks persegi  $\mathbf{A}$ , berapa vektor  $x_i$  dan angka  $\lambda_i$  sehingga ketika  $\mathbf{A}$  dikalikan menjadi  $x_i$  hasilnya adalah vektor yang sama  $x_i$ , tetapi saat dikalikan dengan  $\lambda_i$  menjadi  $\mathbf{A}x_i = \lambda_i x_i$ .

Karena perkalian matriks dengan vektor secara bersamaan memutar vektor dan mengalikannya dengan sebuah faktor. Jika matriksnya adalah  $N \times N$ , maka terdapat  $N$  vektor dan nilai tersebut disebut vektor eigen dan nilai eigen.

```
> restart:with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[1,2,3],[4,3,2],[-1,0,2]]);
> Eigenvectors(A);
```

Untuk mendapatkan hasil yaitu dengan memasukkan elemen-elemen matriks sebagai bilangan floating point yang memiliki titik desimal

```
> A:=Matrix([[1.,2.,3.],[4.,3.,2.],[-1.,0.,2.]]);
> v:=Eigenvectors(A);
```

Dalam perintah `Eigenvectors` himpunan bilangan pertama adalah vektor kolom yang berisi nilai eigen, dan himpunan bilangan kedua adalah matriks yang kolomnya adalah vektor eigen. Untuk mendapatkan vektor eigen ketiga dengan mengambil nilai eigen ketiga

```
> lambda3:=v[1][3];
```

$v[1]$  adalah vektor kolom untuk mendapatkan kolom ketiga dari  $v[2]$  menggunakan perintah `Column`

```
> v3:=Column(v[2],3);
```

Untuk mendapatkan bentuk vektor eigen dengan mengalikan  $v_3$  dengan  $A$ , di mana  $Av_3 = \lambda_3 v_3$ .

```
> y:=Multiply(A ,v3);
```

Untuk melihat apakah jawabannya benar, lakukan pembagian  $y$  dengan  $\lambda_3$  lalu lakukan pengurangan terhadap  $v_3$

```
> y/lambda3-v3;
```

Ketepatan angka floating point Maple dengan mengatur `Digits` ke nilai default 10.

### Soal 5.5

Ini merupakan ide eigen sederhana yang selalu muncul dalam analisis numerik. Jika dipilih suatu vektor dan terus mengalikannya dengan  $A$  pada contoh di atas sepanjang waktu. Vektor asli dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor eigen, sehingga dapat dilakukan perkalian dengan  $A$  pada masing-masing dari tiga komponen vektor eigen. Selanjutnya vektor dengan nilai eigen terbesar akan sepenuhnya mengambil alih karena setiap kali dikalikan dengan  $A$ , akan didapatkan kembali hasil yang lebih banyak daripada yang didapatkan sebelumnya.

Selanjutnya lakukan pemilihan vektor acak; lalu kalikan dengan  $A$  dan bagi dengan menggunakan `Norm(v,2)` sehingga hasilnya adalah vektor satuan;

kemudian lakukan perkalian dan renormalisasi ini sekitar 20 kali. Sekarang temukan sudut antara hasil akhir dan vektor eigen dengan nilai eigen terbesar; apakah perhitungan mendapatkan vektor eigen? Jelaskan besar sudut yang didapatkan!

### Soal 5.6

Dapatkan matriks rotasi  $R_x$  dari Soal 5.2 dan gunakan Maple untuk menemukan nilai eigen dan vektor eigennya. Gunakan nilai  $\theta$  berikut

(a)  $\theta = 1.3$

(b)  $\theta = \pi$

(c)  $\theta = \frac{\pi}{2}$

(Catatan: bagian (c) akan ditemukan saat mempelajari spin dalam mekanika kuantum.) Cara yang baik untuk mengerjakan soal ini adalah dengan mendefinisikan fungsi Maple  $M(\theta)$  yang mendefinisikan matriks  $R_x$ .

```
> M:=theta->Matrix([[1,0,0],[0,cos(theta),-sin(theta)],[0,sin(theta),cos(theta)]]);
```

dan kemudian gunakan fungsi ini untuk mendefinisikan tiga matriks di bagian (a)-(c).

```
> ?grad
```

## 5.5 Kalkulus Vektor: Grad, Div, dan Curl

Maple memiliki kemampuan dalam mengerjakan aljabar sehingga juga dapat mengerjakan turunan vektor dengan menggunakan perintah `grad`, `diverge`, `curl`, dan `laplacian`. Pengerjaan ini dilakukan menggunakan koordinat Kartesius, silinder, dan bola. Sebelum menggunakan perintah tersebut, gunakan paket aljabar linier `linalg`. Paket ini berbeda dengan paket `LinearAlgebra` di mana vektor didefinisikan dengan sintaks yang berbeda. Paket ini menggunakan vektor baris, misal,  $[v_x \ v_y \ v_z]$ .

```
> restart:with(linalg):
```

Berikut adalah beberapa contoh gradien di setiap sistem koordinat.

Koordinat Kartesius:

```
> f1:=3*x^2+y*sqrt(z);
```

```
> grad(f1,[x,y,z]);
```

Koordinat Silinder:

```
> f2:=cos(theta)/sqrt(r^2+z^2);
> grad(f2,[r,theta,z],coords=cylindrical);
```

Koordinat Bola:

```
> f3:=sin(phi)*r^2*(3*cos(theta)^2-1);
> grad(f3,[r,theta,phi],coords=spherical);
```

Maple juga dapat melakukan divergensi di ketiga sistem koordinat. Divergensi bekerja pada bidang vektor, jadi ketiga komponen harus didefinisikan dalam sistem koordinat apa pun yang digunakan. Berikut adalah contoh di setiap sistem koordinat.

Koordinat Kartesius:

```
g1:=[x^2,y^2,z^2];
diverge(g1,[x,y,z]);
```

Koordinat Silinder:

```
g2:=[r^2*cos(theta),r^2*sin(theta),z^2];
diverge(g2,[r,theta,z],coords=cylindrical);
```

Koordinat Bola:

```
g3:=[r^2*cos(theta),r^2*sin(theta),cos(phi)];
diverge(g3,[r,theta,phi],coords=spherical);
```

Untuk menggunakan bidang vektor yang sama yang digunakan untuk divergensi gunakan perintah `curl`,

Koordinat Kartesius:

```
> curl(g1,[x,y,z]);
```

Koordinat Silinder:

```
> curl(g2,[r,theta,z],coords=cylindrical);
```

Koordinat Bola:

```
> curl(g3,[r,theta,phi],coords=spherical);
```

Menggunakan perintah `laplacian` untuk masing-masing fungsi skalar yang digunakan dengan gradien dalam setiap sistem koordinat

Koordinat Kartesius:

```
> laplacian(f1,[x,y,z]);
```

Koordinat Silinder:

```
> laplacian(f2,[r,theta,z],coords=cylindrical);
```

Koordinat Bola:

```
> laplacian(f3,[r,theta,phi],coords=spherical);
```

### Soal 5.7

Dua persamaan Maxwell untuk medan listrik dan magnet statis adalah

$$\operatorname{div}(E) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{curl}(B) = \mu_0 J$$

Untuk masing-masing bidang  $E$  atau  $B$  berikut, gunakan kalkulus vektor Maple untuk menemukan rumus kerapatan muatan  $\rho$  dan kerapatan arus  $J$ . Catatan:  $E$  dan  $B$  adalah vektor, jadi perlu untuk mendefinisikannya dengan benar untuk menyelesaikan soal ini. Misalnya, jika

$$B_\theta = kr$$

maka perlu mendefinisikan  $B$  dengan cara ini:

```
> B:=array([0,k*r,0]);
```

(a) Koordinat bola:  $E_r = \frac{k}{r^2}$  (muatan titik)

(b) Koordinat bola:  $E_r = kr$  (bola muatan padat)

(c) Koordinat silinder:  $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$  (muatan baris)

(d) Koordinat silinder:  $E_r = kr$  (silinder muatan padat)

(e) Koordinat silinder:  $B_\theta = \frac{k}{r}$  (kawat panjang)

(f) Koordinat silinder:  $B_\theta = kr$  (arus seragam dalam kawat)

(g) Koordinat silinder:  $B_z = k(a^2 - r^2)$

### Soal 5.8

Potensi elektrostatik dari dipol titik diberikan dalam koordinat bola

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Temukan medan listrik dari dipol ini dalam koordinat bola dengan menggunakan hubungan pendefinisian untuk potensial

$$E = -\operatorname{grad}(V)$$

Apa hukum daya untuk cara  $E$  jatuh dengan jarak dari titik asal?

# BAB 6

## MENYELESAIKAN PERSAMAAN

Pada bab sebelumnya telah dipelajari bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linier. Maple juga dapat menyelesaikan persamaan non-linier. Dalam bab ini akan dipelajari bagaimana menemukan akar polinomial, menyelesaikan persamaan yang melibatkan fungsi dasar dan fungsi khusus, serta menyelesaikan himpunan persamaan.

### 6.1 Persamaan dalam Satu Variabel

Perintah yang melakukan penyelesaian persamaan dalam satu variabel adalah `solve` dan `fsolve`,

```
> restart;
> s1:=solve(a*x^2+b*x+c=0,x);
```

Perhatikan bahwa sintaks dari `solve` adalah `solve(equation,variable)`. Kedua jawaban diberikan, dipisahkan dengan koma. Dan jika diberikan koefisien numerik, maka akan memberikan jawaban numerik

```
> s2:=solve(x^2-8*x+14=0,x);
```

Maple mengetahui persamaan kubik

```
> s3:=solve(a*x^3+b*x^2+c*x+d=0,x);
> s4:=solve(x^3+3*x^2-2*x+7=0,x);
```

Untuk mendapatkan angka aktual, dapat digunakan `evalf`

```
> evalf(s4);
```

atau dengan memasukkan koefisien dalam persamaan dengan titik desimal.

```
> s4:=solve(x^3+3.*x^2-2.*x+7.=0,x);
```

Perintah `solve` dengan polinomial cerdas mengetahui teorema dasar aljabar, bahwa polinomial orde  $n^{th}$  memiliki akar  $n$

```
> s5:=evalf(solve(x^6+1=0,x));
> s6:=solve(x^6+3*x^5+2=0,x);
```

Saat menyelesaikan persamaan di Maple akan sering ditemukan `RootOf`. Masalahnya adalah dengan memberi Maple polinomial dengan koefisien



bilangan bulat, Maple akan mencoba menyelesaikan persamaan dengan akar (akar kuadrat, akar pangkat tiga, dll.). Dan dalam hal ini tidak bisa melakukannya, kecuali untuk root  $-1$ . Untuk mendapatkan angka, gunakan `evalf`, atau ubah koefisien menjadi angka floating point dengan menambahkan titik desimal

```
> evalf(s6);
> solve(x^6+3.*x^5+2.=0,x);
```

Maple juga dapat menangani persamaan yang melibatkan fungsi yang lebih sulit, seperti ini:

$$\cos(x) - \frac{x}{10} = 0$$

```
> s7:=solve(cos(x)-x/10=0,x);
```

`RootOf` lagi, dan solusinya sama: ubah 10 menjadi 10., atau gunakan `evalf(s7)`, untuk menemukan setidaknya salah satu solusi.

```
> evalf(s7);
```

Namun saat menyelesaikan persamaan sulit seperti ini, akan ada lebih dari satu jawaban di mana Maple tidak akan memberikan semuanya. Misalkan plot fungsi  $\cos(x) - \frac{x}{10} = 0$

```
> plot(cos(x)-x/10,x=-15..15);
```

Menggunakan pemecah numerik `fsolve` Nah untuk mendapatkan akar numerik. Saat menggunakan `fsolve` persamaan dan variabel yang ditetapkan sama dengan rentang pencarian atau tebakan awal tunggal untuk solusinya. Misalnya, dalam soal yang ada, plot memberi tahu terdapat akar di dekat  $-9,6$   $-9,2$   $-4$   $-2$   $1,5$   $5$  dan  $7$

```
> fsolve(cos(x)-x/10=0.,x,-10..-9.5);
> fsolve(cos(x)-x/10=0.,x,-9.5..-8.8);
```

Perhatikan apa yang terjadi jika secara tidak sengaja rentang yang tidak memiliki solusi ditentukan

```
> fsolve(cos(x)-x/10=0.,x,-8.5..-8);
```

Perhatikan juga bahwa hanya bisa diberikan satu tebakan di mana solusinya bukan rentang

```
> fsolve(cos(x)-x/10=0.,x=1.5);
> fsolve(cos(x)-x/10=0.,x=0);
```

Namun cara lain untuk mengontrol solusi mana yang diberikan Maple adalah opsi `avoid` di `fsolve`. Misalkan untuk mencari solusi dari persamaan  $\cos(x) - \frac{x}{3} = 0$ . Jika fungsi ini diplot untuk melihat letak nol, akan didapatkan

dua solusi yang berjarak dekat tepat di bawah 3. Perintah ini akan menemukan salah satunya:

```
> s1:=fsolve(cos(x)+x/3=0,x=3);
```

Untuk menemukan yang lain di dekat 3

```
> s2:=fsolve(cos(x)+x/3=0,x=.09,avoid=x=s1);
```

### Soal 6.1

Temukan semua akar, real dan kompleks, dari polinomial berikut. Gunakan perintah `solve` dan `fsolve` pada keduanya. `solve` akan memberi nilai kompleks, tetapi `fsolve` tidak. Ini dapat diatasi dengan menggunakan perintah berikut

```
fsolve(x^2+1=0,x,complex)
```

Gunakan juga perintah `factor(f,complex)`, di mana  $f$  adalah polinomial yang ingin difaktorkan.

(a)  $x^4 - 1$

(b)  $x^3 + x^2 + x + 1$

### Soal 6.2

Temukan semua solusi antara  $-5$  dan  $20$  dari persamaan

$$e^x = 10\sin(x)$$

### Soal 6.3

Temukan semua solusi dari persamaan

$$e^x = x$$

Gunakan `solve` dan `fsolve` dan bandingkan jawaban yang didapatkan.

## 6.2 Sistem Persamaan

Maple juga dapat menyelesaikan sistem persamaan linier dan nonlinier. Perintah yang menangani sistem ini adalah `solve` dan `fsolve` dengan memberi set persamaan dan variabel.

Perhatikan contoh berikut. John dua kali lebih tua dari Kimberly. Umur

Kimberly ditambahkan dengan umur John adalah 27. Hitunglah umur mereka. Menggunakan paket `LinearAlgebra` untuk mengaturnya sebagai matriks, tetapi dapat digunakan `solve` (dan `fsolve`) dengan persamaan secara langsung, seperti ini:

```
> restart;
> E1:=J=2*K;E2:=K+J=27;
> solve(E1,E2,J,K);
> fsolve(E1,E2,J,K);
```

`solve` dan `fsolve` juga dapat menyelesaikan sistem *nonlinear*, yaitu sistem persamaan yang variabelnya dikuadratkan, ditempatkan di dalam sinus, cosinus, eksponensial, dll.. Misalnya, di sini terdapat satu set dua persamaan nonlinear untuk dipecahkan

```
> restart;
> E1:=x^2-y=5;E2:=x-y^2=-13;
```

Menggunakan perintah `solve` sebagai berikut

```
> s:=solve(E1,E2,x,y);
```

Persamaan  $E1$  akan digunakan untuk menghilangkan  $y$  dari persamaan  $E2$  untuk mendapatkan persamaan tunggal untuk  $x$ . Kemudian persamaan kuartik ini difaktorkan untuk mendapatkan  $(x,y) = (3,4)$  dan mereduksi sisa soal menjadi kubik. Jika menggunakan `evalf` untuk menyelesaikan soal, maka akan memberikan

```
> evalf(s);
```

Tetapi jika kubik di `RootOf` diplot yang akarnya seharusnya memberikan nilai  $x$  yang memenuhi persamaan, gunakan `fsolve`, sehingga

```
> s:=fsolve(E1,E2,x,y);
```

Hasil yang didapatkan hanya memberikan satu akar. Akarnya dapat dicari satu per satu dengan memberikan tebakan awal `fsolve` seperti ini

```
> s:=fsolve(E1,E2,x=2.9,y=4.1);
```

Untuk mendapatkan hasil untuk semua 4 akar dilakukan dengan mengulangi hal pertama, tetapi dengan semua bilangan bulat diganti dengan angka floating point:

```
> restart;
> E1:=x^2.-y=5.;E2:=x-y^2.=-13.;
> s:=solve(E1,E2,x,y);
```

**Soal 6.4**

Temukan semua solusi (real dan kompleks) dari himpunan persamaan

$$y^2 - x^2 = -2$$

$$x - y^3 = 3$$

Berikut set nonlinier lain untuk menguji Maple.

```
> restart;
```

```
> E1:=cos(x)+y-sqrt(z)=-
.191748502;E2:=x*y*z=3;E3:=x+y+2*z=8;
```

Menggunakan solve terlebih dahulu

```
> solve(E1,E2,E3,x,y,z);
```

Menggunakan fsolve dengan rentang yang ditentukan untuk setiap variabel

```
> fsolve(E1,E2,E3,x,y,z,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```

sehingga  $(x,y,z) = (1.1,3)$  mendekati solusi.

**Soal 6.5**

Fungsi energi potensial sebuah partikel diberikan oleh

$$U(x,y,z) = x^2 + y^4 + z^2 + \cos(12x)\sin(12y)$$

Dengan gaya pada partikel diberikan oleh

$$F = -\text{grad}(U)$$

menemukan 4 titik keseimbangan. Untuk mengambil gradien di Maple gunakan

```
> ?grad
```

dan jelajahi halaman bantuan hingga didapatkan cara menerapkannya pada masalah ini. *Peringatan: jangan gunakan sintaks -grad(U) dalam soal ini* karena akan memberikan hasil yang tidak sesuai. Sebaliknya gunakan grad(-U). Masalahnya halus dan melibatkan bagaimana vektor ditangani dalam paket linalg. Formulir -grad(U) dapat berfungsi jika menggunakan evalm(-grad(U)).

# BAB 7

## PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Maple dapat membantu dalam menyelesaikan persamaan diferensial dalam fisika. Ada baiknya sebelum memulai masalah dengan persamaan diferensial di dalamnya untuk memuat set lengkap alat persamaan diferensial Maple, seperti ini

```
> restart:with(DEtools):
```

### 7.1 Persamaan Diferensial Orde Pertama

Jika laju peluruhan atom dalam sampel adalah  $g$  ( $g$  memiliki satuan 1/detik), maka persamaan untuk menentukan jumlah atom yang masih tersisa dalam sampel adalah sebagai berikut dengan menggunakan perintah `diff`,

```
> E1:=diff(N(t),t)=-g*N(t);
```

bersama dengan kondisi awal bahwa pada saat  $t = 0$  terdapat  $T[0]$  atom dalam sampel. Untuk menemukan fungsi  $T(t)$  digunakan perintah `dsolve`.

```
> dsolve(E1,N(t));
```

Solusi yang didapatkan adalah bentuk eksponensial meluruh. Selanjutnya mengganti argumen pertama `dsolve` dengan himpunan yang berisi  $E1$  dan kondisi awal, seperti ini.

```
> dsolve(E1,N(0)=No,N(t));
```

Untuk mendapatkan plot dari persamaan dilakukan pendefinisian terlebih dahulu terkait nilai dari tiap komponen

```
> No := 5;g:=3;
```

Menetapkan solusi ke variabel, seperti ini

```
> S1:=dsolve(E1,N(0)=No,N(t));
```

Merujuk ke solusi  $S1$ , dan dengan `rhs(S1)`, seperti ini

```
> plot(rhs(S1),t=0..3);
```

Cara lain untuk memplot hasil adalah dengan menemukan variabel  $N(t)$  yang dapat digunakan sebagai ekspresi dalam perintah `plot`. Sintaksnya adalah `assign(S1);`.

```
> assign(S1);
```

```
> plot(N(t),t=0..3);
```

```
> N;
```

Dibutuhkan hasil untuk S1, yaitu  $N(t) = 5e^{-3t}$  secara harfiah dan membuat ekspresi yang disebut  $N(t)$ . Dengan melihat

```
> N(t);
> diff(N(t), t);
> solve(N(t)=1, t);
> N(5);
```

Jika memberi  $t$  nilai dan kemudian mengevaluasi ekspresi  $N(t)$ , sintaks tidak akan berfungsi

```
> t:=3;
> evalf(N(t));
> solve(N(t)=1, t);
```

Simbol  $N(t)$  yang keluar dari assign adalah campuran ekspresi dan fungsi.

```
> S1:=dsolve(E1, N(0)=3, N(t));
```

Dalam sintaks plot, sintaks penyelesaian, dan sintaksis diferensiasi ketika menggunakan fungsi Maple  $N$  dan menjalankannya dengan  $N(t)$  maka akan menggunakan ekspresi Maple disebut  $N(t)$ .

### Soal 7.1

Persamaan diferensial yang mengatur arus  $I(t)$  dalam rangkaian yang berisi baterai ggl  $\epsilon$ , resistance  $R$ , dan induktansi  $L$  adalah

$$L \left( \frac{\partial}{\partial t} I \right) + RI = \epsilon$$

Selesaikan persamaan diferensial ini untuk arus dan plot hasilnya jika arus awal adalah nol,  $L = 0.001$  H,  $R = 100\Omega$ , and  $\epsilon = 6$  V.

### Soal 7.2

Laju pertumbuhan kuantitas  $y$  tidak sebanding dengan  $y$  itu sendiri, seperti dalam pertumbuhan eksponensial, tetapi sebaliknya sebanding dengan beberapa pangkat dari  $y$ , misalnya  $y^2$  atau  $y^3$ . Selesaikan persamaan diferensial

$$\frac{\partial}{\partial t} y = y^p$$

untuk  $p = 2$  dan  $p = 3$  dan dengan syarat awal  $y(0) = 1$ . Kemudian plot

solusinya selama interval waktu yang cukup besar.

### Soal 7.3

Selesaikan persamaan diferensial orde pertama berikut

$$\frac{\partial}{\partial x} y = \sin(xy)$$

dengan  $y(0) = 1$ .

## 7.2 Persamaan Diferensial Orde Kedua

Persamaan orde kedua sangat umum dalam fisika karena hukum kedua Newton adalah orde kedua serta difusi, gelombang, dan mekanika kuantum memiliki persamaan pengatur yang mengandung turunan kedua. Perhatikan persamaan diferensial berikut

```
> restart:with(DEtools):
> E2:=diff(y(t),t$2) = -g;
> S2:=dsolve(E2,y(0)=y[0],D(y)(0)=v[0],y(t));
```

Untuk memasukkan kondisi awal pada turunan  $y$  dengan menggunakan  $D(y)$ , yang berarti  $dy/dt$  ( $D$  adalah simbol turunan generik Maple) keterangan  $(0)$  berarti turunan dievaluasi pada  $t = 0$ .

Perhatikan persamaan osilator harmonik berikut

```
> E3:=diff(y(t),t$2)=-omega^2*y(t);
> dsolve(E3,y(t));
> ysol:= A*sin(omega*t)+B*cos(omega*t);
```

Jika konstanta ditentukan oleh kondisi awal, ada bentuk perintah `dsolve` yang akan menentukannya secara otomatis. Misalnya, dalam menyelesaikan persamaan diferensial  $E3$  dengan kondisi awal  $y(0) = 1$  dan  $dy/dt(0) = 2$

```
> s:=dsolve(E3,y(0)=1,D(y)(0)=2,y(t));
> assign(s);
> plot(y(t),t=0..20);
```

Bila sintaks tidak bekerja dengan baik dapat diatasi dengan memasukkan beberapa nilai untuk  $t$  ke dalam  $y(t)$ ,

```
> y(t);
> omega:=1;plot(y(t),t=0..20);
```

Selanjutnya menambahkan beberapa redaman ke osilator harmonik dengan memasukkan gaya redaman pada persamaan

$$F = -\frac{mv}{\tau}$$

di mana  $\tau$  adalah waktu karakteristik terjadinya redaman. Persamaan gerak yang baru sekarang adalah

```
> restart:with(DEtools):
>
Eq:=diff(y(t),t$2)+diff(y(t),t)/tau+omega^2*y(t)=0
;
> dsolve(Eq,y(t));
```

Tinjau frekuensi natural  $\omega$  sekitar  $2\pi$ , jadi periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

adalah 1 detik. Misalkan osilator ini dalam oli motor pada 50 derajat di bawah nol sehingga waktu peredaman karakteristik adalah 0,05 detik dengan begitu banyak gesekan sehingga gerakan berhenti dalam 0,05 detik. Jika pendulum ditarik ke belakang dan dilepaskan, tidak terdapat ayunan; pendulum perlahan-lahan akan mengalir ke posisi vertikal dan tetap di sana.

```
> omega:=2*Pi;tau:=.05;
> Y:=dsolve(Eq,y(0)=1,D(y)(0)=0,y(t));
> plot(rhs(Y),t=0..20);
```

Dengan mengubah redaman, pendulum akan mulai berayun. Misalnya, jika  $\tau = 20$  maka

```
> omega:=2*Pi;tau:=20;
> Y:=dsolve(Eq,y(0)=1,D(y)(0)=0,y(t));
> plot(rhs(Y),t=0..20);
```

Dengan mengingat rumus Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

konstanta dalam eksponensial akan menjadi imajiner.

Nilai  $\tau$  membuat transisi dari redaman murni ke osilasi teredam.

$$\sqrt{-(2\tau\omega - 1)(2\tau\omega + 1)} = \sqrt{1 - 4\tau^2\omega^2}$$

Jika akar kuadrat bernilai positif, maka kedua solusi fundamental dalam penjumlahan tersebut adalah eksponensial peluruhan. Transisi antara keduanya adalah ketika argumen dari akar kuadrat adalah nol, yaitu ketika



$$\tau = \frac{1}{2\omega}$$

Kasus khusus ini disebut redaman kritis.

#### Soal 7.4

Selesaikan persamaan diferensial osilator harmonik teredam untuk kasus redaman kritis dengan  $\omega = 1$  dan plot fungsi  $y(t)$  dari  $t = 0$  ke  $t = 2$  dengan kondisi awal  $y(0) = 1$  dan  $dy/dt(0) = 0$ . Tingkatkan  $\tau$  sebanyak 2% dan buatlah plot.

#### Soal 7.5

Satu masalah osilator harmonik terakhir:

- (a) Menambahkan gaya penggerak sinusoidal pada frekuensi dari frekuensi alami  $\omega$ , misalkan  $\omega_d = 1,1\omega$ . Selesaikan persamaan diferensial dan plot dari  $t = 0$  hingga  $t = 200$  dengan  $\omega = 1$  dan  $\tau = 30$ . Gunakan kondisi awal,  $y(0) = 0$  dan  $dy/dt(0) = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) + \omega^2 y(t) = \sin(\omega_d t)$$

Buktikan secara grafis bahwa frekuensi osilasi akhir dari  $y(t)$  adalah  $\omega_d$ .

- (b) Pelajari resonansi dalam sistem ini dengan membuat plot  $x(t)$  dan  $t$  dalam kasus berikut:
- (i)  $\tau = 30$  :  $\omega_d = 0,8\omega$ ,  $\omega_d = \omega$ , dan  $\omega_d = 1,2\omega$ .
  - (ii)  $\tau = 5$  :  $\omega_d = 0,8\omega$ ,  $\omega_d = \omega$ , dan  $\omega_d = 1,2\omega$ .
  - (iii)  $\tau = 0,8$  :  $\omega_d = 0,8\omega$ ,  $\omega_d = \omega$ , dan  $\omega_d = 1,2\omega$ .

Buktikan bahwa semakin lama waktu redaman, amplitudo resonansi semakin besar dan resonansi semakin sempit.

- (c) Temukan rumus untuk gerakan tunak dari osilator teredam berikut ke dalam persamaan diferensial pada bagian (a)

$$x(t) = A \sin(\omega_d t - \phi)$$

Kemudian untuk fungsi independen  $\cos(\omega_d t)$  dan  $\sin(\omega_d t)$  dalam persamaan yang dihasilkan menjadi sama secara terpisah untuk mendapatkan dua persamaan yang tidak diketahui  $A$  dan  $\phi$ .

Selesaikan kedua persamaan ini dan buktikan bahwa rumus untuk  $A(\omega_d)$  sesuai dengan amplitudo keadaan tunak yang ditemukan di bagian (b). Buat plot  $A(\omega_d)$  dan  $\phi(\omega_d)$  untuk tiga pilihan  $\tau$  yang digunakan di bagian (b) dan buktikan bahwa waktu redaman yang lama  $\tau$  mengarah ke resonansi yang lebih besar.

### Soal 7.6

Selesaikan persamaan diferensial orde dua berikut.

$$(a) \quad x^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} f(x) \right) + x \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) + (x^2 - n^2) f(x) = 0$$

$$(b) \quad x^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} f(x) \right) + x \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) - (x^2 + n^2) f(x) = 0$$

$$(c) \quad (1 - x^2) \left( \frac{d^2}{dx^2} f(x) \right) - 2x \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) + n(n + 1) f(x) = 0$$

## 7.3 Sistem Persamaan Diferensial

Jika diketahui percepatan  $dv/dt$  dan kecepatan  $dx/dt$ , maka persamaan osilator harmonik dapat ditulis sebagai himpunan orde pertama berikut

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(t) &= -\omega^2 x(t) \\ \frac{d}{dt} x(t) &= v(t) \end{aligned}$$

Perintah `dsolve` menangani sistem persamaan dan kondisi awal,

```
> restart:with(DEtools):
> Eq1:=diff(v(t),t)=-omega^2*x(t);Eq2:=diff(x(t),t)=v(t);
> dsolve(Eq1,Eq2,x(0)=1,v(0)=0,x(t),v(t));
```

Untuk memplot  $x(t)$  dan  $v(t)$  pertama-tama perlu untuk memberi nilai *omega*,

```
> omega:=1;XV:=dsolve(Eq1,Eq2,x(0)=1,v(0)=0,x(t),v(t));
```

kemudian membuat plot

```
> assign(XV);
> plot([x(t),v(t)],t=0..20);
```

**Soal 7.7**

Berikut persamaan gerak partikel bermuatan bermassa  $m$  dan bermuatan  $q$  yang bergerak dalam medan magnet konstan  $B$  arah- $z$  dan medan listrik konstan  $E$  arah- $y$  yang berasal dari hukum II Newton menggunakan persamaan Hukum gaya Lorentz:

$$F = qE + qcross(v, B)$$

(Catatan: frasa *persamaan gerak* memiliki arti khusus bagi fisikawan dan butuh beberapa saat bagi fisikawan pemula untuk mengetahui apa yang sedang dibicarakan. Tampaknya wajar pada awalnya untuk berpikir bahwa frasa "persamaan gerak" harus berarti persamaan yang menggambarkan gerak, seperti

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

atau

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

Persamaan gerak adalah persamaan diferensial yang, ketika dipecahkan, memberikan rumus yang menggambarkan gerak partikel)

$$\frac{\partial}{\partial t} x = v_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y = v_y$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_x = \frac{qBv_y}{m}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_y = \frac{qE}{m} - \frac{qBv_x}{m}$$

Selesaikan persamaan tersebut dengan  $q = -1,6e - 19$ ,  $m = 9,11e - 31$ ,  $B = 0,2$ ,  $E = 3000$  dengan kondisi awal  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $v_x(0) = 20000$ ,  $v_y(0) = 0$ . Buat plot pada bidang  $x - y$  dari orbit partikel  $x(t)$  dan  $y(t)$ . Berikut frekuensi siklotron:

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

Buatlah plot bidang  $x - y$  dari  $v_x t$  dan  $v_y t$  dengan opsi

scaling=constrained. Kecepatan berputar dalam lingkaran (gerakan siklotron) dengan offset. Buktikan bahwa offset kecepatan diberikan oleh  $\frac{\text{cross}(E,B)}{B^2}$ .

## 7.4 Persamaan Diferensial Numerik

Menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik dilakukan menggunakan `dsolve` dengan opsi `type=numeric`,

1. `numeric` menyiratkan bahwa angka floating point (angka dengan titik desimal) digunakan.
2. Mendefinisikan persamaan diferensial sebagai himpunan orde pertama daripada menggunakan turunan orde kedua dan lebih tinggi.
3. Menetapkan hasil `dsolve` ke nama variabel, gunakan `F:=dsolve(...type=numeric)`.

Melakukan osilator harmonik secara numerik dengan menentukan persamaan untuk  $x(t)$  dan  $v(t)$ .

```
> restart:omega:=1.;
> Eqx:=diff(x(t),t)=v(t);Eqv:=diff(v(t),t)=-
omega^2*x(t);
```

lalu menentukan kondisi awal

```
> IC:=x(0)=1.,v(0)=0.;
```

dan mengaktifkan `dsolve` dengan set opsi numerik untuk mendapatkan solusi numerik

```
> XV:=dsolve(Eqx,Eqv,IC,x(t),v(t),type=numeric);
> XV(2.);
```

Jawabannya akurat hingga 18 tempat desimal

```
> Digits:=18:cos(2.);
```

Hasil yang didapatkan dapat lebih akurat dengan menggunakan solusi yang membutuhkan waktu lebih lama dengan menentukan metode numerik yang akan digunakan

```
>
XV:=dsolve(Eqx,Eqv,IC,x(t),v(t),type=numeric,method=
rkf45,abserr=1e-10);
> XV(2);
```

Prosedur dalam Maple yang disebut `XV` digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik. Menggunakan perintah `odeplots` untuk melakukan plot keluaran dari `dsolve(...type=numeric)` agar perintah

tersebut tersedia digunakan perintah `with(plots)`.

Toleransi kesalahan pada perintah `dsolve` di atas disetel ke  $1e-10$ , yang sangat kecil sehingga meminta `odeplot` untuk menemukan banyak titik pada level ini.

```
>
XV:=dsolve(Eqx,Eqv,IC,x(t),v(t),type=numeric,method=
rkf45,abserr=1e-6);
```

dalam hal ini akan digunakan untuk memplot  $x(t)$

```
>
with(plots):odeplot(XV,[t,x(t)],0..20,numpoints=500,
color=navy);
```

atau cara ini digunakan untuk memplot  $x(t)$  dan  $v(t)$

```
>
odeplot(XV,[[t,x(t)],[t,v(t)]],0..20,numpoints=200);
```

Perhatikan dua hal. (1) `odeplot` mengambil semua opsi plot yang biasa dan (2) jika kesalahan disetel sangat rendah dan `numpoint` disetel sangat tinggi, akan membutuhkan waktu lama agar plot keluar.

### Soal 7.8

Lakukan secara numerik dan plot  $y(x)$  dari  $x = 0$  hingga  $x = 20$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} y = \sin(xy)$$

dengan  $y(0) = 1$

### Soal 7.9

Hambatan gesekan udara pada bola bisbol diberikan oleh

$$F = -\frac{C_d \rho_{air} \pi r^2 |v| v}{2}$$

di mana  $C_d$  adalah koefisien hambatan (sekitar 0,35 untuk bola bisbol),  $\rho_{air}$  adalah kerapatan udara (sekitar  $1,2 \text{ kg/m}^3$ ),  $r$  adalah jari-jari bola (sekitar 0,037 m) dan  $v$  adalah vektor kecepatan bola. Jika diambil arah vertikal

menjadi  $y$  dan arah horizontal menjadi  $x$  maka hukum kedua Newton dalam bentuk vektor-komponen memberikan persamaan orde pertama sebagai berikut

1.  $\frac{\partial}{\partial t} x = v_x$
2.  $\frac{\partial}{\partial t} y = v_y$
3.  $\frac{\partial}{\partial t} v_x = -\frac{C_d \rho_{air} \pi r^2 v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{2m}$
4.  $\frac{\partial}{\partial t} v_y = -\frac{C_d \rho_{air} \pi r^2 v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{2m}$

di mana  $m$  adalah massa bola bisbol (0,145 kg) dan  $g$  adalah percepatan gravitasi ( $9.8m/s^2$ ). Berikan kode terhadap empat persamaan diferensial dan lakukan home run dengan menggunakan kondisi awal  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $v_x(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ ,  $v_y(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$  di mana  $v_0 = 60m/s$ .

Kemudian gunakan `dsolve(...type=numeric)` untuk menyelesaikannya dan membuat plot overlay: (i) tanpa seret udara (set  $C_d = 0$ ) dan (ii) dengan seret udara. Plot  $y(t)$  dan  $x(t)$  sehingga dapat dilihat jalur bola dengan menggunakan `[x(t), y(t)]` di `odeplot` alih-alih `[t, y(t)]`.

### Soal 7.10

Persamaan diferensial tidak hanya diselesaikan menggunakan nilai awal yang diketahui. Parameter dalam persamaan diferensial yang tidak diketahui perlu ditentukan nilainya berdasarkan solusi persamaan diferensial di titik lain. Tinjau persamaan Schrodinger berikut untuk keadaan terikat partikel dalam sumur potensial osilator harmonik:

$$-\frac{\hbar \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \right)}{2m} + \frac{kx^2 \Psi}{2} = E\Psi$$

Mengubah variabel panjang dari  $x$  menjadi  $\xi$  dengan meninjau keadaan tanpa dimensi:

$$x = a\xi$$

di mana

$$a = \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right)^{\frac{1}{4}}$$

serta mengubah  $E$  menjadi nilai eigen  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{2ma^2 E}{\hbar^2}$$

Sehingga persamaan variabel Schrodinger menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + (\lambda - \xi^2) \Psi = 0$$

Penyelesaian persamaan ini terdiri dari dua jenis: fungsi genap di  $\xi$  dan fungsi ganjil di  $\xi$ . Sehingga terdapat dua jenis kondisi awal yang berbeda di  $\xi = 0$ :

genap:  $\Psi(0) = 1$  dan  $\frac{\partial}{\partial \xi} \Psi(0) = 0$

ganjil:  $\Psi(0) = 0$  dan  $\frac{\partial}{\partial \xi} \Psi(0) = 1$

(Menggunakan 1 untuk nilai awal karena dalam mekanika kuantum dilakukan pemilihan pada pengali untuk  $\psi$  sehingga probabilitas totalnya adalah 1)

Solusi untuk fungsi gelombang  $\psi$  yaitu solusi yang menuju nol saat  $\xi$  mendekati  $\infty$ . Hal ini berlaku untuk nilai yang sangat khusus dari parameter  $\lambda$ , di mana: (i) penyelesaian persamaan diferensial harus secara numerik dan (ii) parameter  $\lambda$  harus disesuaikan untuk membuat fungsi gelombang  $\psi$  menjadi kecil pada besar  $\xi$ .

Persamaan diferensial dalam osilator harmonik

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y + \lambda^2 y = 0$$

dengan  $y(0) = 0$  dan  $\frac{\partial}{\partial x} y(0) = 1$ .

Untuk menyesuaikan  $\lambda$  dengan memenuhi kondisi  $y(1) = 0$ . Ikuti dan jalankan prosedur di bawah ini, lalu modifikasi untuk menemukan nilai  $\lambda$  dalam persamaan Schrodinger untuk 6 keadaan terikat pertama (3 genap dan 3 ganjil).

```
> restart:with(plots):
```

Tentukan persamaan diferensial dan tetapkan ke deqn dengan parameter yang divariasikan disebut lambda.

```
> deqn:=diff(y(x),x$2)+lambda^2*y(x)=0;
```

Tentukan titik ujung kiri dan kanan interval

```
> a:=0;b:=1;
```

Tentukan kondisi awal di awal interval.

```
> bc:=y(a)=0,D(y)(a)=1;
```

Tetapkan variabel `yright` ke nilai  $y(b)$  keti dari parameter  $\lambda$

```
> yright:=0;
```

Buat tebakan pada parameter yang akan divariasikan dan plot solusi numerik dari persamaan diferensial biasa dari  $a$  ke  $b$ ; Sesuaikan nilai  $\lambda$  hingga mendekati solusi yang di inginkan.

```
> lambda:=2.5;
```

Perhatikan bahwa opsi `startinit=true` memberi tahu `dsolve` untuk selalu memulai dengan kondisi awal yang ditentukan. Ini penting untuk diatur ketika `fsolve` digunakan untuk mencari nilai parameter yang memberikan solusi dengan  $y(b)=yright$ .

```
>
```

```
S:=dsolve(deqn,bc,y(x),type=numeric,startinit=true);
```

```
> odeplot(S,[x,y(x)],a..b);
```

Perhatikan bahwa kode ini tidak akan berfungsi kecuali jika argumen tiruan  $z$  dari prosedur  $F$  yang diberikan berbeda dari semua variabel dalam persamaan diferensial, yaitu,  $y$  atau  $x$  tidak dapat digunakan dalam tempat  $z$ .

```
> F:=proc(z)
```

```
> local a,b,deqn,bc,S;
```

```
> deqn:=diff(y(x),x$2)+z^2*y(x)=0;
```

```
> a:=0;b:=1;
```

```
> bc:=y(a)=0,D(y)(a)=1;
```

```
> if type(z,numeric) then
```

```
>
```

```
S:=dsolve(deqn,bc,y(x),type=numeric,startinit=true,abserr=1e-6);
```

```
> subs(S(b),y(x))
```

```
> else
```

```
> 'F(z)';
```

```
> end if;
```

```
> end;
```

$F(\lambda)$  dapat diteruskan ke `fsolve` untuk menemukan nilai  $\lambda$  yang memenuhi  $F(b)=yright$ . Tetapkan `Digits` ke nilai yang lebih rendah. Jika tidak didapatkan keseimbangan yang tepat antara `abserr` dalam `dsolve` dalam



prosedur dan setelan Digits, fsolve akan berjalan selamanya.

```
> Digits:=5;
> F(3.);
> lambda:=fsolve(F(z)=yright,z=3.0..3.2);
```

Dengan menggunakan nilai  $\lambda$ , buat plot solusinya.

```
> S:=dsolve(deqn,bc,y(x),type=numeric);
> odeplot(S,[x,y(x)],a..b);
```

### Soal 7.11

Persamaan gerak osilator harmonik relativistik adalah

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -m\omega_0^2 x$$

di mana  $p = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$  adalah momentum relativistik, dan  $u = \frac{\partial}{\partial t} x$  adalah kecepatan partikel.

- Tulis persamaan gerak dalam bentuk dua persamaan diferensial orde pertama yang digabungkan.
- Gunakan `dsolve(...type=numeric)` untuk membuat prosedur dalam `odeplot` untuk membuat grafik  $x(t)$  pada kasus  $x(0) = 0, 2, 0, 4, 1, 0, 5, 0$  dan  $p(0) = 0$ . Buktikan secara grafis bahwa  $x(t)$  mematuhi batas kecepatan relativistik. Dalam kasus terakhir ini buat plot kecepatan partikel  $u(t)$ .

## 7.5 Apa yang dimaksud dengan Persamaan Diferensial?

Penting dalam fisika untuk memahami arti persamaan diferensial daripada hanya menghafal sekumpulan teknik dan rumus.

$$\frac{\partial}{\partial x} y = y$$

Karena  $\frac{\partial}{\partial x} y$  adalah gradien fungsi  $y(x)$ , sehingga semakin besar  $y$  maka gradiennya akan semakin besar. Untuk dua kemungkinan kasus.

- $y(0)$  positif

Untuk gradien positif, nilai  $y$  meningkat. Sehingga solusi persamaan ini

adalah fungsi seperti  $e^x$  yang meningkat dengan bertambahnya  $x$ .

(ii)  $y(0)$  negatif

Untuk gradien negatif, nilai  $y$  menurun, yaitu menjadi lebih negatif daripada di  $x = 0$ . Sehingga solusinya adalah fungsi yang sangat menurun seperti  $-e^x$ .

Dengan mengingat analisis kualitatif, tinjau persamaan dalam fungsi eksponensial berikut

$$\frac{\partial}{\partial x} y = y^2$$

Jika  $y$  bernilai positif, maka  $y$  harus bertambah lebih banyak daripada sebelumnya, yaitu menjadi lebih besar daripada fungsi eksponensial menuju tak terhingga sebelum  $x$  mencapai tak terhingga:

```
> s:=dsolve(diff(y(x),x)=y(x)^2,y(0)=1,y(x));
> plot(rhs(s),x=0..1);
```

### Soal 7.12

Asumsikan bahwa  $y(0)$  negatif. Buatlah sketsa kasar dengan mengubah kondisi awal pada contoh di atas.

Tinjau persamaan diferensial orde kedua dari persamaan osilator harmonik sederhana berikut

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = -y$$

Turunan kedua menyatakan kelengkungan fungsi. Untuk  $y = 1$  maka turunan keduanya negatif, jadi fungsi  $y$  akan melengkung ke bawah, hingga memotong  $y = 0$ . Kemudian untuk nilai  $y$  negatif maka persamaan diferensial tersebut membentuk kelengkungan positif. Sehingga solusi dari persamaan ini adalah osilasi, yaitu  $\cos(x)$ .

### Soal 7.13

Gunakan analisis kualitatif untuk menebak solusi dari persamaan ini,  
(a)

|                       |                                            |
|-----------------------|--------------------------------------------|
|                       | $\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = y$    |
| dengan $y(0) = 1$ dan |                                            |
| (b)                   | $\frac{\partial}{\partial x} y(0) = 0$     |
|                       | $\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = -y$   |
| dengan $y(0) = 1$ dan |                                            |
| (c)                   | $\frac{\partial}{\partial x} y(0) = 0$     |
|                       | $\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = -y^3$ |
| dengan $y(0) = 1$ dan |                                            |
|                       | $\frac{\partial}{\partial x} y(0) = 0$     |

#### Soal 7.14

Tinjau kembali Soal 7.9. Jika kecepatan awal kelelawar ditingkatkan hingga 80 m/s, maka akan didapatkan kurva yang dimulai seperti parabola, tetapi kemudian turun hampir secara vertikal. Gunakan analisis kualitatif pada komponen  $x$  dan  $y$  hukum kedua Newton untuk menjelaskan mengapa hal ini terjadi.

#### Soal 7.15

Tinjau kembali 7.10:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \psi + (\lambda - \xi^2) \psi = 0$$

Carilah solusinya secara kualitatif untuk  $\xi$  kecil dan untuk  $\xi$  besar dan tunjukkan bahwa analisis kualitatif ini memberikan jawaban yang tepat terkait fungsi eigen keadaan terikat.

## 7.6 Dinamika dan Gangguan Nonlinier

```
> restart;with(plots):
> Eq1:=diff(x(t),t) = sigma*(y(t)-x(t));
> Eq2:=diff(y(t),t) = r*x(t)-y(t)-x(t)*z(t);
> Eq3:=diff(z(t),t) = x(t)*y(t)-b*z(t);
> sigma:=10;b:=8/3;
```

dan kemudian  $r$  bervariasi dari 0 hingga sekitar 30, Untuk menyelesaikan set ini secara numerik untuk pilihan  $r$  tertentu, digunakan

```
>
r:=35;s:=dsolve(Eq1,Eq2,Eq3,x(0)=1,y(0)=1,z(0)=1,x
(t),y(t),z(t),type=numeric);
```

dan untuk mendapatkan solusi digunakan perintah `odeplot`

```
>
odeplot(s,[[t,x(t)],[t,y(t)],[t,z(t)]],0..20,numpo
ints=200);
```

Menjalankan grup eksekusi untuk nilai  $r$  berikut: 10, 20, 28, 35, 45. Untuk nilai  $r$  di atas sekitar 25 osilasi membentuk pola yang tidak pernah berulang. Persamaan yang mengatur perilaku tersebut sepenuhnya deterministik yang disebut sebagai kekacauan dinamis.

Memplot lintasan kurva solusi  $[x(t) \ y(t) \ z(t)]$  sebagai kurva 3 dimensi menggunakan perintah `plot spacecurve`. Untuk menggunakannya loop perlu dibuat berulang kali menggunakan `dsolve` untuk menghasilkan urutan titik 3 dimensi di sepanjang lintasan sistem. Urutan titik ini kemudian diteruskan ke `spacecurve`, seperti ini:

Letakkan nilai awal  $(x \ y \ z)$  di  $r0$ , dengan waktu awal di  $t1$ , waktu berakhir di  $t2$  dan jumlah titik sepanjang lintasan di `numpoints`; lalu langkah waktu antara titik-titik yang berurutan dihitung.

```
> r0:=[1,1,1];t1:=0;t2:=10;numpoints:=400;dt:=(t2-
t1)/numpoints;
```

Menetapkan parameter sistem  $r$

```
> r:=50;
```

Langkah sistem bersama dengan panggilan berulang ke `dsolve`, masing-masing memiliki kondisi awal untuk kondisi akhir dari langkah sebelumnya. Hal ini dilakukan dengan `for-do-end do loop`,

```
> for i from 1 to numpoints do
```

```

>
s:=dsolve(Eq1,Eq2,Eq3,x(0)=r0[1],y(0)=r0[2],z(0)=r0[3],x(t),y(t),z(t),type=numeric):
> t0:=t1+(i-1)*dt:
> tf:=t0+dt:
> sol:=s(tf-t0):

```

Menyimpan  $(x \ y \ z)$  di `rf[i]` untuk setiap langkah

```

>
rf[i]:=[rhs(op(2,sol)),rhs(op(3,sol)),rhs(op(4,sol))]:

```

Mendapatkan kondisi awal berikutnya

```

> r0:=rf[i]:
> od:

```

Mengubah `rf` menjadi urutan untuk digunakan dalam `spacecurve`

```

> L:=[seq(rf[i],i=1..numpoints)]:

```

Plot lintasan

```

> spacecurve(L,orientation=[45,60]);

```

Membuat 100 plot `spacecurve`, sehingga akan dianimasikan urutannya sehingga lintasan berputar di layar, yang memudahkan untuk melihat karakter 3 dimensinya

```

> for i from 1 to 100 do
> theta :=45:phi:=i*3.6:
> p[i]:=spacecurve(L,orientation=[theta,phi]):
> od:

```

Plot animasinya.

```

>
plots[display]([seq(p[i],i=1..100)],insequence=true);

```

**Soal 7.16**

Transisi terjadi ketika  $r$  meningkat melewati angka sekitar 25, atau lebih, meskipun jika sistem dibiarkan berjalan untuk waktu yang lama, penarik mulai muncul pada nilai  $r$  yang lebih rendah. Jika numpoints terlalu tinggi, maka akan membutuhkan waktu lama, gunakan numpoints=200 dan  $t_2 = 20$ .

# BAB 8

## PEMROGRAMAN - LOGIKA, LOOP, DAN PROSEDUR

Terkadang Maple tidak memiliki perintah yang melakukan apa yang perlu dilakukan. Ketika ini terjadi, pemrograman mandiri perlu dilakukan di Maple dengan menggunakan logika, loop, dan prosedur.

### 8.1 Logika: if-then-else-end if

Perintah logika dasar dalam Maple menggunakan if. Untuk mengilustrasikannya, tinjau fungsi Maple  $f(x)$  yang akan menerima nilai  $x$  dan mengembalikan  $-1$  jika  $x < 0$ ,  $0$  jika  $x = 0$ , dan  $+1$  jika  $x > 0$ .

```
> restart;
> f:=x-> if x<0 then -1 elif x=0 then 0 else 1 end
if;
```

Melakukan pengujian untuk menunjukkan keberhasilan di mana fungsi ini sama dengan fungsi `signum`

```
> f(-.5);f(0);f(.5);
```

Pernyataan yang mendefinisikan fungsi  $f$  hampir berbunyi seperti bahasa Inggris jika menerjemahkan `elif` sebagai "else if" dan `end if` sebagai "we're done". Terdapat tiga elemen yang masuk ke dalam pernyataan ini. Yang pertama adalah perintah sintaks logika `if ... then, elif ... then, else, dan end if`.

Elemen kedua adalah pernyataan kondisional (pernyataan uji logika). Ini adalah hal-hal seperti  $x < 0$ , dll..

|    |                                   |
|----|-----------------------------------|
| <  | kurang dari                       |
| <= | kurang dari atau sama dengan      |
| >  | lebih besar dari                  |
| >= | lebih besar dari atau sama dengan |
| =  | sama dengan                       |
| <> | tidak sama                        |

Saat Maple menghadapi tes seperti ini, Maple akan mengevaluasinya sebagai ekspresi Boolean, yaitu ekspresi yang nilainya bisa benar atau salah. Maple memiliki perintah evaluator Boolean `evalb`. Cara kerjanya seperti ini

```
> evalb(7>5); evalb(3=4); evalb(3<>4);
```

Catatan: `and`, `or`, dan `not` juga dapat digunakan untuk menggabungkan pernyataan logika, seperti ini  $-2 \leq x$  dan  $x \leq -1$ .

Elemen ketiga dari pernyataan `if` adalah sekumpulan pernyataan yang dijalankan. Misalnya, untuk menggunakan konstruk dengan mendefinisikan fungsi yang merupakan satu hal untuk bilangan negatif dan satu lagi untuk bilangan positif, seperti ini:

```
> g:=x-> if x<0 then 1/(1+x^2) else cos(x) end if;
```

Melakukan pengujian untuk memastikan tidak ada kesalahan

```
> g(-1.5); g(2.5);
```

Perhatikan yang terjadi jika dilakukan sebagai berikut

```
> g(Pi);
```

Ini menyatakan bahwa untuk mengevaluasi  $g$ , salah satu ekspresi Boolean tidak dapat dievaluasi. Ini terjadi karena  $Pi$  sebenarnya bukan angka di Maple,  $Pi$  lebih merupakan ide daripada angka di Maple. Akan didapatkan kesalahan yang sama jika dilakukan evaluasi  $g(a)$ , di mana  $a$  belum diberi nilai

```
> g(a);
```

Untuk mengatasi kesalahan ini dapat menggunakan perintah `evalf(Pi)`

```
> g(evalf(Pi));
```

Selanjutnya membuat plot fungsi

```
> plot(g(x), x=-10..10);
```

Dengan pernyataan `if` di  $g(x)$  Maple tidak bisa memplot menggunakan sintaks ini. Ketika  $x$  beralih dari perintah `plot` ke  $g$ ,  $x$  belum didefinisikan dalam angka. Memecahkan masalah ini dilakukan dengan meninjau bahwa `g:=x->...` yang mengubahnya menjadi prosedur. Dan prosedur dalam `plot` Maple menggunakan "notasi operator", artinya tidak menggunakan `g(x)`, `x=-10..10` dalam perintah `plot`, namun hanya menuliskan seperti ini

```
> plot(g, -10..10);
```

Jika dilakukan integrasi fungsi atau diferensiasi, seperti ini

```
> int(g(x), x=-2..2);
```

```
> diff(g(x), x);
```

Adanya kesulitan dengan menggunakan sintaks `if-then-else-end if`



untuk mendefinisikan fungsi di Maple. Untuk menanganinya Maple memiliki perintah `piecewise` yang digunakan untuk tujuan yang sama. Untuk mendefinisikan ulang fungsi  $g(x)$  menggunakan `piecewise` lakukan

```
> g:=x->piecewise(x<0, 1/(1+x^2), x>=0, cos(x));
```

Selanjutnya lakukan plot fungsi tersebut,

```
> plot(g(x), x=-5..5);
```

mengintegrasikannya seperti fungsi,

```
> int(g(x), x=-5..5);
```

dan mendiferensiasikannya seperti fungsi

```
> diff(g(x), x);
```

`if-then-elif-end if` sebagian besar digunakan di dalam loop dan prosedur, yang terdapat pada pembahasan selanjutnya.

### Soal 8.1

Gunakan konstruksi `piecewise` untuk mendefinisikan fungsi Maple yang mengevaluasi fungsi B-spline kubik dan memplotnya dari  $t = -4..4$ . Fungsi tersebut didefinisikan sebagai berikut

1.  $B(t) = \frac{(2+t)^3}{6}$  jika  $t$  berada dalam kisaran  $-2..-1$
2.  $B(t) = \frac{1+(1+t)(3+(1+t)(3-3(1+t)))}{6}$  jika  $t$  berada dalam kisaran  $-1..0$
3.  $B(t) = \frac{1+(1-t)(3+(1-t)(3-3(1-t)))}{6}$  berada dalam kisaran  $0..1$
4.  $B(t) = -\frac{(t-2)^3}{6}$  jika  $t$  berada dalam kisaran  $1..2$
5.  $B(t) = 0$  untuk  $t$  di luar rentang  $-2..2$

Perlunya menentukan rentang awal dan akhir, seperti  $-1$  hingga  $0$ , serta menggabungkan dua ketidaksetaraan, yaitu  $b < a < c$ . Maple melakukannya dengan menggunakan dua kondisi pertidaksamaan yang berbeda dan menggabungkannya dengan `and`, seperti ini:  $b < a$  and  $a < c$ . Saat menentukan fungsi, plot antara  $-4$  dan  $4$ .

### Soal 8.2

Integrasikan  $B(t)$  dari  $-3, 3$ . Plot tiga turunan pertamanya pada interval  $-3, 3$ .

**Soal 8.3**

Berikut adalah contoh masalah di mana `piecewise` tidak akan bekerja dengan baik dan lebih baik menggunakan sintaks `if...end if`. Gunakan sintaks ini untuk membuat plot fungsi sinus dari  $-2\pi..2\pi$ , di mana puncak dan lembah semuanya dipotong datar pada ketinggian 0,9 atau kedalaman -0,9. Gunakan perintah `signum` dan `evalf`. Perhatikan bahwa alih-alih melakukan logika secara horizontal (dalam  $x$ ), seperti yang dilakukan saat menggunakan sepotong-sepotong, yang dilakukan logika secara vertikal (dalam  $y$ ).

**8.2 Loops: for-do-end do-while-break**

Sebagian besar komputasi dilakukan dalam loop: perintah `sum` Maple memiliki loop di bagian bawah, seperti halnya integrasi numerik, `fsolve`, penyelesaian persamaan diferensial numerik, `dsolve(...type=numeric)`, dan masih banyak lagi. Telah didapatkan contoh loop buatan sendiri dalam prosedur integrasi tiga dimensi dalam kalkulus integral tiga dan persamaan diferensial. Ketika tidak mendapatkan hasil yang sesuai dengan menggunakan Maple, maka dibuat loop secara mandiri. Perhatikan contoh berikut dengan loop untuk menjumlahkan kuadrat bilangan bulat dari 1 hingga 100. Gunakan perintah `sum`

```
> sum(i^2, i=1..100);
```

Jumlah Loop:

Pertama, tentukan penyimpanan jawaban terlebih dahulu dengan menyetel variabel ke nol:

```
> answer:=0;
```

Kemudian membuat loop dari 1 hingga 100, lalu mengkuadratkan penghitung di dalam loop dan menambahkan kuadratnya ke dalam jawaban, menggunakan sintaks `for..from..to..do..end`. Perhatikan bahwa `do` untuk mengawali loop dan `end do` untuk mengakhiri loop.

```
> for i from 1 to 100 do
> answer:=answer + i^2;
> end do;
```

Untuk memperbaikinya, akhiri `end do` dengan titik dua

```
> answer:=0;
> for i from 1 to 100 do
> answer:=answer + i 2;
> end do:
> answer;
```

Untuk menjumlahkan bilangan ganjil dari 1 sampai 99 perhatikan sintaks berikut

```
> answer:=0;
> for i from 1 by 2 to 99 do
> answer:=answer + i 2;
> end do:
> answer;
```

Pergantian Loop Berturut-turut:

Perhatikan sintaks berikut untuk melakukan loop sampai beberapa kondisi terpenuhi

```
> x:=5.;
> for i from 1 to 20 do
> x:=cos(x);
> end do;
```

Hasil yang didapatkan akan konvergen di mana angka yang konvergen harus merupakan solusi dari persamaan  $\cos(x) = x$ .

Pilih nilai awal  $x$  dan nilai awal `xold`, "nilai  $x$  sebelumnya"

```
> x:=5.;xold:=0;
```

Melakukan pengulangan selama  $|x-xold|>1e-8$

```
> for i from 1 while abs(x-xold)>1e-8 do
```

Masukkan nilai  $x$  baru dari cosinus ke dalam variabel sementara `tempx`

```
> tempx:=cos(x) :
```

Masukkan  $x$  saat ini ke dalam `xold` sehingga dapat diketahui kapan harus berhenti

```
> xold:=x:
```

Masukkan  $x$  baru ke dalam  $x$

```
> x:=tempx;
```

Kembali dan lakukan lagi

```
> end do;
```

Ini disebut iterasi berturut-turut, dan banyak digunakan dalam komputasi.

Secara khusus, perhatikan kapan setiap variabel dihitung dan dimana variabel tersebut disimpan.

#### Soal 8.4

Tulis sebuah loop yang mengevaluasi deret pangkat untuk fungsi cosinus berikut,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} x^n}{n!}$$

untuk  $n$  adalah bilangan genap.

Beri  $x$  nilai di luar perulangan, gunakan sintaks `by` untuk mendapatkan bilangan genap, lakukan perulangan hingga suku berikutnya yang ditambahkan ke jumlahnya kurang dari  $1e - 8$ .

#### Soal 8.5

Tulis sebuah loop yang mengevaluasi deret Fourier berikut

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin((2n + 1)\theta)}{2n + 1}$$

Berikan  $\theta$  nilai di luar lingkaran dan terus ulangi sampai besarnya suku yang ditambahkan turun di bawah besarnya  $1e - 4$ . Karena fungsi sinus tidak pernah lebih besar dari 1, ini berarti bahwa perlunya menerapkan tes `while` ke  $\frac{1}{2n+1}$ .

#### Soal 8.6

Tulis loop untuk menyelesaikan persamaan

$$x = e^{-x}$$

dengan substitusi berturut-turut. Dapatkan jawaban untuk 8 angka penting.

#### Soal 8.7 (Metode Secant)

Inilah loop yang digunakan fisikawan komputasi sepanjang waktu yang disebut metode garis potong dan merupakan cara untuk memecahkan persamaan sulit dalam satu variabel. Gunakan perintah `fsolve` untuk menyelesaikannya.

Misalkan terdapat persamaan sulit dalam bentuk  $f(x) = 0$  untuk diselesaikan. Metode garis potong dimulai dengan mendapatkan nilai yang cukup mendekati  $x_1$  dan  $x_2$ . Kemudian lakukan evaluasi fungsi pada setiap nilai  $x$  untuk mendapatkan  $f_1 = f(x_1)$  dan  $f_2 = f(x_2)$ . Menggunakan rumus garis dua titik berikut untuk menempatkan garis lurus:

$$y - f_2 = \frac{(f_2 - f_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Untuk mendapatkan perkiraan garis lurus ke nilai  $x$  yang memberikan  $y = 0$  dan menyebutnya  $x_3$ ,

```
> restart;
> Eqline:=0-f2=(f2-f1)/(x2-x1)*(x-x2);
> x3:=solve(Eqline,x);
```

Ini merupakan ekspresi aljabar yang baik, tetapi kurang baik sebagai ekspresi numerik karena saat mendekati akar ketika  $x_1$  dan  $x_2$ , serta  $f_1$  dan  $f_2$ , yang berdekatan satu sama lain, didapatkan  $x_3$  dengan membagi limit nol dengan nol yang dapat menyebabkan masalah floating point, sehingga rumus tersebut diatur ulang:

$$x_3 = x_2 - \frac{f_2(x_2 - x_1)}{f_2 - f_1}$$

$(x_2 - x_1)$  dan  $(f_2 - f_1)$  bernilai kecil, sehingga akan ditemukan kembali pembagian nol dengan nol, tetapi nilai dari  $f_1$  dan  $f_2$  di pembilang sangat kecil karena mendekati  $f(x) = 0$ .

Tulis sebuah loop yang menggunakan metode garis potong untuk menyelesaikan persamaan  $\tan(x) - 2x = 0$  untuk akar di dekat  $x = 1$ .

(Buatlah loop yang mirip dengan loop substitusi berturut-turut.) Dalam suatu kondisi akan loop akan berhenti jika  $f_2 = f_1$  ke digit signifikan sebanyak yang disimpan biasanya 10 karena ini salah satu cara untuk mencegah pembagian dengan nol. Hal ini sulit dilakukan dengan perintah `while`, jadi digunakan perintah `break`.

Perhatikan bahwa misalkan pengulangan dilakukan dari 1 hingga 100 tetapi perintah ingin dihentikan saat  $i$  bernilai 20 tahun, gunakan

```
> for i from 1 to 100 do
```

```

> if i=20 then break end if;
> end do;
> i;

```

Untuk menguji penggunaannya dalam loop, lakukan pengulangan perhitungan sampai nilai  $f2$  kurang dari  $1e - 10$  dengan menggunakan `while` lalu gunakan perintah `break` agar tidak terjadi pembagian dengan nol.

### 8.3 Prosedur: Menempatkan Loop dan Logika dalam Bekerja

Maple menyediakan cara untuk memasukkan hal-hal rumit ke dalam sesuatu yang berfungsi seperti fungsi sehingga nilai dapat diteruskan ke dalamnya dan mendapatkan jawaban kembali. Struktur yang melakukan ini adalah prosedurnya.

Berikut adalah struktur dasarnya.

```
> restart;
```

Tetapkan prosedur dan daftar argumen yang diperlukan

```
> f:=proc(x,y)
```

Deklarasikan nama variabel lokal yang hanya digunakan dalam prosedur

```
> local a,b,z;
```

Deklarasikan nama variabel global

```
> global d;
```

Digunakan  $a$  dan  $b$  lokal, global  $d$ , lalu  $x$  dan  $y$  diteruskan untuk menghitung nilai fungsi  $z$ , yang bersifat lokal.

```
> a:=3.;b:=17.;
```

```
> z:=a*b*x*y*d; #nilai terakhir
```

```
> end;
```

```
> d:=31.;
```

```
> f(1,2);
```

Untuk mengilustrasikan bagaimana suatu prosedur bekerja, berikut adalah salah satu evaluasi kosinus suatu sudut dalam derajat.

```
> restart;
```

```
> cosdeg:=proc(theta)
```

```
> local phi,answer;
```

```
> phi:=theta*Pi/180.;
```

```
> answer:=cos(phi);
```

```
> end;
```

Melakukan pengujian berikut

```
> yy:=cosdeg(45.);
```

Ketika prosedur yang dikerjakan gagal, perlu diketahui cara memperbaikinya. Perintah Maple untuk memberi tahu prosedur adalah perintah `trace`. Untuk memperbaiki prosedur di atas gunakan

```
> trace(cosdeg);
```

lalu jalankan

```
> cosdeg(45.);
```

Kemudian ketika berfungsi dengan benar dan untuk membatalkannya ketik perintah berikut

```
> untrace(cosdeg);
```

### Soal 8.8

Perhatikan bahwa prosedur `cosdeg` seringkali tidak mendapatkan hasil yang sesuai. Perbaikilah sehingga dapat memberikan nomor floating point kembali.

Dalam menggunakan perintah `cosdeg` prosedur digunakan seperti halnya fungsi. Biasanya fungsi yang didefinisikan dengan cara tersebut mungkin tidak kompatibel dengan perintah Maple lainnya seperti `plot`, `int`, `sum`, `dsolve`, dan lain sebagainya.

### Soal 8.9

Tulislah prosedur yang menghitung fungsi kubik B-spline yang dijelaskan pada Soal 8.1. Plot prosedur (fungsi) dari  $-3..3$ .

Catatan: dalam memplot hasil dari suatu prosedur, jawabannya harus dikembalikan sebagai hasil terakhir, dan satu-satunya argumen yang dapat diteruskan adalah variabel independen yang sesuai, yaitu fungsi satu dimensi yang akan digunakan `textttB:=proc(x)`, untuk penggunaan 2-d `C:=proc(x,y)`. Jika keluaran prosedur tersebut diplot, maka dapat prosedur tersebut dapat diperlakukan seperti fungsi menggunakan `plot(f(x),x=a..b)`, atau dapat menggunakan notasi operator Maple dengan nama  $x$  ditinggalkan: `plot(B,-3..3)`.

### Soal 8.10

Tulislah sebuah prosedur dalam parameter `Nterms` dan sudut  $\theta$  sebagai input dan lakukan pengembalian nilai deret Fourier  $f(\theta)$  yang diberikan pada Soal 8.5. Gunakan perintah `sum` di dalam prosedur dan pertahankan persyaratan hingga  $n=Nterms$ . Kemudian buatlah tiga plot  $f(\theta)$  dan  $\theta$  dengan `Nterms=10`, `Nterms=100`, dan `Nterms=400`. Ini akan memberikan cara instruktif untuk melihat bagaimana representasi Fourier meningkat saat terdapat lebih banyak istilah. Karena prosedur yang memiliki lebih dari satu variabel input, perlu menggunakan perintah `plot` `plot(f(Nterms,theta),theta=0..Pi)`.

### Soal 8.11

Tulislah prosedur dengan parameter  $a$  sebagai input, lalu selesaikan persamaan diferensial

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -f(x)^3$$

dengan  $f(0) = 0$  dan  $\frac{\partial}{\partial x}f(0) = a$ .

Berikan prosedur yang mengembalikan  $f(1)$  sebagai nomor tunggal. Kemudian cobalah nilai  $a$  yang berbeda dan lihatlah apakah terdapat setidaknya 2 nilai  $a$  untuk  $f(1) = 0$ . Temukan 2 nilai  $a$  yang akurat hingga 5 angka penting.

Dalam memasukkan perintah `dsolve(...type=numeric)` ke dalam prosedur, tetapi keluaran dari versi numerik `dsolve` adalah sekumpulan persamaan, seperti ini

```
> restart;
> f:=dsolve(diff(y(t),t$2)=-
y(t),y(0)=2,D(y)(0)=0,y(t),type=numeric);
> g:=f(1);
```

Gunakan pernyataan penetapan untuk mendapatkan nomor yang ditetapkan ke  $y(t)$ , seperti ini

```
> assign(g);
```

Bila gagal lakukan dua pilihan berikut: (i) mengubah persamaan diferensial biasa urutan kedua menjadi sekumpulan persamaan diferensial biasa yang digabungkan dan menggunakan pernyataan penetapan untuk mengekstrak



nomor (ii) menggunakan perintah `op` dan `rhs` Maple untuk mengekstrak nomor. Perintah `op` memilih elemen dari hampir semua hal yang dihasilkan Maple: ekspresi, fungsi, daftar, dan set. Lakukan `restart`, `dsolve`, dan `g:=f(1);`.

```
> op(1,g);
> rhs(op(2,g));
```

Konstruksi tersebut diperlukan di dalam prosedur sehingga dapat mengembalikan nomor.

### Soal 8.12

Tuliskan prosedur yang mengubah Fungsi Associated Legendre  $P_n^m(x)$  yang dibahas pada Soal 3.4 menjadi fungsi real yang mengembalikan sebuah bilangan untuk sembarang pilihan  $n$  dan  $m$  yang valid, termasuk  $m = 0$ . Fungsi Legendre terkait uji prosedur di mana (a) Pertama-tama tuliskan prosedur sehingga mengembalikan ekspresi dalam  $x$ , lalu (b) mengubahnya sehingga mengembalikan angka floating point.

## 8.4 Contoh: Memplot Hasil dari `fsolve`

Misalkan terdapat persamaan untuk dipecahkan yang memiliki parameter variabel  $k$  di dalamnya, seperti ini

$$\cos(x) = kx$$

di mana  $k$  bervariasi dari 0 hingga 20. Untuk membangun fungsi  $F(k)$  yang mengembalikan solusi  $x$  dari persamaan ini untuk setiap  $k$  yang diberikan, dengan memplot fungsi  $F(k)$ . Setelah perintah Maple prosedur dijalankan,  $F$  diberi hasil terakhir yang dihitung dalam prosedur, dalam hal ini nilai  $x$  dari `fsolve`.

```
> restart;
```

Menyatakan  $F$  sebagai prosedur

```
> F:=proc(k)
```

Deklarasikan variabel yang digunakan di dalam prosedur

```
> local s,x;
```

Menggunakan `fsolve` untuk menyelesaikan persamaan menggunakan nilai  $k$  yang diteruskan melalui `proc(k)`

```
> s:=fsolve(cos(x)-k*x,x,0..2);
```

Untuk kembali

```
> end;
```

Mencoba beberapa nilai

```
> F(1); F(2);
```

Membuat plot menggunakan notasi operator bentuk `plot(F(k), k=0..20)`

```
> plot(F, 0..20);
```

### Soal 8.13

Pertimbangkan polinomial  $x^4 + ax^3 + x^2 + x + 1$  dengan  $a$  parameter variabel. Gunakan `fsolve` sehingga polinomial tersebut akan menemukan keempat akar jika dan hanya jika  $a$  memiliki nilai.

```
> a:=2.5;
> P:=x^4+a*x^3+x^2+x+1;
> s:=fsolve(P, x, complex);
```

Untuk pemilihan salah satu root,

```
> s[2];
```

Salinlah prosedur di awal bagian ini lalu modifikasi untuk memplot akar kedua polinomial karena  $a$  bervariasi antara 2 dan 10. Catatan: prosedur mengembalikan nilai yang terakhir dihitung, sehingga tepat setelah `s:=fsolve(...)` diperlukan perintah `s[2]`; untuk mengembalikan nilai root kedua.

### Soal 8.14

- (a) Tulis prosedur yang mengembalikan fungsi  $t(x)$  di mana didefinisikan sebagai solusi dari persamaan implisit

$$t = \frac{xe^{-t}}{1+t^2}$$

Dalam prosedur, gunakan perintah `fsolve` untuk melakukan penyelesaian, lalu plot  $t(x)$  pada rentang  $x = 0..10$ .

- (b) Lakukan hal yang sama seperti pada (a), gunakan notasi fungsi untuk mendefinisikan  $t(x)$ , yaitu, `t:=x->fsolve(...)`.
- (c) Tulis salah satu fungsi atau prosedur yang mendapatkan turunan dari fungsi yang didefinisikan secara implisit, dapatkan fungsi atau prosedur

Maple untuk  $\frac{d}{dx}t(x)$ .

Peringatan: jangan hanya mengambil  $x$ -turunan dari persamaan di atas dengan memperlakukan  $t$  seperti konstanta— $t$  di mana benar-benar  $t(x)$  di kedua sisi persamaan. Jadi, tulis ulang persamaan tersebut dengan  $t$  diganti dengan  $t(x)$ , lalu gunakan `diff` untuk menurunkan seluruh persamaan sehubungan dengan  $x$ . Kemudian lakukan pemecahan  $\frac{d}{dx}t(x)$  dan evaluasi ekspresi yang dihasilkan dengan memodifikasi prosedur untuk  $t(x)$ . Ketika prosedur telah dibangun, gunakan prosedur tersebut untuk memplot  $\frac{d}{dx}t(x)$  pada rentang  $0..10$  dan buktikan secara visual bahwa ini terlihat seperti turunan dari fungsi plot sebagian (a).

# BAB 9

## ALJABAR SIMBOLIK

Kemampuan matematika simbolis yang dirancang oleh Maple terkait materi yang telah diberikan sebelumnya, yaitu turunan, integral, dan penyelesaian persamaan diferensial. Berikut pengenalan terkait aljabar simbolik yang terdapat pada Maple.

### 1. Copy and Paste:

Terkadang Maple tidak memberikan hasil akhir yang lengkap, jadi diperlukan pengerjaan beberapa bentuk aljabar secara manual dengan bantuan copy (ctrl-c) dan paste (ctrl-v).

### 2. Expand:

Berikut adalah beberapa contoh dari expand.

```
> expand((x-1)^2*(x+2));
> expand(cos(x+y));
> expand(exp(x-y));
> assume(x, real); expand(ln(x/(1+x^2)));
> expand(tan(x-y));
```

Perintah tersebut merupakan bentuk penyederhanaan aljabar Maple-simplify (expand(%));.

### 3. Combine:

```
> restart;
> expand(cos(x+y));
> combine(%);
> expand(exp(x-y));
> combine(%);
> assume(x, real); expand(ln(x/(1+x^2)));
> combine(%);
> restart;
> expand(tan(x-y));
> combine(%);
> expand(%); simplify(%);
```

### 4. Simplify:

Hal yang perlu dilakukan untuk mendapatkan hasil akhir yang sesuai

ialah dengan mengkombinasikan perintah `expand`, `simplify`, dan `combine`. Bentuk ekspresi juga dapat diubah dengan menggunakan *copy and paste*.

```
> simplify(cos(x)^2+sin(x)^2);
> simplify((x^2-2*x+1)/(x-1));
> simplify(cos(x)^2-sin(x)^2);
> simplify(2*sin(x)*cos(x), trig);
> combine(cos(x)^2-sin(x)^2); combine(2*sin(x)*cos(x), trig);
```

### 5. Simplify with side-relations:

Perintah `simplify` dapat diberi bantuan tambahan dengan menggunakan *side-relations*. Identya adalah memasukkan identitas yang ingin digunakan untuk mewujudkan ekspresi ke dalam bentuk yang diinginkan. Misalnya, ekspresi  $\cos(x)^4 - 3 + \cos(x)^2$  ke dalam bentuk baru yang melibatkan  $2x$  alih-alih  $x$  dengan menggunakan identitas

$$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

caranya dengan

```
> f:=cos(x)^4-3+cos(x)^2;
> simplify(f, cos(x)^2 = (1+cos(2*x))/2);
```

Bentuk tersebut hampir sama dengan bentuk substitusi

```
> subs(cos(x)^2=(1+cos(2*x))/2, f);
```

Beberapa identitas dapat ditentukan sekaligus menggunakan sintaks `simplify(expression, side1, side2, side3)`;

```
> f:=cos(x)^4+1-cos(x)^2-sin(x)^2+3*sin(x)^6;
> s1:=cos(x)^2=(1+cos(2*x))/2;
> s2:=sin(x)^2=(1-cos(2*x))/2;
> simplify(f, s1, s2);
```

### 6. Sort:

Perintah `sort` mengurutkan ekspresi, terutama polinomial, dari pangkat tinggi ke rendah

```
> sort(2-3*x^2-x+x^4);
> sort(1-cos(x)^2+cos(x));
```

### 7. Factor:

`factor` ialah perintah yang mencoba untuk menulis polinomial sebagai hasil kali suku

```
> factor(x^2-6*x+8);
```

**8. Collect:**

Perintah ini semacam perintah faktor setengah jalan yang digunakan dalam faktor persekutuan dalam ekspresi yang lebih besar yang ingin digabungkan dalam semua suku yang mengandungnya, seperti suku  $\ln(y)$  di bawah ini

```
> F:=x*ln(y)-5*x + 3*ln(y)+5*exp(y);
> collect(F,ln(y));
```

Dan jika ingin mengumpulkan lebih dari satu faktor gunakan perintah `collect` daftar faktor, seperti ini

```
> F:=a*x*sin(y)+b*a*x/cos(y);
> collect(F,[x,a]);
```

**9. Solve:**

Perintah `solve` memecahkan persamaan untuk variabel yang ditentukan

```
> solve(x^2-6*x+8);
> solve(ln(y/x)=3,y); solve(ln(y/x)=3,x);
> solve(1-tan(x)^2=-2,x);
```

Perintah berikut cukup berbeda

```
> solve(1-tan(x)^2=-2.,x);
```

Jika memasukkan persamaan yang tidak memiliki solusi, maka tidak akan ada hasil yang diberikan

```
> plot(1-tan(x)^2,x=-Pi..Pi,-3..3);
> solve(1-tan(x)^2=2,x);
```

**10. Normal:**

Bentuk `normal` untuk fungsi rasional adalah memiliki penyebut yang sama

```
> normal(1/x + 1/(x+1));
```

Dengan menggunakan perintah `expand` maka akan diperluas, tetapi tidak kembali ke asalnya

```
> expand(%);
```

Untuk mengembalikannya ke awal, gunakan perintah `convert`.

**11. Numer and Denom:**

Dari suatu ekspresi pecahan akan dirujuk langsung ke pembilang atau penyebut, seperti ini

```
> denom((1+x)/(3-x^2));
> numer((1+x)/(3-x^2));
> (1+x)/(3-x^2);
```

Gunakan mouse untuk menyorot pembilang ekspresi di atas, salin (ctrl-

c), lalu tempel (ctrl-v) di grup eksekusi.

### 12. Op:

Perintah ini memilih potongan ekspresi. Sintaksnya adalah `op(n, expr)`, yang memilih bagian ke- $n$  dari ekspresi `expr`.

```
> kk:=(1+x^2)/(sin(x)+tan(x))*cosh(x)/(1+tanh(x));
> op(1, kk); op(2, kk); op(3, kk); op(4, kk);
```

### 13. Subs:

Ini adalah perintah substitusi-satu-variabel-untuk-perintah lain

```
> Eq1:=cos(x)^2-5*cos(x)+1;
> subs(cos(x)=y, Eq1);
> Eq2:=exp(2*x)-t^2=x*t;
> subs(x=xi, t=tau, Eq2);
```

Perintah lain dalam bentuk aljabar `subs` disebut `algsubs` sebagai berikut

```
> algsubs(x^2=y, f);
```

### 14. Convert:

Meletakkan fungsi rasional dalam bentuk pecahan parsial dengan opsi `parfrac`

```
> convert((2*x+1)/(x*(x+1)), parfrac, x);
```

Mengubah fungsi rasional menjadi bentuk pecahan lanjutan dengan `confrac`

```
> convert((2*x+1)/(x*(x+1)), confrac, x);
```

Mengekspresikan fungsi dalam bentuk eksponensial dengan `exp`

```
> convert(sin(x), exp, x);
> convert(sinh(x), exp, x);
```

Mengubah bah ekspresi dengan sinus dan kosinus menjadi bentuk garis singgung dengan `tan`

```
> restart;
> a:=convert((2+cos(x)^2)/(2-sin(x)^2), tan);
> a:=simplify(a);
```

Mengubah ekspresi dengan garis singgung menjadi bentuk sinus-kosinus dengan `sincos`

```
> convert(a, sincos);
> simplify(%);
```

Mengubah satuan metrik dengan `convert(, metric)`

```
> convert(1.*acre, metric); convert(1.*MPH, metric);
```

Mengubah ekspresi yang mengandung `abs`, `Heaviside`, `signum` menjadi fungsi `piecewise`

```
> F:=abs(x);
> F:=convert(F,piecewise,x);
```

Perintah `convert` akan memberi definisi tentang fungsi `signum` Maple

```
> G:=signum(x);
> G:=convert(G,piecewise,x);
```

Mengubah ekspresi kompleks menjadi bentuk polar

```
> convert(x+I*y,polar);
```

Perintah `map` digunakan untuk menerapkan prosedur di slot pertama `map(a,b)` ke setiap operan objek di slot kedua, dalam hal ini ekspresi `magnitudo` dan argumen, Prosedur konversi adalah `evalc`,

```
> map(evalc,%);
```

### 15. Ratpoly:

Opsi `ratpoly` mengubah deret menjadi fungsi rasional yang merupakan cara yang mudah untuk mendapatkan ekspresi perkiraan untuk suatu fungsi yang tergolong rumit. Sintaksnya adalah `convert(series, ratpoly, numdeg, dendeg)` di mana `numdeg` adalah urutan polinomial pembilang dan `dendeg` adalah urutan polinomial penyebut. Kedua sumber argumen ini opsional. Jika tidak menentukannya `convert` hanya akan memilih urutan yang sesuai untuk jumlah istilah dalam suatu rangkaian. Berikut adalah beberapa contoh plot ilustratif yang menggunakan `taylor` untuk membuat rangkaian.

Mendekati fungsi sinus,

```
> sinap:=convert(taylor(sin(x),x=0,10),ratpoly);
> plot([sin(x),sinap],x=0..6,color=[red,navy]);
```

Perkiraan fungsi tangen. Dalam contoh berikut, fungsi rasional untuk menjadi singular cocok dengan singularitas  $\tan(x)$  pada  $\frac{\pi}{2}$

```
> tanap:=convert(taylor(tan(x),x=0,10),ratpoly);
> plot([tan(x),tanap],x=0..5,-10..10,color=[red,navy]);
```

Untuk membuat perkiraan fungsi rasional ke fungsi yang sudah ada, misalkan fungsi Bessel yang dimiliki dalam program C atau Java. Perintah `ratpoly` digunakan untuk mendapatkan perkiraan sederhana yang dapat digunakan dalam program yang lain.

```
> J0ap:=convert(taylor(BesselJ(0,x),x=0,10),ratpoly);
> plot([BesselJ(0,x),J0ap],x=0..5,color=[red,navy]);
```



Dapat dilakukan plot perbedaan antara fungsi eksak dan perkiraannya untuk mengetahui rentang perkiraan

```
> plot(BesselJ(0,x)-J0ap,x=0..5,-.001..0.001);
```

## 9.1 Aljabar pada Matriks Penuh dengan Ekspresi

Perhatikan matriks ekspresi berikut

```
> restart;with(LinearAlgebra):
> F:=Matrix([[x^2+x*y^2,1/x+y/x],[(x-
y)*(x+y),x^2+2*x*y+y^2]]);
```

Untuk mengubah bentuknya menggunakan perintah aljabar dilakukan dengan mengganti  $q$  dengan  $x$  di setiap suku matriks menggunakan subs

```
> subs(x=q,F);
```

Memperluas setiap istilah menggunakan expand

```
> expand(F);
```

Perintah `map(command,symbol)` menerapkan argumen pertama (`command`) ke setiap bagian ekspresi dalam argumen kedua setiap suku dalam matriks

```
> map(expand,F);
> map(factor,evalm(F));
```

### Contoh:

Hubungan dispersi untuk gelombang elektromagnetik di ionosfer adalah

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$$

Carilah kecepatan fase  $v_p = \frac{\omega}{k}$  dan kecepatan grup  $v_g = \frac{\partial}{\partial k} \omega$  sebagai fungsi dari  $\omega$ .

```
> restart:Eq:=omega^2=omega[p]^2+k^2*c^2;
> solve(Eq,omega);
```

Sintaks ini tidak dapat bekerja karena Maple akan bingung ketika mendapatkan `omega[p]` dalam pemecahannya, karena diminta untuk menemukan elemen pth dari array omega, tetapi omega bukan array dan p bukan bilangan bulat, sebagai perbaikan perhatikan sintaks berikut

```
> restart:Eq:=omega^2=wp^2+k^2*c^2;
> s:=solve(Eq,omega);
```

Menetapkan nama w

```
> w:=s[1];
```

Mendapatkan kecepatan fase sebagai berikut

```
> vp:=w/k;
> s:=solve(Eq,k);
```

Memilih dan menetapkan nilai positif ke k

```
> k:=s[1];
```

Berikut ekspresi untuk vp dengan formulir ini untuk k

```
> vp;
```

Maple tidak dapat menyederhanakan akar kuadrat di atas kecuali ia mengetahui sesuatu tentang  $\omega$ , dalam hal ini adalah positif

```
> assume(omega>0);vp:=simplify(vp);
```

Mencari kecepatan grup sebagai fungsi dari  $\omega$ .

```
> vg:=diff(w,k);
```

Fungsi  $\omega(k)$  di mana k telah dipecahkan, sehingga

```
> w;
```

Yang seharusnya dilakukan adalah mendapatkan solusi untuk  $k(\omega)$  untuk variabel lain, sehingga dengan mengulangi sintaks

```
> restart:Eq:=omega^2=wp^2+k^2*c^2;
> s:=solve(Eq,omega);
> w:=s[1];
> vp:=w/k;
> s:=solve(Eq,k);
> kk:=s[1];
> vp:=subs(k=kk,vp);
> assume(omega>0);vp:=simplify(vp);
```

Mencari kecepatan grup

```
> vg:=diff(w,k);
```

Mensubstitusi k

```
> vg:=subs(k=kk,vg);
> vg:=simplify(vg);
```

### Soal 9.1

- Nyatakan fungsi  $\cos(10\theta)$  sebagai polinomial dalam  $\cos(\theta)$ .
- Ekspresikan fungsi  $\cos(\theta)^3$  sebagai jumlah suku yang mengandung  $\cos(\theta)$  dan  $\cos(3\theta)$ .

(c) Tentukan identitas setengah sudut untuk  $\cos(\frac{\theta}{2})$ ,  $\sin(\frac{\theta}{2})$ , dan  $\tan(\frac{\theta}{2})$ .

### Soal 9.2

Rumus untuk resistansi efektif dari kombinasi resistor tertentu diberikan oleh

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

Selesaikan dengan mendapatkan rumus untuk  $R$  dengan  $R_4 R_5$  di pembilang dan jumlah suku di penyebut, salah satunya adalah pecahan dengan penyebut  $R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$  dan dengan faktor pembilang  $R_4 R_5$ , dikalikan dengan faktor lain, dan dua suku lainnya yang ditambahkan pada penyebutnya adalah  $R_4 + R_5$ .

### Soal 9.3

Dalam fisika dipelajari tumbukan antara dua partikel. Pertimbangkan bila kedua partikel dibatasi untuk bergerak sepanjang sumbu x. Kedua partikel memiliki massa  $m_1$  dan  $m_2$  dan kecepatan awal  $v_{1i}$  dan  $v_{2i}$ . Temukan kecepatan akhir  $v_{1f}$  dan  $v_{2f}$ .

Tabrakan elastis:

Kondisi yang memungkinkan soal ini diselesaikan adalah kekekalan momentum dan energi:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

dan

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2$$

di mana  $\frac{1}{2}$  telah dihilangkan dari persamaan energi kinetik.

Kemudian tentukan pada kasus (i)  $m_1 = m_2$ , (ii)  $m_2$  jauh lebih besar dari  $m_1$  dan  $v_{2i} < v_{1i}$  sehingga partikel cahaya muncul dari belakang dan bertabrakan dengan partikel masif, dan (iii)  $m_1$  jauh lebih besar dari  $m_2$  dan  $v_{2i} < v_{1i}$  sehingga partikel masif muncul dari belakang dan memukul partikel cahaya.

**Soal 9.4**

Dalam fisika dipelajari gerak proyektil dengan gravitasi di mana diperoleh persamaan berikut yang menggambarkan gerak horizontal dan vertikal:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}$$

Misalkan  $x_0$  dan  $y_0$  diberikan serta kecepatan awal  $v_0$  dan sudut  $\theta$  yang dibuat oleh kecepatan awal dengan bidang horizontal. Dengan asumsi ketinggian daerah di mana proyektil akan jatuh  $y_f$  diketahui. Temukan rumus untuk rentang horizontal  $x_r$  dan waktu proyektil yang dihabiskan di udara. Setelah didapatkan ekspresi akhir untuk rentang horizontal dan waktunya, pilih  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $g = 9,8m/s^2$ , dan  $v_0 = 50m/s$  dan buat plot waktu tunggu dan jangkauan sebagai fungsi  $\theta$  jika ketinggian wilayah target adalah  $y_f = -200m$  (menembak jatuh ke lembah). Gunakan  $\theta$  dalam rentang  $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ . Secara khusus, mengapa 45 derajat tidak memberikan kisaran terbaik dalam kasus ini?

**Soal 9.5**

Rumus yang menghubungkan panjang fokus  $f$ , jarak benda  $o$ , dan jarak bayangan  $i$  untuk lensa pemfokusan atau cermin adalah

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f}$$

Asumsikan bahwa  $f = 1m$  dan buat plot  $i$  untuk  $o$  mulai dari 15 m hingga 0,5m. Ketika  $i$  menjadi negatif berarti bayangannya maya (artinya seolah-olah ada bayangan di balik cermin). Jelaskan bentuk grafik yang didapatkan!

**Soal 9.6**

Diketahui air bermassa  $M_w$  dengan panas spesifik  $c_w = 4185 \text{ J/kg/K}$  dan es bermassa  $M_i$  dengan panas spesifik  $c_i = 2000 \text{ J/kg/K}$ . Panas spesifik

transformasi adalah  $L = 333000 \text{ J/kg}$ . Jika air mulai keluar pada suhu  $T_w$  dan es mulai keluar pada suhu  $T_i$ , dan jika titik beku pada suhu  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  lakukan hal berikut.

- (a) Asumsikan bahwa semua es mencair dengan (i) menemukan rumus untuk suhu akhir  $T_f$  dari gabungan massa air dan (ii) menemukan rumus untuk massa es sehingga suhu akhir air adalah  $T_0$ . Panas yang hilang oleh air diberikan oleh

$$Q_w = M_w c_w (T_w - T_f)$$

dan panas yang diperoleh es yang mencair diberikan oleh

$$Q_i = M_i c_i (T_0 - T_i) + M_i L + M_i c_w (T_f - T_0)$$

Untuk mendapatkan angka pasti, gunakan  $M_w = 1 \text{ kg}$ . (Perhatikan bahwa air bersuhu  $20^\circ\text{C}$  dan es bersuhu  $-10^\circ\text{C}$ , berapa banyak es yang dibutuhkan untuk membuat  $1 \text{ kg}$  air menjadi dingin?)

- (b) Asumsikan bahwa semua air membeku sepenuhnya dan kemudian mendingin di bawah  $T_0$  dengan (i) menemukan rumus suhu akhir gabungan massa es dan (ii) menemukan rumus massa es sedemikian rupa sehingga suhu akhir es adalah  $T_0$ .

Berapa banyak es yang diperlukan pada suhu  $-10^\circ\text{C}$  untuk membekukan  $1 \text{ kg}$  air pada  $20^\circ\text{C}$ ?

### Soal 9.7

Cahaya datang dari daerah transparan  $a$  ke daerah transparan  $b$ , yang pada gilirannya mentransmisikan cahaya ke daerah  $c$ . Indeks bias di setiap daerah dilambangkan dengan  $n_a$ ,  $n_b$ , dan  $n_c$ .

```
> with(plots):with(plottools):
> l2:=listplot([[0,-2],[0,2]]):
> l3:=listplot([[1,-2],[1,2]]):
> t1:=textplot([-0.5,0.5,"a"]):
> t2:=textplot([0.5,0.5,"b"]):
> t3:=textplot([1.5,0.5,"c"]):
> l4:=plot(0.5sin(20(x+1))-0.5,x=-1..-0.2):
> a1:=arrow([-0.7,-1.3],[-0.4,-1.3],0.05,0.2,0.2):
> plotsdisplay;
```

Dalam persamaan Maxwell bahwa untuk kejadian normal, rasio antara

gelombang datang di wilayah 1 dan gelombang yang dipantulkan di wilayah 1 dan gelombang yang ditransmisikan di wilayah 2 diberikan oleh

$$\frac{E_r}{E_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

dan

$$\frac{E_t}{E_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Masing-masing rasio adalah  $R_{12}$  dan  $T_{12}$ . Ikuti langkah-langkah yang diuraikan di bawah ini.

- Perhatikan bahwa rasio refleksi dan transmisi pertama ialah  $R_{ab}$  dan  $T_{ab}$ .
- Untuk cahaya yang ditransmisikan ke wilayah  $b$  yang pertama kali tercermin dari wilayah  $c$ , fase digeser oleh faktor fase kompleks  $e^{2ik_b h}$  karena perjalanan bolak-balik melalui  $b$  dari  $a$  ke  $c$  dan kembali, kemudian ditransmisikan kembali ke  $a$ . Tunjukkan bahwa faktor untuk seluruh proses ini, termasuk transmisi pertama, adalah  $T_{ab}e^{2ik_b h}R_{bc}T_{ba}$ .
- Tunjukkan bahwa setiap rasio refleksi berganda yang berurutan diberikan oleh  $T_{ab}R_{bc}T_{ba}e^{2ik_b h}(e^{2ik_b h}R_{ba}R_{bc})^m$  di mana beberapa refleksi pertama di bagian (b) sesuai dengan  $m = 0$ .
- Gabungkan semua untuk mendapatkan rumus rasio refleksi total

$$R = R_{ab} + T_{ab}R_{bc}T_{ba}e^{2ik_b h} \left( \sum_{m=0}^{\infty} (e^{2ik_b h}R_{ba}R_{bc})^m \right)$$

- Gunakan rumus koefisien refleksi dan transmisi untuk membuat rumus  $R(n_a, n_b, n_c, 2k_b h)$ . Setelah itu, manipulasilah menjadi bentuk persamaan terpisah untuk bagian real dan imajiner. Gelombang yang dipantulkan akan tepat nol jika bagian real dan imajiner menghilang. Selanjutnya definisikan variabel

$$x = 2k_b h$$

$$z = e^{2ik_b h}$$

$$\sin(x) = 0$$

sehingga

$$h = \frac{\lambda}{4}$$

$$n_b = \sqrt{n_a n_c}$$

## REFERENSI

Maple adalah merek dagang dari Waterloo Maple Inc.

Maple User Manual. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 1996-2023.

Maple Programming Guide. L. Bernardin, P. Chin, P. DeMarco, K. O. Geddes, D. E. G. Hare, K. M. Heal, G. Labahn, J. P. May, J. McCarron, M. B. Monagan, D. Ohashi, S. M. Vorkoetter. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 1996-2023.

Maple V Library Reference Manual, Bruce W. Char, Keith O. Geddes, Gaston H. Gonnet, Benton Leong, Michael B. Monagan, Stephen M. Watt, PublisherSpringer New York, NY, eBook PackagesSpringer Book Archive.

# Debugging

Masalah umum yang dihadapi dan penyelesaiannya dikumpulkan di sini. Berikut adalah hyperlink untuk membawa kembali ke awal setiap bab yang diinginkan.

[Bab 1: Bagian Awal](#)

[Bab 2: Plotting](#)

[Bab 3: Kalkulus](#)

[Bab 4: Bilangan Kompleks](#)

[Bab 5: Aljabar Linier](#)

[Bab 6: Memecahkan Persamaan](#)

[Bab 7: Persamaan Diferensial](#)

[Bab 8: Pemrograman](#)

[Bab 9: Aljabar Simbolik](#)

## Online help

Jika terdapat kesalahan, hal pertama yang harus dilakukan adalah menggunakan bantuan online.

## Unexpected results

1. Hasil akhir yang didapatkan tidak sesuai, dikarenakan dalam Maple suatu variabel dapat bernilai apa saja, terdapat kesalahan jika langsung memasukkannya dan memahami variabel tersebut adalah bilangan real. Perbaikan untuk ini menggunakan `assume(x, real, y, real, ...)` sehingga Maple akan mengetahui hal yang sama tentang variabel yang digunakan. Namun penggunaan `assume` disesuaikan sesuai kebutuhan, perhatikan contoh berikut

```
> restart;
> assume(a, real);
> b:=cos(a);
 cos(a~)
> a:=2.;
 2.
```



```
> evalf(b);
 cos(a~)
 2.
```

Sekarang perhatikan yang terjadi pada hal yang sama tanpa perintah `assume`

```
> restart;
> b:=cos(a);
 b := cos(a)
> a:=2.;
 2.
> evalf(b);
-0.4161468365
```

2. Masalah umum lainnya adalah penggunaan `=` dan `:=`. Jika menggunakan `=` ketika yang dimaksudkan adalah menetapkan (`:=`) maka variabel yang telah ditetapkan tidak memiliki apa pun di dalamnya.
3. Maple mengatakan telah diberikan karakter ilegal. (a) Carilah apa yang tampak seperti spasi utama dalam perintah, yaitu, untuk spasi antara `>` dan karakter pertama dari perintah. Hapus spasi tersebut. (b) Jika masalah berlanjut, hapus seluruh baris dan ketik ulang.
4. Saat mendapatkan pesan Error, `';' unexpected`. Periksa tanda kurung yang mungkin tidak seimbang.

Berikut adalah daftar kesalahan umum lainnya berdasarkan kategori dan cara memperbaiki atau mengatasinya.

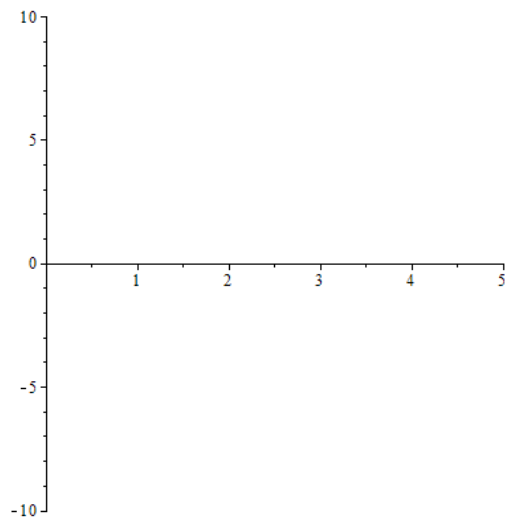
## Kesalahan Plot

### 1. Empty plot

Kesalahan sintaks saat merencanakan ekspresi. Misalnya

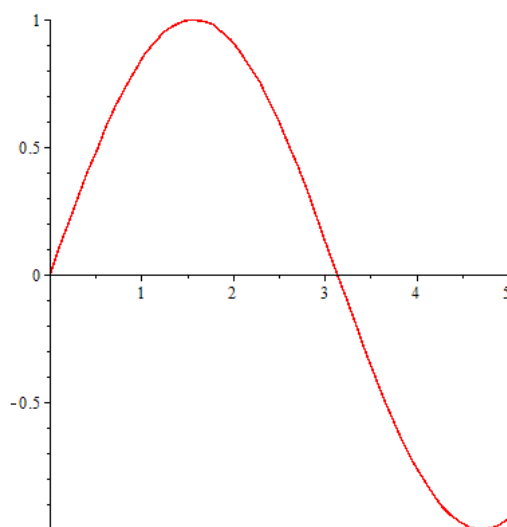
```
> restart;
> g:=sin(x);
 sin(x)
> plot(g,0..5);
```

Warning, unable to evaluate the function to numeric values in the region; see the plotting command's help page to ensure the calling sequence is correct



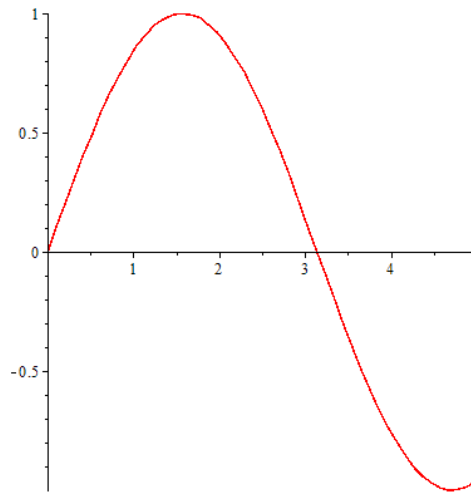
didapatkan kesalahan plot kosong. Sintaks yang benar untuk merencanakan ekspresi adalah

```
> plot(g, x=0..5);
```



atau

```
> plot(g(x), x=0..5);
```



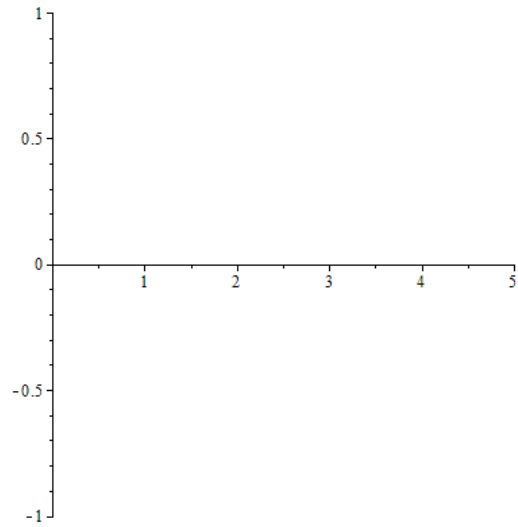
Sumbu muncul, tetapi tidak ada fungsi yang diplot

Ini terjadi ketika ekspresi, fungsi, atau prosedur akan diplot, tetapi tidak terdapat parameter yang perlu diberi nilai. Misalnya jika terdapat fungsi  $f$ , ekspresi  $g$ , dan prosedur  $p$  seperti ini

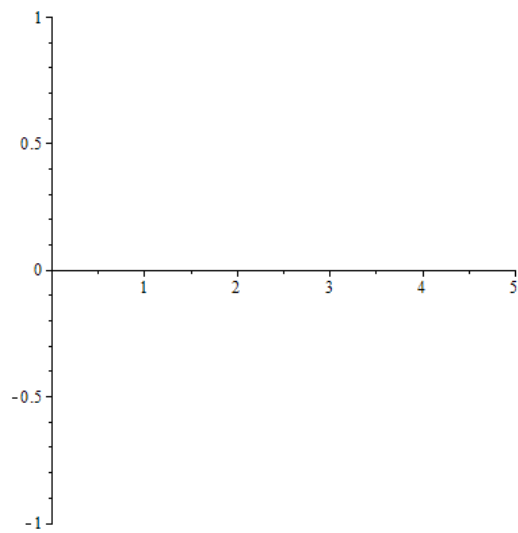
```
> restart;
> f:=x->sin(x*t);
 x→sin(xt)
> g:=sin(x*t);
 sin(xt)
> p:=proc(x)
> global t;
> sin(x*t);
> end;
 Proc(x) global t;sin(x*t) end proc
```

maka ketiga perintah plot ini memberikan plot nol

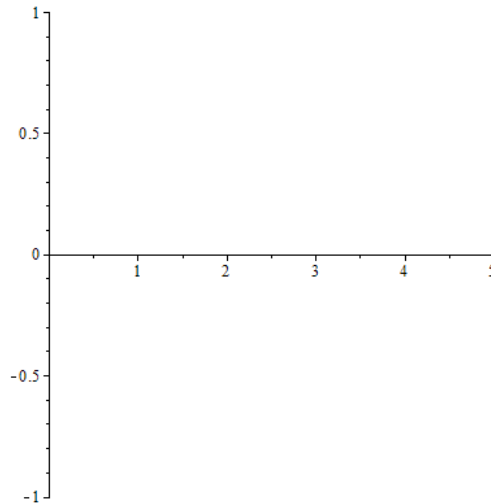
```
> plot(f(x), x=0..5);
```



```
> plot(g, x=0..5);
```



```
> plot(p, 0..5);
```



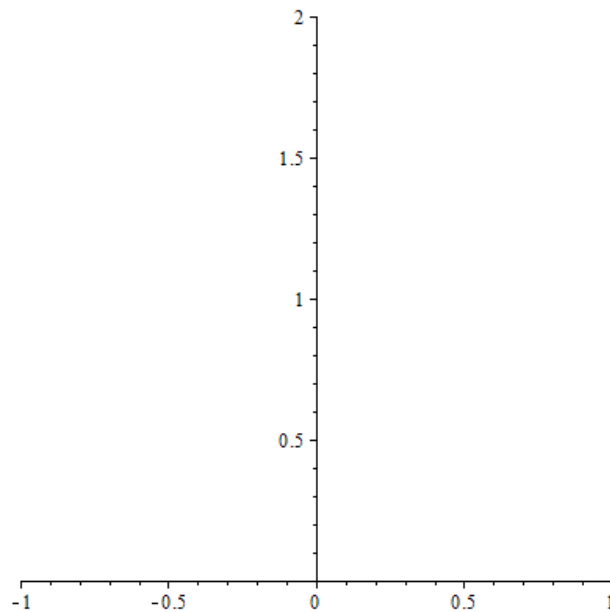
Solusinya adalah dengan menetapkan nilai  $t$ , seperti ini

```
> t:=5;
5
```

Sekarang ketiga perintah plot akan berfungsi.

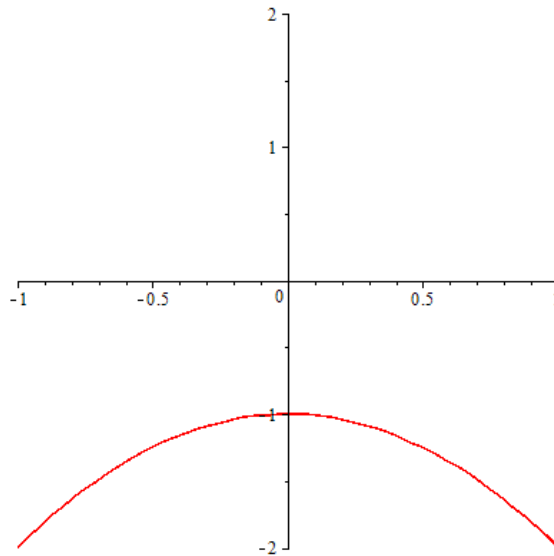
Ini juga dapat terjadi ketika mengatur sumbu vertikal sehingga plot tidak muncul di jendela, seperti fungsi negatif ini yang diplot di jendela vertikal positif:

```
> plot(-1-x^2, x=-1..1, y=0..2);
```



Perbaiki dengan memperbaiki jendela

```
> plot(-1-x^2, x=-1..1, y=-2..2);
```



## 2. Error, (in plot) invalid arguments

Mencoba memplot dengan variabel yang telah diberi nilai, seperti ini

```
> restart;
> g:=sin(x);
 sin(x)
> x:=5;
 5
> plot(g(x),x=0..5);
Error, (in plot) unexpected option: 5 = 0 .. 5
```

Solusinya adalah dengan membatalkannya dengan menambahkan tanda kutip tunggal

```
> unassign('x');
atau
> x:='x';
 x
```

dan ulangi untuk plot.

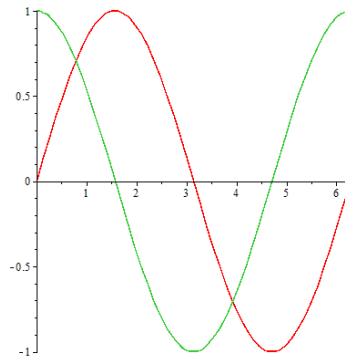
## 3. Error, (in plot/transform) cannot evaluate boolean: -5.\*z < -4

Menggunakan = dan bukannya := dalam memberikan variabel nilai numerik

## 4. Parametric plot gives two plots instead

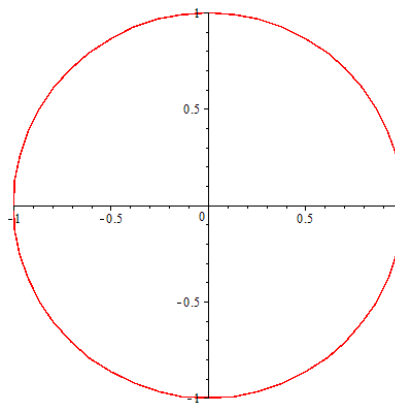
Ini terjadi ketika didapatkan tanda kurung siku di tempat yang salah. Berikut adalah plot dua fungsi

```
> plot([sin(s),cos(s)],s=0..2*Pi);
```



dan berikut ini suatu parametric plot

```
> plot([sin(s), cos(s), s=0..2*Pi]);
```



Perhatikan perubahan tanda ] pada kedua kasus tersebut.

## 5. Fungsi plot gagal

Ketika mendefinisikan fungsi  $f(x)$ , lalu memplotnya dengan `plot(f(x), x=0..5)`, dan gagal, coba bentuk operator sebagai gantinya:

```
> f:=x->fsolve(t=x/(1+exp(t)), t);
```

$$x \rightarrow fsolve\left(t = \frac{x}{1+e^t}, t\right)$$

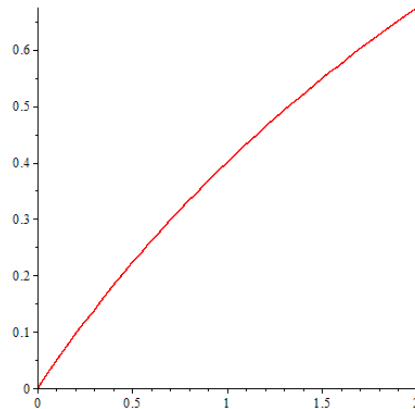
Sintax ini akan gagal:

```
> plot(f(x), x=0..2);
```

Error, (in fsolve) x is in the equation, and is not solved for

Sintax ini akan berhasil:

```
> plot(f, 0..2);
```



## Kesalahan Differensiasi

**Error, wrong number (or type) of parameters in function diff**

```
> restart:x:=5;
```

```
5
```

```
> diff(sin(x),x);
```

Error, invalid input: diff received 5, which is not valid for its 2nd argument

Perlu dibuatkan unassign x.

## Kesalahan Integrasi

**Error, (in int) wrong number (or type) of arguments**

```
> restart:x:=5;
```

```
5
```

```
> int(sin(x),x);
```

Error, (in int) integration range or variable must be specified in the second argument, got 5

Perlu dibuatkan unassign x.

## Kesalahan Solve

Terkadang Maple dapat menyelesaikan sistem jika koefisiennya adalah bilangan rasional, tetapi tidak jika koefisiennya termasuk bilangan floating point. Jadi jangan gunakan  $x * 0.01$  – gunakan  $x/100$  sebagai



gantinya.

## Kesalahan Dsolve

### Kesalahan Algebra

**Error, too many levels of recursion or Warning, recursive definition of name**

```
> x:=1+x;
 6
```

Hal ini terjadi jika terdapat rantai variabel yang perlu ditetapkan. Akan sangat membantu untuk mengetahui variabel apa yang ditugaskan untuk apa. Gunakan perintah `anames()`, tetapi jika sistem sangat kacau karena kesalahan lakukan restart.

Jika menentukan  $x$  sebagai variabel dengan nilai  $x$ . Berikut cara untuk memperbaikinya.

```
> x:='x';
 x
```

### Kesalahan Lain-lain

**Error, (in assign) invalid arguments**

Untuk membatalkan penetapan variabel yang telah diberi nilai dan tidak menggunakan tanda kutip tunggal, seperti ini

```
> restart;x:=5;
 5
```

```
> unassign(x);
```

Error, (in unassign) cannot unassign '5' (argument must be assignable)

```
> unassign('x');
```

Dapat pula membatalkan penetapan dengan perintah ini

```
> x:='x';
 x
```

# Uji Kompetensi

Uji kompetensi terdiri dari 14 tugas laboratorium komputer untuk mempelajari penggunaan Maple dalam pemecahan masalah fisika. Durasi untuk setiap lab adalah 3 jam. Peserta ditugaskan untuk membaca teks dalam program Maple, menjalankan contoh, dan menyelesaikan masalah yang diberikan dengan menggunakan Maple, serta mengikuti jadwal yang diberikan di bawah ini. Peserta menyelesaikan setiap masalah dengan menunjukkan kepada Asisten apa yang telah dihasilkan di layar komputer dan meminta Asisten menandai bagian yang telah selesai. Nilai akhir ditentukan oleh banyaknya tugas yang diselesaikan, ujian lisan di akhir kursus, serta kemampuan implementasi terkait materi yang telah diberikan.

## Lab 1 (BAB 1)

1. Masuk ke PC dan salin lembar UJIAN.mws
2. Buka Pendahuluan.
3. Buka Indeks. Klik topik, lalu cari cara untuk kembali ke Indeks.
4. Buka Bab 1 dan kerjakan setiap bagian, jalankan semua perintah Maple dan lakukan apa yang diperintahkan teks.

## Lab 2 (BAB 2)

5. Gunakan hal-hal yang telah dipelajari pada Bab 1 untuk membuat lembar kerja Maple yang menyajikan masalah berikut dengan menggunakan perintah Maple untuk menyelesaikannya.

Sebuah disk bermuatan radius  $a$  dan kerapatan muatan seragam  $\sigma$  menghasilkan medan listrik  $E_z$  sepanjang sumbu  $z$  (di mana sumbu  $z$  adalah garis tegak lurus terhadap disk melalui pusatnya) yang diberikan oleh ekspresi integral

$$E_z(z) = \frac{\sigma z \left( \int_0^a \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dr \right)}{2\epsilon_0}$$

Temukan ekspresi aljabar sederhana untuk  $E_z(z)$ , lalu gunakan  $\sigma = 1e - 6 \frac{C}{m^2}$ ,  $\epsilon_0 = 8.854e - 12 \frac{Nm^2}{C}$ , dan  $a = 1mm$  untuk membuat plot dari  $E_z(z)$  dari  $z = -5a$  ke  $z = 5a$ .

6. Diberikan persamaan Bernoulli

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

dan persamaan kontinuitas

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

diselesaikan bersamaan untuk mendapatkan rumus berikut untuk  $v_2$ :

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Gunakan perintah solve Maple untuk mendapatkan hasil ini.

### Lab 3 (BAB 2)

1. Lanjutkan ke Bab 9 dan pelajari perintah aljabar simbolis, jalankan contoh yang diberikan.
2. Kerjakan bagian-bagian Bab 2 dari Plotting  $x - y$  ke Plotting Data, lewati topik lanjutan. Kerjakan soal-soal berikut dan tunjukkan kepada Asisten. Soal 2.1, 2.2, 2.3, 2.6, 2.7, 2.8, dan contoh Plotting Data.

### Lab 4 (BAB 2)

1. Kerjakan bagian-bagian Bab 2 dari Plot Parametrik ke Plot 3-D dan kerjakan soal-soal berikut:  
2.10, 2.12, 2.13, 2.14, 2.16, 2.18, 2.20, 2.24, jalankan perintah di bagian 3D Plotting.
2. Lakukan materi lanjutan tentang gelombang paket di bagian animasi dan kerjakan soal 2.21-2.23.

TITIK PENILAIAN 1:

Lab 1-4 harus diselesaikan sebelum periode laboratorium ke-4 berakhir.

### Lab 5 (BAB 3)

Bekerja melalui Limit, Diferensiasi, dan bagian dari Integrasi di Bab 3, hingga

Integral Dasar. Kerjakan soal 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, dan 3.11.

### **Lab 6 (BAB 3)**

Kerjakan seluruh Integrasi di Bab 3, Soal 3.12, 3.13, 3.14, 3.16, dan 3.17.

### **Lab 7 (BAB 3)**

Bekerja melalui Ekspansi Seri dan Jumlah. Kerjakan Soal 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, dan 3.26.

### **Lab 8 (BAB 4)**

Kerjakan Bab 4 tentang Analisis Kompleks, Soal 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.7, 4.8, 4.11, 4.12, dan 4.13.

### **Lab 9 (BAB 5)**

TITIK PENILAIAN 2:

Lab 5-9 harus diselesaikan sebelum periode laboratorium ke-9 berakhir.

### **Lab 10 (Bab 6)**

1. Kerjakan Bab 6 tentang Menyelesaikan Persamaan, kerjakan soal 6.1, 6.2, 6.4, dan 6.5.

2. Tentukan nilai dari turunan fungsi Bessel  $\frac{d}{dx}J_2(x)$  antara 0 dan 100.

Masukkan ke dalam sebuah vektor kolom  $a_n$ . Gunakan perintah seq dengan fsolves, mengingat bahwa nol dari fungsi Bessel dipisahkan di sekitar Pi. Plot dari ekspresi turunan menunjukkan terdapat akar di  $x = 0$ .

### **Lab 11 (Bab 8)**

Kerjakan dua bagian pertama dari Bab 8 tentang Prosedur, Loop dan Logika, dan kerjakan soal 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, dan 8.7.

### **Lab 12 (Bab 8)**

Kerjakan dua bagian terakhir dari Bab 8, kerjakan soal 8.8, 8.9, 8.10, 8.13, dan 8.14.

### **Lab 13 (Bab 9)**

Kerjakan Bab 9 Soal 9.1 dan 9.2. Kemudian kerjakan dua dari tiga soal 9.3, 9.4, atau 9.5.

### **Lab 14 (Bab 9)**

Temui instruktur dan ikuti ujian lisan/komputer 20 menit.