



MATEMATIKA

UNTUK PERGURUAN TINGGI

PENULIS :

- **NASRUDDIN**
- **LULUT ALFARIS**
- **AGUNG PRASETYO**
- **ICHSAN**
- **NURUL AINUN FAJRIAH**
- **JONI WILSON SITOPU**
- **ELFIRA RAHMADANI**
- **SYAHRIANI SIRAIT**
- **LA ODE ASMIN**
- **AGUSTIN FATMAWATI**
- **ANIM**
- **ELY SYAFITRI**

ISBN 978-623-8004-97-3



9

786238

004973

MATEMATIKA UNTUK PERGURUAN TINGGI

**NASRUDDIN
LULUT ALFARIS
AGUNG PRASETYO
ICHSAN
NURUL AINUN FAJRIAH
JONI WILSON SITOPU
ELFIRA RAHMADANI
SYAHRIANI SIRAIT
LA ODE ASMIN
AGUSTIN FATMAWATI
ANIM
ELY SYAFITRI**



PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI

MATEMATIKA UNTUK PERGURUAN TINGGI

Penulis:

Nasruddin
Lulut Alfaris
Agung Prasetyo
Ichsan
Nurul Ainun Fajriah
Joni Wilson Sitopu
Elfira Rahmadani
Syahriani Sirait
La Ode Asmin
Agustin Fatmawati
Anim
Ely Syafitri

ISBN: 978-623-8004-97-3

Editor: Mila Sari, S.ST., M.Si.

Ari Yanto, MP.d.

Penyunting: Yuliatr Novita, M.Hum.

Desain Sampul dan Tata Letak: Handri Maika Saputra, S.ST.

Penerbit: PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :

Jl. Pasir Sebelah No. 30 RT 002 RW 001
Kelurahan Pasie Nan Tigo Kecamatan Koto Tangah
Padang Sumatera Barat

Website : www.globaleksekutifteknologi.co.id

Email : globaleksekutifteknologi@gmail.com

Cetakan pertama, Oktober 2022

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji kepada Tuhan yang Maha Esa sehingga kami mampu menyelesaikan Buku Matematika Untuk Perguruan Tinggi. Keberhasilan penyusunan buku ini tentu tidak akan terwujud tanpa adanya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada berbagai pihak yang telah mendukung dalam penerbitan buku ini. Buku ini tidak luput dari kekurangan dan kesalahan. Jika pembaca menemukan kesalahan apapun, kami mohon maaf setulusnya, dukungan berupa kritik & saran akan selalu kami terima dengan tangan terbuka.

Penulis, Oktober 2022

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR TABEL	viii
BAB I BENTUK PANGKAT, AKAR DAN LOGARITMA	1
1.1 Bentuk Pangkat.....	1
1.1.1 Definisi bentuk pangkat.....	1
1.1.2 Pangkat bulat positif	1
1.1.2 Sifat-sifat pangkat bulat positif.....	3
1.1.3 Pangkat bulat negatif dan nol	4
1.1.4 Pangkat pecahan.....	5
1.2 Bentuk Akar	7
1.2.1 Definisi bentuk akar	7
1.2.2 Notasi bentuk akar.....	7
1.2.3 Operasi aljabar bentuk akar	7
1.2.4 Merasionalkan pecahan bentuk akar.....	8
1.3 Bentuk Logaritma	9
1.3.1 Definisi.....	9
1.3.2 Sifat-sifat Logaritma	10
1.3.3 Manfaat Logaritma dalam kehidupan sehari- hari	11
BAB II FUNGSI, PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LOGARITMA	15
2.1 Definisi.....	15
2.2 Kegunaan Logaritma	16
2.3 Sifat-Sifat Logaritma	17
2.4 Fungsi Logaritma	17

2.5 Persamaan Logaritma	17
2.6 Pertidaksamaan Logaritma.....	18
2.6.1 Konsep Pertidaksamaan Logaritma	18
BAB III PERSAMAAN, FUNGSI, DAN PERTIDAKSAMAAN	
KUADRAT	21
3.1 Persamaan Kuadrat.....	21
3.2 Fungsi Kuadrat.....	25
3.3 Pertidaksamaan Kuadrat	31
3.4 Ringkasan.....	32
BAB IV SISTEM PERSAMAAN LINIER	35
4.1 Pendahuluan	35
4.2 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel.....	37
4.3 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dengan Metode Eliminasi	39
4.4 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dengan Metode Substitusi	42
4.5 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dengan Metode Determinan	44
4.6 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel.....	47
4.7 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel dengan Metode Eliminasi	48
4.8 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel dengan Metode Subtitusi.....	50

4.9 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga	
Variabel dengan Metode Matriks.....	53
4.10 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga	
Variabel dengan Metode Determinan dari Matriks	
Persegi.....	58
BAB V PERTIDAKSAMAAN SATU VARIABEL	65
5.1 Pendahuluan.....	65
5.2 Pertidaksamaan Numerik.....	66
5.3 Aljabar Pertidaksamaan.....	69
5.4 Pertidaksamaan bersyarat.....	73
 BAB VI PROGRAM LINEAR	 81
6.1 Pendahuluan.....	81
6.2 Komponen Program Linier	82
6.3 Asumsi-asumsi Dasar Program Linear	83
6.4 Masalah Program Linear.....	84
6.5 Metode untuk Memecahkan Masalah Program	
Linier.....	86
6.5.1 Metode Simpleks.....	87
6.5.2. Metode Grafik.....	90
6.6 Aplikasi Program Linier	93
 BAB VII PERBANDINGAN TROGONOMETRI	 97
7.1 Definisi Trigonometri.....	97
7.2 Perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku..	98
7.3 Nilai Perbandingan Trigonometri Untuk Sudut	
Istimewa.....	101
7.4 Perbandingan Trigonometri Sudut Berelasi	107

BAB VIII TRIGONOMETRI UNTUK JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT.....	117
8.1 Jumlah Dua sudut.....	117
8.2 Rumus Pengurangan Sudut.....	123
8.3. Rangkuman Rumus trigonometri jumlah serta selisih dua sudut	125
8.4 Rumus-rumus Perkalian Sinus dan Cosinus	129
8.5 Rumus – rumus Penjumlahan serta Pengurangan Sinus dan Cosinus	131
 BAB IX RUANG TIGA DIMENSI (3-D)	135
9.1 Sistem Koordinat 3-Dimensi	135
9.1.1 Titik Dalam Ruang 3-Dimensi.....	135
9.1.2 Bidang Dalam Ruang 3-Dimensi.....	136
9.1.3 Formula Jarak	137
9.1.4 Vektor dalam Ruang.....	138
9.1.5 Persamaan Garis	140
9.1.6 Persamaan Bidang	142
9.1.7 Silinder dan Permukaan Quadrik.....	147
9.2 Fungsi Vektor	152
9.2.1 Kurva dalam Ruang dan Fungsi Vektor	152
9.2.2 Diferensiasi Fungsi Vektor.....	153
9.2.3 Integrasi Fungsi Vektor.....	154
9.2.4 Vektor Tangen, Normal dan Binormal	156
9.2.5 Panjang Lengan dengan Fungsi Vektor.....	157
9.2.6 Kurvatur	157
9.2.7 Kecepatan dan Percepatan	158
9.2.7 Koordinat silinder dan Sferik.....	159

BAB X BANGUN DATAR	163
10.1 Pendahuluan	163
10.2 Poligon.....	165
10.3 Lingkaran	171
10.4 Bangun Datar Tidak Beraturan.....	172
 BAB XI LINGKARAN	 175
11.1 Pendahuluan	175
11.2 Pengertian Lingkaran.....	175
11.2.1 Phi	178
11.2.2 Keliling Lingkaran	179
11.2.3 Luas Lingkaran	180
11.3 Persamaan Lingkaran.....	182
11.3.1 Persamaan Lingkaran berpusat di O (0,0)	182
11.3.2 Persamaan lingkaran berpusat di P (a,b)	184
11.4 Bentuk umum persamaan lingkaran	185
11.5 Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran.....	187
11.6 Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran	190
11.6.1 Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran dengan pusat O(0,0) melalui titik $T(x_1, y_1)$	190
11.6.2 Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran dengan pusat P(a,b) melalui titik A(x ₁ ,y ₁)	192
11.6.3 Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ melalui titik A(x ₁ ,y ₁) pada lingkaran	194
11.6.4 Persamaan garis singgung lingkaran jika diketahui gradient garis singgung	194

BAB XII VEKTOR.....	197
12.1 Pendahuluan	197
12.2 Pengertian Vektor Dan Skalar R^2 (Bidang)	197
12.3 Vektor Satuan	198
12.4 Aljabar Vektor	201
12.4.1 Dua Vektor yang Sama	201
12.4.2 Vektor Negatif	202
12.4.3 Perkalian Vektor dengan Skalar	203
12.4.4 Penjumlahan Vektor	203
12.4.5 Pengurangan Vektor	204
12.4.6 Perkalian vektor dengan skalar	204
12.4.7 Perkalian skalar antara dua vektor	204
12.4.8 Aturan Segitiga.....	206
12.4.9 Aturan Polygon	207
12.4.10 Selisih Dua Vektor.....	208
12.4 Vektor dalam Ruang Tiga Dimensi	209
12.4.1 Sistem koordinat dalam ruang	210
12.4.2 Operasi aljabar pada vektor di R^3	211
BIODATA PENULIS	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Apel jatuh bergerak ke bawah.....	20
Gambar 3.2 Fungsi $y = 2x^2$	25
Gambar 3.3 Fungsi $y = x^2 + 3$	26
Gambar 3.4 Grafik fungsi $y = x^2 + 1$	27
Gambar 3.5 Hasil pencerminan fungsi kuadrat.....	29
Gambar 6.1. Grafik koordinat titik sudut.....	92
Gambar 7.1 Segitiga Siku-Siku	98
Gambar 7.2 Segitiga Sama sisi.....	101
Gambar 7.3 Persegi ABCD	103
Gambar 7.4 Sudut 0° dan 90°	104
Gambar 7.5 Trigonometri Sudut.....	107
Gambar 7.6 Trigonometri Sudut di Kuadran Pertama	108
Gambar 7.7 Trigonometri Sudut di Kuadran Kedua.....	109
Gambar 7.8 Trigonometri Sudut di Kuadran Ketiga	110
Gambar 7.9 Trigonometri Sudut di Kuadran Keempat	111
Gambar 7.10 Koordinat kartesius.....	112
Gambar 7.11 Koordinat kutub.....	112
Gambar 8.1 Segitiga	117
Gambar 8.2 4 Segitiga $\Delta QOT, \Delta TSU, \Delta OTU$, dan ΔOPU	120
Gambar 8.3 Segitiga $\Delta XOA, \Delta XOB, \Delta DEO$	123
Gambar 9.1 (kiri) Titik $(2; 3; 1)$ dalam ruang xyz , dilambangkan dengan huruf P . Asal dilambangkan dengan huruf O ; (kanan) Bidang	136
Gambar 9.2 (Kiri) Jarak antara titik P_1 dan bidang; (Kanan) Deskripsi garis L melewati $\vec{r}_1$ dan sejajar dengan vektor $\vec{v}$	145
Gambar 9.3 Penyelesaian: (kiri) $V(i)$ dan (kanan) $V(ii)$	152
Gambar 9.4 Koordinat silinder (kiri) dan sperik (Kanan) ...	160
Gambar 10.1 bidang E	164

Gambar 10.2 bidang ABCD	164
Gambar 10.3 Peta Konsep Bangun-bangun Geometri	165
Gambar 10.4 Poligon Segi-n.....	165
Gambar 10.5 Bagan Klasifikasi Segiempat Beraturan	171
Gambar 11. 1 Lingkaran.....	175
Gambar 11. 2 Unsur- unsur dari Lingkaran.....	176
Gambar 11.3 proses mencari Luas dan Keliling Lingkaran.....	181
Gambar 11. 4 Lingkaran berpusat di O (0,0).....	182
Gambar 11. 5 Lingkaran berpusat di P (a,b)	184
Gambar 11.6 Kedudukan garis terhadap Lingkaran	187
Gambar 11. 7 peramaan garis g yang melali titik $T(x_1, y_1)$, Lingkaran berpusat di O (0,0).....	190
Gambar 11. 8 peramaan garis g yang melali titik $A(x_1, y_1)$, Lingkaran berpusat di P (a,b)	191

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Persamaan, Fungsi, dan Pertidaksamaan Kuadrat.....	31
Tabel 6.1 Bentuk umum tabel model program linear.....	85
Tabel 6.2 Nilai Optimal	92
Tabel 11.1 tabel percobaan.....	179

BAB I

BENTUK PANGKAT, AKAR DAN LOGARITMA

Oleh Nasruddin

1.1 Bentuk Pangkat

1.1.1 Definisi bentuk pangkat

Bentuk pangkat adalah bentuk perkalian berulang dari suatu bilangan tetap dengan dirinya sendiri. Beberapa ahli matematika mengatakan bahwa perpangkatan adalah sebuah bentuk operasi dalam ilmu matematika yang boleh digunakan apabila sebuah bilangan dikalikan dengan bilangan yang sama lebih dari satu kali. Bilangan pokok yang dikalikan berulang tersebut biasanya disebut sebagai 'basis' sedangkan banyaknya bilangan pokok yang digunakan dalam perkalian berulang tersebut biasanya disebut dengan 'pangkat' atau 'eksponen'. Sebagai contoh, 100.000.000,- dapat ditulis dengan notasi pangkat dengan 10^8 . Simbol atau lambang pangkat dapat menghemat tempat, sehingga notasi pangkat banyak digunakan dalam perumusan dan penyederhanakan perhitungan baik dalam matematika maupun dalam kehidupan.

1.1.2 Pangkat bulat positif

Interpretasi perkalian yang berulang dari suatu bilangan tetap dapat dinyatakan dalam bentuk bilangan berpangkat bilangan bulat positif.

Contoh 1.1:

$$3 = 3^1$$

$$3 \times 3 = 3^2$$

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$$

Bentuk 3^6 dibaca “tiga pangkat enam” atau “tiga berpangkat enam”. Selanjutnya, 3^6 dikenal sebagai bilangan bulat positif. Untuk keadaan ini, angka 3 disebut dengan bilangan dasar atau bilangan pokok sedangkan angka 6 disebut dengan pangkat atau sering juga disebut sebagai eksponen. Sebagai aturan umum, tipe dapat dikomposisikan sebagai berikut:

Jika p bilangan real atau $p \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka

$$p^n = p \times p \times p \times \dots \times p$$

Di mana p dikenal sebagai bilangan dasar atau bilangan pokok sedangkan n dikenal sebagai pangkat atau derajat

Contoh 1.2:

$$1. \quad 4^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$2. \quad 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$3. \quad (3^2) \times (4^3) = (3 \times 3) \times (4 \times 4 \times 4) = 576$$

$$4. \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

Contoh 1.3

Tentukan nilai kondisi berikut untuk nilai variabel yang telah diberikan.

$$1) \quad p^2 + 3, \text{ untuk } p=5$$

$$(5^2) + 3 = 25 + 3 = 28$$

$$2) \quad p^3 + 2p^2 + 3p + 5 \text{ untuk } p=3$$

$$(3)^3 + 2(3^2) + 3(3) + 5 = 27 + 18 + 9 + 5 = 59$$

$$3) \quad 3p^3 + 2p^2 q + 3pq^2 + 4q^3 + 9 \text{ untuk } p = -1 \text{ dan } q = 2$$

$$3(-1^3) + 2(-1^2)(2) + 3(-1)(2^2) + 4(2^3) + 9 = -3 + 4 - 12 + 32 + 9 = 30$$

1.1.2 Sifat-sifat pangkat bulat positif

Pada bilangan berpangkat bulat positif dapat dilakukan beberapa operasi aljabar seperti: operasi perkalian, operasi pemangkatan, dan operasi pembagian untuk bilangan berpangkat bulat positif. Perhatikan teorema-teorema untuk bentuk perkalian, pemangkatan, dan pembagian dari bilangan berpangkat bulat positif berikut: Pada bilangan bulat tertentu, beberapa operasi logaritma dapat dilakukan, misalnya tugas menambah, tugas perkalian, dan tugas pembagian untuk bilangan positif. Perhatikan tentang hipotesis untuk jenis perkalian, pemangkatan, dan pembagian bilangan positif yang disajikan berikut:

- a. Jika p bilangan real, k dan l adalah bilangan bulat positif maka

$$p^k \cdot p^l = p^{k+l}$$

- b. Jika $p \in \mathbb{R}$ dan $p \neq 0$, k dan l bilangan bulat positif maka

$$p^k : p^l = \frac{p^k}{p^l} = \begin{cases} p^{k-l} & ; \text{jika } k > l \\ 1 & ; \text{jika } l > k \\ \frac{1}{p^{l-k}} & ; \text{jika } l > k \\ 1 & ; \text{jika } k = l \end{cases}$$

- c. Jika p bilangan real, k dan l bilangan bulat positif maka

$$(p^q)^l = p^{q \cdot l} = p^{kl}$$

- d. Jika k dan l bilangan real, q bilangan bulat maka

$$(pq)^k = p^k q^k$$

Contoh 1.4

Sederhanakan :

1. $p^4 \cdot p^5 = p^{4+5} = p^9$
2. $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$

$$3. (2p^2q)(-3p^4q^3) = 2(-3)p^{2+4}q^{1+3} = -6p^6q^4$$

Contoh 1.5

1. Tentukan bentuk sederhana dari $(2p^3) \times p^2$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}(2p^3) \times p^2 &= 2(p^{3+2}) \\ &= 2p^5\end{aligned}$$

2. Kalikanlah $(2p^2q + 3pq^2)$ dengan $-4p^3q^2$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}(2p^2q + 3pq^2)(-4p^3q^2) \\ &= 2(-4)p^{2+3}q^{1+2} + 3(-4)p^{1+3}q^{2+2} \\ &= -8p^5q^3 - 12p^4q^4\end{aligned}$$

1.1.3 Pangkat bulat negatif dan nol

Jika pada bentuk perpangkatan secara umumnya, pangkat dari bilangan dasar kurang dari satu dan nol maka akan diperoleh pangkat bilangan bulat negatif dan nol. Jika pada contoh bentuk perpangkatan keseluruhan, bilangan dasar yang kurang dari satu dan nol, maka akan diperoleh bilangan negatif dan nol. Bilangan berpangkat bulat negatif biasa juga disebut sebagai bilangan berpangkat tak sebenarnya. Misalkan, bilangan berpangkat negatif, pangkat nol dan pangkat pecahan.

Contoh 1.6

5^{-1} ; 5^{-2} ; 5^{-3} ; 5^{-4} ; 5^{-5} ; 5^{-6} ; dan 5^0

p^{-1} ; p^{-2} ; p^{-3} ; p^{-4} ; p^{-5} ; p^{-6} ;...; p^{-n} ; dan p^0

Untuk mengkarakterisasi p^n dengan p bilangan asli dan n bilangan negatif dan nol, kita dapat menggunakan teorema perpangkatan pada bilangan bulat tertentu, misalnya:

$\frac{p^n}{p^n} = 1$ Jika teorema $\frac{p^k}{p^l} = p^{k-l}$ digunakan maka akan diperoleh

$\frac{p^n}{p^n} = p^{n-n} = p^0 = 1$ dan untuk $l = k + n$ maka diperoleh

$$\frac{p^k}{p^l} = \frac{p^k}{p^{k+l}} = p^{k-(k+n)} = p^{-n}$$

Dari hal tersebut, dibentuk teorema berikut:

Jika $p \neq 0$, p bilangan real dan n bilangan bulat positif maka

$$p^{-n} = \frac{1}{p^n} \text{ dan } p^0 = 1$$

Contoh 1.7

Tentukan bilangan berikut dalam bentuk pangkat positif

a. $p^2 = \frac{1}{p^2}$

b. $3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

c. $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4}$

1.1.4 Pangkat pecahan

Bilangan real p yang memenuhi persamaan $p^n = q$, disebut akar pangkat n dari q dan ditulis dengan $p = \sqrt[n]{q}$. Akar pangkat n dari q atau $\sqrt[n]{q}$ dapat juga ditulis sebagai bilangan berpangkat pecahan yaitu $q^{\frac{1}{n}}$. Demikian juga sebaliknya, bilangan berpangkat pecahan yaitu $q^{\frac{1}{n}}$ dapat ditulis sebagai akar pangkat n dari q atau $\sqrt[n]{q}$. Dapat kita simpulkan bahwa $q^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{q}$. Selain itu, jika q bukan pangkat n dari suatu bilangan rasional maka kepastian $\sqrt[n]{q}$ hasilnya adalah bilangan irasional.

Dengan asumsi bahwa m dan n adalah bilangan asli dengan $n \neq 1$ dan p adalah bilangan asli non-negatif, maka dapat disusun sebagai berikut:

$$p^{\frac{m}{n}} = (p^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p^m}$$

dan

$$p^{\frac{m}{n}} = \left(p^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{p})^m$$

Contoh 1.8

1. $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$
2. $9^{\frac{7}{2}} = \sqrt{9^7}$

Adapun sifat pangkat pecahan adalah sebagai berikut:

- a. Jika p adalah bilangan asli, k dan l adalah bilangan rasional berlaku:

$$p^k \cdot p^l = p^{k+l}$$

- b. Jika p adalah bilangan asli, k dan l adalah bilangan rasional berlaku:

$$p^k : p^l = p^{k-l}$$

- c. Jika p adalah bilangan asli, k dan l adalah bilangan rasional berlaku:

$$(p^k)^l = p^{kl}$$

- d. Jika p adalah bilangan asli, $p \neq 0$ dan k adalah bilangan rasional berlaku:

$$p^{-k} = \frac{1}{p^k}$$

- e. Jika p dan q adalah bilangan asli, k , l , dan m adalah bilangan rasional berlaku:

$$(p^k \cdot q^l)^m = (p^k)^m (q^l)^m = p^{km} \cdot q^{lm}$$

- f. Jika p dan q adalah bilangan asli, k , l , dan m adalah bilangan rasional berlaku:

$$\left(\frac{p^k}{q^l}\right)^m = \frac{p^{km}}{q^{lm}}$$

1.2 Bentuk Akar

1.2.1 Definisi bentuk akar

Pada suatu bilangan berbentuk akar (radikal), ada beberapa hal yang perlu kita pahami diantaranya **lambang akar** itu sendiri, **radikan**, dan **indeks**. Misalnya dalam bentuk $\sqrt[n]{p}$, bentuk ini dibaca dengan “akar pangkat n dari p ”. Ini berarti a sebagai radikan dan n sebagai indeks dimana p adalah bilangan asli positif dan n adalah bilangan karakteristik (dengan $n \geq 2$).

1.2.2 Notasi bentuk akar

Tanda "akar" diwakili oleh " $\sqrt{}$ " sebagai akar atau $\sqrt{}$ berarti akar kuadrat yang merupakan kebalikan dari kuadrat atau kuadrat dari suatu bilangan. Setiap pernyataan yang disusun dengan tanda akar dikenal sebagai bentuk akar.

Contoh 1.9

1. Sebab $3^2 = 9$ maka $\sqrt{9} = 3$
2. Sebab $9^2 = 81$ maka $\sqrt{81} = 9$
3. Sebab $12^2 = 144$ maka $\sqrt{144} = 12$
4. Sebab $15^2 = 225$ maka $\sqrt{225} = 15$

1.2.3 Operasi aljabar bentuk akar

Pada bentuk akar, operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dapat juga dilakukan terhadap seperti aturan secara umum. Operasi tersebut digunakan untuk merasionalkan penyebut yang dinyatakan dalam bentuk akar.

Pada bentuk akar, operasi aritmatika seperti penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian juga dapat dilakukan dengan pedoman dasar. Kegiatan ini

digunakan untuk memaafkan penyebut yang dinyatakan sebagai bentuk akar.

Adapun operasi-operasi aljabar tersebut adalah sebagai berikut:

- a. $p\sqrt{x} + q\sqrt{x} = (p + q)\sqrt{x}$
- b. $p\sqrt{x} - q\sqrt{x} = (p - q)\sqrt{x}$
- c. $\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{pq}$
- d. $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} = \sqrt{pp} = \sqrt{p^2} = p^{\frac{2}{2}} = p$
- e. $\sqrt{p} : \sqrt{q} = \sqrt{\frac{p}{q}}$
- f. $\frac{\sqrt{p}\sqrt{q}}{\sqrt{r}\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{rs}}$

Contoh 1.10

Sederhanakanlah persamaan berikut.

1. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 + 4)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
2. $\sqrt{8} + \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (2 + 4)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
3. $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{32 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$
4. $\sqrt{32} : \sqrt{8} = \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{4} = 2$
5. $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{25} = 5$

1.2.4 Merasionalkan pecahan bentuk akar

Jika suatu bagian memiliki akar penyebut, kita dapat mengerjakan bentuknya dengan cara merasionalkan bentuk akar pada penyebut bagian tersebut. Untuk merasionalkan pecahan bentuk akar, itu cenderung diselesaikan dengan menduplikasi pembilang dan penyebut dengan jenis bentuk akar yang ada pada bilangan tersebut. Berikut akan diberikan

formula atau bentuk dari rumus-rumus untuk menyederhanakan pecahan yang mengandung bentuk akar:

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{p}{\sqrt{q}} &= \frac{p}{\sqrt{q}} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = \frac{p\sqrt{q}}{q} \\ \text{b. } \frac{p}{q+\sqrt{r}} &= \frac{p}{q+\sqrt{r}} \cdot \frac{q-\sqrt{r}}{q-\sqrt{r}} = \frac{p(q-\sqrt{r})}{q^2-r} \\ \text{c. } \frac{p}{q-\sqrt{r}} &= \frac{p}{q-\sqrt{r}} \cdot \frac{q+\sqrt{r}}{q+\sqrt{r}} = \frac{p(q+\sqrt{r})}{q^2+r} \\ \text{d. } \frac{p}{\sqrt{q}+\sqrt{r}} &= \frac{p}{\sqrt{q}+\sqrt{r}} \cdot \frac{\sqrt{q}-\sqrt{r}}{\sqrt{q}-\sqrt{r}} = \frac{p(\sqrt{q}-\sqrt{r})}{q-r} \\ \text{e. } \frac{p}{\sqrt{q}-\sqrt{r}} &= \frac{p}{\sqrt{q}-\sqrt{r}} \cdot \frac{\sqrt{q}+\sqrt{r}}{\sqrt{q}+\sqrt{r}} = \frac{p(\sqrt{q}+\sqrt{r})}{q-r} \end{aligned}$$

Contoh 1.11

Rasionalkanlah penyebut pecahan bentuk akar berikut ini:

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{2}{\sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 2. \quad \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3} = \frac{7-4\sqrt{3}}{1} = 7-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

1.3 Bentuk Logaritma

1.3.1 Definisi

Logaritma merupakan invers atau kebalikan dari eksponen atau perpangkatan. Misalnya $3^2 = 9$ dapat ditulis dengan ${}^3\log 9 = 2$; $3^{-1} = \frac{1}{3}$ dapat ditulis dengan ${}^3\log \frac{1}{3} = -1$.

Dengan demikian bentuk logaritma secara umum ditulis :

Jika $a^n = b$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ maka ${}^a\log b = p$

Pengertian dari penulisan ${}^a\log b$, a disebut bilangan pokok logaritma. Nilai a harus positif dan $\neq 1$. Jika bilangan pokok bernilai 10, maka bilangan pokok 10 ini biasanya tidak ditulis. Misalkan ${}^{10}\log b = \log b$. Jika bilangan pokoknya e atau bilangan euler dimana $e = 2,718281828$ maka nilai logaritma

dinyatakan dengan $\ln$ yaitu singkatan dari logaritma natural.
Misal : ${}^e\log b = \ln b$

Contoh 1.12

1. Jika $2^3 = 8$ maka ${}^2\log 8 = 3$
2. Jika $3^{-2} = \frac{1}{9}$ maka ${}^3\log \frac{1}{9} = -2$
3. Jika $10^4 = 10.000$ maka $\log 10.000 = 4$
4. Jika $10^{-2} = 0,01$ maka $\log 0,01 = -2$

1.3.2 Sifat-sifat Logaritma

Beberapa sifat logaritma adalah digunakan untuk menyederhanakan bentuk pernyataan dalam logaritma dan dapat juga digunakan untuk membantu dalam menentukan nilai logaritma tersebut.

Adapun sifat-sifat dari bentuk logaritma akan diberikan sebagai berikut.

a. Logaritma dari perkalian

$${}^a\log MN = {}^a\log M + {}^a\log N, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0 \text{ dan } N > 0$$

Contoh 1.13

$$1) \log 20 + \log 5 = \log (20 \cdot 5) = \log 100 = 2$$

b. Logaritma dari pembagian

$${}^a\log \frac{M}{N} = {}^a\log M - {}^a\log N, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0 \text{ dan } N > 0$$

Contoh 1.14

$$1) {}^2\log 48 - {}^2\log 3 = {}^2\log (48/3) = {}^2\log 16 = 4$$

c. Logaritma dari perpangkatan

$${}^a\log M^p = p {}^a\log M, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0$$

Contoh 1.15

$$1) {}^2\log 27 = {}^2\log 3^3 = 3 {}^2\log 3$$

d. Mengubah basis logaritma

$${}^M\log N = \frac{{}^a\log N}{{}^a\log M}, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0 \text{ dan } N > 0$$

Contoh 1.16

$$1) {}^3\log 5 = \frac{{}^2\log 5}{{}^2\log 3}$$

2) Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$ maka tentukan ${}^2\log 3!$

$${}^2\log 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,4771}{0,3010} = 1,5850$$

e. Perpangkatan dengan logaritma

$$a^{{}^a\log M} = M, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0$$

Contoh 1.17

$$1) 2^{2\log 3} = 3$$

$$2) 8^{2\log 3} = (2^3)^{2\log 3} = 2^{2\log 3^3} = 3^3 = 27$$

1.3.3 Manfaat Logaritma dalam kehidupan sehari-hari

Salah satu manfaat logaritma adalah sering kita jumpai dalam menyelesaikan atau memecahkan suatu persamaan yang pangkatnya tidak diketahui. Selain dalam bidang matematika, manfaat logaritma sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya adalah dalam bidang sains dan teknologi. Misalnya, logaritma dalam penerapannya pada *Seismograf*, yakni dapat menghitung besarnya gempa Bumi yang terjadi pada suatu daerah.

Bentuk logaritma dapat juga digunakan dalam bidang listrik. Energy listrik yang disalurkan melalui alat pembangkit listrik dikirim dengan cara mengubah-ubah proporsi *voltase* (tegangan listrik) dan ampere. *Voltase* yang rendah dapat menghantarkan arus yang kuat dan *voltase* yang tinggi dapat menghantarkan arus yang lemah (Anggraeni, 2012). Jika hal

tersebut diubah kedalam bentuk matematika, akan dinyatakan dalam formula sebagai berikut:

$$V = V_0 e^{-kt}$$

Jika persamaan diatas dinyatakan dalam bentuk t (waktu), maka akan diperoleh rumus:

$$t = \frac{\log V_0 - \log V}{k \log e}$$

Dengan:

V = tegangan listrik

V_0 = tegangan awal

t = waktu (detik)

k = konstan

Secara umum, hampir kita tidak dapat menemukan aktifitas keseharian kita yang bersentuhan langsung dengan logaritma secara langsung, namun kita dapan merasakan manfaat dari penerapan logaritma tersebut dalam kehidupan kita secara tidak langsung. Hal ini memberikan makna bahwa logaritma terlalu rumit untuk diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, namun logaritma dapat digunakan para ahli matematika atau para periset khususnya dalam bidang sains dan teknologi untuk menyederhanakan bilangan berpangkat yang sangat banyak.

DAFTAR PUSTAKA

- Anggraeni, N. 2012. *Kegunaan Logaritma*, (online), <http://ninadanggraeni.wordpress.com/2012/01/09/kegunaan-logaritma/>, diakses Juli 2022.
- Hanafi Lukman,dkk. 2015. Matematika SMP/MTs Kelas IX. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia.
- Nur Hamim. 2011. Bahan Ajar PLPG/Pengawas dalam Jabatan 2011. Surabaya: LPTK Fakultas Tarbiyah IAIN Sunan Ampel.
- Sinaga Bornok, dkk. 2014. Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas X. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Sukismo. 2013. Erlangga Fokus UN SMP/MTs 2013. Jakarta: Erlangga.
- Sunardi. 2020. Buku Ajar Matematika SMP/MTs Kelas IX. Klaten: Sekawan Klaten.
- Tim Pengembang MKDP. 2011. Kurikulum dan Pembelajaran. Jakarta: Rajawali Pers.

BAB II

FUNGSI, PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LOGARITMA

Oleh Lulut Alfaris

2.1 Definisi

Logaritma fungsi invers dari eksponensiasi. Logaritma x merupakan eksponen bilangan pokok b yang dipangkatkan dengan bilangan untuk memperoleh nilai x . Contoh kasusnya ialah menghitung jumlah faktor yang sama perkalian berulang, seperti $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ dibaca, "logaritma 1000 dengan bilangan pokok 10 sama dengan 3" atau dinotasikan dengan ${}^{10}\log(1000) = 3$. Logaritma x dengan *bilangan pokok* b dilambangkan ${}^b\log x$. Terdapat juga logaritma yang dilambangkan sebagai $\log_b(x)$ atau $\log_b x$.

Definisi logaritma sebagai berikut:

- Bilangan ***a*** = basis atau bilangan pokok
- Bilangan ***b*** = numerus atau domain logaritma.
- Bilangan ***c*** = range atau hasil logaritma.

Misalkan $a \neq 1$ dan $a > 1$.

$${}^a\log b = c$$

jika dan hanya jika

$$a^c = b$$

bentuk notasi lain logaritma

$$\log_a b = c$$

Contoh Soal 1

Nilai logaritma $\log_2 16 = 4$ karena $2^4 = 16$ dan nilai logaritma $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ karena $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Untuk sebarang nilai basis a berlaku

$$\log_a a = 1$$

$$\log 1 = 0$$

Karena $a^1 = a$ dan $a^0 = 1$

2.2 Kegunaan Logaritma

Penerapan logaritma bisa ditemukan dalam lingkup matematika maupun juga bisa ditemuan diluar matematika. Dalam matematika diterapkan dalam skala logaritmik, selain itu juga diterapkan dibidang yang lain yaitu dalam ilmu psikologi terutama dalam hukum Hick, yang menjelaskan adanya hubungan antara waktu dalam pengambilan keputusan dan jumlah keputusan (Goldstein, 2009).

Selain itu juga terdapat penerapan logaritma dalam ilmu statistik, ilmu komputer, termodinamika dan masih banyak lagi penerapannya dalam kehidupan (Alfaris, 2022).

Terdapat banyak besaran yang dinotasikan dengan logaritma.

- Negatif dari logaritma berbasis 10 untuk menjelaskan pH. Contohnya, konsentrasi ion hidronium pada air ialah 10^{-7} pada suhu 25°C , maka pH-nya 7.
- Satuan *bel* (dengan simbol B) merupakan satuan pengukur perbandingan (rasio), yang digunakan dibidang telekomunikasi, akustik dan elektronik, karena telinga mempersepsikan suara terdengar secara logaritmik. Satuan desibel (dB), yang sama dengan 0.1 bel.
- Skala Richter untuk mengukur intensitas gempa bumi dengan skala logaritma berbasis 10.
- Ilmu astronomi, magnitudo untuk mengukur terang suatu bintang dengan skala logaritmik.

2.3 Sifat-Sifat Logaritma

Terdapat suatu sifat-sifat yang ada pada logaritma, sifat ini diturunkan dari definisi dari logaritma itu sendiri yang menunjukkan logaritma daari operasi suatu bilangan.

1. Sifat Penjumlahan

$${}^a\log p \cdot q = {}^a\log p + {}^a\log q$$

syarat $a > 0, a \neq 1, p > 0, q > 0$.

2. Sifat Perkalian

$${}^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$$

syarat $a > 0$,

3. Sifat Pembagian

$${}^a\log \frac{p}{q} = {}^a\log p - {}^a\log q$$

syarat $a > 0, a \neq 1, p > 0, q > 0$.

4. Sifat Logaritma dari perpangkatan

Logaritma yang nilai numerus-nya merupakan suatu eksponen dapat dijadikan logaritma baru dengan mengeluarkan pangkat menjadi pengali.

$${}^a\log b^p = p \cdot {}^a\log b$$

syarat $a > 0, a \neq 1, b > 0$

2.4 Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma terdapat domain dan range. Pengertian logaritma berasal dari operasi pangkat sehingga fungsi logaritma sama definisinya dengan definisi logaritma tersebut. Apabila fungsi eksponen ditulis dengan $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$, maka invers dari $f(x)$ ditulis dengan $f^{-1}(x) = {}^a\log x$ atau $f(x) = {}^a\log x, a > 0, a \neq 1$.

2.5 Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma ialah persamaan yang peubahnya terdapat dalam bilangan pokok.

Contoh :

$$\log (3x - 1) = \log (x - 15) ,$$

Berbagai jenis bentuk persamaan logaritma :

1. ${}^a\log f(x) = {}^a\log p^{f(x)} \log a = g(x) \log a$
2. ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x) \quad {}^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$
3. ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x) \quad A.(a \log x)^2 + B(a \log x) + C = 0$
4. $f(x) \log g(x) = p$ untuk $A \neq 0$

Cara menyelesaikan persamaan logaritma, yang pertama ialah menyamakan bilangan pokok logaritma. Nilai penyelesaian disubstitusikan ke persamaan semula.

2.6 Pertidaksamaan Logaritma

Pertidaksamaan logaritma ialah pertidaksamaan yang terdiri dari suatu bentuk logaritma yang berbentuk notasi $>$, $\geq$, $<$, $\leq$.

Contoh bentuk pertidaksamaan logaritma :

$${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$$

Sehingga cara penyelesaian pertidaksamaan logaritma sebagai berikut, menentukan akar-akarnya, menentukan garis bilangan dan tandanya.

2.6.1 Konsep Pertidaksamaan Logaritma

Untuk $a > 1$, tanda ketidaksamaan tetap

$${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x) \text{ maka } f(x) > g(x)$$

$${}^a\log f(x) \geq {}^a\log g(x) \text{ maka } f(x) \geq g(x)$$

$${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x) \text{ maka } f(x) < g(x)$$

$${}^a\log f(x) \leq {}^a\log g(x) \text{ maka } f(x) \leq g(x)$$

Untuk $a > 1$, tanda ketidaksamaan menjadi berubah

$${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x) \text{ maka } f(x) < g(x)$$

$${}^a\log f(x) \geq {}^a\log g(x) \text{ maka } f(x) \leq g(x)$$

$${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x) \text{ maka } f(x) > g(x)$$

$${}^a\log f(x) \leq {}^a\log g(x) \text{ maka } f(x) \geq g(x)$$

Contoh

Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan ${}^2\log (x+2) > 5$ ialah Penyelesaiannya :

Nilai basis $a = 2$

$${}^2\log (x+2) > 3$$

$${}^2\log (x+2) > {}^2\log 2^3$$

$${}^2\log (x+2) > {}^2\log 8$$

Basisnya $a = 2 > 1$

$$(x+2) > 8$$

$$x > 6$$

Himpunan Penyelesaian 1 = $\{x > 6\}$

Syarat logaritma

$$(x+2) > 0$$

$$x > -2$$

Himpunan Penyelesaian 2 = $\{x > -2\}$

$$HP = HP1 \cap HP2 = \{x > 6\}$$

Sehingga solusinya $HP = \{x > 6\}$

DAFTAR PUSTAKA

- Alfaris, L. 2022. Epistemologi Matematika dan Pendidikan Matematika. Dalam Ariyanto (Ed.), Filsafat Pendidikan Matematika (pp. 123-132). Padang: GET Press.
- Goldstein, E. Bruce. 2009. Encyclopedia of Perception. Encyclopedia of Perception, Thousand Oaks, CA: Sage.

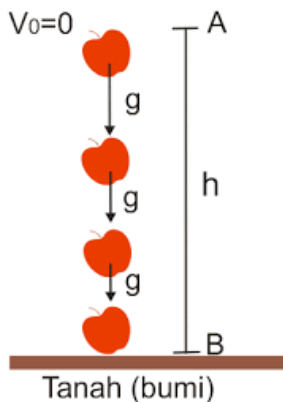
BAB III

PERSAMAAN, FUNGSI, DAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Oleh Agung Prasetyo

3.1 Persamaan Kuadrat

Pernahkah anda memperhatikan secara jeli mengenai sebuah apel yang jatuh dari pohon? Coba perhatikan gambar 1.



Gambar 3.1 Apel jatuh bergerak ke bawah

(<https://www.pelajaran.co.id/penjelasanrumus-dan-contoh-gerak-jatuh-bebas-terlengkap/>)

Ketika apel jatuh maka ia akan bergerak menuju bumi (tanah), menurut ilmu fisika apel akan berada pada ketinggian (h) yang relatif terhadap waktu (t). Secara matematis dapat dinyatakan sebagai $h(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, di mana v_0 merupakan kecepatan awal apel tersebut, dan g adalah percepatan gaya

gravitasi, sehingga keduanya merupakan suatu bilangan tertentu. Dengan kata lain, bila diketahui kecepatan awal dan percepatan gravitasi maka ketinggian apel tersebut dapat diketahui sepanjang waktu. Selanjutnya, apabila ketinggiannya diketahui apakah kita dapat menentukan secara persis kapan waktunya? Untuk itu, coba misalkan $v_0 = 0 \text{ m/s}$, $g = -9,8 \text{ m/s}^2$, dan $h = 12 \text{ m}$, maka diperoleh persamaan $-\frac{9,8}{2}t^2 = 12$, persamaan seperti ini disebut sebagai persamaan kuadrat dalam variabel waktu (t). Selanjutnya, kita akan mengulas lebih lanjut mengenai persamaan kuadrat agar dapat menentukan waktu tersebut.

Persamaan kuadrat dalam variabel tertentu, misalkan x , dinyatakan sebagai $ax^2 + bx + c = 0$, di mana $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\wedge$ $a \neq 0$. Dalam hal ini, a disebut sebagai koefisien x^2 , b disebut sebagai koefisien x , dan c disebut sebagai konstanta. Setelah mengetahui definisi tersebut, coba selidiki apakah ekspresi berikut persamaan kuadrat atau bukan.

a. $x^2 + 3x + 3 = 3y$

b. $h^2 + 2 = 2h$

Selanjutnya, bagaimana caranya menentukan solusi dari suatu persamaan kuadrat? Dengan kata lain, kapan waktu yang diperlukan agar $-\frac{9,8}{2}t^2 = 12$ dipenuhi? Kita dapat menentukan solusi persamaannya, kelak disebut akar persamaan, melalui tiga cara yaitu: pemfaktoran, melengkapi kuadrat sempurna, dan rumus ABC.

a) Pemfaktoran

Suatu persamaan kuadrat dapat dinyatakan sebagai perkalian dua faktor sedemikian hingga ruas kanannya bernilai nol. Apabila ada persamaan $x^2 + 3x + 2 = 0$ maka dapat dinyatakan sebagai $(x + 1)(x + 2) = 0$.

Kemudian, misalkan ada persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ maka kita dapat menyatakannya sebagai perkalian dua faktor yaitu $(px + d)(qx + e) = 0$. Tugas kita adalah mencari nilai d, e, p, q yang 'cocok', meskipun prosedur ini tidak mudah, tetapi intuisi sedikit banyak akan membantu. Agar lebih memahami prosedur tersebut, silakan coba memfaktorkan $x^2 + 2x + 4 = 3$.

b) Melengkapkan kuadrat sempurna

Berapakah nilai dari x yang memenuhi persamaan kuadrat $(x - 1)^2 = 0$? Tentu kita dapat mengerjakannya dengan mengingat sifat nilai mutlak yaitu $\sqrt{x^2} = |x|$ sehingga $|x - 1| = 0$ akibatnya diperoleh $x = 1$, mudah kan menentukan solusinya? Hal ini memberikan pandangan bahwa kita dapat menentukan akar persamaan dengan lebih mudah apabila kita mampu mengubahnya dalam bentuk kuadrat sempurna. Perhatikan contoh berikut,

$$4x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (2x + 1)^2 + 3 = 0$$

$$\rightarrow (2x + 1)^2 = -3$$

Pada contoh tersebut, fokus utamanya adalah memperhatikan koefisien x^2 selanjutnya memperhatikan konsekuensinya dan mengurangi atau menjumlahkan dengan 'sesuatu' agar tidak mengubah persamaan awalnya. Coba nyatakan ke dalam bentuk kuadrat sempurna persamaan $2x^2 + x + 3 = 0$. Coba selidiki apakah semua persamaan kuadrat dapat dinyatakan sebagai bentuk kuadrat sempurna?

c) Rumus ABC

Rumus ABC merupakan salah satu rumus yang sangat familiar bagi anak sekolah. Seringkali rumus ini digunakan dalam menyelesaikan persamaan kuadrat

yang 'gagal' diselesaikan dengan prosedur-prosedur sebelumnya. Persisnya, apabila diberikan persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ maka akar-akar dari persamaan tersebut adalah $x_{1,2} = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}$. Berdasarkan rumus tersebut, kapan sebuah persamaan kuadrat tidak memiliki akar bilangan real? Coba renungkan, apakah kekurangan rumus ABC?

Pada prosedur menentukan akar persamaan kuadrat menggunakan rumus kuadrat, kita memperoleh suatu rumus yang 'cukup rumit'. Nah, apa yang akan terjadi apabila kita menjumlah atau mengalikan kedua akar tersebut?

$$x_1 + x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} + \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \cdot \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Sebuah rumus yang cantik bukan? Lalu apa manfaat yang kita peroleh dari hasil ini? Untuk menjawabnya, selesaikan masalah berikut. Arman memilih dua bilangan asli tertentu, dia menjumlahkan dua bilangan tersebut diperoleh hasil 15 dan mengalikannya mendapatkan hasil 56, berapakah dua bilangan yang dimaksud Arman? Bila anda tertarik, coba buatlah masalah berbeda yang melibatkan rumus cantik tersebut.

Sebelumnya telah diulas mengenai cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat bila persamaannya diberikan, nah apakah kita dapat menyusun persamaan kuadrat bila akar-akarnya diketahui? Persisnya, misalkan diketahui akar-akar persamaan kuadrat yaitu x_1 dan x_2 maka kita dapat menyusun sebuah persamaan kuadrat yaitu $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Selanjutnya, susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya merupakan dua bilangan prima pertama!

3.2 Fungsi Kuadrat

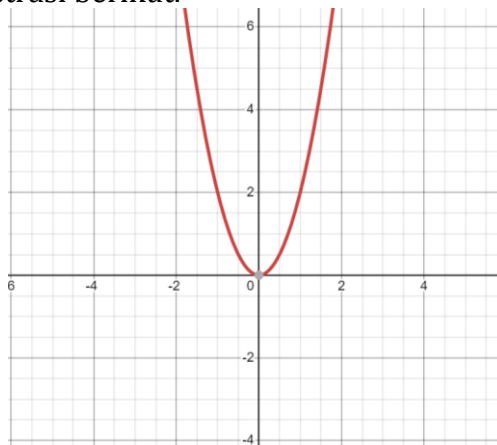
Perhatikan himpunan $A := \{\text{Harimau, Kambing, Ikan}\}$ dan himpunan $B := \{\text{Rusa, Rumput, Kutu air, Meja}\}$, melalui sebuah hubungan “memakan” kita dapat membentuk himpunan pasangan berurutan $C := \{(\text{Harimau, Rusa}), (\text{Kambing, Rumput}), (\text{Ikan, Kutu air})\}$. Hubungan semacam itu disebut dengan “relasi”, adapun aturan pengaitan himpunan A ke himpunan B dengan sebuah ‘relasi tertentu’ disebut sebagai fungsi. Perlu diperhatikan bahwa fungsi bukanlah sebarang relasi, melainkan sebuah relasi khusus. **Fungsi adalah relasi yang memetakan seluruh anggota himpunan A ke tepat satu anggota himpunan B .** Selanjutnya, himpunan A disebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut kodomain (daerah kawan). Perhatikan bahwa dalam contoh di atas, ada anggota B yang tidak mendapat prapeta dari A yaitu meja. Dalam hal ini kita dapat mendefinisikan himpunan yang baru yaitu $D := \{\text{Rusa, Rumput, Kutu Air}\}$, sebagai himpunan yang seluruh anggotanya merupakan peta (bayangan) dari himpunan A . Himpunan D kelak disebut sebagai range (daerah hasil).

Secara matematis, apabila didefinisikan sebuah fungsi tertentu yaitu f yang memetakan himpunan A ke himpunan B , dan sebuah himpunan $I \subseteq A$, maka dapat dikatakan bahwa f terdefinisi pada I . Himpunan A disebut sebagai domain f , himpunan B disebut sebagai kodomain f . Selanjutnya, apabila suatu fungsi f terdefinisi pada I maka peta dari A di bawah f adalah $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$. Apabila $A = I$ maka $f(A)$ disebut sebagai range f . Untuk memeriksa pemahaman anda, coba selidiki apakah relasi berikut merupakan fungsi atau bukan.

1. Relasi “Memakan” yang menghubungkan himpunan hewan berkaki empat ke himpunan tanaman.

2. Relasi “Ibu kota dari” yang menghubungkan himpunan kosong ($\emptyset$) ke himpunan {Jakarta, Kuala Lumpur}

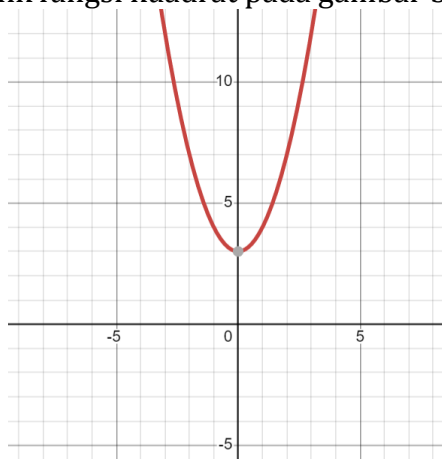
Fungsi di dalam matematika sangatlah beragam, misalnya: fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi polinomial, fungsi rasional dst. Tetapi, fokus kita adalah fungsi kuadrat. Perhatikan bahwa misalkan ada bilangan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dimana $a \neq 0$ maka dapat didefinisikan sebuah fungsi kuadrat yaitu $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dalam hal ini, a disebut sebagai koefisien x^2 , b disebut sebagai koefisien x , dan c disebut sebagai konstanta. Tampak bahwa domain fungsi $f = D_f = \mathbb{R}$, kodomain fungsi $f = K_f = \mathbb{R}$, dan range fungsi $f = R_f = \mathbb{R}$. Dengan kata lain, fungsi f memetakan himpunan bilangan real ($\mathbb{R}$) ke himpunan bilangan real ($\mathbb{R}$) atau secara matematis dapat ditulis sebagai $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sebagai contoh, fungsi $h = 2x^2$ mendefinisikan sebuah fungsi h yang memetakan tiap $x \in \mathbb{R}$ ke tepat satu anggota $h = 2x^2$. Agar lebih mudah memahami coba perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 3.2 Fungsi $y = 2x^2$ (<https://www.desmos.com/>)

Pada gambar 3.2, tampak bahwa apabila dibuat sebarang garis yang sejajar sumbu-y maka akan tepat memotong kurva $y = x^2$ di satu titik, prosedur ini cukup untuk memastikan apakah suatu kurva merupakan fungsi atau bukan. Coba pikirkanlah satu contoh fungsi dan satu contoh bukan fungsi dalam variabel tertentu, serta ujilah klaim anda dengan metode tersebut!

Salah satu contoh fungsi kuadrat adalah $y = x^2$, menariknya fungsi tersebut merupakan salah satu contoh fungsi kuadrat yang memiliki diskriminan negatif. Diskriminan (D) didefinisikan sebagai $D = b^2 - 4ac$. Selanjutnya, coba perhatikan grafik fungsi kuadrat pada gambar 3.



Gambar 3.3 Fungsi $y = x^2 + 3$

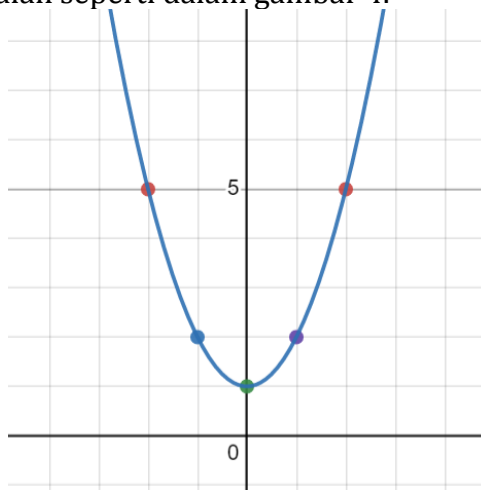
Apa yang menarik dari gambar 3? Ternyata seluruh kurva yang terbentuk berada di atas sumbu-x, fungsi semacam ini disebut sebagai fungsi definit positif. Sebaliknya, apabila seluruh kurvanya berada di bawah sumbu-x maka disebut fungsi definit negatif. Secara matematis, suatu fungsi f berdefinit positif yaitu $\forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) > 0 \leftarrow a > 0 \wedge D < 0$.

Sebaliknya, fungsi f berdefinit negatif yaitu $a < 0 \wedge D < 0 \rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) < 0$. Sebagai contoh, fungsi $y = x^2 + 3$ memiliki $D = (0)^2 - 4.1.3 < 0$ dan $a > 0$ maka fungsi tersebut berdefinit positif.

Bila pada bagian sebelumnya kita dapat melihat secara jelas jenis definit fungsi melalui grafik yang dilukis, selanjutnya kita akan coba lebih mendalami bagaimana cara melukis grafik fungsi kuadrat. Sederhananya, kita dapat melukis sebuah fungsi kuadrat apabila sudah diketahui beberapa koordinat tertentu. Salah satu cara yang 'mudah' dalam melukis grafik fungsi kuadrat adalah dengan cara menuliskan beberapa data di tabel. Sebagai contoh, perhatikan ilustrasi melukis grafik $y = x^2 + 1$ sebagai berikut.

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$f(x)$	...	5	2	1	2	5	...

Berdasarkan tabel tersebut dapat dilukis grafik fungsi kuadrat yang bersesuaian seperti dalam gambar 4.



Gambar 3.4 Grafik fungsi $y = x^2 + 1$

(<https://www.desmos.com/>)

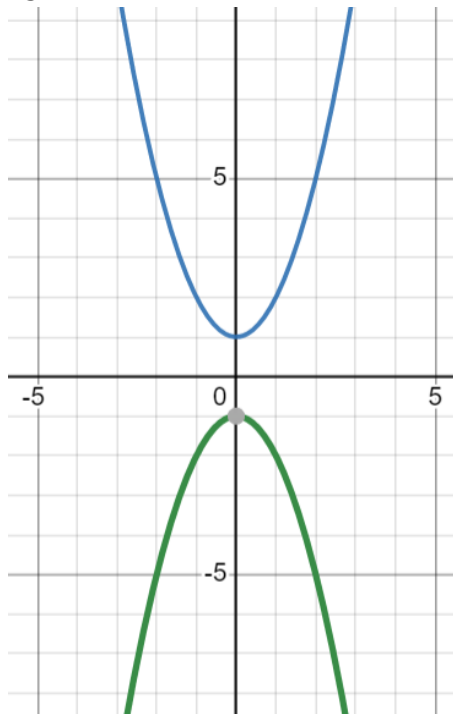
Metode melukis grafik fungsi kuadrat tersebut mungkin terasa mudah, namun untuk grafik tertentu tidak selalu mudah apabila hanya bermodalkan dengan sedikit titik uji. Oleh karena itu, kita akan mencoba melukis grafik fungsi kuadrat dengan memanfaatkan titik-titik penting dari grafik tersebut.

Mudah diperiksa bahwa kurva fungsi kuadrat selalu berbentuk parabola yang terbuka ke atas atau ke bawah. Parabola akan terbuka ke atas apabila koefisien x^2 merupakan bilangan positif, sebaliknya parabola akan terbuka ke bawah apabila koefisiennya bilangan negatif (Renungkan bagaimana bila koefisiennya 0). Selanjutnya, kurva parabola tersebut akan mencapai titik puncak di tengah-tengah kurva tersebut. Akibatnya, apabila diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ maka titik puncaknya merupakan titik yang berada di sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$. Persisnya, bila diskriminannya adalah D maka titik puncaknya berada di koordinat $P = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$, mengapa demikian? Namun, sebagai kesepakatan apabila parabolanya terbuka ke atas maka P disebut sebagai titik balik minimum, dan jika parabolanya terbuka ke bawah maka P disebut sebagai titik puncak maksimum.

Lebih lanjut, grafik fungsi kuadrat akan memotong sumbu- x di satu titik bila $D = 0$, tidak memotong sumbu- x bila $D < 0$, dan memotong sumbu- x di dua titik bila $D > 0$. Lalu bagaimana cara menentukan koordinat titik potongnya dengan sumbu- x ? Coba substitusikan secara bergantian $x = 0$ dan $y = 0$ untuk memperoleh koordinat $(0, y_1)$ dan $(x_1, 0)$, titik (x_1, y_1) disebut sebagai titik potong fungsi kuadrat dengan sumbu- x . Selanjutnya, sebagai latihan, coba carilah sumbu simetri, koordinat P , banyak titik potong dengan sumbu- x , dan arah

terbuka parabola untuk melukis grafik fungsi $y = x^2 + 1$. Menurut kamu, lebih mudah mana metode ini dibandingkan dengan metode sebelumnya? Mengapa demikian?

Setelah berhasil melukis grafik fungsi kuadrat, maka salah satu yang menarik perhatian adalah perilaku dari grafik fungsi tersebut. Apa yang akan terjadi apabila sebuah grafik fungsi kuadrat dicerminkan terhadap sumbu-x? Untuk itu, coba perhatikan gambar 5.



Gambar 3.5 Hasil pencerminan fungsi kuadrat
(<https://www.desmos.com/>)

Grafik berwarna biru merupakan grafik dari fungsi $y = x^2 + 1$ sedangkan grafik berwarna hijau adalah hasil pencerminan grafik berwarna biru dengan sumbu-x yang memiliki rumus

fungsi yaitu $y = -x^2 - 1 = -(x^2 + 1)$. Secara umum, bila diberikan sebuah fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ maka hasil pencerminannya terhadap sumbu- x adalah $g(x) = -f(x)$. Untuk menguji pemahamanmu, coba lukislah grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 5$ dan cerminkan terhadap sumbu- x . Selanjutnya, coba cerminkan terhadap sumbu- y , fungsi apa yang kamu peroleh?

3.3 Pertidaksamaan Kuadrat

Dalam bagian persamaan kuadrat telah dikenal ekspresi $ax^2 + bx + c = 0$. Sesuai dengan sifat trikotomi, maka masih ada dua tanda lagi yang mungkin menghubungkan antara ruas kiri dan ruas kanan yaitu $<$ dan $>$. Persisnya apabila ada fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ maka dapat diperoleh pertidaksamaan kuadrat sebanyak 4 macam yaitu:

1. $ax^2 + bx + c < 0$
2. $ax^2 + bx + c > 0$
3. $ax^2 + bx + c \leq 0$
4. $ax^2 + bx + c \geq 0$

Perhatikan bahwa apabila ruas kanan berisi bilangan tak nol maka tinggal dijumlahkan/dikurangkan sedemikian hingga ruas kanan bernilai 0. Lalu bagaimana cara menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat?

Misal diberikan beberapa fungsi kuadrat dalam variabel x yaitu $f(x), g(x), h(x)$. Jika $f(x) < g(x)$ maka sifat berikut berlaku,

1. $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$
2. Bila $h(x) < 0$ maka $f(x)h(x) > g(x)h(x)$
dan $\frac{f(x)}{h(x)} > \frac{g(x)}{h(x)}$, untuk syarat pembagian $h(x) \neq 0$

3. Bila $h(x) > 0$ maka $f(x)h(x) < g(x)h(x)$
 dan $\frac{f(x)}{h(x)} < \frac{g(x)}{h(x)}$, untuk syarat pembagian $h(x) \neq 0$

Pada bagian sebelumnya, telah dianalisa bahwa fungsi kuadrat maksimal memiliki dua akar berlainan. Serupa dengan itu, apabila pertidaksamaan $px^2 + qx + r < 0$ dapat diubah menjadi $(ax - x_1)(bx - x_2) < 0$ maka kita dapat mengingat sifat bahwa perkalian dua bilangan yang menghasilkan bilangan negatif maka masing-masing faktor haruslah berlainan tanda. Sebaliknya, apabila perkalian dua bilangan menghasilkan bilangan positif maka masing-masing faktor haruslah memiliki tanda yang sama. Dalam hal ini, berarti ada dua kasus yaitu (1) $(ax - x_1) < 0 \wedge (bx - x_2) > 0$, dan (2) $(ax - x_1) > 0 \wedge (bx - x_2) < 0$. Selanjutnya, ilustrasikan dalam garis bilangan dan iriskan serta gabung sehingga diperoleh himpunan penyelesaian yang sesuai. Untuk menguji pemahamanmu, coba carilah seluruh nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $2x^2 + 3x + 3 > 2$.

3.4 Ringkasan

Berdasarkan uraian pada bagian sebelumnya, diperoleh bagian-bagian esensial dari persamaan, fungsi, dan pertidaksamaan kuadrat sebagaimana yang disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 3.1 Persamaan, Fungsi, dan Pertidaksamaan Kuadrat

Nomor	Kategori	Aturan
1	Bentuk umum	$f(x) = ax^2 + bx + c$
2	Sumbu simetri	$x = -\frac{b}{2a}$
3	Titik puncak	$P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

Nomor	Kategori	Aturan
4	Diskriminan	$D = b^2 - 4ac$
5	Titik potong sumbu-x	$D < 0$ tidak memotong, $D = 0$ memotong di satu titik, dan $D > 0$ memotong di dua titik.
6	Persamaan kuadrat	$ax^2 + bx + c = 0$
7	Jumlah akar-akar	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$
8	Hasil kali akar-akar	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
9	Persamaan kuadrat yang akarnya x_1 dan x_2	$(x - x_1)(x - x_2) = 0$
10	Arah terbuka parabola	$a > 0$ terbuka ke atas, dan $a < 0$ terbuka ke bawah

DAFTAR PUSTAKA

- Gunawan, H. 2011. Catatan Kuliah MA 3251 Pengantar Analisis Real. Bandung: Penerbit ITB.
<https://www.desmos.com/> (diakses pada 22 Juli 2022).
- Karso, Murdanu, Sulaiman, R., Sardjana, A., Rajati, T., Tarhadi, dan Yumiati. 2014. Modul 1 Aljabar 1: Materi Kurikuler Matematika SMA. Tangerang: Universitas Terbuka.
- Sinaga, B., M., P. N.J., Sinambela, Sitanggang, A.K., Hutapea, T. A., Sinaga, L.P., Manullang, S., Simanjorang, M., & Terzalgi, Y. 2014. Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas X Semester 2 Edisi Revisi. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

BAB IV

SISTEM PERSAMAAN LINIER

Oleh Ichsan

4.1 Pendahuluan

Sistem Persamaan Linier yang akan dibahas dalam materi ini adalah Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel.

Dua persamaan linier dengan dua variabel x dan y mempunyai bentuk umum:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

dengan penyelesaian secara simultan terpenuhi oleh pasangan terurut (x_0, y_0) disebut sistem persamaan linier dua variabel.

Tiga persamaan linier dengan tiga variabel x , y , dan z mempunyai bentuk umum:

$$ax + by + cz = d$$

$$ex + fy + gz = h$$

$$ix + jy + kz = l$$

dengan penyelesaian secara simultan terpenuhi oleh pasangan terurut (x_0, y_0, z_0) disebut sistem persamaan linier tiga variabel.

Terdapat beberapa cara dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dua dan tiga variabel. Banyaknya variabel menentukan banyak persamaan linier yang akan diselesaikan.

- Untuk menyelesaikan dua persamaan linier harus tersedia dua persamaan linier yang memiliki dua variabel.

- Untuk menyelesaikan tiga persamaan linier harus tersedia tiga persamaan linier yang memiliki tiga variabel.
- Untuk menyelesaikan n persamaan linier harus tersedia n persamaan linier yang memiliki n variabel.

Untuk menyelesaikan soal cerita dengan n variabel, harus mengubah soal cerita yang mengandung n variabel tersebut menjadi persamaan aljabar yang mengandung n persamaan linier dan metode yg digunakan dalam bab ini cocok untuk menyelesaikan persamaan linier tersebut.

Menyetting soal cerita dengan dua variabel.

Contoh 1:

- Berapakah nilai dari sebuah bilangan dua digit apabila ditambahkan hasilnya 20 dan dikurangkan hasilnya 10.
- Misalkan digit pertama x , digit kedua y .
- Jika dijumlahkan hasilnya 20, berarti $x + y = 20$
- Jika dikurangkan hasilnya 10, berarti $x - y = 10$.
- Soal ini dapat diselesaikan dengan metode eliminasi.

Contoh 2:

Misalkan anda seorang ahli kimia, memerlukan 50 liter larutan asam 10%, di laboratorium tersedia larutan asam 8% dan 14%. Berapa liter larutan asam 8% dan 14% yang harus dicampurkan untuk mendapat 50 liter larutan asam 10%.

Jawab:

Misalkan: x = banyaknya larutan asam 8%

y = banyaknya larutan asam 14%

Banyak larutan: $x + y = 50$ liter

larutan asam 10%: $(8\%) (x \text{ liter}) + (14\%) (y \text{ liter}) = (10\%) (50)$

Dua persamaan inilah yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaiannya.

Metode yang dipergunakan dalam menyelesaikan Sistem Persamaan Linier:

- a. Dua Variabel menggunakan:
 - Metode eliminasi;
 - Metode substitusi; dan
 - Metode determinan.
- b. Tiga Variabel menggunakan:
 - Metode eliminasi;
 - Metode substitusi;
 - Metode matrik; dan
 - Metode determinan matrik persegi

4.2 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel

Terdapat beberapa cara dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dua dan tiga variabel. Banyaknya variabel menentukan banyak persamaan linier yang akan diselesaikan.

- Untuk menyelesaikan dua persamaan linier harus tersedia dua persamaan linier yang memiliki dua variabel.
- Untuk menyelesaikan tiga persamaan linier harus tersedia tiga persamaan linier yang memiliki tiga variabel.
- Untuk menyelesaikan n persamaan linier harus tersedia n persamaan linier yang memiliki n variabel.

Untuk menyelesaikan soal cerita dengan n variabel, harus mengubah soal cerita yang mengandung n variabel tersebut menjadi persamaan aljabar yang mengandung n persamaan linier dan metode yg digunakan dalam bab ini cocok untuk menyelesaikan persamaan linier tersebut.

Menyetting soal cerita dengan dua variabel.

Contoh 1:

- Berapakah nilai dari sebuah bilangan dua digit apabila ditambahkan hasilnya 20 dan dikurangkan hasilnya 10.
- Misalkan digit pertama x , digit kedua y .
- Jika dijumlahkan hasilnya 20, berarti $x + y = 20$
- Jika dikurangkan hasilnya 10, berarti $x - y = 10$.
- Soal ini dapat diselesaikan dengan metode eliminasi.

Contoh 2:

Misalkan anda seorang ahli kimia, memerlukan 50 liter larutan asam 10%, di laboratorium tersedia larutan asam 8% dan 14%. Berapa liter larutan asam 8% dan 14% yang harus dicampurkan untuk mendapat 50 liter larutan asam 10%.

Jawab:

Misalkan: x = banyaknya larutan asam 8%

y = banyaknya larutan asam 14%

Banyak larutan: $x + y = 50$ liter

larutan asam 10%: $(8\%) (x \text{ liter}) + (14\%) (y \text{ liter}) = (10\%) (50)$

Dua persamaan inilah yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaiannya.

Metode yang dipergunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier:

a. Dua variabel menggunakan:

- Metode eliminasi;
- Metode substitusi; dan
- Metode determinan.

b. Tiga variabel menggunakan:

- Metode eliminasi;
- Metode substitusi;
- Metode matrik; dan
- Metode determinan matrik persegi

4.3 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dengan Metode Eliminasi

Metode eliminasi adalah metode yang digunakan dengan cara menambahkan kedua persamaan sehingga variabel pertama tereliminasi (hilang), sehingga dapat ditentukan nilai variabel kedua. Selanjutnya nilai variabel pertama dapat dicari dengan mensubstitusi nilai variabel kedua pada persamaan pertama atau kedua.

Langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel menggunakan metode eliminasi adalah:

1. Eliminasi salah satu variabel, sehingga didapat nilai variabel satunya;
2. Jika dua persamaan dijumlahkan tidak ada variabel yang hilang, kalikan nilai variabel pertama pada persamaan pertama dengan nilai variabel pertama pada persamaan kedua, dan sebaliknya. Tambahkan kedua persamaan, jika variabel pertama hilang, maka nilai variabel kedua dapat ditentukan.
3. Selanjutnya substitusi nilai variabel kedua ke persamaan pertama, sehingga diperoleh nilai variabel pertama.
4. Substitusi nilai variabel yang diperoleh pada persamaan pertama, dan selesaikanlah untuk mencari nilai variabel kedua.
5. Cek penyelesaian tersebut pada persamaan kedua.

Contoh:

Selesaikanlah persamaan $x - y = 4$ dan $3x + 2y = 7$.

Jawab:

Jumlahkan kedua persamaan apakah ada variabel yang tereliminasi.

$x + 3x = 4x$, variabel x tidak tereliminasi.

$-y + 2y = y$, variabel y tidak tereliminasi.

Jika menjumlahkan kedua persamaan variabel x dan y tidak tereliminasi, kalikan setiap persamaan tersebut dengan bilangan yang dapat mengeliminasi salah satu variabel dengan menjumlahkan kedua persamaan.

$$2(x - y = 4) = 2x - 2y = 8$$

Jumlahkan dengan persamaan kedua, diperoleh:

$$\begin{array}{r} 2x - 2y = 8 \\ 3x + 2y = 7 + \\ \hline 5x + 0 = 15 \end{array}$$

Selesaikan hasil tersebut untuk mendapat nilai variabel x.

$$\begin{aligned} 5x &= 15 \\ x &= 15/5 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Substitusi $x = 3$ ke persamaan pertama untuk mendapatkan y, diperoleh:

$$\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 3 - y &= 4 \\ -y &= 4 - 3 \\ -y &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Jadi penyelesaian dari $x - y = 4$ dan $3x + 2y = 7$ adalah $x = 3$ dan $y = -1$.

Cek nilai tersebut dengan mensubstitusi $x = 3$ dan $y = -1$ pada kedua persamaan.

Persamaan pertama:

$$\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 3 - (-1) &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Persamaan kedua:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 3(3) + 2(-1) &= 7 \\ 9 - 2 &= 7 \end{aligned}$$

Contoh:

Lihat contoh sebelumnya: Berapakah dua bilangan, apabila dijumlahkan hasilnya 20 dan dikurangkan hasilnya 10?

Jawab:

Misalkan:

Bilangan pertama = x

Bilangan kedua = y

Jumlahnya 20, $x + y = 20$

Selisihnya 10, $x - y = 10$

Penyelesaian dengan metode eliminasi. Jumlahkan kedua persamaan, untuk mengeliminasi salah satu variabel dan mendapatkan variabel lainnya.

$$x + y = 20$$

$$\underline{x - y = 10 +}$$

$$2x + 0 = 30$$

$$2x = 30$$

$$x = 30/2$$

$$x = 15$$

Substitusi $x = 15$ ke persamaan kedua, diperoleh:

$$x - y = 10$$

$$15 - y = 10$$

$$-y = 10 - 15$$

$$-y = -5$$

$$y = 5$$

Jadi penyelesaian dari $x + y = 20$ dan $x - y = 10$ adalah $x = 15$ dan $y = 5$.

Cek nilai tersebut dengan mensubstitusi $x = 15$ dan $y = 5$ pada kedua persamaan.

Persamaan pertama:

$$x + y = 20$$

$$15 + 5 = 20$$

$$20 = 20$$

Persamaan kedua:

$$x - y = 10$$

$$15 - 5 = 10$$

$$10 = 10$$

4.4 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dengan Metode Substitusi

Metode substitusi adalah menyelesaikan dua persamaan linier dua variabel dengan mengisolasi salah satu variabel, sehingga kedua persamaan baru menjadi sama, kemudian substitusi nilai dari variabel yang diperoleh untuk mencari nilai variabel berikutnya.

Langkah-langkah menyelesaikan soal dengan metode substitusi:

1. Pilih satu persamaan yang sederhana. Nyatakan y sebagai fungsi x atau x sebagai fungsi y .
2. Substitusi y atau x pada langkah 1 ke persamaan yang lain;
3. Selesaikan persamaan tersebut untuk memperoleh nilai variabel yang tersedia;
4. Substitusi nilai variabel yang sudah diperoleh pada salah satu persamaan, dan dapatkan nilai variabel berikutnya;
5. Cek penyelesaian yang diperoleh dengan mensubstitusi nilai tersebut pada persamaan pertama dan kedua.

Contoh:

Selesaikanlah $2x - y = 4$ dan $2x + 4y = 4$.

Jawab:

Selesaikan salah satu persamaan dengan menyatakan salah satu variabel dengan variabel lainnya.

$$2x - y = 4$$

$$2x - 4 = y$$

Substitusi persamaan tersebut pada persamaan berikutnya:

$$2x + 4y = 4$$

$$2x + 4(2x - 4) = 4$$

Dapatkan nilai variabel x,

$$2x + 8x - 16 = 4$$

$$10x = 20$$

$$x = 20/10$$

$$x = 2$$

Substitusi $x = 2$ pada persamaan pertama untuk memperoleh y.

$$2x - y = 4$$

$$2(2) - y = 4$$

$$4 - y = 4$$

$$y = 4 - 4$$

$$y = 0$$

Jadi penyelesaian dari $2x - y = 4$ dan $2x + 4y = 4$ adalah $x = 2$ dan $y = 0$.

Cek hasilnya dengan mensubstitusi $x = 2$ dan $y = 0$ pada persamaan kesatu dan kedua.

Persamaan kesatu:

$$2x - y = 4$$

$$2(2) - 0 = 4$$

$$4 = 4$$

Persamaan kedua:

$$2x + 4y = 4$$

$$2(2) + 4(0) = 4$$

$$4 + 0 = 4$$

$$4 = 4$$

4.5 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dengan Metode Determinan

Metode determinan digunakan untuk menyelesaikan dua persamaan linier dua variabel dengan menuliskan koefisien persamaan ke bentuk matriks, menghitung determinan dari setiap matrik, kemudian menyelesaikan persamaan dengan determinan.

Array persegi dari bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom disebut matriks.

Contoh:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Bentuk matriks dapat digunakan untuk mencari nilai dari variabel yang belum diketahui dari sebuah persamaan.

Untuk matriks 2 x 2

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Determinannya adalah $(a_1)(b_2) - (a_2)(b_1)$

Contoh:

Tentukan determinan dari

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

Metode determinan dalam menyelesaikan dua persamaan linier dua variabel menggunakan **Aturan Cramer**. Untuk menyelesaikan x dan y pada dua persamaan:

1. Tuliskan kedua persamaan dalam bentuk

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

x dan y variabel, a, b, dan c koefisien

2. Buat tiga matriks koefisien (D , D_x , D_y) dan hitunglah determinan dari setiap matriks.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1)(b_2) - (a_2)(b_1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = (c_1)(b_2) - (c_2)(b_1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_1)(c_2) - (a_2)(c_1)$$

D tidak boleh nol.

3. Cari penyelesaiannya menggunakan

$$x = D_x/D$$

$$y = D_y/D$$

4. Cek hasilnya dengan mensubstitusi nilai x dan y pada persamaan semula.

Contoh:

Dari contoh sebelumnya.

Misalkan saudara seorang ahli kimia, memerlukan 50 liter larutan asam 10%, tapi hanya memiliki larutan asam 8% dan 14% di laboratorium. Berapa liter masing-masing larutan asam 8% dan 14% yang dapat dicampurkan, agar memperoleh 50 liter larutan asam 10%.

Jawab:

Misalkan:

x banyak larutan asam 8%

y banyak larutan asam 14%

Untuk memperoleh 50 liter, x liter + y liter = 50 liter

Untuk memperoleh 10% larutan asam, $(8\%)(x \text{ liter}) + (14\%)(y \text{ liter}) = (10\%)(50)$

Tulis persamaan tersebut dalam bentuk $a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_2x + b_2y = c_2$.

$$x + y = 50$$

$$0,08x + 0,14y = 0,10.50$$

Kalikan persamaan kedua dengan 100, diperoleh

$$8x + 14y = 500$$

Persamaannya menjadi:

$$x + y = 50$$

$$8x + 14y = 500$$

Koefisien a_1 , b_1 , dan c_1 pada persamaan pertama adalah 1, 1, dan 50.

Koefisien a_2 , b_2 , dan c_2 pada persamaan kedua adalah 8, 14, dan 500.

Menggunakan aturan Cramer

$$x = D_x/D$$

$$y = D_y/D$$

Nilai determinannya

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1)(b_2) - (a_2)(b_1)$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = (1)(14) - (8)(1) = 14 - 8 = 6$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = (c_1)(b_2) - (c_2)(b_1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 500 & 14 \end{vmatrix} = (50)(14) - (500)(1) = 700 - 500 = 200$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_1)(c_2) - (a_2)(c_1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 8 & 500 \end{vmatrix} = (1)(500) - (8)(50) = 500 - 400 = 100$$

Diperoleh harga x dan y ,

$$x = D_x/D = 200/6 = 100/3$$

$$y = D_y/D = 100/6 = 50/3$$

Oleh karena itu penyelesaian dari $x + y = 50$ dan $0,08x + 0,14y = 0,150$ adalah

$$x = 100/3 \text{ liter} = 33,3 \text{ liter larutan asam } 8\%, \text{ dan}$$

$$y = 50/3 \text{ liter} = 16,67 \text{ liter larutan asam } 14\%.$$

Cek hasil tersebut, dengan mensubstitusi nilai x dan y pada persamaan semula.

Persamaan pertama

$$x + y = 50$$

$$100/3 + 50/3 = 50$$

$$150/3 = 50$$

$$50 = 50$$

Persamaan kedua,

$$0,08x + 0,14y = 0,150$$

$$0,08(100/3) + 0,14(50/3) = 0,150$$

$$8/3 + 7/3 = 5$$

$$15/3 = 5$$

$$5 = 5$$

4.6 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan tiga persamaan linier tiga variabel.

Agar banyak variabel yang tidak diketahui dapat diselesaikan maka dibutuhkan tiga persamaan linier tiga variabel.

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier tiga variabel metode yang dapat digunakan adalah

- Metode eliminasi
- Metode substitusi
- Metode matriks, dan
- Metode determinan.

4.7 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel dengan Metode Eliminasi

Metode eliminasi pada sistem persamaan tiga variabel sama dengan metode eliminasi pada sistem persamaan linier dua variabel.

Tahap-tahap penyelesaian dengan metode eliminasi:

1. Jumlahkan dua persamaan, dua persamaan dari ketiga persamaan, sehingga ada salah satu variabel yang tereliminasi.
2. Jika penambahan dua persamaan tidak mengeliminasi salah variabel, kalikan setiap variabel dengan sebuah bilangan yang mungkin variabel tersebut tereliminasi.
3. Jumlah persamaan tersebut sehingga salah satu variabel tereliminasi.
4. Selesaikan persamaan yang diperoleh dengan mencari variabel berikutnya yang masih belum diketahui, substitusi nilai yang didapat pada persamaan yang lainnya untuk mencari variabel lainnya.
5. Substitusi nilai variabel kedua untuk mencari nilai variabel ketiga pada persamaan yang sama.
6. Cek hasil yang diperoleh dengan mensubstitusi nilai variabel yang sudah diperoleh pada masing-masing persamaan.

Contoh:

Tentukan nilai x , y , dan z dari persamaan berikut.

$$2x + 3y + 3z = 4$$

$$-2x + 3y - 4z = 5$$

$$4x + 2y + 5z = 4$$

Jumlahkan persamaan pertama dan kedua, diperoleh

$$2x + 3y + 3z = 4$$

$$\underline{-2x + 3y - 4z = 5 +}$$

$$6y - 1z = 9$$

Jumlahkan (-2) kali persamaan pertama dengan persamaan ketiga, diperoleh

$$\begin{array}{r} -4x - 6y - 6z = -8 \\ 4x + 2y + 5z = 4 + \\ \hline -4y - 1z = -4 \end{array}$$

Hasil yang diperoleh

$$\begin{array}{r} 2x + 3y + 3z = 4 \\ 6y - 1z = 9 \\ -4y - 1z = -4 \end{array}$$

Kalikan persamaan ketiga dengan -1 dan tambahkan ke persamaan kedua untuk mengeliminasi z

$$\begin{array}{r} 6y - 1z = 9 \\ 4y + 1z = 4 + \\ \hline 10y = 13 \\ y = 13/10 \\ y = 1,3 \end{array}$$

Substitusi $y = 1,3$ pada persamaan kedua $6y - 1z = 9$, untuk memperoleh nilai z

$$\begin{array}{r} 6y - 1z = 9 \\ 6(1,3) - z = 9 \\ 7,8 - z = 9 \\ z = -1,2 \end{array}$$

Substitusi $y = 1,3$ dan $z = -1,2$ pada persamaan pertama, diperoleh

$$\begin{array}{r} 2x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 3(1,3) + 3(-1,2) = 4 \\ 2x + 3,9 - 3,6 = 4 \\ 2x = 4 - 3,9 + 3,6 \\ 2x = 3,7 \\ x = 3,7/2 \\ x = 1,85 \end{array}$$

Oleh karena itu penyelesaian dari

$$2x + 3y + 3z = 4$$

$$-2x + 3y - 4z = 5$$

$$4x + 2y + 5z = 4$$

adalah $x = 1,85$, $y = 1,3$, dan $z = -1,2$

Cek hasil tersebut, dengan mensubstitusi pada ketiga persamaan semula.

Persamaan pertama

$$2x + 3y + 3z = 4$$

Substitusi $x = 1,85$, $y = 1,3$, dan $z = -1,2$

$$2(1,85) + 3(1,3) + 3(-1,2) = 4$$

$$3,7 + 3,9 - 3,6 = 4$$

$$4 = 4$$

Persamaan kedua

$$2x + 3y - 4z = 5$$

Substitusi $x = 1,85$, $y = 1,3$, dan $z = -1,2$

$$-2(1,85) + 3(1,3) - 4(-1,2) = 5$$

$$-3,7 + 3,9 + 4,8 = 5$$

$$5 = 5$$

Persamaan ketiga

$$4x + 2y + 5z = 4$$

Substitusi $x = 1,85$, $y = 1,3$, dan $z = -1,2$

$$4(1,85) + 2(1,3) + 5(-1,2) = 4$$

$$7,4 + 2,6 - 6 = 4$$

$$4 = 4$$

4.8 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel dengan Metode Substitusi

Metode Substitusi digunakan untuk menyelesaikan tiga persamaan linier dengan tiga variabel merupakan perluasan dari dua persamaan linier dengan dua variabel.

Langkah-langkah penyelesaian dengan metode substitusi adalah sebagai berikut:

1. Nyatakan satu variabel pada satu persamaan pada ruas yang sama (variabel lainnya disajikan pada ruas lainnya), substitusi variabel pertama pada persamaan variabel kedua selesaikan persamaan untuk mendapatkan nilai variabel kedua.
2. Lanjutkan dengan variabel berikutnya sampai nilai semua variabel didapatkan.
3. Cek penyelesaian yang diperoleh dengan mensubstitusi hasil pada setiap persamaan semula.

Contoh:

Selesaikan persamaan linier berikut dengan metode substitusi.

$$4x + 2y - 2z = -2$$

$$3x + 2y + z = -1$$

$$2x - 6y + 6z = 6$$

Selesaikan persamaan pertama pada y. Kurangkan dengan 4x dan tambahkan 2z pada kedua ruas.

$$4x + 2y - 2z = -2$$

$$2y = -4x + 2z - 2$$

Bagi dengan 2

$$y = -2x + z - 1$$

Substitusi nilai y pada persamaan kedua

$$3x + 2(-2x + z - 1) + z = -1$$

$$3x - 4x + 2z - 2 + z = -1$$

$$-x + 3z = 1$$

Substitusi nilai y pada persamaan ketiga

$$2x - 6y + 6z = 6$$

$$2x - 6(-2x + z - 1) + 6z = 6$$

$$2x + 12x - 6z + 6 + 6z = 6$$

$$14x = 0$$

Bagi 14 pada kedua ruas

$$x = 0$$

untuk mencari nilai z , substitusi nilai $x = 0$ pada persamaan $-x + 3z = 1$.

$$-x + 3z = 1$$

$$-0 + 3z = 1$$

$$3z = 1$$

$$z = 1/3$$

Substitusi nilai $x = 0$ dan $z = 1/3$ pada persamaan pertama (dengan y)

$$y = z - 2x - 1$$

$$y = 1/3 - 2(0) - 1$$

$$y = -2/3$$

Jadi penyelesaian dari ketiga persamaan

$$4x + 2y - 2z = -2$$

$$3x + 2y + z = -1$$

$$2x - 6y + 6z = 6$$

adalah $x = 0$, $y = -2/3$, dan $z = 1/3$.

Cek penyelesaian tersebut dengan mensubstitusinya pada ketiga persamaan.

Persamaan pertama

$$4x + 2y - 2z = -2$$

$$4(0) + 2(-2/3) - 2(1/3) = -2$$

$$0 - 4/3 - 2/3 = -2$$

$$-2 = -2$$

Persamaan kedua

$$3x + 2y + z = -1$$

$$3(0) + 2(-2/3) + (1/3) = -1$$

$$0 - 4/3 + 1/3 = -1$$

$$-3/3 = -1$$

$$-1 = -1$$

Persamaan ketiga

$$2x - 6y + 6z = 6$$

$$2(0) - 6(-2/3) + 6(1/3) = 6$$

$$0 + 12/3 + 6/3 = 6$$

$$4 + 2 = 6$$

$$6 = 6$$

4.9 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel dengan Metode Matriks

Metode matriks didesain untuk menyelesaikan tiga persamaan tiga variabel dengan: mentransformasikan persamaan ke dalam matriks, mengubah perkalian matriks dengan matriks triangular atas; mentransformasi matriks ke tiga persamaan; menyelesaikan hasil akhirnya menggunakan substitusi.

Langkah-langkahnya:

1. Mentransformasi persamaan ke bentuk matriks dengan menuliskan koefisien persamaan ke format matriks a di kiri, b berikutnya, dan seterusnya.
2. Untuk membentuk matriks segitiga atas, tambahkan perkalian koefisien baris satu sama lain sampai matriks segitiga atas terbentuk. Caranya: 1) kalikan baris dengan sebarang bilangan tak nol; 2) tukarkan posisi dua baris (agar koefisien nol berpindah ke kiri bawah matriks); 3) tambahkan perkalian baris dengan baris lainnya yang menghasilkan koefisien nol di kiri bawah matriks segitiga atas.
3. Transformasikan koefisien matriks ke bentuk tiga persamaan dengan koefisien hasil di bawahnya.
4. Selesaikan hasil berikutnya dengan substitusi.
5. Cek penyelesaiannya dengan mensubstitusi hasil pada persamaan semula.

Untuk menggunakan metode matriks, tulis persamaan dalam bentuk berikut:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Koefisien matriksnya sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Untuk membentuk matriks segitiga atas, koefisien a_2 , a_3 , dan b_3 dikonversikan ke 0, a_1 , b_2 , dan c_3 dikonversikan ke 1,

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 1 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{vmatrix}$$

Variabel yang diketahui (dari persamaan ketiga dari matriks reduksi) dapat disubstitusi menjadi persamaan reduksi untuk menyelesaikan variabel berikutnya dan kedua variabel yang diketahui dapat disubstitusi pada persamaan semula untuk mencari nilai variabel ketiga.

Cek hasil dengan mensubstitusi nilai pada persamaan semula.

Contoh:

Selesaikan persamaan linier berikut dengan metode matriks.

$$x + y + z = -1$$

$$2x - y + z = 0$$

$$-x + y - z = -2$$

Jawab:

Matriks dari koefisiennya

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Untuk mereduksi ke matriks segitiga atas, a_1 harus 1 (di atas sudah 1).

a_2 dan a_3 harus 0.

Untuk itu, kalikan baris pertama dengan -2 dan tambahkan pada baris kedua, agar a_2 menjadi 0.

$$\begin{array}{rrrr} -2 & -2 & -2 & 2 \\ \hline 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array} +$$

-2 kali baris kesatu
baris kedua
baris kedua terbaru

Tambahkan baris kesatu dan ketiga, untuk memperoleh a_3 menjadi 0.

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{array} +$$

baris kesatu
baris ketiga
baris kedua terbaru

Matriks baru menjadi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Tukar posisi baris kedua dan ketiga

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Tambahkan baris kedua dan ketiga

$$\begin{array}{rrrr} 0 & 2 & 0 & -3 \\ \hline 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} +$$

baris kedua
baris ketiga
baris kedua terbaru

Kalikan (-1) ke baris kedua terbaru untuk mengeliminasi tanda negatif sehingga koefisien b_2 menjadi 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Untuk mengubah b_3 menjadi 0, tambahkan 3 dikali baris kedua ke baris ketiga.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \text{ dikali baris kedua} \\ \text{baris ketiga} \\ \text{baris ketiga terbaru} \end{array}$$

Matriks baru menjadi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Untuk mengubah koefisien c_3 menjadi 1, bagi baris ketiga dengan 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{vmatrix}$$

Matriks segitiga atas sudah berkoresponden dengan ketiga persamaan.

Ketiga persamaan dari matriks segitiga atas adalah

$$1x + 1y + 1z = -1$$

$$1y + 1z = 1$$

$$1z = 5/2$$

Jadi $z = 5/2$.

Substitusi $z = 5/2$ ke persamaan reduksi kedua.

$$1y + 1z = 1$$

$$1y + 5/2 = 1$$

$$y + 5/2 = 1$$

Kurangkan $5/2$ pada kedua ruas

$$y = 1 - (5/2)$$

$$y = 2/2 - 5/2$$

$$y = -3/2$$

Substitusi $y = -3/2$ dan $z = 5/2$ ke persamaan reduksi pertama.

$$1x + 1y + 1z = -1$$

$$x + (-3/2) + (5/2) = -1$$

$$x + 2/2 = -1$$

$$x + 1 = -1$$

$$x = -1 - 1$$

$$x = -2$$

Jadi penyelesaian dari

$$x + y + z = -1$$

$$2x - y + z = 0$$

$$-x + y - z = -2$$

adalah $x = -2$, $y = -3/2$, dan $z = 5/2$.

Cek penyelesaian tersebut dengan mensubstitusi $x = -2$, $y = -3/2$, dan $z = 5/2$ pada persamaan semula.

Persamaan pertama

$$x + y + z = -1$$

$$(-2) + (-3/2) + (5/2) = 1$$

$$-2 + (2/2) = 1$$

$$-2 + 1 = 1$$

$$1 = 1$$

Persamaan kedua

$$2x - y + z = 0$$

$$2(-2) - (-3/2) + (5/2) = 0$$

$$-4 + 3/2 + 5/2 = 0$$

$$-4 + 8/2 = 0$$

$$-4 + 4 = 0$$

$$0 = 0$$

Persamaan ketiga

$$\begin{aligned}
 -x + y - z &= -2 \\
 -(-2) + (-3/2) - (5/2) &= -2 \\
 2 - 3/2 - 5/2 &= -2 \\
 2 - 8/2 &= -2 \\
 2 - 4 &= -2 \\
 -2 &= -2
 \end{aligned}$$

4.10 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel dengan Metode Determinan dari Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama.

Contoh

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinan dari matriks persegi 3 x 3 adalah

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 * \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 * \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 * \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Dari matriks persegi 2 x 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)$$

Untuk menyelesaikan persamaan linier tiga variabel menggunakan metode determinan matriks persegi, aturan Cramer dapat dipergunakan.

Berikut prosedur yang digunakan untuk menyelesaikan tiga variabel.

1. Tuliskan ketiga persamaan dalam bentuk:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

2. Bentuk empat matriks koefisien (D , D_x , D_y , D_z) hitung determinan dari setiap matriks seperti berikut:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 * \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 * \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 * \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1 * \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2 * \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3 * \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= d_1(b_2c_3 - b_3c_2) - d_2(b_1c_3 - b_3c_1) + d_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 * \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 * \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 * \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(d_2c_3 - d_3c_2) - a_2(d_1c_3 - d_3c_1) + a_3(d_1c_2 - d_2c_1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = a_1 * \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 * \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} + a_3 * \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2d_3 - b_3d_2) - a_2(b_1d_3 - b_3d_1) + a_3(b_1d_2 - b_2d_1)$$

3. Selesaikan x, y, dan z dengan rumus

$$x = D_x/D$$

$$y = D_y/D$$

$$z = D_z/D$$

4. Cek penyelesaian yang diperoleh dengan mensubstitusi pada persamaan semula.

Contoh:

Selesaikanlah persamaan berikut menggunakan metode determinan.

$$3x + 2y - 2z = 8$$

$$4x - 6y + 6z = 2$$

$$10x + 8y + 10z = -8$$

Jawab:

Bentuk empat matriks menggunakan koefisien a, b, c, dan d dari setiap persamaan.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 6 \\ 10 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 3[(-6)(10) - (8)(6)] - 4[(2)(10) - (8)(-2)] + 10[(2)(6) - (-6)(-2)] \\ &= 3(-60 - 48) - 4(20 + 16) + 10(12 - 12) \\ &= 3(-108) - 4(36) + 10(0) \\ &= -324 - 144 + 0 \\ &= -468 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 6 \\ -8 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + (-8) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 8[(-6)(10) - (8)(6)] - 2[(2)(10) - (8)(-2)] - 8[(2)(6) - (-6)(-2)] \\ &= 8(-60 - 48) - 2(20 + 16) - 8(12 - 12) \\ &= 8(-108) - 2(36) - 8(0) \\ &= -864 - 72 + 0 \end{aligned}$$

$$= -936$$

$$\begin{aligned} D_y &= \begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \\ 10 & -8 & 10 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -8 & 10 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -8 & 10 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 3[(2)(10) - (-8)(6)] - 4[(8)(10) - (-8)(-2)] + 10[(8)(6) - (2)(-2)] \\ &= 3(20 + 48) - 4(80 - 16) + 10(48 + 4) \\ &= 3(68) - 4(64) + 10(52) \\ &= 204 - 256 + 520 \\ &= 468 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_z &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & -6 & 2 \\ 10 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 8 & -8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 8 & -8 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3[(-6)(-8) - (8)(2)] - 4[(2)(-8) - (8)(8)] + 10[(2)(2) - (-6)(8)] \\ &= 3(48 - 16) - 4(-16 - 64) + 10(4 + 48) \\ &= 3(32) - 4(-80) + 10(52) \\ &= 96 + 320 + 520 \\ &= 936 \end{aligned}$$

Hitung nilai x, y, dan z.

$$x = D_x/D = -936/-468 = 2$$

$$y = D_y/D = 468/-468 = -1$$

$$z = D_z/D = 936/-468 = -2$$

Jadi penyelesaian dari

$$3x + 2y - 2z = 8$$

$$4x - 6y + 6z = 2$$

$$10x + 8y + 10z = -8$$

adalah $x = 2$, $y = -1$, dan $z = -2$.

Cek hasilnya dengan mensubstitusi $x = 2$, $y = -1$, dan $z = -2$ pada persamaan semula.

Persamaan pertama

$$3x + 2y - 2z = 8$$

Substitusi $x = 2$, $y = -1$, dan $z = -2$, diperoleh

$$3(2) + 2(-1) - 2(-2) = 8$$

$$6 - 2 + 4 = 8$$

$$8 = 8$$

Persamaan kedua

$$4x - 6y + 6z = 2$$

Substitusi $x = 2$, $y = -1$, dan $z = -2$, diperoleh

$$4(2) - 6(-1) + 6(-2) = 2$$

$$8 + 6 - 12 = 2$$

$$2 = 2$$

Persamaan ketiga

$$10x + 8y + 10z = -8$$

Substitusi $x = 2$, $y = -1$, dan $z = -2$, diperoleh

$$10(2) + 8(-1) + 10(-2) = -8$$

$$20 - 8 - 20 = -8$$

$$-8 = -8$$

DAFTAR PUSTAKA

- Ayres, JR., Schmidt, Philip A., Hademenos, George J. 2006. Matematika Universitas. Schaum's Easy Outlines. Alih Bahasa: Chrisman Silaban. Editor: Lemeda Simarmata. Jakarta: Erlangga.
- Carman, A. Robert., Saunders, Hal M. 2008. Mathematics for The Trade. Upper Saddle River, New Jersey; Pearson Prentice Hall.
- Ichsan. 2020. Matematika. Pontianak: Politeknik Negeri Pontianak.
- Purcell, Edwin J., Varbeg, Dale. 1990. Kalkulus dan Geometri Analitik. Jakarta: Erlangga.
- Ross, Debra Anne. 1996. Master Math: Algebra. Franklin Lakes, NJ: Career Press.
- Sibarani, Maslen. 2013. Aljabar Linier. Jakarta: PT. RajaGrafindo Persada.
- Stroud, K.A. 1987. Matematika untuk Teknik. Alih Bahasa: Erwin Sucipto. Jakarta: Erlangga.
- Thomas, George B., Finney, Ross L. 1996. Calculus and analytic Geometry 9th Ed., Massachesetts: Addison Wesley.

BAB V

PERTIDAKSAMAAN SATU VARIABEL

Oleh Nurul Ainun Fajriah

5.1 Pendahuluan

Simbol pertidaksamaan $<$, $\leq$, $>$ dan $\geq$ digunakan untuk membandingkan dua angka dan untuk menunjukkan himpunan bagian dari bilangan real. Contoh pertidaksamaan sederhana $x \geq 3$ menunjukkan semua bilangan real x yang lebih besar dari atau sama dengan 3 (Larson & Hostetler, 1993).

Seperti halnya persamaan, pertidaksamaan dalam variabel x diselesaikan dengan menemukan mencari semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan. Himpunan semua bilangan real yang merupakan penyelesaian pertidaksamaan adalah himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut (Larson & Hostetler, 1993).

Langkah penyelesaian pertidaksamaan satu variabel sangat mirip dengan penyelesaian persamaan linear. Namun, dalam penyelesaian pertidaksamaan ketika kedua sisi dikalikan atau dikali dengan angka negatif, maka arah simbol pertidaksamaan harus dibalik (Larson & Hostetler, 1993).

$$-2 < 5$$

$$(-3)(-2) > (-3)(5)$$

$$6 > -15$$

Jenis pertidaksamaan yang paling sederhana untuk diselesaikan adalah pertidaksamaan linear dalam satu variabel. Setiap pertidaksamaan

$$2x + 3 > 4, \quad 3x - 4 \leq 2x + 5, \quad \text{and} \quad 2 \geq -5x + 4$$

adalah pertidaksamaan linear pada variabel x .

Contoh

Selesaikan pertidaksamaan linear berikut

1. $5x - 7 > 3x + 9$

Penyelesaian

$$5x - 7 > 3x + 9$$

$$5x > 3x + 16$$

$$5x - 3x > 16$$

$$2x > 16$$

$$x > 8 \text{ (atau } 8 < x \text{)}$$

2. $-3 \leq 6x - 1 < 3$

Penyelesaian

$$-3 \leq 6x - 1 < 3$$

$$-2 \leq 6x < 4$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$$

Dengan demikian, himpunan penyelesaian terdiri dari semua bilangan real yang lebih besar dari atau sama dengan $-\frac{1}{3}$ dan lebih kecil dari $\frac{2}{3}$. Notasi interval untuk

penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

5.2 Pertidaksamaan Numerik

Salah satu sifat penting dari bilangan real adalah memiliki urutan. Urutan bilangan real memungkinkan kita untuk membandingkan dua bilangan dan menentukan salah satunya lebih besar atau sama. Asumsikan bahwa sistem

bilangan real berisi himpunan P , dimana P adalah himpunan bilangan positif dan kita nyatakan $x > 0$, x adalah bagian dari himpunan P (Manfrino, Ortega, & Delgado, 2009).

Sifat 1. Setiap bilangan real x memiliki satu dan hanya satu dari sifat-sifat berikut.

- a) $x = 0$
- b) $x \in P$, yaitu $x > 0$
- c) $-x \in P$, yaitu $-x < 0$

Sifat 2. Jika $x, y \in P$, maka $x + y \in P$ (dalam simbol $x > 0, y > 0 \rightarrow x + y > 0$)

Sifat 3. Jika $x, y \in P$, maka $xy \in P$ (dalam simbol $x > 0, y > 0 \rightarrow xy > 0$)

Jika kita mengambil garis bilangan sebagai representasi geometri dari bilangan real, dimana angka “0” yang berada di garis bilangan membagi garis bilangan menjadi dua bagian, bilangan positif berada di sisi yang berisi angka “1”. Secara umum angka satu terletak di sebelah kanan “0”. Angka 1 adalah positif, karena jika negatif, sifat bahwa $1 \cdot x = x$ untuk setiap x , kita dapat mengetahui bahwa setiap bilangan $x \neq 0$ akan memenuhi $x \in P$ dan $-x \in P$, yang bertentangan dengan sifat 1 (Manfrino et al., 2009).

Kita dapat mendefinisikan hubungan a lebih besar daripada b jika $a - b \in P$ (disimbolkan $a > b$). Demikian pula, a lebih kecil daripada b jika $b - a \in P$ (disimbolkan $a < b$). Amati bahwa $a < b$ ekuivalen dengan $b > a$. Kita juga dapat mendefinisikan bahwa a lebih kecil atau sama dengan b jika $a < b$ atau $a = b$ (menggunakan simbol $a \leq b$) (Manfrino et al., 2009).

Kita nyatakan $\mathbb{R}$ sebagai himpunan bilangan real dan $\mathbb{R}^+$ himpunan P bilangan real positif.

Contoh 5.2

- (i) Jika $a < b$ dan c adalah sebarang bilangan, maka $a + c < b + c$.
- (ii) Jika $a < b$ dan $c > 0$, maka $ac < bc$.

Faktanya, untuk membuktikan (i), kita dapat melihat bahwa

$$a + c < b + c \Leftrightarrow (b + c) - (a + c) > 0 \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow a < b.$$

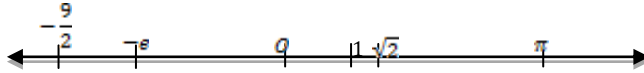
Untuk membuktikan (ii), kita lanjutkan sebagai berikut: $a < b \Rightarrow b - a > 0$ dan karena $c > 0$, maka $(b - a)c > 0$, maka $bc - ac > 0$ dan kemudian $ac < bc$.

Latihan 5.2

1. Buktikan pernyataan berikut.
 - (i) $a < 0, b < 0 \Rightarrow ab > 0$
 - (ii) $a < 0, b > 0 \Rightarrow ab < 0$
 - (iii) $a < b, b < c \Rightarrow a < c$
 - (iv) $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$
 - (v) $a < b \Rightarrow -b < -a$
 - (vi) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
 - (vii) $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$
2. (i) Jika $a > 0, b > 0$ dan $a^2 < b^2$, maka $a < b$
- (iii) Jika $b > 0$, kita memiliki $\frac{a}{b} > 1$ jika dan hanya jika $a > b$.

5.3 Aljabar Pertidaksamaan

Sebuah garis yang telah disepakati asosiasi disebut sebagai garis nyata yang diilustrasikan seperti gambar berikut.



Menurut Kazarinof (1961) definisi bilangan real dapat membuktikan bahwa bilangan real memiliki keteraturan alami, secara eksplisit dijelaskan pada postulat berikut.

a) Postulat 1

Sistem bilangan real mengandung himpunan bagian P yang elemen-elemennya disebut real positif dan memiliki sifat tertentu.

b) Postulat 2

Jika a bilangan real, maka tepat salah satu dari tiga alternatif berikut ini benar: a di P , $-a$ di P , a di 0 .

c) Postulat 3

Jika a dan b di P , kemudian $a + b$ dan $a \times b$ di P . Jika a di P , dapat ditulis $a > 0$. Jika a tidak ada di P dan a tidak ada di 0 , maka dapat dikatakan a adalah negatif.

Definisi 1

$a > b$ (atau ekuivalen, $b < a$) jika dan hanya jika $a - b > 0$, yaitu $a > b$ jika dan hanya jika ada bilangan positif h sehingga $a = b + h$ (Kazarinof, 1961).

Pernyataan " $a > b$ " adalah benar, dibaca "a lebih besar dari b". Pernyataan seperti itu disebut pertidaksamaan. Secara geometris, pernyataan $a > b$ berarti bahwa titik yang menyatakan bilangan a pada bayangan garis nyata berada di sebelah kanan titik yang menyatakan b (Kazarinof, 1961).

Untuk menunjukkan bahwa bilangan real $1, 2, 3, \dots$ semuanya ada di P dapat digunakan postulat 2 dan 3. Misalkan 1 tidak ada di P . Maka karena $1 \neq 0$, -1 ada di P berdasarkan

postulat 2. Oleh karena itu, dengan postulat 3, $(-1)(-1)$ ada di P. Akan tetapi $(-1)(-1)=1$, tidak ada di P. Ini berarti kontradiksi. Akibatnya, dengan postulat 2, 1 ada di P. Postulat 3 sekarang menjamin bahwa 2, 3, 4, ... semuanya ada di P (Kazarinof, 1961).

Teorema 1

Diberikan dua bilangan real a dan b , tepat salah satu dari alternatif berikut berlaku: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Bukti

Berdasarkan postulat 2, tepat salah satu alternatif $a - b > 0$, $-(a - b) > 0$, $a - b = 0$ berlaku. Dengan definisi 1, jika $a - b > 0$, maka $a > b$; jika $-(a - b) > 0$, maka $b > a$; dan jika $a - b = 0$, maka $a = b$.

Teorema 2

Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$.

Bukti

Menurut definisi 1 dan hipotesis teorema, terdapat bilangan positif h dan k sehingga $a = b + h$ dan $b = c + k$. Oleh karena itu, $a = c + (h + k)$. Sekarang, dengan postulat 3, $h + k$ adalah positif; maka berdasarkan definisi 1, $a > c$.

Teorema 3

Jika $a > b$ dan $c > d$, maka $a + c > b + d$.

Bukti

Dengan hipotesis dan definisi 1, terdapat bilangan positif h dan k sehingga $a = b + h$ dan $c = d + k$. Oleh karena itu, $a + c = b + d + (h + k)$; dan oleh postulat 3 dan definisi 1, $a + c > b + d$.

Teorema 4

Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ac > bc$ dan $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. Jika $c < 0$, maka $ac < bc$ dan $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Corollary

Jika $a > b > 0$, maka $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; jika $a > 0 > b$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;
jika $a < b < 0$, maka $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Bukti

Misalkan $a > b > 0$ dan $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Kemudian berdasarkan teorema 4 dengan $c = ab$, yang positif dengan postulat 3

$$ab \cdot \frac{1}{a} \geq ab \cdot \frac{1}{b} \quad \text{atau} \quad b \geq a$$

Berdasarkan postulat 2, ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa $a > b$.

Misalkan $a > 0 > b$. Sekarang, $a \cdot b < 0$. Jika tidak demikian, baik ab dan $a(-b)$, yang sama dengan $-ab$, akan berada di P . Postulat 2 menjamin bahwa ini tidak terjadi. Kemudian, berdasarkan teorema 4, jika dimisalkan bahwa $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$, dapat disimpulkan bahwa

$$ab \cdot \frac{1}{a} \leq ab \cdot \frac{1}{b} \quad \text{atau} \quad b \leq a$$

Ini kontradiksi dengan hipotesis; maka berdasarkan postulat 2, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Bukti dari pernyataan terakhir dalam corollary serupa.

Teorema 5

Jika $a > b > 0$ dan $c > d > 0$, maka $ac > bd$ dan $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Bukti

Seperti pada argumen sebelumnya, terdapat bilangan positif h dan k sehingga $a = b + h$ dan $c = d + k$. Oleh karena itu,

$$ac = bd + h(d + k) + k(b + h);$$

Oleh karena itu, berdasarkan definisi 1 dan postulat 3, $ac > bd$

Untuk membuktikan bahwa $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$, kita kalikan kedua anggota pertidaksamaan $ac > bd$ dengan $(cd)^{-1}$ dan menggunakan teorema 4.

Teorema 6

Jika $a > b > 0$ dan p dan q adalah bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{p}{q}} > b^{\frac{p}{q}}$.

Bukti

Pertama kita harus membuktikan bahwa $a^p > b^p$ (untuk setiap bilangan bulat positif p). Akan dibuktikan dengan induksi, oleh hipotesis $a^1 > b^1$. Misalkan $a^n > b^n$, di mana n adalah bilangan positif. Jika kemudian mengikuti $a^{n+1} > b^{n+1}$, prinsip induksi terbatas menjamin bahwa $a^p > b^p$ untuk semua bilangan positif p . Sekrang, jika $a^n > b^n$, teorema 5 dalam hubungannya dengan hipotesis $a > b$ menghasilkan kesimpulan bahwa $a^{n+1} > b^{n+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $a^{\frac{p}{q}} > b^{\frac{p}{q}}$. Misalkan pernyataan tersebut salah, yaitu dengan teorema 1 bahwa $a^{\frac{p}{q}} \leq b^{\frac{p}{q}}$. Maka dengan apa yang baru saja dibuktikan (dengan $a^{\frac{p}{q}}$ sebagai b , $b^{\frac{p}{q}}$ sebagai a), dan q sebagai p , jelas bahwa $a^p \leq b^p$.

Karena telah dibuktikan bahwa $a^p > b^p$, teorema 1 mengatakan bahwa ini adalah kontradiksi. Dengan demikian hipotesis $a^{\frac{p}{q}} \leq b^{\frac{p}{q}}$ tidak dapat dipertahankan dan dengan teorema 1, $a^{\frac{p}{q}} > b^{\frac{p}{q}}$.

Contoh

Tunjukkan bahwa $\sqrt{10} + \sqrt{2} > \sqrt{17}$

Penyelesaian

Jika pernyataan di atas benar, maka semua pernyataan berikut harus benar

$$10 + 2\sqrt{10}\sqrt{2} + 2 > 17 \quad (\text{oleh teorema 6 dengan } p = 2, q = 1)$$

$$2\sqrt{10}\sqrt{2} > 5 \quad (\text{oleh teorema 3})$$

$$4 \cdot 10 \cdot 2 > 25 \quad (\text{oleh teorema 6 dengan } p = 2, q = 1)$$

Tetapi 80 lebih besar dari 5 (dapat dinuktikan bahwa $55 > 0$). Oleh karena itu,

$$2\sqrt{10}\sqrt{2} > 5 \quad (\text{oleh teorema 5 dengan } p = 1, q = 2)$$

$$10 + 2\sqrt{10}\sqrt{2} + 2 > 17 \quad (\text{oleh teorema 3})$$

$$\sqrt{10} + \sqrt{2} > \sqrt{17} \quad (\text{oleh teorema 6 dengan } p = 1, q = 2).$$

5.4 Pertidaksamaan bersyarat

Suatu pertidaksamaan yang melibatkan n variabel real dinyatakan bersyarat jika tidak mencakup semua ruang n Euclidian, seluruh rentang variabel. Contohnya, jika x dan y adalah variabel real, pertidaksamannya

$$x < 3 \quad \text{dan} \quad x + y > 1$$

adalah pertidaksamaan bersyarat, ketika

$$x^2 > -1 \quad \text{dan} \quad x^2 + y^2 > -1$$

Bukan pertidaksamaan bersyarat karena berlaku untuk semua bilangan real x dan y . Konsep ini sesuai dengan perbedaan yang dibuat antara persamaan bersyarat dan identitas dalam aljabar

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

adalah persamaan bersyarat, ketika

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

adalah sebuah identitas.

Konsep penting lainnya dalam teori pertidaksamaan, seperti halnya cabang matematika lainnya adalah konsep nilai mutlak.

Definisi 2

Nilai mutlak $|x|$ dari bilangan asli x didefinisikan sebagai berikut

$$|x| = x, \text{ jika } x \geq 0$$

$$|x| = -x, \text{ jika } x < 0$$

Dengan demikian, $|x|$ adalah jarak dari titik x pada garis bilangan ke titik k asal. Perhatikan bahwa

$$|x^2| = |x|^2$$

dan

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

contohnya, $\sqrt{(-3)^2} = 3$. Untuk bilangan real x dan y , $|x - y|$ adalah jarak antara x dan y .

Untuk setiap bilangan real x , a dan b , berlaku pernyataan berikut.

(i) $|x| \geq 0$, dan hasilnya 0 ketika $x = 0$

(ii) $|-x| = |x|$

(iii) $|x|^2 = x^2$

(iv) $|ab| = |a||b|$

(v) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ dengan $b \neq 0$

Pertidaksamaan segitiga menyatakan bahwa untuk setiap pasangan bilangan real a dan b berlaku

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Persamaan tersebut berlaku jika dan hanya jika $ab \geq 0$.

Kedua sisi pertidaksamaan adalah positif. Akan dibuktikan bahwa $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

Bentuk umum pertidaksamaan segitiga untuk bilangan real $x_1, x_2, \dots, x_n$, adalah

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

Persamaan berlaku ketika semua x_i memiliki tanda yang sama. Hal ini dapat dibuktikan dengan cara yang sama atau dengan menggunakan induksi. Pertidaksamaan lain yang sering digunakan sebagai berikut

$$|\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

Latihan 5.4

1. Misal x, y, a, b bilangan real, buktikan bahwa

(i) $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$

(ii) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

(iii) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

(iv) $x > 0, y > 0 \Rightarrow x^2 - xy + y^2 > 0$

2. Untuk bilangan real a, b, c , buktikan bahwa

$$|a| + |b| + |c| - |a + b| - |b + c| - |c + a| + |a + b + c| \geq 0$$

3. Misalkan a, b bilangan real sehingga $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Buktikan bahwa

(i) $0 \leq \frac{b-a}{1-ab} \leq 1$

(ii) $0 \leq \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq 1$

(iii) $0 \leq ab^2 - ba^2 \leq \frac{1}{4}$

Kunci Jawaban

Latihan 5.2

1. Buktikan pernyataan berikut.

(i) $a < 0, b < 0 \Rightarrow ab > 0$

Jika $a < 0$, maka $-a > 0$, sehingga $(-a)(-b) = ab$

$$(ii) \quad a < 0, b > 0 \Rightarrow ab < 0$$

$$(-a)b > 0$$

$$(iii) \quad a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$, selanjutnya berdasarkan sifat 2 pernyataan ini terbukti.

$$(iv) \quad a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

Pernyataan ini dapat dibuktikan dengan sifat 2

$$(v) \quad a < b \Rightarrow -b < -a$$

Jika $a < 0$, maka $-a > 0$

$$(vi) \quad a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

$$a \frac{1}{a} = 1 > 0$$

$$(vii) \quad a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$$

Jika $a < 0$, maka $-a > 0$

$$2. \quad (i) \text{ Jika } a > 0, b > 0 \text{ dan } a^2 < b^2, \text{ maka } a < b$$

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) > 0$$

$$(ii) \text{ Jika } b > 0, \text{ kita memiliki } \frac{a}{b} > 1 \text{ jika dan hanya jika } a > b.$$

Jika $b > 0$, maka $\frac{1}{b} > 0$, selanjutnya sesuai contoh 5.1 pernyataan ini dapat dibuktikan.

Latihan 5.3

1. Misal x, y, a, b bilangan real, buktikan bahwa

$$(i) \quad |x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$$

Berdasarkan definisi 2, maka $x \leq |x|$ dan $-x \leq |x|$

$$(ii) \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Dengan mempertimbangkan $|a| = |a - b + b|$ dan $|b| = |b - a + a|$ an menerapkan pertidaksamaan segitiga maka pernyataan ini terbukti.

$$(iii) \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$$

$$(x^2 + xy + y^2)(x - y) = x^3 - y^3$$

$$(iv) \ x > 0, y > 0 \Rightarrow x^2 - xy + y^2 > 0$$

$$(x^2 - xy + y^2)(x + y) = x^3 + y^3$$

2. Untuk bilangan real a, b, c , buktikan bahwa (1.6)

$$|a| + |b| + |c| - |a + b| - |b + c| - |c + a| + |a + b + c| \geq 0$$

Jika a, b atau c adalah nol, persamaan berikut. Maka dapat diasumsikan $|a| \geq |b| \geq |c| > 0$. Dibagi dengan $|a|$, pertidaksamaan tersebut ekuivalen dengan

$$1 + \left| \frac{b}{a} \right| + \left| \frac{c}{a} \right| - \left| 1 + \frac{b}{a} \right| - \left| \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right| - \left| 1 + \frac{c}{a} \right| + \left| 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right| \geq 0$$

Karena $\left| \frac{b}{a} \right| \leq 1$ dan $\left| \frac{c}{a} \right| \leq 1$, kita dapat menyimpulkan bahwa

$$\left| 1 + \frac{b}{a} \right| = 1 + \frac{b}{a} \text{ dan } \left| 1 + \frac{c}{a} \right| = 1 + \frac{c}{a}$$

Dengan demikian, cukup dibuktikan bahwa

$$\left| \frac{b}{a} \right| + \left| \frac{c}{a} \right| - \left| \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right| - \left| 1 + \frac{c}{a} \right| + \left| 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right| \geq 0$$

Selanjutnya dapat diselesaikan dengan pertidaksamaan segitiga.

3. Misalkan a, b bilangan real sehingga $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Buktikan bahwa

$$(i) \ 0 \leq \frac{b-a}{1-ab} \leq 1$$

Gunakan $0 \leq b \leq 1$ dan $1 + a > 0$ untuk melihat bahwa

$$0 \leq b(1+a) \leq 1+a \Rightarrow 0 \leq b-a \leq 1-ab \Rightarrow 0 \leq$$

$$\frac{b-a}{1-ab} \leq 1$$

$$(ii) \ 0 \leq \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq 1$$

Pertidaksamaan di ruas kiri sudah jelas. Karena $1 + a \leq 1 + b$, maka $\frac{1}{1+b} \leq \frac{1}{1+a}$, dan buktikan bahwa

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+a} = \frac{a+b}{1+a} \leq 1$$

(iii) $0 \leq ab^2 - ba^2 \leq \frac{1}{4}$

Untuk pertidaksamaan di ruas kiri, gunakan $ab^2 - ba^2 = ab(b - a)$ adalah hasil kali bilangan real non-negatif. Untuk pertidaksamaan di ruas kanan, perhatikan bahwa $b \leq 1 \Rightarrow b^2 \leq b \Rightarrow -b \leq -b^2$ dan kemudian

$$ab^2 - ba^2 \leq ab^2 - b^2a^2 = b^2(a - a^2) \leq a - a^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Kazarinof, N. D. 1961. *Analytic Inequalities*. United States of America: Holt, Rinehart and Winston Inc.
- Larson, R. E., & Hostetler, R. P. 1993. *College Algebra*. Lexington, Massachusetts: D C Heath and Company.
- Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., & Delgado, R. V. 2009. *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*. Boston: Birkhäuser Verlag AG.

BAB VI

PROGRAM LINEAR

Oleh Joni Wilson Sitopu

6.1 Pendahuluan

Susan Welch dan John C. Comer dalam Syamsi (1989) mendefinisikan program linier sebagai suatu teknik untuk menghitung kombinasi optimum dari sumber-sumber tersebut, untuk mencapai tujuan yang semaksimal mungkin seperti yang telah ditentukan sebelumnya. Agar kombinasi yang optimal dapat dicapai, program linier ini harus diperhitungkan. Masalah optimal melibatkan perhitungan keuntungan maksimum atau biaya terendah. Linear programming problem adalah masalah program linear yang penting dalam masalah optimasi, yang dapat menentukan daerah layak dan menyelesaikan persoalan optimasi untuk memiliki nilai fungsi tertinggi atau terendah.

Menurut Johannes Supranto (1991), program linier adalah teknik riset operasi untuk menyelesaikan masalah optimasi (maksimum atau minimum) dengan menggunakan persamaan dan pertidaksamaan linier untuk mencari solusi optimal dengan memperhatikan batasan-batasan yang ada. Fungsi linier yang ingin dicari nilai optimumnya adalah dalam bentuk persamaan yang disebut fungsi tujuan. Fungsi linier yang harus dipenuhi dalam optimasi fungsi tujuan dapat berupa persamaan atau pertidaksamaan yang disebut fungsi kendala (Dumairy, 2012).

Menurut David G. Luenberger and Yinyu Ye, (2008). Masalah Program linier dinyatakan dalam bentuk kanonik sebagai berikut :

$$\begin{array}{ll}\text{Maximize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \text{and} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

di mana x mewakili vektor variabel (akan ditentukan), c dan b adalah vektor koefisien (diketahui), A adalah matriks koefisien (diketahui), dan T matriks transpos. Fungsi tujuan ($c^T x$) yang akan dioptimalkan adalah Ekspresi yang akan dimaksimalkan atau diminimalkan. Dengan kendala $Ax \leq b$ dan $x \geq 0$.

Program linier dalam penggunaannya banyak dijumpai pada berbagai bidang ilmu, yaitu bidang bisnis, ekonomi, teknik, kesehatan, dll yang menggunakan model program linier meliputi transportasi, energi, telekomunikasi, dan manufaktur. Ini telah terbukti berguna dalam memodelkan beragam jenis masalah dalam perencanaan, perutean, penjadwalan, penugasan, dan desain.

6.2 Komponen Program Linier

Menurut Siswanto (2007) program linear adalah sebagai metode matematis untuk menentukan solusi optimal dengan memaksimalkan atau meminimalkan fungsi tujuan dari sekumpulan kendala terhadap suatu susunan kendala. Tujuan dari program linier adalah untuk memecahkan masalah memaksimalkan atau meminimalkan untuk mendapatkan solusi yang optimal.

Menurut Siswanto (2007) terdapat tiga unsur utama komponen program linear yaitu :

1. Variabel keputusan

Variabel keputusan adalah variabel yang mempengaruhi nilai tujuan yang ingin dicapai. Langkah awal sebelum menentukan fungsi tujuan dan fungsi kendala.

2. Fungsi tujuan

Fungsi tujuan dimaksimalkan atau diminimalkan terhadap fungsi kendala yang ada.

3. Fungsi kendala

Fungsi kendala untuk model program linier juga harus merupakan fungsi linier.

4. Fungsi non-negatif

Fungsi yang menyatakan bahwa setiap variabel yang terdapat dalam model program linier tidak boleh negatif. Secara matematis ditulis sebagai $x_1, x_2, \dots, x_j \geq 0$

6.3 Asumsi-asumsi Dasar Program Linear

Pada bentuk umum model program linear, Menurut Pangestu Subagyo, (1995), Ada beberapa asumsi-asumsi dasar program linear yaitu :

a. *Proportionality* (kesebandingan)

Asumsi ini berarti bahwa naik turunnya nilai fungsi tujuan dan penggunaan sumber daya atau fasilitas yang tersedia akan berubah sebanding dengan perubahan tingkat aktivitas.

b. *Additivity* (penambahan)

Diasumsikan bahwa kenaikan nilai tujuan yang disebabkan oleh peningkatan suatu kegiatan dapat ditambahkan tanpa mempengaruhi porsi tujuan. nilai yang diperoleh dari kegiatan lain.

c. *Divisibility* (dapat dibagi)

Asumsi ini menyatakan bahwa output yang dihasilkan oleh setiap kegiatan dapat berupa angka-angka. Begitu pula dengan nilai gol yang dihasilkan.

d. *Deterministic* (kepastian)

Asumsi ini menyatakan bahwa semua parameter yang terdapat dalam model program linear (a_{ij} , b_i , c_j) dapat diestimasi dengan pasti.

6.4 Masalah Program Linear

Masalah program linear adalah masalah optimisasi bersyarat yaitu mencari nilai maksimum atau nilai minimum sesuatu fungsi tujuan dengan kendala yang harus dipenuhi. Masalah-masalah tersebut secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut (Johannes Supranto, 1991) : Fungsi tujuan memaksimumkan dinotasikan dengan Z dan relasi dalam kendala berbentuk ($\leq$) sehingga bentuknya dapat dilihat pada persamaan (1).

Fungsi tujuan :

$$\text{Maks } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j \quad (1)$$

Dengan kendala-kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j \leq b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j \leq b_i$$

Kendala non negatif

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

Fungsi tujuan meminimumkan dinotasikan dengan W dan relasi dalam kendala berbentuk ($\geq$) sehingga menjadi

Fungsi tujuan :

$$\text{Min } W = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j \quad (2)$$

Dengan kendala-kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j \geq b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j \geq b_i$$

Kendala non negatif

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

dengan:

x_j : variabel keputusan ke- j ($j = 1, 2, \dots, n$)

b_i : suku tetap ke i ($i = 1, 2, \dots, m$)

a_{ij} : koefisien kendala i ke j

c_j : koefisien unit j

Secara keseluruhan model matematis yang digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan program linear dapat disusun ke dalam bentuk Tabel 6.1.

Tabel 6.1 Bentuk umum tabel model program linear

	c_j	c_1	c_2	$\dots$	c_n	
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i/x_j$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	b_i
c_1^-	$\bar{x}_1$	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	b_1
c_2^-	$\bar{x}_2$	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{c}_m$	$\bar{x}_m$	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	b_m
	z_j	z_1	z_2	$\dots$	z_n	z
	$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_1$	$\dots$	$z_n - c_n$	

Sumber : B.Susanta, (1994)

Keterangan:

x_j : variabel keputusan ke- j ($j = 1, 2, \dots, n$)

$\bar{x}_i$: variabel basis ke- i ($i = 1, 2, \dots, m$)

c_j : koefisien unit j

$\bar{c}_i$: koefisien milik variabel basis ke- i ($i = 1, 2, \dots, m$)

a_{ij} : koefisien kendala ke- i unit j

b_i : suku tetap jenis ke- i

z_j : $\sum c_i a_{ij}$ (jumlah hasil kali $\bar{c}_i$ dengan kolom a_{ij})

z : $\sum c_i b_i$ (jumlah hasil kali $\bar{c}_i$ dengan kolom b_i)

$z_j - c_j$: selisih z_j dengan c_j

6.5 Metode untuk Memecahkan Masalah Program Linier

Masalah program linier akan terdiri dari variabel keputusan, fungsi tujuan, kendala, dan pembatasan non-negatif. Variabel keputusan, x , dan y , memutuskan output dari masalah LP dan mewakili solusi akhir. Fungsi tujuan, Z , adalah fungsi linier yang perlu dioptimalkan (dimaksimalkan atau diminimalkan) untuk mendapatkan solusi. Kendala adalah batasan yang dikenakan pada variabel keputusan untuk membatasi nilainya. Variabel keputusan harus selalu memiliki nilai non-negatif yang diberikan oleh pembatasan non-negatif. Rumus umum dari masalah program linier diberikan di bawah ini:

Fungsi Tujuan: $Z = ax + by$

Batasan: $cx + dy \leq e$, $fx + gy \leq h$. Pertidaksamaan juga bisa berupa " $\geq$ "

Pembatasan non-negatif: $x \geq 0$, $y \geq 0$

Bagian terpenting dari pemecahan masalah program linier adalah pertama-tama merumuskan masalah menggunakan data yang diberikan. Berikut ini adalah langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah program linier :

- Langkah 1: Identifikasi variabel keputusan.
- Langkah 2: Rumuskan fungsi tujuan. Periksa apakah fungsi perlu diminimalkan atau dimaksimalkan.
- Langkah 3: Tuliskan kendalanya.
- Langkah 4: Pastikan bahwa variabel keputusan lebih besar atau sama dengan 0. (Pengekangan non-negatif)
- Langkah 5: Memecahkan masalah pemrograman linier menggunakan metode simpleks atau grafis.

Ada dua metode utama yang tersedia untuk menyelesaikan masalah program linier. Ini adalah metode simpleks dan metode grafis.

6.5.1 Metode Simpleks

Prosedur penyelesaian permasalahan linear programming dengan menggunakan metode simpleks dapat dilakukan dengan Langkah Langkah sebagai berikut :

- a. Menentukan variabel keputusan dan mengidentifikasi tujuan yang ingin dicapai
- b. Membuat tabel linear programming yang berisikan informasi lengkap.
- c. Memformulasikan persamaan dan pertidaksamaan secara matematis.
- d. Mengubah pertidaksamaan menjadi persamaan dengan memasukkan variabel *slack* (S) kedalam persamaan kendala
- e. Menbuat tabel awal simpleks yaitu dengan cara membuat tabel dimana jumlah kolom dan baris disesuaikan dengan kasusnya.
- f. Melakukan uji optimal dan jika telah optimal pengerjaan selesai.
- g. Jika belum optimal lakukan uji optimal Kembali, demikian seterusnya hingga diperoleh hasil optimal.

Contoh 1 :

Misalkan fungsi tujuan $Z = 40x_1 + 30x_2$

Perlu dimaksimalkan dan kendala diberikan sebagai berikut:

$$x_1 + x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Langkah 1:

Tambahkan variabel lain, yang dikenal sebagai variabel slack, untuk mengubah pertidaksamaan menjadi persamaan. Juga, tulis ulang fungsi tujuan sebagai persamaan.

$$-40x_1 - 30x_2 + Z = 0$$

$$x_1 + x_2 + y_1 = 12$$

$$2x_1 + x_2 + y_2 = 16$$

y_1 dan y_2 adalah slack variables.

Langkah 2:

Bangun matriks simpleks awal sebagai berikut:

x_1	x_2	y_1	y_2	Z	
1	1	1	0	0	12
2	1	0	1	0	16
-40	-30	0	0	1	0

Langkah 3:

Identifikasi kolom dengan entri negatif tertinggi. Ini disebut kolom pivot. Karena -40 adalah entri negatif tertinggi, maka kolom 1 akan menjadi kolom pivot.

Langkah 4:

Bagilah entri di kolom paling kanan dengan entri di kolom pivot. Kami mengecualikan entri di baris paling bawah.

$$12 / 1 = 12$$

$$16 / 2 = 8$$

Baris yang berisi hasil bagi terkecil diidentifikasi untuk mendapatkan baris pivot. Karena 8 adalah hasil bagi yang lebih kecil dibandingkan dengan 12, maka baris 2 menjadi baris pivot. Perpotongan baris pivot dan kolom pivot memberikan elemen pivot.

Jadi, elemen pivot = 2.

Langkah 5:

Dengan bantuan elemen pivot, lakukan pivot, menggunakan properti matriks, untuk membuat semua entri lain di kolom pivot 0.

Menggunakan operasi dasar bagi baris 2 dengan 2 ($R2/2$)

x1	x2	y1	y2	Z	
1	1	1	0	0	16
1	1/2	0	1/2	0	8
-40	-30	0	0	1	0

Tetapkan $R1 = R1 - R2$

x1	x2	y1	y2	Z	
0	1/2	1	-1/2	0	4
1	1/2	0	1/2	0	8
-40	-30	0	0	1	0

Terakhir, tetapkan $R3 = R3 + 40R2$

x1	x2	y1	y2	Z	
0	1/2	1	-1/2	0	4
1	1/2	0	1/2	0	8
0	-10	0	20	1	320

Langkah 6:

Periksa apakah baris paling bawah memiliki entri negatif. Jika tidak, maka solusi optimal telah ditentukan. Jika ya, kembali ke langkah 3 dan ulangi prosesnya. -10 adalah entri negatif dalam matriks sehingga proses perlu diulang. Kami mendapatkan matriks berikut.

x1	x2	y1	y2	Z	
0	1	2	-1	0	8
1	0	-1	1	0	4
0	0	20	10	1	400

Menulis baris bawah dalam bentuk persamaan kita mendapatkan $Z = 400 - 20y_1 - 10y_2$

Jadi, 400 adalah nilai tertinggi yang dapat dicapai Z ketika keduanya y_1 dan y_2 adalah 0.

Juga, ketika $x_1 = 4$ dan $x_2 = 8$ maka nilai $Z = 400$

Dengan demikian, $x_1 = 4$ dan $x_2 = 8$ adalah titik optimal dan solusi untuk masalah program linier.

6.5.2. Metode Grafik

Cara paling mudah untuk menyelesaikan masalah linear programming yang mengandung dua atau tiga variabel keputusan adalah dengan metode grafik. Proses pengambilan keputusan atau pemecahan masalah dilakukan dengan cara memilih titik yang memenuhi kendala serta yang menghasilkan nilai fungsi dan tujuan yang paling besar bila khususnya adalah maksimisasi atau yang paling kecil bila khususnya minimisasi, proses penyelesaian linear programming dapat digambarkan sebagai berikut :

- a. Menentukan variabel keputusan dan mengidentifikasi tujuan yang ingin dicapai.
- b. Membuat tabel program linear
- c. Menentukan model persamaan dan pertidaksamaan secara matematis.
- d. Membuat grafik.
- e. Menentukan garis kendala (*constraint lines*) dan daerah layak (*feasible region*)
- f. Menentukan garis persamaan tujuan dan titik optimal (*optimal point*)
- g. Menentukan bauran produksi yang optimal.

Contoh 2 :

Untuk mengatasi masalah ini dengan menggunakan metode grafis langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

Langkah 1:

Tulis semua kendala pertidaksamaan dalam bentuk persamaan.

$$x + 4y = 24$$

$$3x + y = 21$$

$$x + y = 9$$

Langkah 2:

Plot garis-garis ini pada grafik dengan mengidentifikasi titik uji.

$x + 4y = 24$ adalah garis yang melalui $(0, 6)$ dan $(24, 0)$.

Dengan mensubstitusi $x = 0$ diperoleh titik $(0, 6)$. Demikian pula, ketika $y = 0$ titik $(24, 0)$ ditentukan.

$3x + y = 21$ melewati $(0, 21)$ dan $(7, 0)$.

$x + y = 9$ melewati $(9, 0)$ dan $(0, 9)$.

Langkah 3:

Identifikasi wilayah yang layak. Daerah layak dapat didefinisikan sebagai daerah yang dibatasi oleh sekumpulan koordinat yang dapat memenuhi beberapa sistem pertidaksamaan tertentu.

Setiap titik yang terletak pada atau di bawah garis $x + 4y = 24$ akan memenuhi kendala $x + 4y \leq 24$.

Demikian pula, titik yang terletak pada atau di bawah garis $3x + y = 21$ memenuhi $3x + y \leq 21$.

Juga, sebuah titik yang terletak pada atau di bawah garis $x + y = 9$ memenuhi $x + y \leq 9$.

Wilayah layak diwakili oleh OABCD karena memenuhi semua tiga pembatasan yang disebutkan di atas.

Langkah 4:

Tentukan koordinat titik sudut. Titik-titik sudut adalah simpul-simpul dari daerah fisibel.

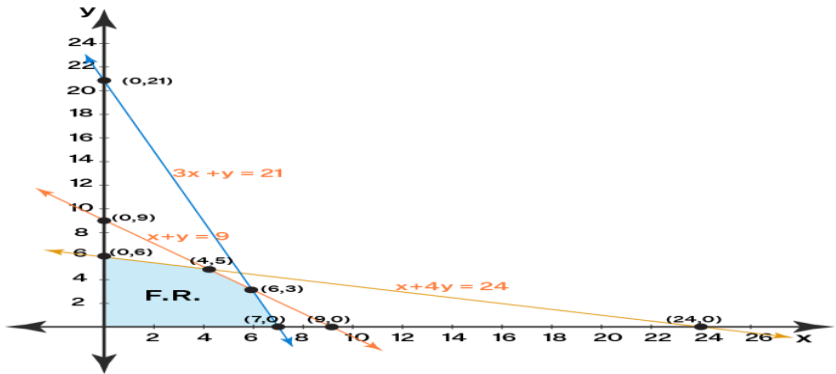
$$O = (0, 0)$$

$A = (7, 0)$

$B = (6, 3)$. B adalah perpotongan dua garis $3x + y = 21$ dan $x + y = 9$. Jadi, dengan mensubstitusi $y = 9 - x$ pada $3x + y = 21$ kita dapat menentukan titik potongnya.

$C = (4, 5)$ dibentuk oleh perpotongan $x + 4y = 24$ dan $x + y = 9$

$D = (0, 6)$



Gambar 6.1. Grafik koordinat titik sudut

Langkah 5:

Substitusikan setiap titik sudut ke dalam fungsi tujuan. Titik yang memberikan nilai terbesar (memaksimalkan) atau terkecil (memperkecil) dari fungsi tujuan akan menjadi titik optimal.

Tabel 6.2 Nilai Optimal

Sudut point	$Z = 2x + 5y$
$O = (0, 0)$	0
$A = (7, 0)$	14
$B = (6, 3)$	27
$C = (4, 5)$	33
$D = (0, 6)$	30

33 adalah nilai maksimum Z dan terjadi di C . Jadi, penyelesaiannya adalah $x = 4$ dan $y = 5$.

6.6 Aplikasi Program Linier

1. Merancang jadwal produksi yang dapat memenuhi permintaan masa depan (musiman atau sebaliknya) untuk produk perusahaan dan pada saat yang sama meminimalkan biaya produksi (termasuk persediaan).
2. Pilihan investasi dari berbagai saham dan surat utang untuk memaksimalkan laba atas investasi.
3. Alokasi anggaran publisitas yang terbatas pada berbagai kepala untuk memaksimalkan efektivitasnya.
4. Pemilihan bauran produk untuk memanfaatkan sumber daya yang tersedia sebaik mungkin seperti jam kerja mesin, dll. dengan tujuan untuk memaksimalkan keuntungan.
5. Memilih bauran iklan yang akan memaksimalkan manfaat sesuai dengan total anggaran iklan, Pemrograman Linier diterapkan secara efektif.
6. Penentuan sistem distribusi yang akan meminimalkan biaya transportasi dari beberapa gudang ke berbagai pasar.
7. Merancang, routing dan masalah penugasan.
8. Masalah Manufaktur (*Manufacturing Problems*). Untuk menemukan jumlah barang dari setiap jenis yang harus diproduksi untuk memaksimalkan keuntungan tunduk pada pembatasan produksi yang dikenakan oleh pembatasan penggunaan mesin dan tenaga kerja.
9. Masalah Transportasi (*Transportation Problems*). Untuk menemukan cara paling murah untuk mengangkut pengiriman dari gudang ke pelanggan.
10. Masalah Pola Makan (*Diet Problems*). Untuk menentukan kebutuhan minimum zat gizi tergantung pada ketersediaan makanan dan harganya.
11. Masalah Pencampuran (*Blending Problems*). Untuk menentukan jumlah optimum dari beberapa konstituen

yang akan digunakan dalam memproduksi satu set produk sekaligus menentukan jumlah optimum setiap produk yang akan diproduksi.

12. Masalah Perakitan (*Assembling Problems*). Memiliki kombinasi komponen dasar yang terbaik untuk menghasilkan barang sesuai dengan spesifikasi tertentu.
13. Masalah Produksi (*Production Problems*). Untuk memutuskan jadwal produksi untuk memenuhi permintaan dan meminimalkan biaya dalam menghadapi tingkat fluktuasi dan biaya penyimpanan.
14. Masalah Penugasan Pekerjaan (*Job Assigning Problems*). Untuk memberikan pekerjaan kepada pekerja untuk efektivitas maksimum dan hasil yang optimal tunduk pada pembatasan upah dan biaya lainnya.
15. Masalah Trim-Loss (*Trim-Loss Problems*). Untuk menentukan cara terbaik untuk mendapatkan berbagai gulungan kertas kecil dari lebar gulungan standar yang disimpan dalam persediaan dan, pada saat yang sama, meminimalkan pemborosan.

DAFTAR PUSTAKA

- B. Susanta. (1994). *Program Linear*. Yogyakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi.
- David G. Luenberger and Yinyu Ye, (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer Science+Business Media, LLC. Fourth Edition Stanford University. Stanford, CA, USA
- Dumairy. (2012). *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.
- George B. Dantzig and Mukund N. Thapa, (1997). *Linear Programming, 1: Introduction*, Springer. Verlag Newyork. Berlin Heldelberg
- Johannes Supranto. (1991). *Riset Operasii untuk Pengambilan Keputusan*. Jakarta: Raja Grafindo Persada.
- Pangestu Subagyo, (1995). *Dasar-dasar operations research*. Yogyakarta : BPFE.
- Siswanto. (2007). *Operations Research Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Syamsi, Ibnu (1989). *Pengambilan keputusan (Decision making)*. Jakarta : Bina Aksara.

BAB VII

PERBANDINGAN TROGONOMETRI

Oleh Elfira Rahmadani

7.1 Definisi Trigonometri

Trigonometri adalah bidang matematika yang mempelajari hubungan antara panjang dan sudut sebuah segitiga. Trigonometri dimulai pada abad ke-3 dengan penggunaan geometri untuk mempelajari astronomi (Wikipedia 2022) Trigonometri adalah salah satu ilmu yang berhubungan dengan pengukuran sudut. Trigonometri berasal dari dua kata Yunani :Trigonos yang berarti segitiga dan metron yang berarti ukuran (Cunayah and Irawan, 2014). Trigonometri adalah kata benda yang didefinisikan sebagai ilmu mengukur sudut dan terbatas pada segitiga. Menurut (Nurfauziah, 2013) trigonometri merupakan bidang matematika yang berkaitan dengan pengukuran fungsi trigonometri seperti sisi, sudut segitiga dan sinus, cosines, tange, dan keterkaitannya. Perbandingan trigonometri adalah perbandingan ukuran segitiga siku – siku jika dilihat dari salah satu sudut segitiga tersebut (Kariadinata, 2018).

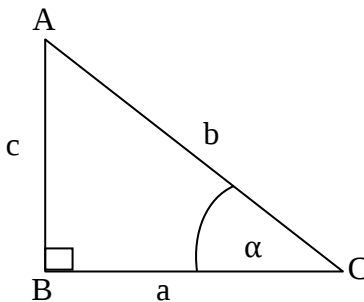
Sebelum membahas trigonometri lebih lanjut, konsep dasar yang perlu dipahami dalam trigonometri adalah konsep triple pythagoras, konsep dasar segitiga yang terdiri dari tiga buah sisi (sisi miring, sisi samping, dan sisi berhadapan), besar sudut dalam segitiga adalah 180° . Setelah memahami konsep – konsep tersebut, yang selanjutnya perlu dipahami ialah perbandingan segitiga siku-siku dan perhitungan segitiga siku-siku; Konsep perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut yang berhubungan; Rumus untuk jumlah, selisih, sudut ganda,

sudut pusat, perkalian dan penjumlahan; Konsep identitas trigonometri; Grafik trigonometri; Persamaan dan pertidaksamaan trigonometri; Konsep aturan sinus dan aturan kosinus; Konsep luas segitiga; penerapan trigonometri dalam pemecahan masalah (Nurfauziah and Sari 2013)

Dalam pembelajaran ini, akan membahas perbandingan trigonometri. Istilah perbandingan trigonometri dapat diartikan sebagai perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku

7.2 Perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku

Perhatikan gambar berikut.



- Sisi berhadapan sudut siku-siku, yaitu sisi AC = b disebut sisi miring.
- Sisi di depan sudut α° , yaitu sisi AB = c disebut sisi tegak.
- Sisi disamping sudut α° , yaitu sisi BC = a disebut sisi datar.

Gambar 7.1 Segitiga Siku-Siku

Perbandingan trigonometri pada sudut dalam sebuah segitiga siku-siku, misalkan sudut C (α) dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$\sin \alpha^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} \text{ (demi)} = \frac{c}{b} \qquad \operatorname{cosec} \alpha^\circ = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi depan}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} \text{ (sami)} = \frac{a}{b} \qquad \sec \alpha^\circ = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi samping}} = \frac{b}{a}$$

$$\tan \alpha^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} (\text{desa}) = \frac{c}{a} \quad \cotan \alpha^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi depan}} = \frac{a}{c}$$

Berdasarkan definisi diatas, dapat diturunkan hubungan antara perbandingan trigonometri, yaitu *rumus kebalikan* dan *rumus perbandingan*

1) Rumus Kebalikan

$$\begin{aligned} \sin \alpha^\circ &= \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha^\circ} & \cos \alpha^\circ &= \frac{1}{\sec \alpha^\circ} \\ \tan \alpha^\circ &= \frac{1}{\cot \alpha^\circ} & \cot \alpha^\circ &= \frac{1}{\tan \alpha^\circ} \\ \sec \alpha^\circ &= \frac{1}{\cos \alpha^\circ} & \operatorname{cosec} \alpha^\circ &= \frac{1}{\sin \alpha^\circ} \end{aligned}$$

2) Rumus Perbandingan

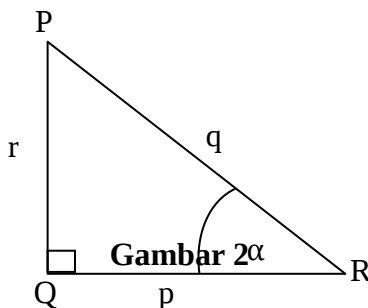
$$\begin{aligned} \tan \alpha^\circ &= \frac{\sin \alpha^\circ}{\cos \alpha^\circ} \\ \cot \alpha^\circ &= \frac{\cos \alpha^\circ}{\sin \alpha^\circ} \end{aligned}$$

3) Identitas Trigonometri

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \tan^2 \alpha &= \sec^2 \alpha \\ 1 + \cotan^2 \alpha &= \operatorname{cosec}^2 \alpha \end{aligned}$$

Contoh 1:

Perhatikan gambar di bawah ini!



Tentukanlah nilai dari keenam perbandingan trigonometri sudut PQR, jika $q = 7$ cm, $r = 5$ cm, dan $p = 4$ cm!

Penyelesaian:

Anda dapat secara langsung mencari nilai dari keenam perbandingan trigonometri tersebut karena nilai p, q, r telah diketahui.

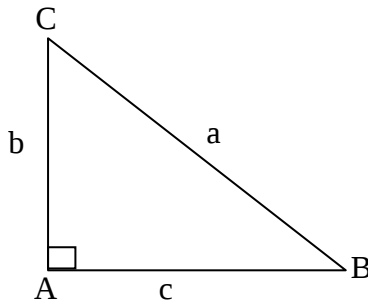
$$\sin \angle QRP = \frac{r}{q} = \frac{5}{7} \qquad \operatorname{cosec} \angle QRP = \frac{q}{r} = \frac{7}{5}$$

$$\cos \angle QRP = \frac{p}{q} = \frac{4}{7} \qquad \sec \angle QRP = \frac{q}{p} = \frac{7}{4}$$

$$\tan \angle QRP = \frac{r}{p} = \frac{5}{4} \qquad \cotan \angle QRP = \frac{p}{r} = \frac{4}{5}$$

Contoh 2:

Perhatikan gambar segitiga siku-siku berikut!



Buktikan pernyataan $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ dan $\csc^2 B - \cot^2 B = 1$.

Penyelesaian:

Berdasarkan pada rumus pythagoras, berlaku $a^2 = b^2 + c^2$.

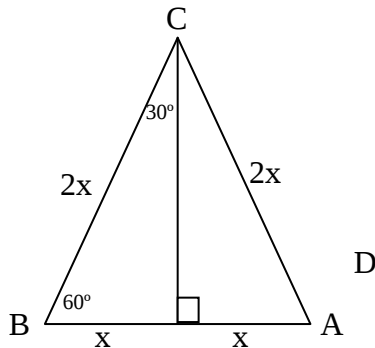
Maka pembuktian dari ruas kiri.

$$\begin{aligned} \sin^2 B + \cos^2 B &= \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 + \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 \\ &= \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} \right)^2 \\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\csc^2 B - \cot^2 B &= \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 - \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1\end{aligned}$$

7.3 Nilai Perbandingan Trigonometri Untuk Sudut Istimewa

1. Sudut 30° dan 60°



Gambar 7.2 Segitiga Sama sisi

Gambar diatas adalah segitiga sama sisi ABC, dimana titik D ialah titik pusat dari AB. ketika titik D ditarik garis tegak lurus AB ke C, segitiga tersebut dibagi menjadi dua segitiga yang sama besar dan dua segitiga siku-siku yang kongruen. Panjang $AB = BC = CA = 2x$ satuan dan $AD = BD = x$ satuan.

Berdasarkan rumus phytagoras:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2$$

$$CD^2 = (2x)^2 - (x)^2$$

$$CD^2 = 4x^2 - x^2$$

$$CD^2 = 3x^2$$

$$CD = \sqrt{3x^2}$$

$$CD = x\sqrt{3}$$

Perbandingan trigonometri pada suatu sudut dalam sebuah segitiga siku-siku berdasarkan sudut 30° sebagai berikut.

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle \alpha}{\text{sisi miring } \angle \alpha} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi samping } \angle \alpha} = - = -$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{sisi samping } \angle \alpha}{\text{sisi miring } \angle \alpha} = - = -$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi depan } \angle \alpha} = - = -$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle \alpha}{\text{sisi samping } \angle \alpha} = - = -$$

$$\cotan 30^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi depan } \angle \alpha} = - = -$$

Perbandingan trigonometri pada suatu sudut dalam sebuah segitiga siku-siku berdasarkan sudut 60° sebagai berikut.

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle \alpha}{\text{sisi miring } \angle \alpha} = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi samping } \angle \alpha} = - = -$$

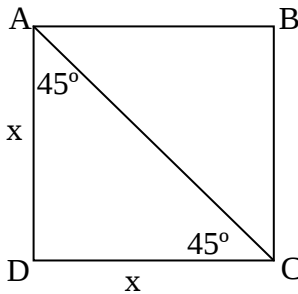
$$\cos 60^\circ = \frac{\text{sisi samping } \angle \alpha}{\text{sisi miring } \angle \alpha} = - = -$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi depan } \angle \alpha} = - = -$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle \alpha}{\text{sisi samping } \angle \alpha} = - = -$$

$$\cotan 60^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi depan } \angle \alpha} = - = -$$

2. Sudut 45°



Gambar disamping adalah sebuah gambar persegi ABCD. Diagonal dari titik A ke titik C sehingga sedemikian rupa sehingga persegi ABCD dibagi membentuk 2 buah segitiga siku-siku yang kongruen, dan memiliki panjang $AD = CD = x$

Gambar 7.3 Persegi ABCD

Berdasarkan rumus pythagoras:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$AC^2 = x^2 + x^2$$

$$AC^2 = 2x^2$$

$$AC^2 = \sqrt{2x^2}$$

$$AC^2 = x\sqrt{2}$$

Perbandingan trigonometri pada suatu sudut dalam sebuah segitiga siku-siku berdasarkan sudut 60° sebagai berikut.

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle \alpha}{\text{sisi miring } \angle \alpha} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi samping } \angle \alpha} = - = -$$

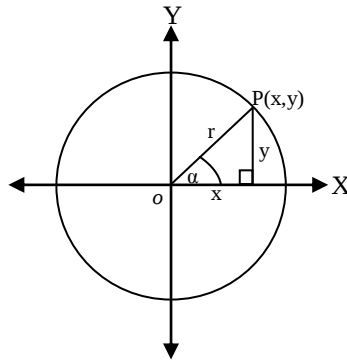
$$\cos 45^\circ = \frac{\text{sisi samping } \angle \alpha}{\text{sisi miring } \angle \alpha} = - = -$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi depan } \angle \alpha} = - = -$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle \alpha}{\text{sisi samping } \angle \alpha} = - = -$$

$$\cotan 45^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi depan } \angle \alpha} = - = -$$

3. Sudut 0° dan 90°



Gambar 7.4 Sudut 0° dan 90°

Jika titik $P(x,y)$ mendekati sumbu x dan berhimpit dengan sumbu x , maka $x = r, \angle\alpha = 0^\circ, y = 0$.

Maka:

$$\sin 0^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle\alpha}{\text{sisi miring } \angle\alpha} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\sec 0^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle\alpha}{\text{sisi samping } \angle\alpha} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\cos 0^\circ = \frac{\text{sisi samping } \angle\alpha}{\text{sisi miring } \angle\alpha} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle\alpha}{\text{sisi depan } \angle\alpha} = \frac{r}{0} = \infty$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle\alpha}{\text{sisi samping } \angle\alpha} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cotan 0^\circ = \frac{\text{sisi samping } \angle\alpha}{\text{sisi depan } \angle\alpha} = \frac{r}{0} = \infty$$

Jika titik $P(x,y)$ mendekati sumbu y dan berhimpit dengan sumbu y , maka $y = r, \angle\alpha = 90^\circ, x = 0$. Maka:

$$\sin 90^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle \alpha}{\text{sisi miring } \angle \alpha} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\sec 90^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi samping } \angle \alpha} = - = -$$

$$\cos 90^\circ = \frac{\text{sisi samping } \angle \alpha}{\text{sisi miring } \angle \alpha} = - = -$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi depan } \angle \alpha} = - = -$$

$$\tan 90^\circ = \frac{\text{sisi depan } \angle \alpha}{\text{sisi samping } \angle \alpha} = - = -$$

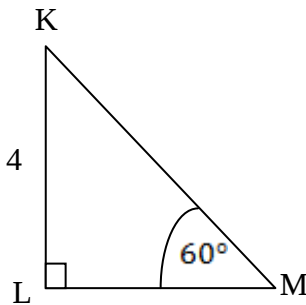
$$\cotan 90^\circ = \frac{\text{sisi miring } \angle \alpha}{\text{sisi depan } \angle \alpha} = - = -$$

Berdasarkan penjelasan diatas, maka nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa diperlihatkan dalam tabel berikut.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha^\circ$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	...	...	...	...
$\cos \alpha^\circ$	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\tan \alpha^\circ$	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sec \alpha^\circ$	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\operatorname{cosec} \alpha^\circ$	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\cotan \alpha^\circ$	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	210°	225°	270°	300°	315°	330°	330°	360°	
$\sin \alpha^\circ$	...	...	...	...	...	...	...	...	

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
cos α°	...	...	...	...	...	...	...	...	
tan α°	...	...	...	...	...	...	...	...	
sec α°	...	...	...	...	...	...	...	...	
cosec α°	...	...	...	...	...	...	...	...	
cotan α°	...	...	...	...	...	...	...	...	

Contoh 3:



Diketahui segitiga KLM siku-siku di L, sudut A = 60° dan KL = 4 cm, hitunglah panjang KM dan LM!

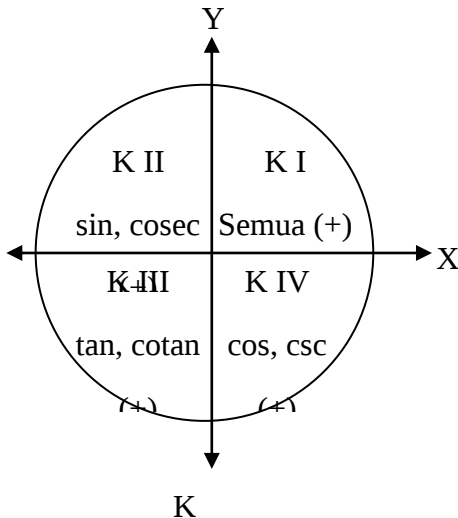
Penyelesaian:

$$\sin 60^\circ = \frac{KL}{KM} \rightarrow KM = \frac{KL}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{KL}{LM} \rightarrow LM = \frac{KL}{\tan 60^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

7.4 Perbandingan Trigonometri Sudut Berelasi

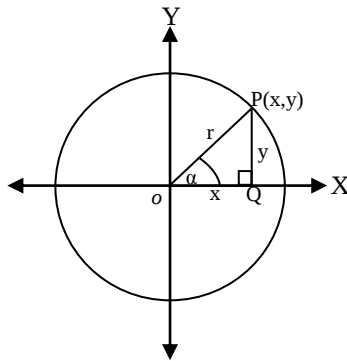
Sumbu koordinat membagi bidang koordinat menjadi 4 bagian yang disebut kuadran.



Gambar 7.5 Trigonometri Sudut

- Daerah $X \cdot OY^+$ disebut kuadran pertama (K I), besar sudut $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- Daerah Y^+OX^- disebut kuadran kedua (K II), besar sudut $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- Daerah $X \cdot OY^-$ disebut ketiga (K III), besar sudut $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
- Daerah Y^-OX^+ disebut kuadran keempat (K IV), besar sudut $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

1. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Pertama



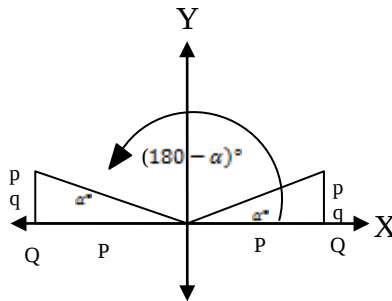
Gambar 7.6 Trigonometri Sudut di Kuadran Pertama

Segitiga siku-siku OPQ dengan siku-siku di Q
dimana $\angle O = \alpha$, $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = 90^\circ - \alpha$

Rumus perbandingan trigonometri sudut α° dengan $(90 - \alpha)^\circ$

- $\sin(90 - \alpha)^\circ = \cos \alpha^\circ$
- $\cos(90 - \alpha)^\circ = \sin \alpha^\circ$
- $\tan(90 - \alpha)^\circ = \cotan \alpha^\circ$
- $\cotan(90 - \alpha)^\circ = \tan \alpha^\circ$
- $\sec(90 - \alpha)^\circ = \csc \alpha^\circ$
- $\csc(90 - \alpha)^\circ = \sec \alpha^\circ$

2. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Kedua



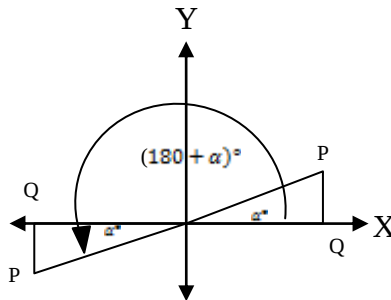
Gambar 7.7 Trigonometri Sudut di Kuadran Kedua

Segitiga POQ dicerminkan terhadap sumbu Y
Relasi antara sudut α° dengan $(180 - \alpha)^\circ$ adalah
saling berpelurus

Rumus perbandingan trigonometri sudut α°
dengan $(180 - \alpha)^\circ$

- $\sin(180 - \alpha)^\circ = \sin \alpha^\circ$
- $\cos(180 - \alpha)^\circ = -\cos \alpha^\circ$
- $\tan(180 - \alpha)^\circ = -\tan \alpha^\circ$
- $\cotan(180 - \alpha)^\circ = -\cotan \alpha^\circ$
- $\sec(180 - \alpha)^\circ = -\sec \alpha^\circ$
- $\csc(180 - \alpha)^\circ = \csc \alpha^\circ$

3. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Ketiga



Gambar 7.8 Trigonometri Sudut di Kuadran Ketiga

Segitiga POQ dicerminkan terhadap titik pangkat O

Rumus perbandingan trigonometri sudut α°

dengan $(180 + \alpha)^\circ$

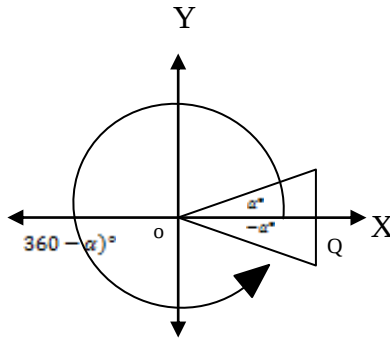
- $\sin(180 + \alpha)^\circ = -\sin \alpha^\circ$
- $\cos(180 + \alpha)^\circ = -\cos \alpha^\circ$
- $\tan(180 + \alpha)^\circ = \tan \alpha^\circ$
- $\cotan(180 + \alpha)^\circ = \cotan \alpha^\circ$
- $\sec(180 + \alpha)^\circ = -\sec \alpha^\circ$
- $\csc(180 + \alpha)^\circ = -\csc \alpha^\circ$

4. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Keempat

Segitiga POQ dicerminkan terhadap sumbu X

Rumus perbandingan trigonometri sudut α°

dengan $(360 - \alpha)^\circ$



Gambar 7.9 Trigonometri Sudut di Kuadran Keempat

$$\sin(360 - \alpha)^\circ = -\sin \alpha^\circ$$

- $\cos(360 - \alpha)^\circ = \cos \alpha^\circ$
- $\tan(360 - \alpha)^\circ = -\tan \alpha^\circ$
- $\cotan(360 - \alpha)^\circ = -\cotan \alpha^\circ$
- $\sec(360 - \alpha)^\circ = \sec \alpha^\circ$
- $\csc(360 - \alpha)^\circ = -\csc \alpha^\circ$

5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Lebih dari 360°

Besar sudut dalam 1 putaran = 360° . Sehingga besar sudut yang lebih dari 360° , misal $(180 + \alpha)^\circ$ akan sama dengan α° .

Rumus perbandingan trigonometri sudut α° dan sudut $(\alpha^\circ + n \cdot 360)^\circ$

- $\sin(\alpha^\circ + n \cdot 360)^\circ = \sin \alpha^\circ$
- $\cos(\alpha^\circ + n \cdot 360)^\circ = \cos \alpha^\circ$
- $\tan(\alpha^\circ + n \cdot 360)^\circ = \tan \alpha^\circ$
- $\cotan(\alpha^\circ + n \cdot 360)^\circ = \cotan \alpha^\circ$

- $\sec (\alpha^{\circ} + n. 360)^{\circ} = \sec \alpha^{\circ}$
- $\csc (\alpha^{\circ} + n. 360)^{\circ} = \csc \alpha^{\circ}$

Contoh 4:

Tentukanlah nilai dari:

- $\cos 1200^{\circ}$
- $\sin 150^{\circ} + \cos 300^{\circ}$

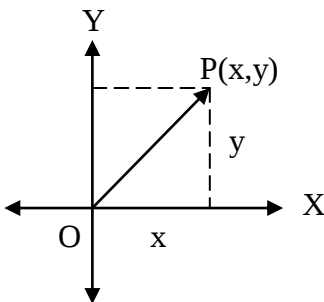
Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{a. } \cos 1200^{\circ} &= \cos (120^{\circ} + 3. 360^{\circ}) \\ &= \cos 120^{\circ} \\ &= -\cos 60^{\circ} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

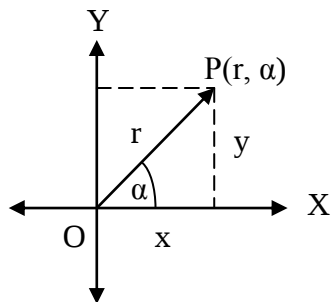
$$\begin{aligned} \text{b. } \sin 150^{\circ} &= \sin (180^{\circ} - 30^{\circ}) = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2} \\ \cos 300^{\circ} &= \cos (360^{\circ} - 60^{\circ}) = \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2} \\ \sin 150^{\circ} + \cos 300^{\circ} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

A. Koordinat Kartesius dan Koodinat Kutub

Cara lain dalam menyajikan letak sebuah titik pada bidang xy selain koordinat kartesius adalah dengan koordinat kutub.



Gambar 7.10 Koordinat kartesius



Gambar 7.11 Koordinat kutub

Pada gambar 11, titik $P(x,y)$ pada koordinat kartesius dapat disajikan dalam koordinat kutub dengan titik $P(r,\alpha)$ seperti gambar 12. Jika koordinat kutub titik $P(r,\alpha)$ diketahui, maka koordinat kartesius dapat dicari hubungan:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cos \alpha \quad \text{sehingga koordinat}$$

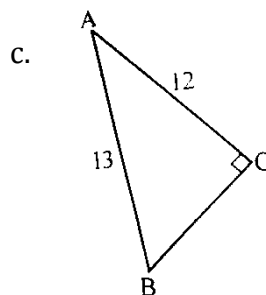
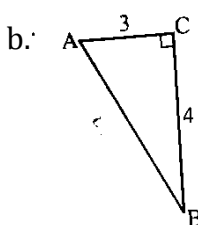
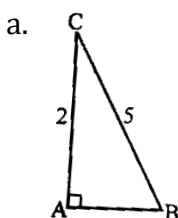
kutubnya ialah:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \sin \alpha$$

$$P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

LATIHAN

1. Sebuah segitiga ABC siku-siku di B, sudut di C adalah α , jika $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Tentukanlah perbandingan $\sin \alpha$ dan $\tan \alpha$!
2. Carilah nilai – nilai perbandingan trigonometri untuk sudut B pada gambar –gambar segitiga berikut.



3. Koordinat kartesius dari titik B (4, 210°) ialah.....
4. Hitunglah $\frac{\sin 120^\circ - \cos 135^\circ}{\sin 150^\circ + \cos 150^\circ}$.
5. Carilah nilai perbandingan trigonometri untuk sudut X pada segitiga XYZ yang siku-siku di Y bila diketahui panjang sisi:
 - a. $a = 4$, $b = 1$
 - b. $a = 2$, $b = 8$
6. Tentukan hasil dari:
 $\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$!
7. Diketahui $\sin \alpha = p$ dan $\sin \beta = q$, maka $\sin(\alpha + \beta)$ adalah....
8. Tentukan nilai $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$, jika diketahui
 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{8}{25}$.
9. Sebuah segitiga JKL dengan panjang KL = 300 cm, sudut JKL = 60° , dan sudut KLJ = 75° , maka panjang JK adalah....

10. Hitunglah:

a. $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 105^\circ + \cos 15^\circ}$

b. $\cos 25^\circ + \cos 95^\circ + \cos 145^\circ$

c. $\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

DAFTAR PUSTAKA

- Cucun Cunayah, S. P., and S. S. Etsa Indra Irawan. 2014. *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Untuk SMA/SMK*. IV. edited by M. Drs. Suwah Sembiring. Bandung: CV. YRAMA WIDYA.
- Nurfauziah, Puji, and veny triyana andika Sari. 2013. "Bahan Ajar Trigonometri." *IKIP Siliwangi* 0–50.
- Prof.Dr.Hj. Rahayu Kariadinata, M. P. 2018. *Trigonometri Dasar*. III. edited by T. R. P. Setia. Bandung: CV. PUSTAKA SETIA.
- Wikipedia. 2022. "Trigonometri." *Wikipedia, Ensiklopedia Bebas*.

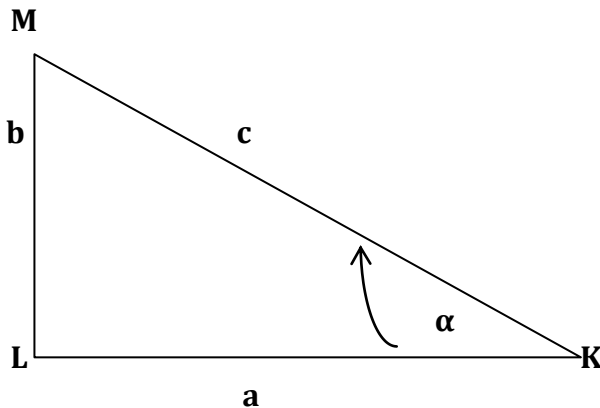
BAB VIII

TRIGONOMETRI UNTUK JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT

Oleh Syahriani Sirait

8.1 Jumlah Dua sudut

Rumus jumlah dan selisih dua sudut digunakan untuk menentukan nilai sudut yang tidak ada dalam sudut istimewa (Kurnianingsih, 2007) . Untuk menentuka sudut istimewa ada dua cara yang bisa digunakan yaitu dengan menggunakan rumus identitas trigonometri dan menentukan nilai sudut istimewa.



Gambar 8.1 Segitiga

Dapat dilihat pada Gambar 8.1 di atas, $\triangle KLM$ merupakan segitiga yang salah satu sudutnya adalah α dan sudut tersebut siku-siku. Karena $\angle MLK = \alpha$ dan misal $KL = a, LM = b$, dan $KM = c$, sehingga berdasarkan

$\triangle KLM$ diperoleh enam perbandingan panjang sisi suatu segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku.

Perbandingan dimaksud sesuai dengan gambar 8.1 adalah: $\frac{LM}{KM}, \frac{KL}{KM}, \frac{LM}{KL}, \frac{KL}{LM}, \frac{KM}{LM}, \frac{KM}{KL}$.

Keenam perbandingan tersebut dinamakan perbandingan goniometri. Karena $KL = a, LM = b, KM = c$ dan $\angle LKM = \alpha$ maka perbandingan goniometri di atas dapat dinyatakan dalam bentuk yang lain yaitu:

1. $\frac{LM}{KL} = \frac{b}{a} = \sin \alpha$
2. $\frac{KL}{KM} = \frac{a}{c} = \cos \alpha$
3. $\frac{LM}{KL} = \frac{\frac{LM}{KM}}{\frac{KL}{KM}} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$
4. $\frac{KL}{LM} = \frac{\frac{KL}{KM}}{\frac{LM}{KM}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$
5. $\frac{KM}{KL} = \frac{1}{\frac{KL}{KM}} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$
6. $\frac{KM}{LM} = \frac{1}{\frac{LM}{KM}} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin \alpha} = \csc \alpha$

Menurut teorema Pythagoras jika suatu $\triangle KLM$ salah satu sudutnya siku-siku, maka berlaku:

$$KL^2 + LM^2 = KM^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Selanjutnya secara berurutan persamaan $a^2 + b^2 = c^2$ dibagi a^2, b^2, c^2 diperoleh persamaan baru

$$1. \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

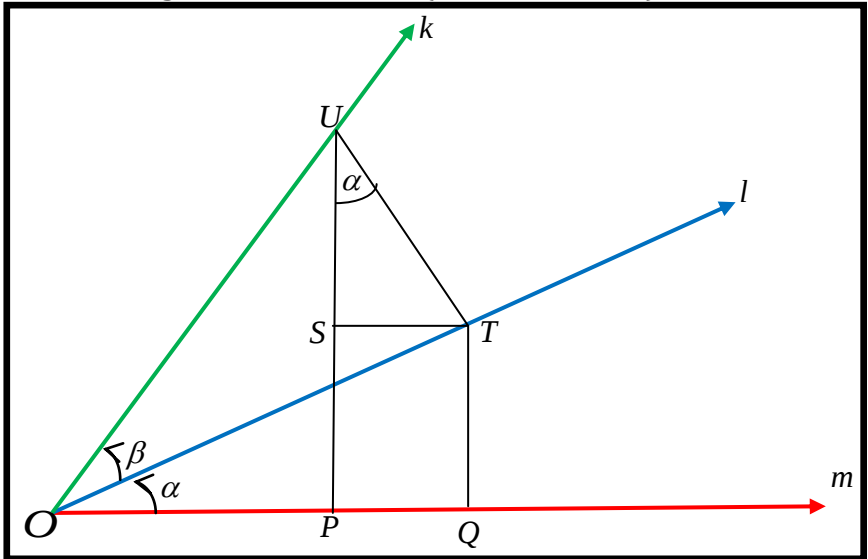
$$\begin{aligned} 2. \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} &= \frac{c^2}{a^2} \\ \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 &= \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 1 + (\tan \alpha)^2 &= (\sec \alpha)^2 \\ \Leftrightarrow 1 + \tan^2 \alpha &= \sec^2 \alpha \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} &= \frac{c^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1^2 &= \left(\frac{c}{b}\right)^2 \\ \Leftrightarrow (\cot \alpha)^2 + 1 &= (\csc \alpha)^2 \\ \Leftrightarrow \cot^2 \alpha + 1 &= \csc^2 \alpha \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

Persamaan (1), (2), dan (3) dinamakan rumus-rumus identitas.

Ada beberapa rumus yang dapat dibuat untuk menghitung jumlah dua sudut dengan menggunakan perbandingan trigonometri yang telah dibahas sebelumnya. Gambar berikut dapat digunakan untuk menunjukkan rumus jumlah dua sudut.

Perhatikan gambar berikut ini (Purnomo, 2016).



Gambar 8.2 4 Segitiga ΔQOT , ΔTSU , ΔOTU , dan ΔOPU

Pada gambar 8.2 di atas terdapat 4 segitiga dan masing-masing adalah siku-siku, yaitu ΔQOT , ΔTSU , ΔOTU , dan ΔOPU dan diketahui $\angle QOT = \alpha$, $\angle TOU = \beta$. $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ sehingga $\angle SUT = \alpha$ Berdasarkan ΔOPU diperoleh perbandingan panjang sisi

$$\sin \angle POU = \frac{UP}{OU} \text{ dengan } UP = PS + SU$$

Karena $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ maka $SU = UT \cos \alpha$

Karena $PS = QT$ dan karena ΔOQT siku-siku di $\angle TQU$ maka $OQ = OT \cos \alpha$ dan $QT = OT \sin \alpha$

Karena ΔOTU siku-siku di $\angle OTU$ maka $OT = OU \cos \beta$ dan $UT = OU \sin \beta$

Karena $\angle POU = \alpha + \beta$

$$\sin \angle POU = \frac{UP}{OU}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) &= \frac{UP}{OU} \\ &= \frac{PS + SU}{OU} \\ &= \frac{QT + SU}{OU} \\ &= \frac{OT \sin \alpha + UT \cos \alpha}{OU} \\ &= \frac{OU \cos \beta \sin \alpha + OU \sin \beta \cos \alpha}{OU}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh rumus
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \dots\dots\dots (4)$

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$\cos \angle POU = \frac{OP}{OU}, \text{ OP} = \text{OQ} - \text{PQ}$$

Karena $\triangle QOT \approx \triangle TSU$ maka $SU = UT \cos \alpha$

Karena $PQ = ST$ dan karena $\triangle UST$ siku-siku di $\angle TSU$ maka $ST = SU \sin \alpha$

Karena $\triangle OTU$ siku-siku di $\angle OTU$ maka $OT = OU \cos \beta$ dan $UT = OU \sin \beta$

Karena $\triangle OQT$ siku-siku di $\angle TQU$ maka $OQ = OT \cos \alpha$ dan $QT = OT \sin \alpha$

Karena $\angle POU = \alpha + \beta$

$$\cos \angle POU = \frac{UP}{OU}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) = \frac{OP}{OU}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{OQ - PQ}{OU} \\
&= \frac{OQ - ST}{OU} \\
&= \frac{OT \cos \alpha - UT \sin \alpha}{OU} \\
&= \frac{OU \cos \beta \cos \alpha - OU \sin \beta \sin \alpha}{OU}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh rumus $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
..... (5)

Karena $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Maka $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$

Sehingga menurut (4) dan (5)

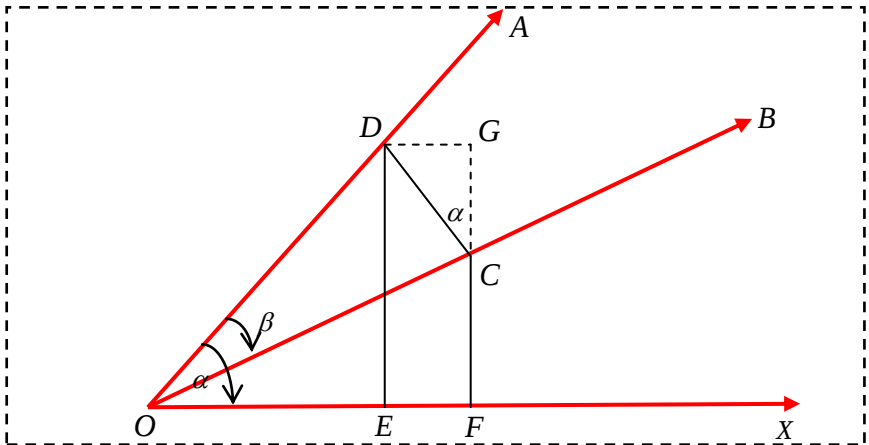
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan $\cos \alpha \cos \beta$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \\
&= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
&= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\
&= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}
\end{aligned}$$

Sehingga $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ (6)

8.2 Rumus Pengurangan Sudut



Gambar 8.3 Segitiga ΔXOA , ΔXOB , ΔDEO

Perhatikan gambar 4.4 di atas.

Misal $\angle XOA = \alpha$, $\angle AOB = \beta$, sehingga $\angle XOB = (\alpha - \beta)$

Misal C adalah titik pada OB Selanjutnya dibuat garis dengan ketentuan

$CD \perp OA$, $CF \perp OX$, $DE \perp OX$ dan $DG \perp FC$ sehingga $\angle DCG = \alpha$.

Jika $OC = p$ maka dalam ΔCDO diperoleh

$$\sin \beta = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{p} \text{ atau } CD = p \sin \beta$$

$$\cos \beta = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{p} \text{ atau } OD = p \cos \beta$$

Demikian pula dalam ΔDEO

$$\sin \alpha = \frac{DE}{OD} \text{ atau } DE = OD \sin \alpha$$

$$= p \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{OE}{OD} \text{ atau } OE = OD \cos \alpha$$

$$= p \sin \beta \cos \alpha$$

Dalam $\triangle CDG$

$$\sin \alpha = \frac{DG}{DC} \text{ atau } DG = DC \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{CG}{DC} \text{ atau } CG = \cos \alpha$$

Dengan demikian diperoleh

$$DG = p \sin \alpha \sin \beta$$

$$CG = p \cos \alpha \sin \beta$$

Sehingga

$$\sin \angle BOX = \frac{CF}{OC} = \frac{FG - CG}{OC} = \frac{DE - CD}{OC}$$

Atau

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{p \sin \alpha \cos \beta - p \cos \alpha \sin \beta}{p} = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \angle BOX = \frac{OF}{OC} = \frac{OE + EF}{OC} = \frac{OE + DG}{OC}$$

Atau

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{p \cos \alpha \cos \beta - p \sin \alpha \sin \beta}{p} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Berdasarkan kesamaan di atas, diperoleh

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan $\cos \alpha \cos \beta$, diperoleh:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \\ & \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \\ & \quad 1 + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Sehingga $\tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \dots\dots\dots$

8.3. Rangkuman Rumus trigonometri jumlah serta selisih dua sudut

Rumus – rumus jumlah serta selisih dua sudut

1. $\sin (M + N) = \sin M \cdot \cos N + \cos M \cdot \sin N$
2. $\sin (M - N) = \sin M \cdot \cos N - \cos M \cdot \sin N$
3. $\cos (M + N) = \cos M \cdot \cos N - \sin M \cdot \sin N$
4. $\cos (M - N) = \cos M \cdot \cos N + \sin M \cdot \sin N$
5. $\tan (M + N) = \frac{\tan M + \tan N}{1 - \tan M \cdot \tan N}$
6. $\tan (M - N) = \frac{\tan M - \tan N}{1 + \tan M \cdot \tan N}$

Pembuktian :

$$L_{abc} = L_{acd} + L_{bcd}$$

$$L_{abc} = \frac{1}{2}bt \sin M + \frac{1}{2}at \sin N$$

$$\frac{1}{2} ab \sin (M + N) = \frac{1}{2} bt \sin M + \frac{1}{2} at \sin N$$

$$\frac{ab \sin(M+N)}{ab} = \frac{bt \sin M}{ab} + \frac{at \sin N}{ab}$$

$$\sin (M + N) = \frac{t}{a} \sin M + \frac{t}{b} \sin N$$

$$\sin(M + N) = \sin M \cos N + \cos M \sin N$$

Jika sudut N negatif maka diperoleh :

$$\sin(M + (-N)) = \sin M \cos(-N) + \cos M \sin(-N)$$

$$\sin(M - N) = \sin M \cos N + \cos M (-\sin N)$$

$$\sin(M - N) = \sin M \cos N - \cos M \sin N$$

$$\begin{aligned} \cos(M + N) &= \sin(90^\circ - (M + N)) \\ &= \sin(90^\circ - M - N) \\ &= \sin((90^\circ - M) - N) \\ &= \sin(90^\circ - M) \cos N - \cos(90^\circ - M) \sin N \\ &= \cos M \cos N - \sin M \sin N \end{aligned}$$

$$\cos(M + N) = \cos M \cos N - \sin M \sin N$$

Jika sudut N negatif maka :

$$\cos(M + (-N)) = \cos M \cos(-N) - \sin M \sin(-N)$$

$$\cos(M - N) = \cos M \cos N + \sin M \sin N$$

$$\begin{aligned} \tan(M + N) &= \frac{\sin (M+N)}{\cos (M+N)} \\ &= \frac{\sin M \cos N + \cos M \sin N}{\cos M \cos N - \sin M \sin N} \times \frac{\frac{1}{\cos M \cos N}}{\frac{1}{\cos M \cos N}} \\ &= \frac{\tan M + \tan N}{1 - \tan M \tan N} \\ \tan(M + N) &= \frac{\tan M + \tan N}{1 - \tan M \tan N} \end{aligned}$$

jika sudut N negatif, maka :

$$\tan(M + (-N)) = \frac{\tan M + \tan(-N)}{1 - \tan M \tan(-N)}$$

$$\tan(M - N) = \frac{\tan M - \tan N}{1 + \tan M \tan N}$$

Contoh soal

1. Tentukanlah nilai dari $\sin 75^\circ$, gunakan konsep dua sudut

Penyelesaian :

Untuk menentukan nilai $\sin 75^\circ$ maka dipecah menjadi dua buah sudut istimewa yang diketahui dua buah sudutnya, yaitu 45° dan 30°

$$\sin(M + N) = \sin M \cos N + \cos M \sin N$$

$$\sin 75^\circ = \sin(M + N)$$

$$= \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Jadi jawabannya adalah $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

1. Nilai dari $\cos 345^\circ$ adalah

Penyelesaian

$$\cos 345^\circ = \cos(360^\circ - 15^\circ)$$

Maka perbandingan trigonometri yang paling cocok digunakan adalah $\cos 15^\circ$

$$\cos(E - F) = \cos E \cos F + \sin E \sin F$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45 - 30)$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \\
 &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

2. Rumus Trigonometri Sudut Rangkap

Rumus – rumus yang digunakan :

1. $\sin 2E = 2 \sin E \cdot \cos E$
2. $\cos 2E = \cos^2 E - \sin^2 E$
 $= 2 \cos^2 E - 1$
 $= 1 - 2 \sin^2 E$

Pembuktian :

$$\sin (E + F) = \sin E \cos F + \cos E \sin F$$

Jika sudut $F = E$, maka diperoleh :

$$\sin(E + E) = \sin E \cos E + \cos E \sin E$$

$$\sin 2E = 2 \sin E \cos E$$

$$\cos(E + F) = \cos E \cos F - \sin E \sin F$$

Jika sudut $F = E$, maka diperoleh :

$$\cos(E + E) = \cos E \cos E - \sin E \sin E$$

$$\cos 2E = \cos^2 E - \sin^2 E$$

$$\cos 2E = 1 - \sin^2 E - \sin^2 E$$

$$\cos 2E = 1 - 2\sin^2 E$$

Contoh soal (Abidin, 2016)

1. Jika $\sin x = \frac{1}{2}$ maka $\cos 2x$ adalah

Penyelesaian :

Jika ditanya $\cos$ maka gunakanlah rumus yang kedua

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

2. Diketahui $\cos A = \frac{7}{25}$, maka nilai dari $\sin 2A$ adalah

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin A \cdot \cos A \\ &= 2 \times \frac{24}{25} \times \frac{7}{25} \\ &= \frac{336}{625}\end{aligned}$$

8.4 Rumus-rumus Perkalian Sinus dan Cosinus

- $$\begin{aligned}2 \cos K \cdot \cos L &= \\ \cos (K+L) + \cos (K-L) &\text{ atau } \cos K \cdot \cos L = \\ \frac{1}{2} [\cos(K+L) + \cos(K-L)] &\end{aligned}$$
- a.
- $$\begin{aligned}2 \sin K \cdot \sin L &= \\ -[\cos(K+L) - \cos (K-L)] &\text{ atau } \sin K \cdot \sin L = \\ -\frac{1}{2} [\cos(K+L) - \cos(K-L)] &\end{aligned}$$
- b.
- $$\begin{aligned}2 \sin K \cdot \cos L &= \\ \sin (K+L) + \sin (K-L) &\text{ atau } \sin K \cos L = \frac{1}{2} [\sin (K+ \\ L) + \sin(K-L)] &\end{aligned}$$
- c.
- $$\begin{aligned}2 \cos K \cdot \sin L &= \\ \sin (K+L) - \sin (K-L) &\text{ atau } \cos K \cdot \sin L = \\ \frac{1}{2} [\sin(K+L) - \sin(K-L)] &\end{aligned}$$
- d.

Pembuktian :

$$\sin (K+L) = \sin K \cos L + \cos K \sin L$$

$$\sin (K-L) = \sin K \cos L - \cos K \sin L$$

$$\underline{\hspace{10em}} +$$

$$2 \sin K \cos L = \sin (K + L) + \sin (K - L)$$

$$\sin (K + L) = \sin K \cos L + \cos K \sin L$$

$$\sin (K - L) = \sin K \cos L - \cos K \sin L$$

$$\hline 2 \cos K \sin L = \sin (K + L) - \sin (K - L)$$

$$\cos (K + L) = \cos K \cos L - \sin K \sin L$$

$$\cos (K - L) = \cos K \cos L + \sin K \sin L$$

$$\hline 2 \cos K \cos L = \cos (K + L) + \cos (K - L)$$

$$\cos (K + L) = \cos K \cos L - \sin K \sin L$$

$$\cos (K - L) = \cos K \cos L + \sin K \sin L$$

$$\hline 2 \sin K \sin L = \cos (K + L) - \cos (K - L)$$

Contoh soal (Cunayah and Irawan, 2013)

1. Tentukan nilai dari $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$

Penyelesaian :

$$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$$

$$\sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} (\sin(75 + 15) + \sin(75 - 15))$$

$$\sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} (\sin 90 + \sin 60)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right)$$

2. Tentukan nilai dari $\cos 120^\circ \sin 60^\circ$

Penyelesaian :

$$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)$$

$$\cos 120^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (\sin(120 + 60) - \sin(120 - 60))$$

$$\cos 120^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (\sin 180 + \sin 60)$$

$$= -\frac{1}{4} \sqrt{3}$$

8.5 Rumus – rumus Penjumlahan serta Pengurangan Sinus dan Cosinus

Perhatikan rumus – rumus pada berikut ini

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$$

$$-[\cos(a + b) - \cos(a - b)] = 2 \cdot \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cdot \cos b$$

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \cdot \sin b$$

Contoh soal

1. Jika diketahui sudut **K** sebesar 105° dan sudut **L** sebesar 15° . tentu kan besar nilai $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$

Penyelesaian :

$$\sin K + \sin L = 2 \sin \frac{1}{2}(K + L) \cos \frac{1}{2}(K - L)$$

$$\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{1}{2}(105^\circ + 15^\circ) \cos \frac{1}{2}(105^\circ - 15^\circ)$$

$$\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{1}{2}(120^\circ) \cos \frac{1}{2}(90^\circ)$$

$$\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin(60^\circ) \cos(45^\circ)$$

$$\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2. Nyatakan dalam bentuk sederhana $\cos 100^\circ + \cos 20^\circ$

Penyelesaian :

$$\cos 100^\circ + \cos 20^\circ = 2 \cos \frac{1}{2}(100 + 20) \cos \frac{1}{2}(100 - 20)$$

$$= 2 \cos 60 \cos 40$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \cos 40$$

$$= \cos 40$$

LATIHAN

1. Tentukan nilai $\cos 75^\circ + \sin 75^\circ$ adalah
2. Diketahui $\sin a = \frac{1}{5}\sqrt{13}$, sudut lancip nilai $\cos 2a$ adalah ...
3. Koordinat cartesius dari titik P $(8, 60^\circ)$ adalah
4. Pada segitiga ABC diketahui panjang sisi $AB = 10$ cm, sisi $AC = 12$ cm dan sisi $B = \frac{4}{5}$. Nilai $\cos C$ adalah
5. Luas segitiga ABC adalah 24 cm^2 , pada sisi $AC = 8$ cm dan $AB = 12$ cm. Nilai $\cos \angle A$ adalah

DAFTAR PUSTAKA

- Abidin, Z. 2016. Pengembangan model pembelajaran matematika berbasis portofolio (PMBP) pada siswa sekolah menengah pertama', *Jurnal Pendidikan Matematika (JPM)*, 2(1), pp. 79–102.
- Cunayah, C. and Irawan, E.I. 2013. 1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika untuk SMA/MA', *Bandung: Yrama Widya* [Preprint].
- Kurnianingsih, S. 2007. *Matematika SMA dan MA untuk kelas X semester 1*.
- Purnomo, D. 2016. *Trigonometri: (Ilmu Ukur Sudut)*. Penerbit Gunung Samudera (Grup Penerbit Pt Book Mart Indonesia).

BAB IX

RUANG TIGA DIMENSI (3-D)

Oleh La Ode Asmin

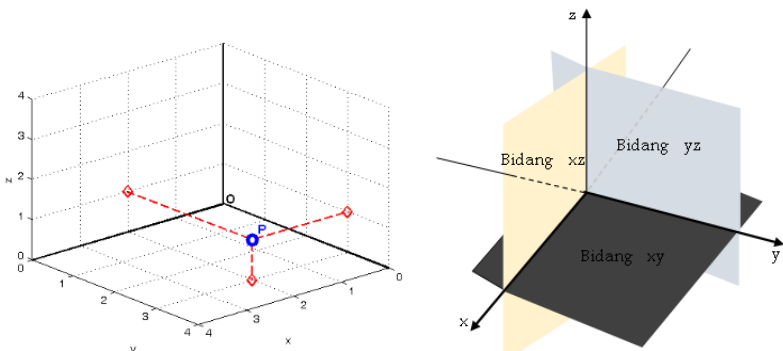
9.1 Sistem Koordinat 3-Dimensi

9.1.1 Titik Dalam Ruang 3-Dimensi

Pada suatu titik pada bidang xy oleh pasangan terurut yang terdiri dari dua bilangan real koordinat x dan koordinat y , yang masing-masing menyatakan jarak bertanda sepanjang sumbu x dan sumbu y dari titik asal, yaitu titik $(0,0)$. Sumbu ini disebut sebagai sumbu koordinat, yang membagi bidang menjadi empat kuadran. Dalam ruang 3-dimensi, sebuah titik direpresentasikan oleh orde tiga (x, y, z) , yang terdiri dari tiga bilangan, koordinat x , koordinat y , dan koordinat z . Seperti pada bidang xy dua dimensi, koordinat ini menunjukkan jarak bertanda di sepanjang sumbu koordinat, masing-masing sumbu x , sumbu y dan sumbu z , dari titik asal, dilambangkan dengan O , yang memiliki koordinat $(0,0,0)$. Ada korespondensi satu-satu antara titik di ruang xyz dan tiga kali lipat di $\mathbb{R}^3$, yang merupakan himpunan semua rangkap tiga bilangan real. Korespondensi ini dikenal sebagai sistem koordinat persegi panjang tiga dimensi.

9.1.2 Bidang Dalam Ruang 3-Dimensi

Tidak seperti ruang dua dimensi, yang terdiri dari satu bidang, bidang xy , ruang tiga dimensi berisi banyak bidang, sebagaimana ruang dua dimensi yang terdiri dari banyak garis. Tiga bidang tersebut diantaranya bidang xy , yang berisi sumbu- x dan y ; bidang yz , yang berisi sumbu- y dan z ; dan bidang xz , yang memuat sumbu- x dan z . Atau, bidang xy dapat digambarkan sebagai himpunan semua titik (x, y, z) yang $z = 0$; bidang yz adalah himpunan semua titik dalam bentuk (x, y, z) dengan $x = 0$; dan bidang xz adalah himpunan semua titik dalam bentuk (x, y, z) dengan $y = 0$.



Gambar 9.1 (kiri) Titik $(2; 3; 1)$ dalam ruang xyz , dilambangkan dengan huruf P . Asal dilambangkan dengan huruf O ; (kanan) Bidang.

Sama seperti sumbu- x dan sumbu- y membagi bidang- xy menjadi empat kuadran, ketiga bidang ini membagi ruang xyz menjadi delapan oktan. Dalam setiap oktan, semua koordinat- x memiliki tanda yang sama, seperti halnya semua koordinat- y , dan semua koordinat- z . Secara khusus, oktan pertama adalah oktan yang ketiga koordinatnya positif.

9.1.3 Formula Jarak

Jarak antara dua titik $P_1 = (x_1, y_1)$ dan $P_2 = (x_2, y_2)$ dalam bidang- xy dituliskan sebagai

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

sementara itu, jarak antara dua titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ di ruang- xyz adalah

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

sebuah bola berpusat di (x_0, y_0, z_0) dan jari-jari r didefinisikan sebagai himpunan semua titik (x, y, z) sehingga jarak antara (x, y, z) dan (x_0, y_0, z_0) adalah r . Persamaan bola dituliskan sebagai

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

dan titik tengah segmen garis yang menghubungkan titik (x_1, y_1, z_1) dan (x_2, y_2, z_2) memiliki koordinat $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Contoh Soal I:

- (i) Carilah jarak antara titik $P_1 = (3, -1, 2)$ dan $P_2 = (5, 2, 3)$
- (ii) Carilah persamaan bola yang memiliki titik $A(-4, 5, -1)$ dan $B(8, -3, -1)$ sebagai titik akhir dari diameter.

Penyelesaian I:

- (i) Dari rumus jarak diperoleh:

$$\begin{aligned} dP &= \sqrt{(5 - 3)^2 + (2 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

- (ii) Titik tengah elemen garis AB adalah

$$C = \left(\frac{-4+8}{2}, \frac{5-3}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = (-6, 1, -1).$$

Jari-jari bola adalah

$$r = \sqrt{(8+6)^2 + (-3+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{196 + 4 + 4} = \sqrt{204}$$

.

Jadi persamaan bola:

$$(x+6)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 204.$$

9.1.4 Vektor dalam Ruang

Dalam ruang, vector dinotasikan sebagai $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ dan vector nol dinotasikan sebagai $\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. Dengan menggunakan vector satuan $\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, dan $\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$, notasi vector satuan standar untuk $\vec{v}$ adalah $\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$. Misal dua vector dalam ruang yaitu $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ dan $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, dan k adalah scalar, maka:

- (i) $\vec{u} = \vec{v}$ (persamaan vector), jika dan hanya jika $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, dan $u_3 = v_3$;
- (ii) Jika $\vec{v}$ direpresentasikan oleh elemen garis berarah dari $P(p_1, p_2, p_3)$ ke $Q(q_1, q_2, q_3)$, maka $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle$ (komponen vector);
- (iii) $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ adalah panjang vector;
- (iv) vector satuan dalam arah $\vec{v}$: $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, dengan $\vec{v} \neq \vec{0}$;
- (v) $\vec{v} + \vec{u} = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3 \rangle$ (penjumlahan vector);
- dan (vi) $c\vec{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$ (perkalian scalar).

Perkalian Titik: perkalian titik $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ diberikan oleh $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Sudut Antara Dua Vektor: Misal θ adalah sudut antara dua vector $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ ($\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$) dan $0 \leq \theta \leq \pi$, maka

$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$. Vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ ortogonal jika $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Perkalian Silang: perkalian silang $\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ dan $\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$ diberikan oleh

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\hat{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}.$$

Misal θ adalah sudut antara dua vector $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ ($\vec{u}, \vec{v} \neq 0$) dalam ruang, $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah ortogonal dan $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$.

Perkalian Titik	Perkalian Silang
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$	$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
$c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = c\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot c\vec{v}$	$c(\vec{u} \times \vec{v}) = (c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v})$
$\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$	$\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = 0$
$\vec{v} \cdot \vec{v} = \ \vec{v}\ ^2$	$\vec{v} \times \vec{v} = 0$
	$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Perkalian Silang Rangkap Tiga: misal 3 buah vector $\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$, $\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$, dan

$$\vec{w} = w_1\hat{i} + w_2\hat{j} + w_3\hat{k}, \text{ maka } \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Contoh Soal II:

- Diketahui titik awal vector $\vec{v}$ adalah $(-3,4,2)$ dan titik terminalnya $(1,-5,5)$. Carilah komponen vector, besar vector, dan vector satuan dalam arah $\vec{v}$.
- Carilah $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dan $\vec{u} \times \vec{v}$ untuk vector $\vec{u} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ dan $\vec{v} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$
- Tiga buah vector $\vec{u} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{v} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$, dan $\vec{w} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. Hitunglah $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Penyelesaian II:

(i) Bentuk komponen vector $\vec{v}$ adalah
 $\vec{v} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle = \langle 1 - (-3), -5 - 4, 5 - 2 \rangle = \langle 4, -9, 3 \rangle$

(ii) Besar vector $\vec{v}$ adalah
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-9)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 81 + 9} = \sqrt{106}$. (iii)

Misal $\vec{u}$ adalah vector satuan dalam arah $\vec{v}$, maka
 $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{106}} \langle 4, -9, 3 \rangle = \langle \frac{4}{\sqrt{106}}, -\frac{9}{\sqrt{106}}, \frac{3}{\sqrt{106}} \rangle$ atau dituliskan sebagai $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{106}} (4\hat{i} - 9\hat{j} + 3\hat{k})$.

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(1) + (-4)(-2) + (2)(2) = 2 + 8 + 4 = 14$

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (-8 + 4)\hat{i} - (4 - 2)\hat{j} + (-4 + 4)\hat{k} \\ &= -4\hat{i} - 2\hat{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \\ &2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-6) - (-4)(-5) + 2(8) = -12 - 20 + \\ &16 = -16\end{aligned}$$

(iii)

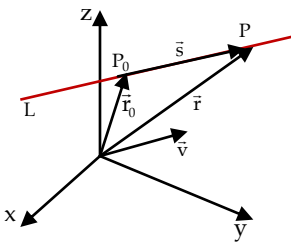
9.1.5 Persamaan Garis

Secara konseptual, garis dipandang sebagai himpunan semua titik dalam ruang yang memenuhi dua kriteria: (i) berisi titik tertentu, yang diidentifikasi dengan vektor posisi $\vec{r}_0$; (ii) vektor antara $\vec{r}_0$ dan sembarang vektor posisi $\vec{r}$ pada garis sejajar dengan vektor $\vec{v}$ yang diberikan. Vektor dengan titik awal $\vec{r}_0$ dan titik terminal $\vec{r}$ diberikan oleh $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Vektor ini harus sejajar dengan $\vec{v}$, yang menyiratkan bahwa $\vec{s} = k\vec{v}$ untuk sembarang skalar k . Oleh karena itu, setiap vektor posisi $\vec{r}$, yang bersesuaian dengan titik P pada garis dengan koordinat yang sama dengan komponen $\vec{r}$, memiliki bentuk

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{v}$$

dengan k adalah skalar yang disebut sebagai parameter. Parameter k diperbolehkan untuk mengasumsikan nilai apapun, sehingga setiap titik P pada garis dapat diperoleh dari persamaan ini, yang disebut persamaan vektor garis.

Misalkan $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ adalah vektor posisi dari sembarang titik



$P = (x, y, z)$ pada suatu garis, $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ adalah vektor posisi titik tertentu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pada garis, dan $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ menjadi vektor yang menunjukkan arah garis. Dengan menulis persamaan vektor garis dalam komponennya, kita

memperoleh persamaan parametrik garis,

$$x = x_0 + ak, \quad y = y_0 + bk, \quad z = z_0 + ck$$

Komponen a , b , dan c dari $\vec{v}$ disebut sebagai bilangan arah garis. Bilangan arah dapat digunakan untuk menggambarkan garis menggunakan persamaan yang tidak memerlukan parameter k . Jika semua bilangan arah bukan nol, kita dapat menyelesaikan setiap persamaan parametrik untuk k . Ini menghasilkan persamaan simetris,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Jika salah satu bilangan arah sama dengan nol, maka k masih dapat dihilangkan dengan menggunakan persamaan parametrik dengan bilangan arah bukan nol.

Persamaan vektor dari sebuah garis juga dapat digunakan untuk menggambarkan elemen garis, sebagai lawan dari seluruh garis, yang memanjang secara tepat di kedua arah.

Misalkan $\vec{r}_0$ adalah titik awal elemen garis, dan $\vec{r}_1$ adalah titik terminal. Maka, misalkan $\vec{v} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$, ini mengikuti bahwa

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{v}, \quad 0 \leq k \leq 1,$$

menggambarkan suatu titik pada elemen garis. Pada $k = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_0$, dan pada $k = 1$, maka $\vec{r} = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \vec{r}_1$. Pada $0 < k < 1$, $\vec{r}$ adalah vektor posisi titik P di bagian dalam elemen. Dari definisi $\vec{v}$, persamaan elemen garis dituliskan menjadi

$$\vec{r} = (1 - k)\vec{r}_0 + k\vec{r}_1, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Jika dalam ruang terdapat dua garis, maka kedua garis ini: (i) dapat berpotongan di titik P . Untuk menentukan apakah ini masalahnya, kita dapat menyamakan rumus untuk komponen yang sesuai (x, y, dan z) dan mencoba menemukan satu himpunan nilai parameter, satu untuk setiap baris, yang memenuhi semua persamaan yang dihasilkan. Jika kasusnya ini, maka garisnya berpotongan di suatu titik yang koordinatnya dapat diperoleh dengan mensubstitusi salah satu nilai parameter ini ke dalam persamaan parametrik yang sesuai; (ii) bisa paralel. Hal ini terjadi jika dan hanya jika vektor yang menggambarkan arah garis sejajar. Artinya, vektor-vektor ini harus merupakan kelipatan skalar (bukan nol) satu sama lain; (iii) miring. Ini adalah kasus jika garis tidak berpotongan, dan tidak sejajar. Secara intuitif, salah satu contoh garis miring adalah garis-garis yang terdapat pada bidang-bidang sejajar, tetapi memiliki bilangan arah yang berbeda.

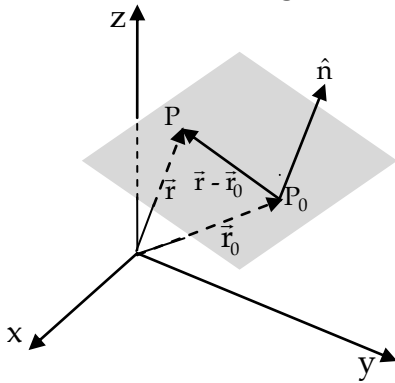
9.1.6 Persamaan Bidang

Suatu bidang terdiri dari semua vektor yang ortogonal terhadap arah tertentu $\vec{n}$, yang dikatakan normal terhadap bidang tersebut, dan melalui suatu titik $\vec{r}_0$ tertentu. Vektor normal $\vec{n}$ (*pent: Vektor normal adalah vektor yang tegak lurus*).

Vektor normal bidang adalah vektor yang tegak lurus terhadap bidang tersebut) dapat diperoleh dengan menghitung

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

Misalkan $\vec{r}$ adalah sembarang titik dalam bidang. Vektor $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0$ adalah ortogonal terhadap $\vec{n}$, sehingga

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$


Persamaan ini disebut sebagai Persamaan vektor bidang. Jika

$\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$, $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$, dan $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, persamaan vektor menjadi

$$ax + by + cz - \vec{n} \cdot \vec{r}_0 = 0$$

dengan $\vec{n} \cdot \vec{r}_0 = ax_0 + by_0 + cz_0$. Persamaan ini dikenal sebagai persamaan linier dalam x, y , dan z tidak diketahui.

Contoh Soal III:

- Tuliskan persamaan garis dalam bentuk vektor yang melalui titik $(1, 9, -5)$, dan $(-2, 3, 13)$.
- Carilah persamaan parametric dan simetrik untuk garis yang melalui $(1, 2, 3)$ dan sejajar dengan $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$.
- Carilah persamaan vector dan scalar untuk bidang yang melalui $P_0 = (1, -3, 4)$, dan normal terhadap vector $\vec{n} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$.

Penyelesaian III:

- Dari $\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{v}$, diperoleh

$$\vec{r} = (1, 9, -5) + k(3, 6, -18) =$$

$$(1, 9, -5) + (3k, 6k, -18k) = (1 + 3k, 9 + 6k, -5 - 18k)$$

(ii) Vektor parametric garis: $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$
 dan persamaan simetrinya adalah $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}$.

(iii) Diketahui bahwa $\vec{r}_0 = \langle 1, -3, 4 \rangle$ dan $\vec{n} = \langle 5, 3, -4 \rangle$. Bentuk
 vektornya dituliskan sebagai
 $(5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot [(x-1)\hat{i} + (y+3)\hat{j} + (z-4)\hat{k}] = 0$.

Persamaan skalarnya adalah

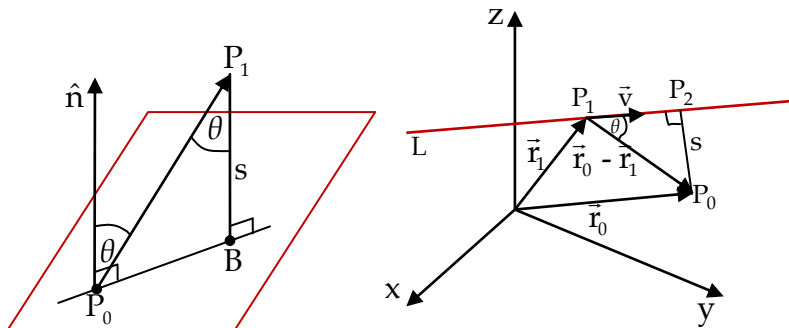
$$5(x-1) + 3(y+3) - 4(z-4) = 0 \Rightarrow 5x - 5 + 3y + 9 - 4z + 16 = 0 \Rightarrow 5x + 3y - 4z + 20 = 0$$

atau $5x + 3y - 4z = -20$.

Sudut Antara Dua Bidang: Sudut antara bidang didefinisikan sebagai sudut antara vector normalnya. Jika sudut ini selain 0 atau π , vector normal keduanya sejajar, dan karenanya dikatakan bahwa kedua bidang tersebut sejajar. Misal $\hat{n}_1$ dan $\hat{n}_2$ adalah satuan normal dari dua bidang yang berpotongan. Maka perkalian titik keduanya $\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = \cos \theta$, dengan $0 \leq \theta \leq \pi$ adalah sudut antara satuan normalnya.

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = |\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2|$$

Jarak Antara Titik Dan Bidang: Misal $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ adalah sembarang titik pada bidang yang diberikan dan $\vec{b}$ adalah vector yang bersesuaian dengan $\overrightarrow{P_0 P_1}$. Jika $\vec{r}_0$ dan $\vec{r}_1$ berturut-turut adalah jarak dari titik asal ke titik P_0 dan ke titik P_1 , maka $\vec{b} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$. Jarak s dari P_1 ke bidang sama dengan nilai mutlak dari proyeksi scalar dari $\vec{b}$ ke dalam vector normal $\vec{n} = \langle A, B, C \rangle$.



Gambar 9.2 (Kiri) Jarak antara titik P_1 dan bidang; (Kanan) Deskripsi garis L melewati $\vec{r}_1$ dan sejajar dengan vektor $\vec{v}$.

$$s = \|\overrightarrow{P_0P_1}\| |\cos \theta| = \frac{\|\vec{n}\| \|\overrightarrow{P_0P_1}\| |\cos \theta|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Jarak Titik ke Garis: Misal $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dan L adalah garis yang melewati P_1 dan sejajar dengan vektor bukan-nol $\vec{v}$ (Lihat Gambar 2 (kanan)). Jarak dari titik P_0 ke L adalah $s = \|\overrightarrow{P_2P_0}\| = \|\overrightarrow{P_1P_0}\| \sin \theta = \|\vec{r}_0 - \vec{r}_1\| \sin \theta$, dengan θ adalah sudut antara $\vec{r}_0 - \vec{r}_1$ dan $\vec{v}$. Karena $\|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{v}\| = \|\vec{r}_0 - \vec{r}_1\| \|\vec{v}\| \sin \theta$, maka $s = \frac{\|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

Posisi Relatif Garis dan Bidang Dalam Ruang: Misalkan dua garis dalam ruang diberikan oleh persamaan vektor. Garis L_1 memiliki vektor acuan $\vec{r}_1$ dan vektor arah $\vec{u}$, dan garis L_2 memiliki vektor acuan $\vec{r}_2$ dan vektor arah $\vec{v}$,

$$L_1: \vec{r}_s = \vec{r}_1 + s\vec{u}; \quad L_2: \vec{r}_t = \vec{r}_2 + t\vec{v}$$

Dua garis L_1 dan L_2 dapat memiliki empat posisi relatif yang berbeda, diantaranya (i) Garis-garisnya identik. Dalam hal ini,

garis L_1 dan L_2 memiliki semua titik yang sama, keduanya bertepatan. Hal ini terjadi jika dan hanya jika vektor dua arah $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah collinear dan garis memiliki satu titik yang sama; (ii) Garis-garisnya sejajar. Hal ini terjadi jika dan hanya jika vektor dua arah $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah kolinear dan kedua garis tidak memiliki titik yang sama; (iii) Garis berpotongan. Dalam hal ini, garis L_1 dan L_2 memiliki tepat satu titik yang sama. Titik ini disebut titik potong. Hal ini terjadi jika dan hanya jika vektor dua arah $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ tidak segaris dan kedua garis memiliki tepat pada satu titik yang sama; (iv) Garis yang tidak identik atau sejajar dan tidak berpotongan disebut miring. Hal ini terjadi jika dan hanya jika vektor dua arah tidak segaris, dan kedua garis tidak memiliki titik yang sama.

Contoh Soal IV:

- (i) Carilah jarak dari titik $(2,3,1)$ ke bidang $4x - 5y - 6z - 3 = 0$;
- (ii) Carilah jarak dari titik $(1,1,-1)$ ke garis perpotongan bidang $x + y + z = 1$, $2x - y - 5z = 1$.

Penyelesaian IV:

- (i) Jarak s diberikan $s = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Titik $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 1)$ dan $A = 4$, $B = -5$, $C = -6$, dan $D = -3$.
Jadi jarak
$$s = \frac{|(4)(2) + (-5)(3) + (-6)(1) - 3|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-6)^2}} = \frac{|8 - 15 - 6 - 3|}{\sqrt{16 + 25 + 36}} = \frac{|-16|}{\sqrt{77}} = \frac{16}{\sqrt{77}}.$$
- (ii) Arah garis diberikan oleh $\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2$ dengan $\hat{n}_1 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ dan $\hat{n}_2 = 2\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$. Jadi,

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \hat{k} = -4\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$$

. Misal titik P_1 adalah titik sembarang pada garis, dan diperoleh dengan substitusi $x = 1$ pada persamaan $x + y + z = 1$, diperoleh $y = -z$. Dari sini diperoleh $z = \frac{1}{4}$

dan $y = -\frac{1}{4}$. $\overrightarrow{P_1 P_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1 = \frac{5}{4}\hat{j} - \frac{5}{4}\hat{k}$, sehingga

$$s = \frac{\|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\left\| \left(\frac{5}{4}\hat{j} - \frac{5}{4}\hat{k} \right) \times (-4\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}) \right\|}{\left\| \sqrt{(-4)^2 + 7^2 + (-3)^2} \right\|} = \frac{\|5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}\|}{\|\sqrt{74}\|} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{74}} = \sqrt{\frac{75}{74}}$$

9.1.7 Silinder dan Permukaan Quadrik

Jejak (Traces) adalah perpotongan antara permukaan dan bidang yang sejajar dengan bidang koordinat. *Silinder* adalah permukaan yang terdiri dari semua garis yang sejajar dengan garis tertentu dan melalui kurva tertentu. Misalnya permukaan $y^2 + 2z^2 = 1$ adalah silinder di $\mathbb{R}^3$ sepanjang sumbu x . *Permukaan quadrik* adalah permukaan aljabar, yang didefinisikan oleh polinomial kuadrat (orde 2). Quadrik non-degenerasi di $\mathbb{R}^3$ (ruang Euclidean 3-dimensi) dikategorikan sebagai ellipsoid, paraboloid, atau hiperboloid. Permukaan quadrik adalah generalisasi 3 dimensi dari bagian kerucut, yang ditentukan oleh persamaan dalam variabel x , y , z sehingga setiap suku berderajat kedua.

Bentuk umum dari persamaan permukaan quadrik adalah

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

dengan $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, dan J adalah konstanta. Jika $A = B = C = D = E = F = 0$ maka bentuknya menjadi persamaan linier dan grafiknya adalah bidang. Permukaan ini menggeneralisasi kurva kuadrat bidang, seperti lingkaran, elips, parabola dan hiperbola.

Quadrik Silinder: Persamaan umum quadrik silinder dituliskan sebagai $A'x'^2 + B'y'^2 + D' = 0$ atau $A'x'^2 + Q'y' = 0$. Secara khusus, bentuk-bentuk ini mendefinisikan quadrik silinder: (i) *silinder parabolik* ($y' - ax'^2 = 0$), dengan $Q' \neq 0$; (ii) *silinder eliptik* ($\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$), dengan $\frac{A'}{D'} < 0, \frac{B'}{D'} < 0, D' \neq 0$; (iii) *silinder hiperbolik* ($\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$), dengan $A'B' < 0, D' \neq 0$.

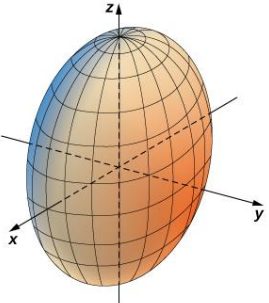
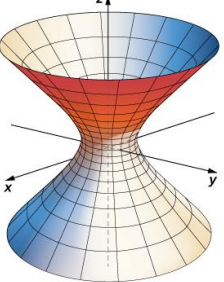
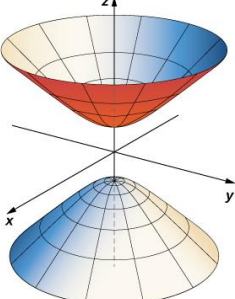
Dengan rotasi dan translasi sistem koordinat, persamaan umum untuk permukaan quadrik dapat dituliskan dalam bentuk standar:

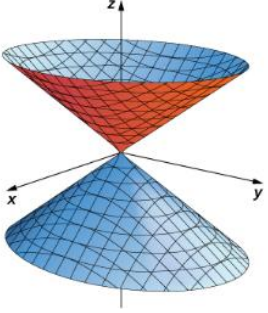
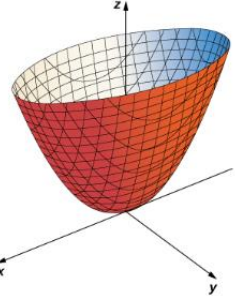
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D' = 0$$

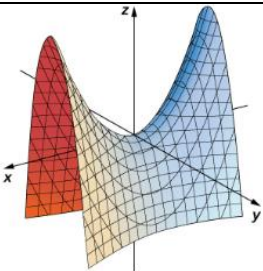
atau

$$A'x^2 + B'y^2 + V'z^2 = 0$$

Tabel 9.1 Permukaan Quadrik dan Karakteristiknya

Permukaan Quadrik	Bentuk
Elipsoid $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$ Elipsoid berisi elips sebagai jejak, dan simetris terhadap bidang koordinat. Elips $\frac{x^2}{y^2}, \frac{y^2}{z^2}, \frac{z^2}{x^2}$ masing-masing sama dengan 1, adalah jejak yang terbentuk untuk z, x, dan y sama dengan nol. Jika $a = b = c$, maka diperoleh bentuk permukaan bola. Kurva level elipsoid menelusuri elips dengan panjang sumbu mayor dan minor yang berbeda.	
Hiperboloid satu lembar $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$ Hyperboloid satu lembar berisi hiperbola (jejak vertical), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ pada $y = 0$, dan $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ pada $x = 0$, dan elips (jejak horizontal), $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pada $z = 0$. Simetri pada semua bidang koordinat.	
Hiperboloid dua lembar $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\right)$ Hyperboloid dua lembar berisi hiperbola (jejak vertical), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ pada $y = 0$, dan $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ pada $x = 0$, dan elips (jejak horizontal),	

Permukaan Quadrik	Bentuk
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ pada $z = k$, $k > c$ atau $k \leq -c$. Simetri pada semua bidang koordinat.	
Eliptik kerucut ganda $\left(\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ Eliptik kerucut ganda berisi parabola (jejak vertical), $z = \pm \frac{x}{a}$ pada $y = 0$, dan $z = \pm \frac{y}{b}$ pada $x = 0$, dan hiperbola (jejak horizontal), $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ pada $z = 0$. Simetri disekitar bidang xz dan yz.	
Eliptik paraboloid $\left(\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ Eliptik paraboloid berisi parabola (jejak vertical), $z = \frac{x^2}{a^2}$ pada $y = 0$, dan $z = \frac{y^2}{b^2}$ pada $x = 0$, dan elips (jejak horizontal), $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Simetri disekitar bidang xz dan yz.	

Permukaan Quadrik	Bentuk
Hiperbolik paraboloid $\left(\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ Hiperbolik paraboloid berisi parabola (jejak vertical), $z = \frac{x^2}{a^2}$ pada $y = 0$, dan $z = -\frac{y^2}{b^2}$ pada $x = 0$, dan hiperbola (jejak horizontal), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ pada $z = 0$. Simetri disekitar bidang xz dan yz.	

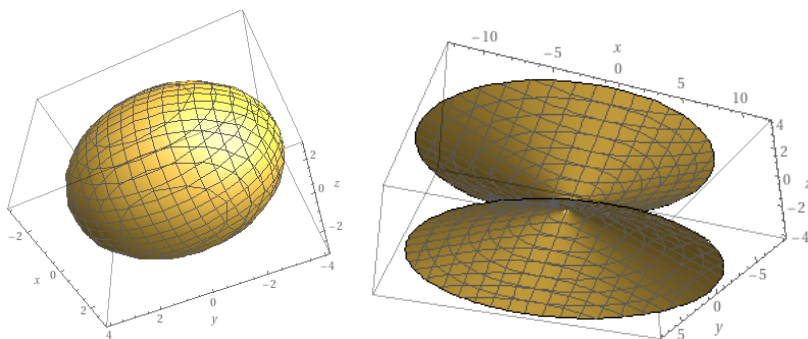
Sumber Gambar: <https://philschatz.com/calculus-book/>

Contoh Soal V:

- Identifikasi permukaan yang direpresentasikan oleh persamaan $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$.
- Gambarkan permukaan quadric dari persamaan $z^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$

Penyelesaian V:

- Karena x , y , dan z adalah kuadrat dan positif, maka persamaan ini adalah elipsoid. Cara lain adalah dengan membagi persamaan ini dengan 144, diperoleh $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$. Hasil ini merujuk pada bentuk standar dari elipsoid yang berpusat di titik asal.
- Ambil jejak sejajar dengan bidang $-xy$. Pada $z = k$, $a = \text{konstan}$: maka $k^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \rightarrow \frac{x^2}{(3k)^2} + \frac{y^2}{(2k)^2} = 1$. Ini adalah elips dengan sumbu $3|k|$ dan $2|k|$. Kita bisa membuat gambarnya dengan bantuan wolframalpha (<https://www.wolframalpha.com/>)



Gambar 9.3 Penyelesaian: (kiri) V(i) dan (kanan) V(ii)

9.2 Fungsi Vektor

9.2.1 Kurva dalam Ruang dan Fungsi Vektor

Sebuah benda titik dalam ruang vektor dapat digambarkan dengan menentukan vektor posisinya pada setiap saat. Sebuah vektor didefinisikan oleh tiga komponen dalam sistem koordinat. Oleh karena itu, gerak benda dapat digambarkan dengan tiga kali lipat terurut dari fungsi waktu bernilai nyata. Pengamatan ini mengarah pada konsep fungsi bernilai vektor dari variabel nyata.

Misalkan D adalah himpunan bilangan real. Fungsi vektor $\vec{r}(t)$ dari variabel nyata t adalah aturan yang menetapkan vektor unik untuk setiap nilai t dari D . Himpunan D disebut domain dari fungsi vektor. Untuk mendefinisikan fungsi vektor adalah dengan menggunakan aturan aljabar yang menentukan komponen fungsi vektor dalam sistem koordinat sebagai fungsi variabel nyata: $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$.

Untuk memudahkan memvisualisasi bentuk kurva C yang dilacak oleh fungsi vektor, maka $\vec{r}(t)$ dianggap sebagai lintasan gerak. Posisi partikel dalam ruang dapat ditentukan oleh posisinya di bidang dan ketinggian relatif terhadap bidang itu. Misalnya, pada bidang $-xy$.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = \langle x(t), y(t), 0 \rangle + \langle 0, 0, z(t) \rangle \\ &= \vec{R}(t) + z(t)\hat{e}_3\end{aligned}$$

9.2.2 Diferensiasi Fungsi Vektor

Misalkan sebuah fungsi vektor $\vec{r}(t)$ didefinisikan pada interval $[a, b]$ dan $t_0 \in [a, b]$. Jika limit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h} = \vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$$

ada, maka disebut turunan dari fungsi vektor $\vec{r}(t)$ pada $t = t_0$, dan $\vec{r}(t)$ dikatakan diferensiabel di t_0 . Untuk $t_0 = a$ atau $t_0 = b$, limitnya masing-masing dipahami sebagai limit kanan ($h > 0$) atau kiri ($h < 0$). Jika turunan ada untuk semua titik pada interval $[a, b]$, maka fungsi vektor $\vec{r}(t)$ dikatakan diferensiabel pada interval $[a, b]$. Dari Teorema « *fungsi vektor kontinu jika dan hanya jika semua komponennya adalah fungsi kontinu* » dapat disimpulkan bahwa suatu fungsi vektor dapat dibedakan (diferensiabel) jika dan hanya jika semua komponennya dapat dibedakan (diferensiabel), $\vec{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$.

Jika turunan $\vec{r}'(t)$ adalah fungsi vektor kontinu pada interval $[a, b]$, maka fungsi vektor $\vec{r}(t)$ dikatakan terdiferensial kontinu pada $[a, b]$. Turunan kedua $\vec{r}''(t)$ adalah turunan dari $\vec{r}'(t)$, turunan ketiga $\vec{r}'''(t)$ adalah turunan dari $\vec{r}''(t)$, dan seterusnya, yang secara umum dituliskan sebagai $\vec{r}^n(t) = (\vec{r}^{n-1}(t))' = \langle x^n(t), y^n(t), z^n(t) \rangle$.

Jika $\vec{u}(t)$ dan $\vec{v}(t)$ adalah fungsi vektor yang diferensiabel dan $f(t)$ adalah fungsi diferensiabel yang bernilai real, maka

$$\frac{d}{dt} [f(t)\vec{v}(t) + \vec{u}(t)] = f'(t)\vec{v}(t) + f(t)\vec{v}'(t) + \vec{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt} [f(t)\vec{v}'(t)] = f'(t)\vec{v}(t) + f(t)\vec{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{v}(t) \cdot \vec{u}(t)] = \vec{v}'(t) \cdot \vec{u}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{v}(t) \times \vec{u}(t)] = \vec{v}'(t) \times \vec{u}(t) + \vec{v}(t) \times \vec{u}'(t)$$

Jika $\vec{r}(t)$ adalah fungsi vektor diferensiabel, maka vektor $d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)dt$ disebut diferensial dari $\vec{r}(t)$. Secara khusus, derivative adalah rasio dari diferensial, $\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Ingat bahwa, diferensial dt adalah variable independen yang menggambarkan variasi tak terhingga dari t sedemikian rupa sehingga pangkat dt yang lebih tinggi dapat diabaikan. Dalam pengertian ini definisi diferensial adalah linearisasi $\vec{r}(t+h) = h\vec{r}'(t) + h\vec{u}(h)$ dengan $\vec{u}(h)$ mendekati vektor nol ($\vec{u}(h) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$) di $dt = h$. Pada setiap $t = t_0$, diferensial $d\vec{r}(t_0) = \vec{r}'(t_0)dt \neq 0$ mendefinisikan garis singgung (garis tangen)

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t_0) + d\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)dt, \quad t = t_0 + dt$$

Jadi, diferensial $d\vec{r}(t)$ pada titik kurva $\vec{r}(t)$ adalah pertambahan vektor posisi sepanjang garis singgung kurva pada titik tersebut.

9.2.3 Integrasi Fungsi Vektor

Misalkan $\vec{r}(t)$ didefinisikan pada interval $[a, b]$. Vektor yang komponennya merupakan integral tentu dari komponen yang bersesuaian dari $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ disebut integral tentu dari $\vec{r}(t)$ selama selang $[a, b]$ dan dilambangkan sebagai

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left\langle \int_a^b \vec{x}(t) dt, \int_a^b \vec{y}(t) dt, \int_a^b \vec{z}(t) dt \right\rangle$$

Jika integral ini ada, maka $\vec{r}(t)$ dikatakan integrabel pada $[a, b]$. Karena itu, suatu fungsi vektor dapat diintegralkan jika dan hanya jika semua komponennya merupakan fungsi yang dapat diintegralkan. Oleh karena itu, berlaku Teorema « jika suatu fungsi vektor kontinu pada interval $[a, b]$, maka fungsi tersebut dapat diintegralkan pada $[a, b]$ ».

Sebuah fungsi vektor $\vec{R}(t)$ dikatakan antiderivatif dari $\vec{r}(t)$ jika $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$. Integral tak tentu $\int \vec{r}(t) dt$ dari fungsi vektor $\vec{r}(t)$ adalah himpunan dari semua antiderivatif $\vec{R}(t)$ dari $\vec{r}(t)$. Integral tak tentu dari $\vec{r}(t)$ dapat juga dipandang sebagai fungsi vektor paling umum yang turunannya adalah $\vec{r}(t)$. Misalkan $\vec{R}(t) = \langle X(t), Y(t), Z(t) \rangle$ adalah anti derivative dari $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ pada suatu interval, maka fungsi $X(t), Y(t)$, dan $Z(t)$ masing-masing adalah antiderivatif dari $x(t), y(t)$, dan $z(t)$

$$\int \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) + \vec{c}$$

dengan $\vec{c}$ adalah vektor konstanta sembarang. Antiderivatif tertentu dari fungsi vektor kontinu $\vec{r}(t)$ adalah

$$\vec{R}(t) = \int_a^b \vec{r}(u) du, \quad a \leq t \leq b$$

Fungsi vektor $\vec{R}(t)$ diferensiabel pada (a, b) dan memenuhi kondisi $\vec{R}(a) = 0$. Integral tak tentu pada $[a, b]$ diperoleh dengan menjumlahkan sebuah konstanta vektor, $\vec{R}(t) \rightarrow \vec{R}(t) + \vec{c}$. Karena itu, jika $\vec{r}(t)$ kontinu pada $[a, b]$, maka $\int_a^b \vec{r}(t) dt = \vec{R}(b) - \vec{R}(a)$, dengan $\vec{R}(t)$ adalah antiderivatif dar

$\vec{r}(t)$, yaitu sebuah fungsi vektor sedemikian rupa sehingga $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$ (Teorema dasar kalkulus untuk fungsi vektor).

Contoh Soal VI:

Penyelesaian VI:

9.2.4 Vektor Tangen, Normal dan Binormal

Misalkan C adalah kurva halus yang direpresentasikan oleh $\vec{r}$ pada interval terbuka I . Vektor satuan tangen $\vec{T}(t)$ di t didefinisikan sebagai

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

Vektor yang tegak lurus terhadap $\vec{T}(t)$,

$$\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = |\vec{T}(t)| |\vec{T}(t)| \cos 0 = |\vec{T}(t)|^2 = 1$$

Hasil ini berimplikasi bahwa $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) + \vec{T}'(t) \cdot \vec{T}(t) = 0$, dan juga dapat dilihat bahwa $\vec{T}(t)$ dan $\vec{T}'(t)$ tegak lurus,

$$\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$$

Misalkan C adalah kurva halus yang direpresentasikan oleh $\vec{r}$ pada interval terbuka I dengan $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$. Vektor satuan normal utama $\vec{N}(t)$ di t didefinisikan sebagai

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

dan vektor binormal didefinisikan sebagai

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

Vektor binormal tegak lurus terhadap vektor satuan tangen dan vektor satuan normal, dan merupakan vektor satuan itu sendiri. Jadi, $\vec{B}(t)$, $\vec{N}(t)$, dan $\vec{T}(t)$ adalah vektor satuan yang saling tegak lurus. Bidang normal adalah bidang yang

ditentukan oleh $\vec{N}(t)$ dan $\vec{B}(t)$ di titik P pada kurva, dan berisi semua garis orthogonal terhadap vektor tangen.

9.2.5 Panjang Lengan dengan Fungsi Vektor

Misalkan bahwa kurva C adalah kurva yang diberikan oleh sebuah fungsi vektor $\vec{r}(t)$ pada interval $[a, b]$, dengan $\vec{r}'$ adalah kontinu dan C adalah tepat melalui t meningkat dari a ke b . Panjang lengan fungsi $s(t)$ diberikan oleh panjang dari bagian C antara $\vec{r}(a)$ dan $\vec{r}(b)$,

$$s = s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(u)| du$$

Ingat bahwa $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$.

Karena untuk kurva bidang $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$, maka

$$|\vec{r}'(t)| = |x'(t), y'(t), z'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

9.2.6 Kurvatur

Kelengkungan (Kurvatur), pada titik tertentu, dari kurva ruang didefinisikan sebagai laju perubahan vektor satuan tangen terhadap panjang lengan (panjang busur). Dengan kata lain, kelengkungan pada suatu titik memberi memberikan informasi seberapa cepat kurva berputar pada titik itu.

Jika kelengkungan nol, maka kurva terlihat seperti garis di dekat titik ini. Sementara jika kelengkungan adalah jumlah besar, maka kurva memiliki tikungan yang tajam. Ingat vektor satuan tangen, $\vec{T}(t)$, yang menunjukkan arah kurva. $\vec{T}$ mengubah arah sangat lambat ketika C cukup lurus, tetapi mengubah arah lebih cepat ketika C memutar lebih tajam.

Misal C adalah kurva halus yang diberikan oleh $\vec{r}(s)$, dengan s adalah parameter panjang busur/lengan. Kurvatur atau kelengkungan κ diberikan oleh

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = |\vec{T}'(s)|$$

Kurvatur dari kurva yang diberikan oleh fungsi vector $\vec{r}$ adalah

$$\kappa = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

Jika kurva $y = f(x)$, dan $\vec{r}(x) = x\hat{i} + f(x)\hat{j}$, maka $\vec{r}'(t) = \hat{i} + f'(x)\hat{j}$, dan $\vec{r}'' = f''(x)\hat{j}$, kurvatur diberikan oleh

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

9.2.7 Kecepatan dan Percepatan

Sebuah partikel yang bergerak dalam ruang dimana vector posisinya pada waktu t adalah $\vec{r}(t)$, maka vector kecepatan $\vec{v}(t)$ pada waktu t didefinisikan sebagai derivative dari vector posisi: $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ dan percepatan didefinisikan sebagai derivative dari kecepatan, $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$.

Contoh Soal VII:

- (i) Carilah panjang lengan dari kurva $\vec{r}(t) = \langle 3 \sin t, 4t, 3 \cos t \rangle$ pada interval $[-6, 6]$
- (ii) Carilah kurvatur κ dari kurva $\vec{r}(t) = 2t\hat{i} + \cos t\hat{j} + \sin t\hat{k}$
- (iii) Sebuah partikel bergerak dengan vector posisi $\vec{r}(t) = 2t^3\hat{i} + 2t^2\hat{j}$. Carilah kecepatan, kelajuan, dan percepatan pada $t = 2$.

Penyelesaian VII:

(i) Derivatif dari $\vec{r}(t)$ adalah $\vec{r}'(t) = \langle 3 \cos t, 4, -3 \sin t \rangle$.

Maka panjang lengan

$$L = \int_{-5}^5 \sqrt{9 \cos^2 t + 16 + 9 \sin^2 t} dt = \sqrt{34} t \Big|_{-5}^5 = 10\sqrt{34}.$$

(ii) Derivatif pertama dan kedua dari $\vec{r}(t)$ adalah

$$\vec{r}'(t) = \langle 2, -\sin t, \cos t \rangle, \text{ dan } \vec{r}''(t) = \langle 0, -\cos t, -\sin t \rangle.$$

Perkalian

silang

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \langle \sin^2 t + \cos^2 t, 2 \sin t, -2 \cos t \rangle. \text{ Sehingga nilai}$$

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \sqrt{1 + 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{5} \quad \text{dan}$$

$$|\vec{r}'| = \sqrt{4 + \sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{5}. \text{ Jadi, } \kappa = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

(iii) Kecepatan partikel adalah $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = 6t^2\hat{i} + 4t\hat{j}$ dan

$$\vec{v}(t=1) = 6\hat{i} + 4\hat{j} \quad \text{Percepatan partikel adalah}$$

$$\vec{a}'(t) = \vec{v}'(t) = 12t\hat{i} + 4\hat{j}, \text{ dan } \vec{a}'(t=1) = 12\hat{i} + 4\hat{j} \text{ dan}$$

kelajuan partikel adalah magnitude dari vektor kecepatan, yaitu

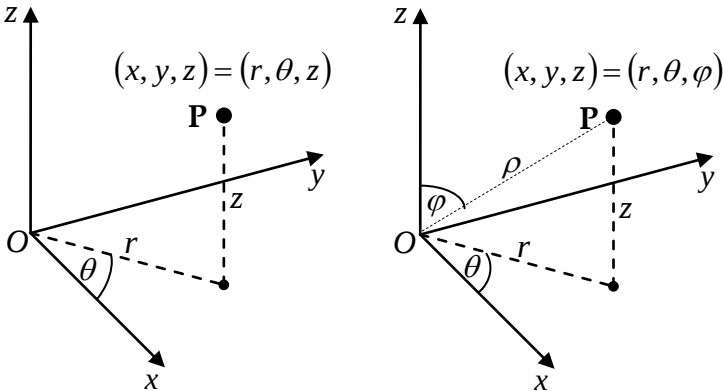
$$|\vec{v}| = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{(6t^2)^2 + (4t)^2} = \sqrt{36t^4 + 16t^2}, \quad \text{dan}$$

$$\text{pada } t = 1, \text{ diperoleh } |\vec{v}| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

9.2.7 Koordinat silinder dan Sferik

Dalam koordinat polar, kita menentukan sebuah titik dengan menggunakan jarak r dari titik asal dan sudut θ dengan sumbu x . Sekarang, dengan mengambil koordinat polar di bidang $-xy$ dan memasukkan variabel tambahan z . Jadi titik P ditentukan oleh tiga koordinat, yaitu (r, θ, z) , dengan r adalah jarak ke titik asal ($r \geq 0$), proyeksi titik P' dari P ke bidang $-xy$, θ adalah sudut yang dibentuk oleh $\overline{OP'}$ terhadap sumbu $-x$, dan z adalah ketinggian P dari bidang $-xy$.

Defnisi: Dalam system koordinat silinder, titik dalam ruang direpresentasikan oleh (r, θ, z) dimana (r, θ) adalah koordinat polar dari proyeksi titik pada bidang $-xy$, dan z adalah koordinat z biasa dalam sistem koordinat kartesian.



Gambar 9.4 Koordinat silinder (kiri) dan sperik (Kanan)

Untuk mengkonversi dari koordinat silinder ke koordinat Kartesian:

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta, z = z$$

Sementara dari koordinat kartesian ke silinder adalah

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \tan \theta = \frac{y}{x}; z = z$$

Dalam kerangka koordinat ortonormal, yang dalam hal ini ada tiga vektor, yaitu

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}; \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}; \hat{e}_z = \hat{k}$$

Definisi: dalam system koordinat sperik, titik P dalam ruang direpresentasikan oleh (ρ, θ, φ) dimana ρ adalah jarak ke titik asal, θ adalah sudut yang dibentuk oleh proyeksi P ke bidang $-xy$ dan φ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor radius dengan sumbu z ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

Untuk mengubah dari koordinat sperik ke koordinat kartesian, maka terlebih dahulu diubah ke koordinat silinder,

$$\rho = r \sin \varphi; \theta = \theta; z = r \cos \varphi$$

Jadi, diperoleh

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta; y = \rho \sin \varphi \sin \theta; z = r \cos \varphi$$

dan dari kartesian ke sperik adalah

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \tan \theta = \frac{y}{x}; \cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Kita juga dapat menuliskan bahwa

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho &= \sin \varphi \cos \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \varphi \hat{k}; \hat{e}_\theta \\ &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \end{aligned}$$

$$\text{dan } \hat{e}_\varphi = \cos \varphi \cos \theta \hat{i} + \cos \varphi \sin \theta \hat{j} - \sin \varphi \hat{k}.$$

Contoh Soal VIII: Konversi (i) koordinat $\left(3, \frac{\pi}{3}, -4\right)$ dari koordinat silinder ke kartesian (ii) koordinat $(-3, 3, -2)$ dari koordinat kartesian ke silinder

Penyelesaian VIII: (i) diketahui bahwa koordinat silinder dituliskan sebagai (r, θ, z) dan kartesian (x, y, z) . Sehingga diperoleh bahwa $r = 3$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, dan $z = -4$.

$x = r \cos \theta = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$; $y = r \sin \theta = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, dan $z = -4$. Jadi, koordinat kartesiannya dituliskan sebagai $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -4\right)$.

(ii) $x = -3$, $y = 3$, dan $z = -2$. Maka $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-3} = -1$, sehingga $\theta = \frac{3}{4}\pi$ dan $z = -2$. Jadi, dalam bentuk koordinat silinder dituliskan sebagai $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, -2\right)$.

DAFTAR PUSTAKA

- Larson, R., & Edwards, B. 2014. *CALCULUS with CalcChat and CalcView* (Eleventh Edition ed.). Boston: Cengage Learning.
- Simmons, G. F. 1996. *Calculus With Analytic Geometry* (2nd Edition ed.). McGraw-Hill.
- STEWART, J. 2012. *Multivariable Calculus* (Seventh Edition ed.). Belmont: Brooks.

BAB X

BANGUN DATAR

Oleh Agustin Fatmawati

10.1 Pendahuluan

Bangun datar merupakan bagian dari bidang ilmu geometri. Menurut bahasa, Geometri berasal dari kata *geos* yang berarti bumi dan *metron* yang berarti ukuran atau dengan kata lain Geometri yaitu ukuran bumi. Geometri dalam matematika merupakan ilmu yang mempelajari tentang unsur serta relasi yang ada di antara unsur tersebut.

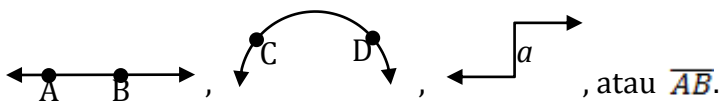
Unsur-unsur dasar dalam geometri meliputi titik, garis, bidang dan sudut. Beberapa unsur seperti titik, garis dan bidang tidak dapat didefinisikan namun dapat dijelaskan melalui deskripsi. Adapun relasi antara unsur tersebut antara lain:

- a) Titik A *terletak antara* titik B dan titik C;
- b) Garis EF *berpotongan tegak lurus* garis GH;
- c) Bidang x *sejajar* bidang y ;
- d) *Sudut antara* dua bidang

Titik digambarkan dengan noktah atau suatu bundaran kecil. Titik hanya memiliki posisi dan tidak memiliki panjang, lebar, dan tebal. Pemberian nama titik menggunakan huruf kapital, seperti pada contoh berikut:

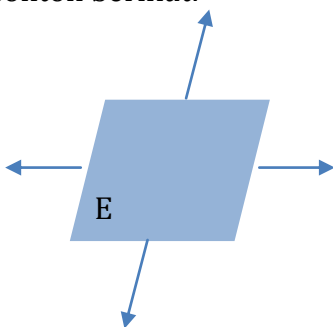
- A

Garis digambarkan dengan himpunan titik-titik. Garis memiliki panjang namun tidak memiliki lebar atau ketebalan. Pemberian nama garis digambarkan dengan huruf kapital dari dua titik atau dengan satu huruf kecil, seperti berikut :

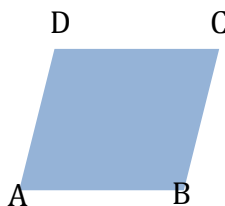


Garis dapat berupa garis lurus, garis lengkung, maupun kombinasi antara keduanya.

Bidang (bidang datar) digambarkan sebagai himpunan titik yang memiliki panjang dan lebar namun tidak memiliki ketebalan. Pemberian nama sebuah bidang dapat menggunakan satu huruf kapital atau beberapa huruf kapital yang berasal dari masing-masing titik sudut, seperti pada contoh berikut:



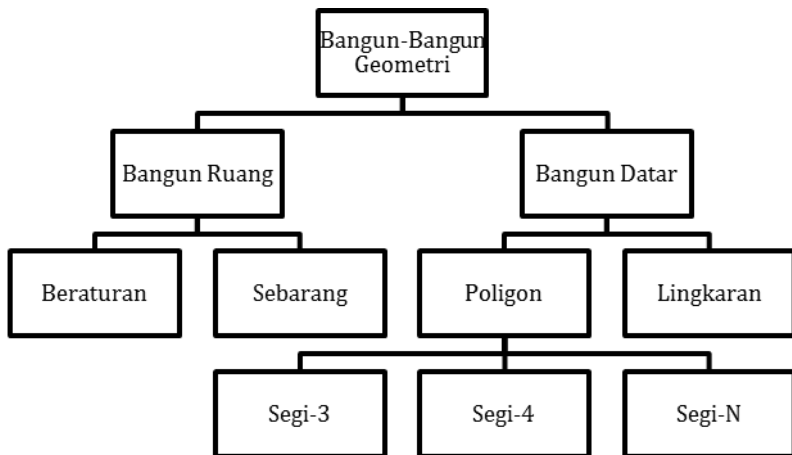
Gambar 10.1 bidang E



Gambar 10.2 bidang ABCD

Sudut didefinisikan sebagai himpunan titik yang merupakan gabungan dari dua sinar garis yang memiliki titik pangkal yang berserikat. Pemberian nama sudut dapat menggunakan satu huruf, tiga huruf dimana huruf tengah merupakan titik sudut, atau menggunakan lambang α , β , γ , dan sebagainya. Kata sudut juga dapat digambarkan dengan lambang $\angle$.

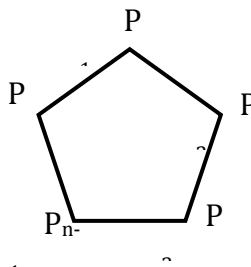
Selain unsur-unsur di atas, perlu diketahui apa saja bangun-bangun geometri secara garis besar.



Gambar 10.3 Peta Konsep Bangun-bangun Geometri

10.2 Poligon

Poligon merupakan gabungan dari kumpulan titik $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ dengan ruas garis $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ demikian sehingga jika terdapat ruas garis berpotongan maka titik potongnya yaitu selain satu titik dari titik-titik $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ dan tidak ada titik potong yang lain. Titik-titik $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ disebut titik-titik sudut polygon. $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ disebut sisi-sisi poligon. Sedangkan $\angle P_1, \angle P_2, \dots, \angle P_{n-1}, \angle P_n$ disebut sudut-sudut poligon. Deskripsi tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 10.4 Poligon Segi-n

Rumus umum poligon menggunakan n sebagai jumlah sisinya dan s mengacu pada panjang sisinya. Rumus yang berlaku untuk poligon beraturan sebagai berikut:

Keliling poligon beraturan $= n \times s$

Luas poligon beraturan $= \frac{1}{2} n \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right) s^2$

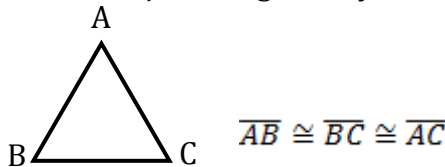
Jumlah sudut dalam poligon beraturan $= (n - 2) 180^\circ$

Jumlah diagonal poligon beraturan $= \frac{1}{2} n (n - 3)$

Segitiga

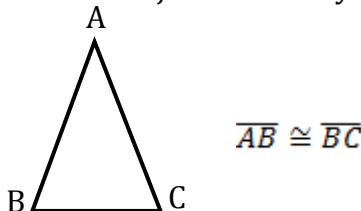
Segitiga merupakan bangun datar poligon yang memiliki 3 ruas garis yang setiap ruas garisnya bertemu pada ujungnya. Setiap ruas garis yang menyusun segitiga disebut sisi segitiga sedangkan pertemuan kedua ruas garis disebut titik sudut. Berdasarkan panjang sisinya, segitiga dapat dibagi menjadi 3 jenis yaitu:

- a) Segitiga sama sisi jika ketiga sisinya kongruen.

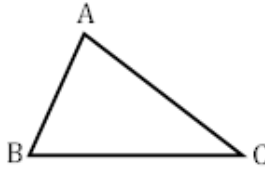


Sifat-sifat dari segitiga sama sisi

- b) Segitiga sama kaki jika dua sisinya kongruen.

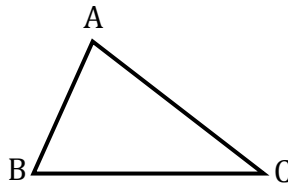


- c) Segitiga sebarang jika tidak memenuhi kedua syarat di atas.



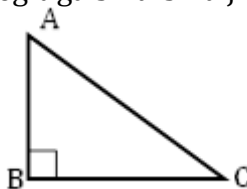
Berdasarkan besar sudutnya, segitiga dapat dibagi menjadi 3 jenis yaitu:

- a) Segitiga lancip jika ketiga sudutnya merupakan sudut lancip.



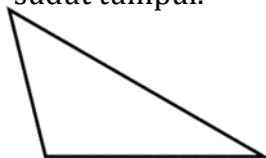
$\angle A$, $\angle B$, dan $\angle C$ merupakan sudut lancip

- b) Segitiga siku-siku jika salah satu sudutnya siku-siku.



Segitiga ABC siku-siku di B

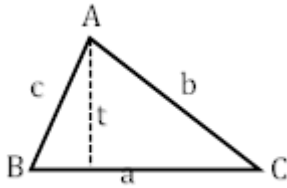
- c) Segitiga tumpul jika salah satu sudutnya adalah sudut tumpul.



$\angle B$ merupakan sudut tumpul (lebih besar dari 90° dan kurang dari 180°)

Keliling dan luas segitiga

Keliling merupakan jarak di sekeliling segitiga atau jumlah panjang dari ketiga sisinya. Sedangkan luas segitiga merupakan area yang berada di dalam segitiga.

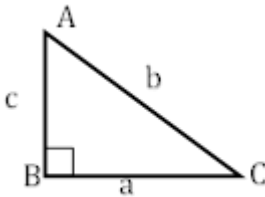


Keliling segitiga ABC = $a + b + c$

Luas segitiga ABC = $\frac{1}{2} \times a \times t$

Dalil Pythagoras

Pada segitiga siku-siku berlaku “kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya”.



$$b^2 = a^2 + c^2$$

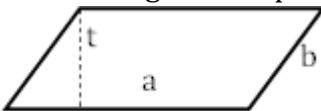
Panjang sisi miring:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Segiempat

Segiempat merupakan bangun datar poligon yang memiliki empat sisi dan empat titik sudut. Terdapat beberapa jenis segiempat yaitu sebagai berikut:

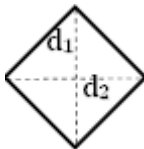
Jajar genjang adalah segiempat dimana kedua pasang sisi yang berseberangan merupakan sisi yang sejajar.



Keliling jajar genjang = $2 \times (a + b)$

Luas jajar genjang = $a \times t$

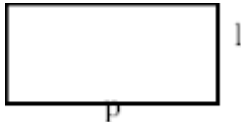
Belah ketupat adalah jajar genjang yang keempat sisinya kongruen



Keliling belah ketupat = $4 \times s$

Luas belah ketupat = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

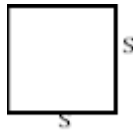
Persegi panjang adalah jajar genjang yang keempat sudutnya siku-siku.



Keliling persegi panjang = $2 \times (p + l)$

Luas persegi panjang = $p \times l$

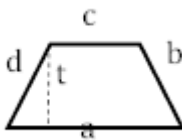
Persegi adalah persegi panjang yang keempat sisinya kongruen



Keliling persegi = $4 \times s$

Luas persegi = $s \times s$

Trapezium adalah segiempat yang sepasang sisinya sejajar.



Keliling trapesium = $a + b + c + d$

Luas trapesium = $\frac{1}{2} (a + c) \times t$

Secara umum trapesium dibagi menjadi 3 jenis yaitu:

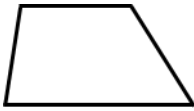
- a) Trapezium sama kaki yaitu trapesium yang memiliki sisi tidak sejajar yang kongruen



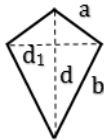
- b) Trapezium siku-siku yaitu trapesium yang memiliki sudut siku-siku.



- c) Trapezium sebarang yaitu trapesium yang tidak termasuk dalam trapesium sama kaki dan trapesium siku-siku.



Layang-layang adalah segiempat yang masing-masing sisi berurutan kongruen



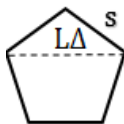
$$\text{Keliling layang-layang} = 2 \times (a + b)$$

$$\text{Luas layang-layang} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

Segi-N

Poligon yang memiliki sisi lebih dari 4 dikategorikan dalam segi banyak atau segi-N misalnya segilima, segienam, dst. Berikut contoh dari segi-N:

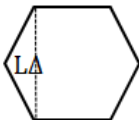
Segilima yaitu poligon yang memiliki 5 sisi dan 5 titik sudut. Pada gambar berikut merupakan segilima dengan sisi-sisi yang sama panjang dan memiliki sudut yang sama besar yaitu 108° .



$$\text{Keliling segilima} = 5 \times s$$

$$\text{Luas segilima} = 5 \times L\Delta$$

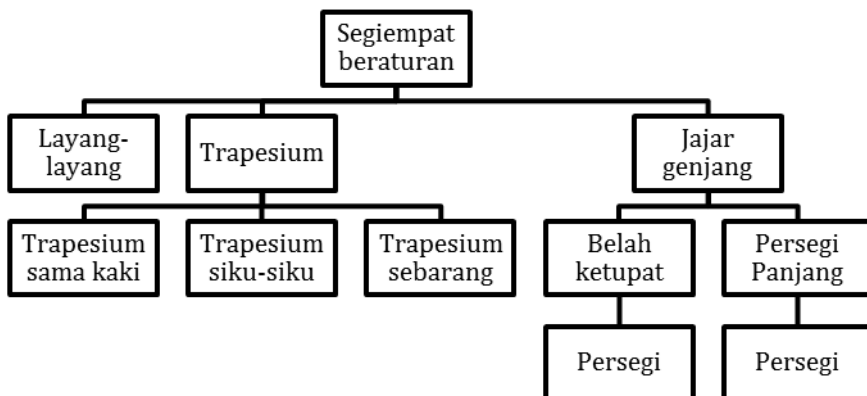
Segienam yaitu poligon yang memiliki 6 sisi dan 6 titik sudut. Pada gambar berikut merupakan segienam dengan sisi-sisi yang sama panjang dan memiliki sudut yang sama besar yaitu 120° .



$$\text{Keliling segienam} = 6 \times s$$

$$\text{Luas segienam} = 6 \times L\Delta$$

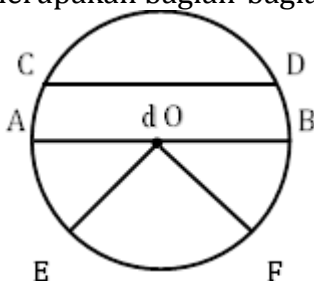
Segiempat berdasarkan jumlah sisi sejajarnya dapat diklasifikasikan sebagai berikut:



Gambar 10.5 Bagan Klasifikasi Segiempat Beraturan

10.3 Lingkaran

Lingkaran merupakan himpunan titik-titik yang memiliki jarak yang sama dari suatu titik tertentu. Berikut merupakan bagian-bagian dari lingkaran:



Tali busur didefinisikan sebagai segmen garis yang titik-titik ujungnya berada pada lingkaran, misalnya $\overline{AB}$, $\overline{CD}$

Diameter didefinisikan sebagai tali busur yang salah satu titiknya berada pada titik pusat lingkaran, misalnya $\overline{AB}$.

Jari-jari lingkaran didefinisikan sebagai segmen garis dari lingkaran ke titik pusat lingkaran misalnya $\overline{AO}$, $\overline{BO}$.

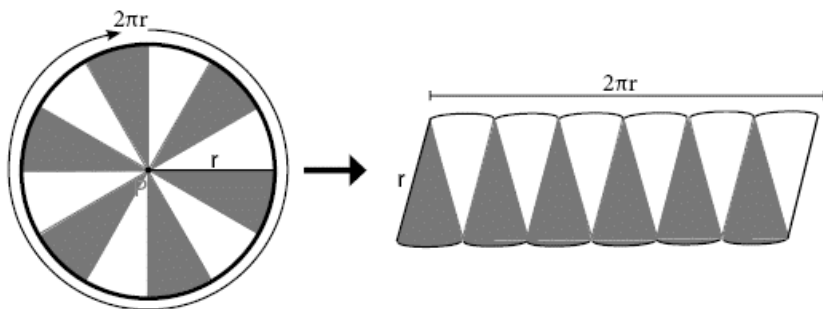
Sudut pusat lingkaran didefinisikan sebagai sudut yang titik sudutnya merupakan titik pusat, misalnya $\angle AOE$, $\angle EOF$, $\angle BOF$.

Misalkan seseorang berjalan berlawanan arah jarum jam dari E ke F, jarak yang ditempuh dari E ke F merupakan busur kecil

EF. Sedangkan jarak yang ditempuh dari E ke F searah jarum jam merupakan busur besar EF. Busur EF dapat ditulis dengan $\widehat{EF}$.

Keliling lingkaran = $\pi \times d$

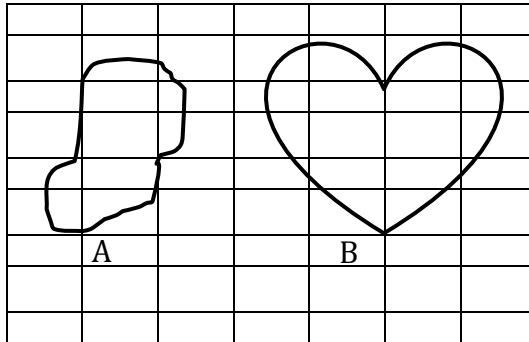
Lingkaran bukan merupakan segibanyak namun lingkaran dapat didapatkan menggunakan pendekatan segibanyak. Luas lingkaran dapat dicari dengan menghitung luas jajar genjang seperti pada gambar berikut



$$\begin{aligned}\text{Luas lingkaran} &= \frac{1}{2} \times a \times t \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \pi r \times r \\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

10.4 Bangun Datar Tidak Beraturan

Luas bangun datar tidak beraturan dapat ditentukan melalui taksiran dengan menghitung jumlah persegi satuan yang menutupi bangun tersebut, seperti pada gambar berikut:



Jika persegi yang menutupi bangun lebih dari setengahnya maka persegi tersebut dihitung satu petak. Namun jika persegi yang menutupi bangun kurang dari setengahnya maka persegi tersebut tidak dihitung satu petak. Misal:

Luas bangun A = 3 satuan

Luas bangun B = 5 satuan

Perhitungan luas bangun datar tidak beraturan akan lebih teliti jika menggunakan persegi dengan satuan yang lebih kecil.

DAFTAR PUSTAKA

- Bittinger, M., Beecher, J. and Johnson, B. 2019. *Basic College Mathematics*. 13th edn. Pearson.
- In'am, Ahsanul. 2003. Pengantar Geometri. Bayu Media Publishing.
- Mardati, A. and Sintawati, M. 2019. *Bangun Datar dengan Pendekatan Penemuan terbimbing*. Universitas Ahmad Dahlan.
- Meilantifa *et al.* 2002. *Geometri Datar*. Bahasa dan Sastra Arah UIN Sunan Gunung Djati.
- Rich, B. and Thomas, C. 2013. *Geometry*. McGraw-Hill.

BAB XI

LINGKARAN

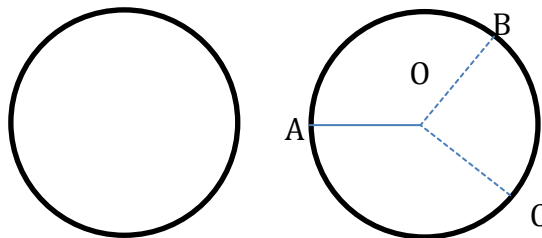
Oleh Anim

11.1 Pendahuluan

Setiap lingkaran memiliki bentuk yang sama dan memiliki lengkungan tertutup yang saling berhubungan dan bentuk yang teratur. Ukuran lingkaran yang menjadi pembeda antara lingkaran satu dengan yang lainnya. Dalam matematika, lingkaran digambarkan sebagai kurva tertutup di mana setiap titik pada kurva berjarak sama terhadap suatu titik tertentu dalam kurva tersebut. Titik tertentu dalam kurva disebut sebagai pusat lingkaran, sedangkan jarak yang sama disebut sebagai jari-jari lingkaran.

11.2 Pengertian Lingkaran

Perhatikan gambar berikut dengan cermat



(a) (b)

Gambar 11. 1 Lingkaran

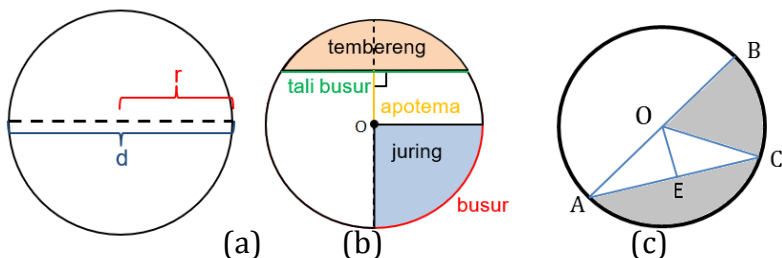
Misalkan A, B, C merupakan tiga titik sebarang pada lingkaran yang berpusat di O. Dapat dilihat bahwa ketiga titik tersebut memiliki jarak yang sama terhadap titik O. Lingkaran

adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu (titik pusat). Lingkaran didefinisikan sebagai garis melengkung yang kedua ujungnya bertemu pada jarak yang sama dari titik pusat. Dalam geometri Euklid, sebuah lingkaran adalah himpunan semua titik pada bidang dalam jarak tertentu, yang disebut jari-jari (r), dari suatu titik tertentu, yang disebut pusat. Sedangkan lingkaran dalam merupakan kurva tertutup sederhana yang khusus. Tiap-tiap titik pada lingkaran mempunyai jarak yang sama dari suatu titik yang disebut pusat lingkaran. Lingkaran adalah bentuk sempurna dari semua benda yang ada di alam semesta karena lingkaran tidak mempunyai ujung dan pangkal.

Definisi lain Lingkaran diartikan sebagai himpunan semua titik (x, y) jika titik (x, y) tersebut adalah titik siku-siku dari semua segitiga siku-siku yang mungkin terbentuk dari dua titik yang berjarak tertentu. Lingkaran dalam matematika termasuk dalam kategori bangun datar yang luas dan kelilingnya bisa di ukur berdasarkan rumus matematika geometri.

11.1 Bagian- Bagian Lingkaran

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 11.2 Unsur- unsur dari Lingkaran

Bagian lingkaran yang termasuk dalam unsur-unsur sebuah lingkaran di antaranya titik pusat, jari-jari, diameter, busur, tali busur, tembereng, juring, dan apotema. Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar (c) serta uraian berikut.

1. Titik Pusat Titik pusat adalah titik yang terletak di tengah-tengah lingkaran. Titik O merupakan titik pusat lingkaran. Dengan demikian, lingkaran tersebut dinamakan lingkaran O .
2. Jari-Jari (r) Jari-jari adalah ruas garis lurus yang menghubungkan titik pada lingkaran dengan titik pusat. Jari-jari lingkaran ditunjukkan oleh ruas garis OA , OB , dan OC .
3. Diameter (d) Diameter adalah ruas garis lurus yang menghubungkan dua titik pada lingkaran dan melalui titik pusat lingkaran. Ruas garis AB pada lingkaran O merupakan diameter lingkaran tersebut. Perhatikan bahwa ruas garis $AB = AO + OB$. Dengan kata lain, nilai diameter merupakan dua kali nilai jari-jarinya, ditulis bahwa $d = 2r$.
4. Busur Busur merupakan garis lengkung yang berhimpitan dengan lingkaran. Garis lengkung AC , garis lengkung CB , dan garis lengkung AB merupakan busur lingkaran O . Simbolnya yaitu AC , CB , dan AB .
5. Tali Busur Tali busur adalah ruas garis lurus dalam lingkaran yang menghubungkan dua titik pada lingkaran dan tidak melalui titik pusat lingkaran O . Tali busur lingkaran tersebut ditunjukkan oleh ruas garis lurus AC yang tidak melalui titik pusat.
6. Tembereng Tembereng adalah daerah di dalam lingkaran yang dibatasi oleh busur dan tali busur

lingkaran. Tembereng ditunjukkan oleh daerah yang diarsir dan dibatasi oleh busur AC dan tali busur AC .

7. Juring Juring adalah daerah di dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua buah jari-jari dan sebuah busur. Juring lingkaran ditunjukkan oleh daerah yang diarsir yang dibatasi oleh jari-jari OC dan jari-jari OB serta busur BC , dinamakan juring BOC .

8. Apotema

Apotema adalah ruas garis terpendek yang menghubungkan titik pusat lingkaran dengan satu titik pada tali busur lingkaran. Garis yang dibentuk bersifat tegak lurus dengan tali busur. Garis OE merupakan garis apotema pada lingkaran O .

11.2 Phi, Keliling dan Luas lingkaran

11.2.1 Phi

Phi adalah suatu ketetapan dengan nilai dari phi sendiri sebesar 3,14 atau $\frac{22}{7}$. Asal mula nilai phi sendiri di peroleh dari berbagai percobaan mengenai lingkaran, sehingga di dapat bahwa setiap lingkaran yang memiliki jari-jari 7 maka panjang keliling dari lingkaran tersebut adalah 22. Dengan kata lain nilai $\frac{22}{7}$ pada Phi (π) suatu lingkaran di dapat dari hasil pembagian dari :

$$\frac{\text{keliling}}{\text{diameter}}$$

Percobaan :

Benni melakukan 2 percobaan dengan menggambar lingkaran yang berbeda-beda dengan jangka dan Dengan menggunakan benang kemudian benni mengukur keliling dan diameter lingkaran masing-

masing lingkaran tersebut, serta menuliskan dalam tabel seperti di bawah ini :

Tabel 11.1 tabel percobaan

Percobaan ke	Keliling	Diameter	$K/d = \pi$
1	44cm	14 cm	$22/7$
2	31,4 cm	10 cm	$31,4/10 = 3,14$

Dari kegiatan tersebut, terbukti bahwa nilai dari phi di peroleh dari hasil pembagian keliling dan diameterlingkaran.

11.2.2 Kelliling Lingkaran

Keliling lingkaran adalah ukuran panjang bagian terluar lingkaran itu sendiri. Kita telah mengetahui bahwa nilai perbandingan antara keliling (K) dan diameter (d) pada suatu lingkaran adalah π . Hubungan tersebut ditulis $\frac{K}{d} = \pi$ atau $K = \pi d$. Karena panjang diameter sama dengan dua kali jari-jari atau $d = 2r$ maka $K = 2\pi r$. Dengan demikian , jika K = keliling dan r= jari-jari, maka keliling lingkaran dapat dirumuskan sebagai berikut :

Rumus keliling lingkaran yaitu :

$$K = 2\pi r \text{ atau } K = \pi d$$

Dengan $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3,14$

Contoh:

Tentukan Keliling lingkaran yang berjari-jari 14 cm dengan $\pi = \frac{22}{7}$!

Penyelesaian :

$$r = 14 \text{ cm}$$

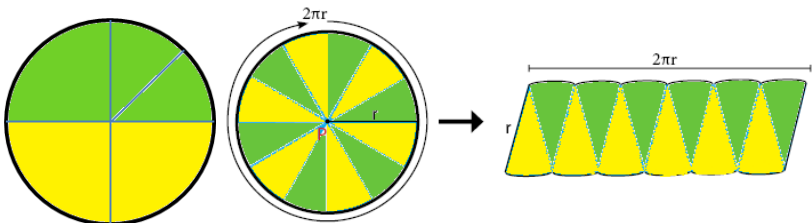
$$K = 2\pi r$$

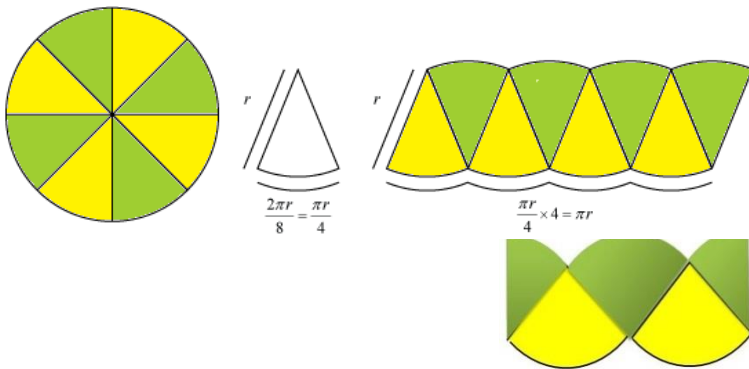
$$K = 2 \left(\frac{22}{7} \right) (14)$$

$$K = 2(22)(2) = 88 \text{ cm.}$$

11.2.3 Luas Lingkaran

Luas lingkaran adalah daerah yang dibatasi oleh keliling lingkaran. Pembuktian secara empiris merupakan cara untuk membuktikan rumus luas daerah lingkaran. Yaitu dengan potong lingkaran sehingga menjadi juring-juring kemudian bentuk menjadi bentuk bangun datar persegi panjang. Potong lingkaran menjadi 4, 8, atau 16 juring. Selama bilangan tersebut genap dan satu juring dibagi menjadi dua dengan ukuran sama, semakin banyak juring maka akan semakin membentuk persegi panjang yang mendekati kriteria. Kemudian disusun secara zigzag ke samping dengan menempelkan sisi jari-jari dari masing-masing juring sehingga mendekati bentuk persegi panjang seperti terlihat pada gambar berikut ini.





Gambar 11.3 proses mencari Luas dan Keliling Lingkaran

Gambar tersebut mendekati bangun datar persegi panjang dengan,

Panjang = 4 busur juring

$$= \left(\frac{1}{2}\right) (\text{Keliling Lingkaran})$$

Lebar = jari-jari lingkaran (r)

sehingga,

Luas Lingkaran = Luas Persegi Panjang

Luas Lingkaran = panjang $\times$ lebar

Luas Lingkaran =

$$\left(\frac{1}{2}\right) (\text{Keliling Lingkaran}) \times \text{jari - jari lingkaran}$$

$$\text{Luas Lingkaran} = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$

$$\text{Luas Lingkaran} = \pi r \times r$$

$$\text{Luas Lingkaran} = \pi r^2$$

Karena $r = \frac{1}{2}d$, maka Luas Lingkaran = $\pi(1/2 d)^2$

$$\text{Luas Lingkaran} = \frac{1}{4} \pi d^2$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa luas lingkaran dengan jari-jari atau diameter adalah :
Rumus luas lingkaran yaitu :

$$L = \pi r^2 \text{ atau } L = \frac{1}{4} \pi d^2$$

Dengan $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3,14$

Contoh :

Hitunglah Luas lingkaran yang berdiameter 20 cm !

Penyelesaian :

$d = 20 \text{ cm}$ maka $r = 10 \text{ cm}$

$$L = \pi r^2$$

$$L = 3,14 \times 10 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$$

Atau

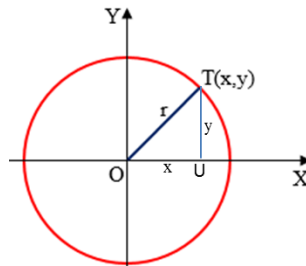
$$L = \frac{1}{4} \pi d^2$$

$$L = \frac{1}{4} \times 3,14 \times (20)^2 = 314 \text{ cm}^2$$

11.3 Persamaan Lingkaran

11.3.1 Persamaan Lingkaran berpusat di O (0,0)

Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 11. 4 Lingkaran berpusat di O (0,0)

Perhatikan segitiga OTU pada gambar tersebut. Titik $T(x,y)$ berada pada lingkaran yang berpusat di titik $O(0,0)$ sehingga ruas garis OT merupakan jari-jari lingkaran. Selain itu diketahui pula bahwa panjang $OU = x$ dan panjang $U = y$. Untuk mendapatkan persamaan lingkaran pada gambar tersebut, karena segitiga OUT adalah segitiga siku-siku, maka kita menggunakan teorema pythagoras yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}(OT)^2 &= (OU)^2 + (TU)^2 \\ r^2 &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

r sebagai jari-jari.

Maka persamaan lingkaran berpusat di $O (0,0)$ adalah :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O (0,0)$ dan melalui titik $(-3,4)$

Jawab :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r^2 = -3^2 + 4^2$$

$$r^2 = 9 + 16$$

$$r^2 = 25$$

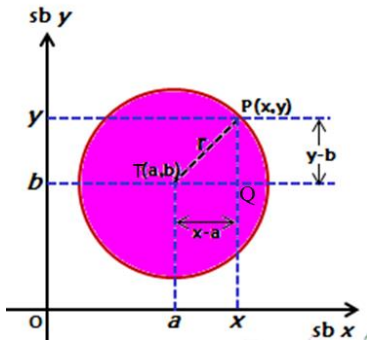
Maka persamaannya adalah

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

11.3.2 Persamaan lingkaran berpusat di $P(a,b)$

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 11. 5 Lingkaran berpusat di $P(a,b)$

Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik $T(a,b)$ dan titik $P(x,y)$ berada pada lingkaran, maka ruas garis TP adalah jari-jari dari lingkaran tersebut. Kemudian perhatikan segitiga TPQ siku-siku di Q . Pada segitiga TPQ kita dapat mengetahui dengan jelas bahwa panjang $TQ = x - a$ dan panjang $PQ = y - b$. Selanjutnya, dengan menggunakan teorema pythagoras maka dapat ditentukan rumus persamaan lingkaran, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} TP^2 &= TQ^2 + PQ^2 \\ r^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 \end{aligned}$$

Maka persamaannya lingkaran berpusat di $P(a,b)$ adalah :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $P(2, -3)$ dan berjari-jari 4

Jawab :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, -3)$ dan jari-jari 4 adalah

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

11.4 Bentuk umum persamaan lingkaran

Adapun bentuk umum dari persamaan lingkaran yang berpusat di $T(a, b)$ dan jari-jari r , yaitu :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jika persamaan lingkaran tersebut diuraikan maka akan menghasilkan bentuk Umum dari lingkaran sebagai berikut:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Dengan

$$A = -2a \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{-2}A$$

$$B = -2b \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{-2}B$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = a^2 + b^2 - C$$

Dengan mensubstitusikan nilai a dan b maka diperoleh

$$r^2 = \left(\frac{1}{-2}A\right)^2 + \left(\frac{1}{-2}B\right)^2 - C$$

$$r^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

Jadi, bentuk umum persamaan lingkaran adalah sebagai berikut.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Dengan pusat lingkaran, $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari-jari lingkaran

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

Contoh :

Tentukan koordinat titik pusat dan jari-jari dari lingkaran berikut :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

Jawab :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

$$-2 = -2a \quad \rightarrow \quad a = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$4 = -2b \quad \rightarrow \quad b = \frac{4}{-2} = -2$$

$$P(a, b) = P(1, -2)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - (-20)}$$

$$r = \sqrt{1 + 4 + 20}$$

$$r = \sqrt{25}$$

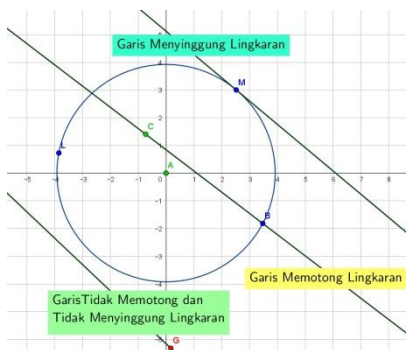
$$r = 5$$

Jadi koordinat titik pusat lingkaran tersebut adalah $P(1,-2)$ dengan jari-jari $r = 5$.

11.5 Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Kedudukan garis terhadap lingkaran ada tiga kemungkinan, yaitu garis memotong lingkaran, garis menyinggung lingkaran atau garis tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran.

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 11.6 Kedudukan garis terhadap Lingkaran

Bentuk umum persamaan kuadrat :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ dengan } a \neq 0$$

Menentukan diskriminan :

$$D = b^2 - 4ac$$

Cara menentukan kedudukan suatu garis terhadap lingkaran

Yaitu Substitusikan persamaan garis ke dalam persamaan lingkaran sehingga diperoleh sebuah persamaan kuadrat. Kemudian hitung nilai diskriminannya.

Sebuah garis $y = mx + n$ tanpa harus kita gambarkan dapat kita tentukan apakah garis memotong lingkaran, garis menyinggung lingkaran atau garis tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran. Persamaan lingkaran antara lain $x^2 + y^2 = r^2$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$

$$\text{atau } x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Dengan memeriksa nilai dari diskriminan ($D = b^2 - 4ac$) persamaan kuadrat persekutuan antara lingkaran dan garis, dimana kemungkinan nilainya ada tiga yaitu:

- Jika nilai $D > 0$ maka garis dan lingkaran berpotongan di dua titik atau umumnya disebut garis memotong lingkaran;
- Jika nilai $D = 0$ maka garis menyinggung lingkaran\$
- Jika nilai $D < 0$ maka garis tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran

Contoh 1 :

Tentukan kedudukan garis $y = 2x - 1$ terhadap lingkaran

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$$

Jawab :

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$$

$$x^2 + (2x - 1)^2 + 2x + 2(2x - 1) - 4 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 + 2x + 4x - 2 - 4 = 0$$

$$5x^2 + 2x - 5 = 0$$

Menghitung diskriminan :

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 2^2 - 4(5)(-5)$$

$$D = 4 + 100 = 104$$

Karena $D > 0$ maka garis $y = 2x - 1$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ di dua titik.

Contoh 2 :

Jika lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 2 = 0$ menyinggung garis $y = x + k$, maka nilai k adalah ...

Jawab :

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 2 = 0$$

$$x^2 + (x + k)^2 + 6x + 2(x - k) + 2 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 + 6x + 2x + 2k + 2 = 0$$

$$2x^2 + 2kx + 8x + k^2 + 2k + 2 = 0$$

$$2x^2 + (2k + 8)x + (k^2 + 2k + 2) = 0$$

Syarat garis menyinggung lingkaran adalah $D = 0$

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(2k + 8)^2 - 4(2)(k^2 + 2k + 2) = 0$$

$$4k^2 + 32k + 64 - 8k^2 - 16k - 16 = 0$$

$$-4k^2 + 16k + 48 = 0$$

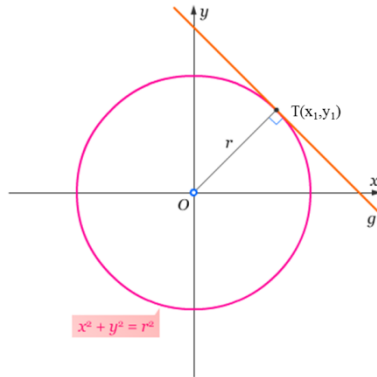
$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$(k + 2)(k - 6) = 0$$

$$k = -2 \text{ atau } k = 6$$

11.6 Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran

11.6.1 Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ melalui titik $T(x_1, y_1)$



Gambar 11. 7 persamaan garis g yang melali titik $T(x_1, y_1)$,
Lingkaran berpusat di $O(0,0)$

Misalkan kita akan menentukan persamaan garis g yang melali titik $T(x_1, y_1)$, yaitu titik pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Karena titik $T(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ maka,

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots(1)$$

Seanjutnya kita membuat ruas garis OT , yaitu ruas garis yang memiliki ujung-ujung di titik O (pusat lingkaran) dan titik T . Sehingga gradien dari ruas garis tersebut adalah

$$m_{OT} = \frac{y_1}{x_1}$$

Karena garis g tegak lurus dengan ruas garis OT , maka

$$m_{OT} \cdot m_g = -1$$

$$\frac{y_1}{x_1} \cdot m_g = -1$$

$$m_g = -\frac{x_1}{y_1}$$

Karena garis g melalui titik $T(x_1, y_1)$ dan gradien $m_g = -\frac{x_1}{y_1}$ maka persamaan garis g dapat ditentukan sebagai berikut:

$$y - y_1 = m_g(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow (y - y_1)y_1 = -x_1(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y_1y - y_1^2 = -x_1x + x_1^2$$

$$\Leftrightarrow y_1y + x_1x - y_1^2 = x_1^2$$

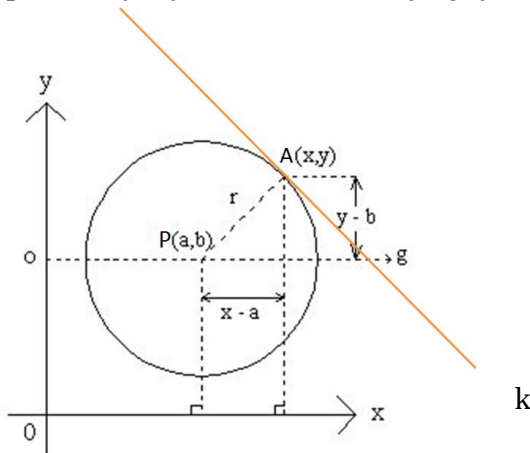
.....(2)

Dengan mensubstitusi persamaan (1) ke persamaan (2) diperoleh $x_1x + y_1y = r^2$. Sehingga, persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dapat disimpulkan sebagai berikut.

Persamaan garis singgung yang melalui titik $T(x_1, y_1)$, pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah

$$x_1x + y_1y = r^2$$

11.6.2 Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran dengan pusat $P(a,b)$ melalui titik $A(x_1,y_1)$



Gambar 11. 8 persamaan garis g yang melalui titik $A(x_1, y_1)$,
Lingkaran berpusat di $P(a,b)$

Perhatikan gambar di atas titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dan garis k adalah garis singgung yang melalui titik $A(x_1, y_1)$. Maka

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Apabila kita membuat ruas garis PA , yaitu jari-jari dari lingkaran P , maka gradien dari ruas garis tersebut adalah

$$m_{PA} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$$

Karena ruas garis PA merupakan jari-jari yang memiliki salah satu titik ujung di titik A , yaitu titik yang juga dilalui oleh garis singgung k , maka ruas garis PA tegak lurus dengan garis k . Hal ini mengakibatkan,

$$m_{PA} \cdot m_k = -1$$

$$\frac{y_1 - b}{x_1 - a} \cdot m_k = -1$$

$$m_k = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$$

Karena garis k melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan bergradien

$m_k = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$, maka persamaan garis k adalah

$$y - y_1 = m_k(x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$$

$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

$$y_1 y - y b - y_1^2 + y_1 b = -(x_1 x - x_1^2 - ax + ax_1)$$

$$y_1 y - y b - y_1^2 + y_1 b = -x_1 x + x_1^2 + ax - ax_1$$

$$x_1 x - x_1^2 - ax + ax_1 + y_1 y - by - y_1^2 + by_1 = 0$$

$$x_1 x - ax + ax_1 + y_1 y - by + by_1 = x_1^2 + y_1^2 \quad \dots(*)$$

Karena $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ maka berlaku:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2 = r^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 2ax_1 - a^2 + 2by_1 - b^2 + r^2$$

Substitusikan $x_1^2 + y_1^2 = 2ax_1 - a^2 + 2by_1 - b^2 + r^2$ ke (*),

di peroleh :

$$x_1 x - ax + ax_1 + y_1 y - by + by_1$$

$$= 2ax_1 - a^2 + 2by_1 - b^2 + r^2$$

$$(x_1^2 - ax + ax_1 - 2ax_1 + a^2) + (y_1 y - by + by_1 - 2by_1 - b^2) = r^2$$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

Sehingga, persamaan garis singgung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

melalui titik $A(x_1, y_1)$ pada lingkaran dapat disimpulkan sebagai berikut.

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

11.6.3 Persamaan garis singgung lingkaran

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ melalui titik $A(x_1, y_1)$
pada lingkaran

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ melalui titik $A(x_1, y_1)$ pada lingkaran dapat ditentukan dengan persamaan berikut:

$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

Coba uraikan proses penemuan persamaan diatas!

11.6.4 Persamaan garis singgung lingkaran jika diketahui gradient garis singgung

Misal (a, b) adalah titik pusat lingkaran, r adalah jari-jari lingkaran, dan m gradient garis singgung lingkaran.

Persamaan Lingkaran	Persamaan Garis Singgung
$x^2 + y^2 = r^2$	$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

Sebagai bahan diskusi coba uraikan proses persamaan garis singgung diatas di peroleh!

DAFTAR PUSTAKA

- Barnet Rich. 2005. *Geometri*. Jakarta: Erlangga.
- Lestari, S. 2011. *Matematika (Program IPA)*. Surakarta: CV William.
- Slamet Hw. 2018. *Geometri Analitika Bidang Datar*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.
- Sulistiyono. 2012. *Seri Pendalaman Materi (SPN) Matematika untuk SMA*. Jakarta: Erlangga.

BAB XII

VEKTOR

Oleh Ely Syafitri

12.1 Pendahuluan

Vektor sangat berkaitan dengan besaran. Besaran dalam Fisika terdiri dari besaran vektor dan besaran skalar. Besaran vektor adalah besaran yang memiliki arah dan nilai, contohnya: gaya, percepatan, kecepatan, dll. Secara umum besaran vektor dapat direpresentasikan sebagai ruas garis terarah Sedangkan besaran skalar itu sendiri hanya memiliki nilai saja, contohnya: massa, suhu, waktu dan tinggi. Salah satu manfaat vektor matematika dalam kehidupan adalah pada penggunaan GPS (*Global Positioning System*). Dalam matematika Vektor pada ruang dimensi dua dan ruang dimensi 3, arah panah menandakan arah-arah vektor yang dilambangkan dengan $\|A\|$, panjang vektor biasa disebut “*norm*”. Sedangkan jarak antar vektor biasa disebut “metrik” yang dilambangkan $|v - u|$ (cullen, 1998). Untuk selanjutnya akan kita bahas secara mendalam tentang vektor beserta sifat-sifatnya.

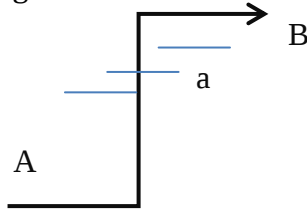
12.2 Pengertian Vektor Dan Skalar R^2 (Bidang)

Vektor merupakan suatu besaran yang mempunyai besar dan arah. Secara gambar suatu vektor dapat dikatakan sebagai potongan garis yang mempunyai arah. Besar dan kecilnya suatu vektor dapat ditentukan oleh suatu panjang atau

pendeknya garis potongan garis. Sedangkan arah vektor ditunjukkan dengan tanda anak panah.

Skalar adalah elemen dari suatu lapangan yang digunakan untuk mendefenisikan sebuah ruang vektor, lapangan yang dipakai pada umumnya ialah bilangan real.

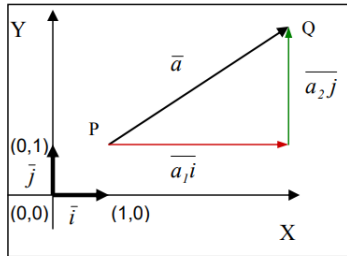
Perhatikan gambar dibawah ini :



Secara geometri, sebuah vektor dapat digambarkan oleh ruas garis berarah. Pada gambar di atas ruas garis $\overline{AB}$ diwakili oleh vektor $\vec{a}$ dan A sebagai titik awal dan B sebagai titik akhir dan ukuran atau panjang vektor tersebut 4 satuan ini adalah $|\vec{a}| = |\overline{AB}| = 4$.

12.3 Vektor Satuan

Vektor satuan adalah suatu vektor yang memiliki satuan yakni yang telah diuraikan dalam sumbu $x(i)$, $y(j)$ dan $z(k)$ yang besarnya yaitu satu satuan. Dikatakan vektor satuan dikarenakan besar vektor $= |i| = |j| = |k| = 1$. Vektor satuan digunakan untuk menjelaskan arah suatu vektor didalam suatu koordinat, baik itudalam koordinat dua dimensi maupun pada koordinat tiga dimensi.



Vektor satuan adalah vektor yang besarnya sama dengan 1 (satu) dan tidak memiliki satuan serta digunakan untuk menunjukan suatu arah dalam ruang. Sebuah **vektor** yang terletak di dalam ruang tiga memiliki komponen terhadap sumbu x, sumbu y dan sumbu z, seperti gambar di bawah ini.

Pada gambar di atas, dapat dilihat bahwa vektor satuan $\hat{i}$ menunjukkan arah sumbu x positif, vektor satuan $\hat{j}$ menunjukkan arah sumbu y positif, dan vektor satuan $\hat{k}$ menunjukkan arah sumbu z positif. Hubungan antara vektor komponen dan setiap komponennya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F_x = F_x \hat{i}$$

$$F_y = F_y \hat{j}$$

$$F_z = F_z \hat{k}$$

Kita dapat menulis vektor F dalam komponen-komponennya sebagai berikut:

$$F = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

Sedangkan besar vektor F dapat dihitung dengan menentukan komponen-komponen vektor yang saling tegak lurus satu sama lain dengan persamaan:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Misalnya terdapat dua vektor pada ruang tiga dimensi yakni A dan B , maka jika dinyatakan dalam komponen-komponennya, sebagaimana tampak di bawah :

$$A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$B = B_x i + B_y j + B_z k$$

Besar resultan penjumlahan dua buah vektor dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

$$R = A + B$$

$$R = (A_x i + A_y j + A_z k) + (B_x i + B_y j + B_z k)$$

$$R = (A_x + B_x) i + (A_y + B_y) j + (A_z + B_z) k$$

Besar resultan pengurangan dua buah vektor dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

$$R = A - B$$

$$R = (A_x i + A_y j + A_z k) - (B_x i + B_y j + B_z k)$$

$$R = (A_x - B_x) i + (A_y - B_y) j + (A_z - B_z) k$$

Untuk memantapkan pemahaman Anda tentang vektor satuan, silahkan simak contoh soal di bawah ini.

Contoh Soal 1

- Diketahui dua buah vektor sebagai berikut.

$$A = 8i - 10j + 6k$$

$$B = 4i + 4j - 8k$$

Tentukan $A - B$ dan tentukan juga besar vektor $A + B$.

Penyelesaian:

Untuk mencari resultan pengurangan dari vektor A dan B maka

$$R = A - B$$

$$R = (8i - 10j + 6k) - (4i + 4j - 8k)$$

$$R = (8 - 4)i + (-10 - 4)j + (6 + 8)k$$

$$R = 4i - 14j + 14k$$

Sedangkan untuk mencari besar vektor $A + B$, terlebih dahulu mencari resultan vektor A dan B maka:

$$R = A + B$$

$$R = (8i - 10j + 6k) + (4i + 4j - 8k)$$

$$R = (8 + 4)i + (-10 + 4)j + (6 - 8)k$$

$$R = 12i - 6j - 2k$$

Besar resultan dari vektor $A + B$ yakni:

$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)}$$

$$R = \sqrt{(12^2 + (-6)^2 + (-2)^2)}$$

$$R = \sqrt{(144 + 36 + 4)}$$

$$R = \sqrt{184}$$

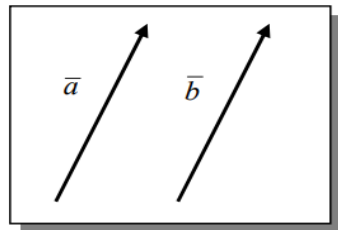
Jadi $A - B$ adalah $4i - 14j + 14k$ dan besar vektor $A + B$ adalah $\sqrt{184}$

12.4 Aljabar Vektor

Aljabar vektor merupakan operasi pada dua atau lebih vektor, termasuk operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian. Operasi vektor dapat dilakukan pada komponen skalar.

12.4.1 Dua Vektor yang Sama

Dua vektor yang sama merupakan dua buah vektor yang sama a dan b dikatakan sama. $|\vec{a}| = |\vec{b}| \rightarrow$ jika $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ dan arah $|\vec{a}| =$ arah $|\vec{b}|$.



Contoh soal :

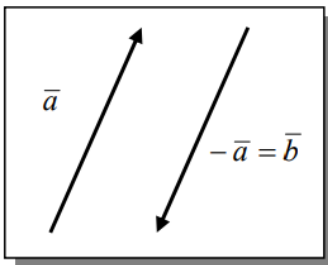
- 1) Tentukan besar vektor $\vec{a}$ jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

Jawab :

$$\text{Besar vektor } a = |\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

12.4.2 Vektor Negatif

Vektor negatif merupakan sebuah vektor yang memiliki ukuran sama dengan vektor a tetapi arah pada vektor negatif yaitu arahnya berlawanan. Jika vektor $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ maka $|\mathbf{a}| = |-\mathbf{b}|$. Vektor negatif sering disebut juga sebagai vektor invers.



Contoh soal :

- 1) Invers dari vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah ...

Jawab :

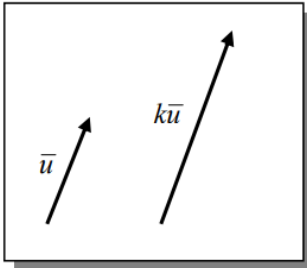
Dimisalkan vektor $\mathbf{b}$ adalah invers dari vektor $\mathbf{a}$. Invers $\mathbf{a}$ adalah vektor dengan nilai yang sama dengan vektor $\mathbf{a}$ tetapi arahnya berlawanan dengan vektor $\mathbf{a}$. Oleh karena itu vektor $\mathbf{b}$ sebagai berikut :

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a}$$

$$= \begin{pmatrix} -(-5) \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

12.4.3 Perkalian Vektor dengan Skalar



perkalian vektor dengan skalar dapat diartikan dengan jika k adalah bilangan real positif, $k\vec{u}$ adalah vektor dengan panjangnya $k|\vec{u}|$ dan mempunyai arah yang sama dengan $\vec{u}$. Sedangkan $-k|\vec{u}|$ adalah vektor yang panjangnya $k|\vec{u}|$ tetapi arah berlawanan dengan $|\vec{u}|$.

12.4.4 Penjumlahan Vektor

Dalam operasi penjumlahan, hanya komponen sejenis yang dijumlahkan.

Misalkan vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, maka

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Contoh soal :

Diketahui a adalah $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan untuk $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. maka hasil

$$\text{penjumlahan dari } a + b = \begin{pmatrix} -3 + 4 \\ 2 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.4.5 Pengurangan Vektor

Dalam operasi penjumlahan, hanya komponen sejenis yang dijumlahkan.

Misalkan vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, maka

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Contoh soal :

Diketahui a adalah $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan untuk $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. maka

$$\text{pengurangan } a - b = \begin{pmatrix} -3 - 4 \\ 2 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

12.4.6 Perkalian vektor dengan skalar

Jika vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ maka $ka = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$, dan vektor ka sejajar dengan vektor a .

Contoh:

Misalkan $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, maka tentukanlah $-3a$.

$$\text{Jawab : } -3a = -3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

12.4.7 Perkalian skalar antara dua vektor

Misalkan diketahui vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, maka perkalian skalar (perkalian titik atau dot product) antara dua vektor a dan b dirumuskan oleh:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

b. $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$, dengan θ adalah sudut terkecil yang dibentuk oleh a dan b .

Contoh soal:

Diketahui $a = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, maka tentukanlah :

- $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- $b = |a| |b|$

Jawab :

- $a \cdot b = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$
 - $= (5 \cdot 8) + (12 \cdot 6)$
 - $= 40 + 72$
 - $= 112$

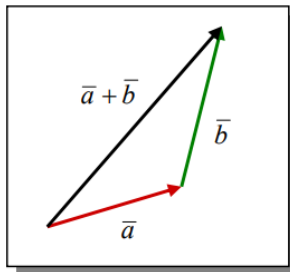
- $|a| = \sqrt{5^2 + 12^2}$
 - $= \sqrt{25 + 144}$
 - $= \sqrt{169}$
 - $= 13$

- $|b| = \sqrt{8^2 + 6^2}$
 - $= \sqrt{64 + 36}$
 - $= \sqrt{100}$
 - $= 10$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } \cos \theta &= \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} \\ &= \frac{112}{13 \cdot 10} \end{aligned}$$

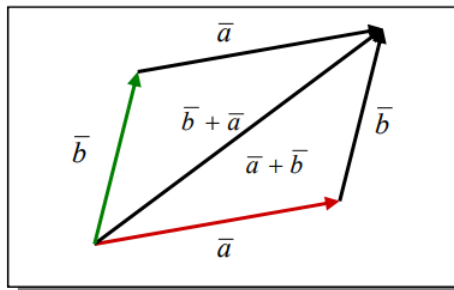
$$= \frac{112}{130}$$

12.4.8 Aturan Segitiga



Coba perhatikan gambar segitiga dibawah ini. Jika diketahui $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$ adalah $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ maka $\overline{AC}$ dapat dikatakan sebagai operasi penjumlahan vektor $\vec{a} + \vec{b}$.

2.3.9 Aturan jajargenjang



AB dan DC mewakili vektor $\vec{a}$ BC dan AD mewakili vektor $\vec{b}$, maka $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ atau $\overline{AC} = \vec{b} + \vec{a}$.

Contoh soal :

- 1) Tentukan hasil penjumlahan (resultan) dari vektor A dan vektor B pada gambar dibawah ini bisa besarnya sudut adalah 45° .

Jawab :

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos 45}$$

$$R = \sqrt{5^2 + 8^2 + 2 (5)(8) \cos 45}$$

$$R = \sqrt{25 + 64 + 80 \cos 45}$$

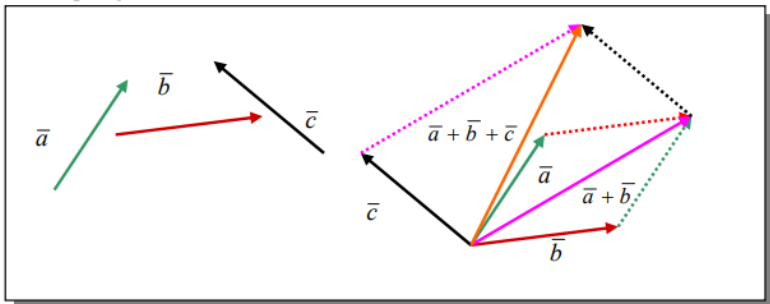
$$R = \sqrt{25 + 64 + 56,57}$$

$$R = \sqrt{145,57}$$

$$R = 12,056$$

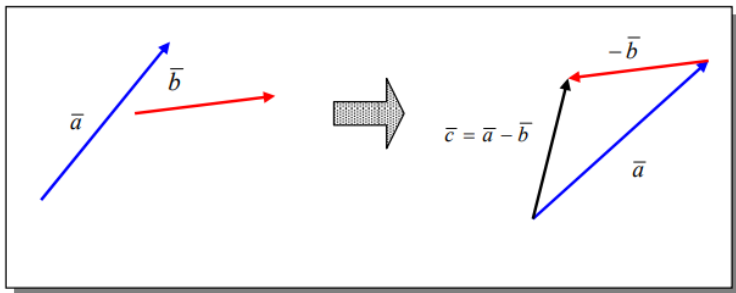
12.4.9 Aturan Polygon

Aturan polygon adalah operasi penjumlahan pada tiga vektor atau lebih dapat digunakan dengan aturan poligon.



12.4.10 Selisih Dua Vektor

Selisih dua arah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, dinyatakan sebagai $\vec{a} - \vec{b}$, dapat dipandang sebagai penjumlahan vektor $\vec{a}$ dengan invers vektor $\vec{b}$ yaitu vektor $-\vec{b}$. Misalkan $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ maka $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Secara diagram selisih dua vektor tersebut seperti gambar berikut.



Contoh soal :

1) Hitunglah selisih dari dua vektor berikut :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jawab :

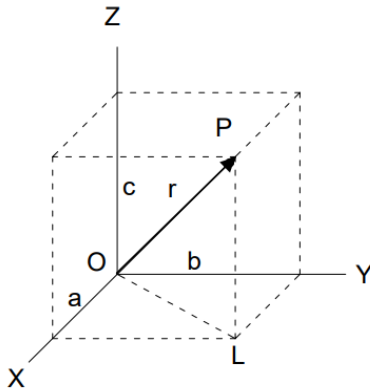
$$\text{Ingat kembali } \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi } \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.3.10 Vektor Nol

Jika vektor $\vec{a} = \vec{b}$ maka $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$. $\vec{0}$ disebut vektor nol. Vektor nol tidak mempunyai besar dan arahnya tak tentu.

12.4 Vektor dalam Ruang Tiga Dimensi



Perhatikan gambar diatas:

Vektor $\overline{OP}$ didefinisikan oleh komponen-komponennya:

- $\bar{a}$ sepanjang OX
- $\bar{b}$ sepanjang OY
- $\bar{c}$ sepanjang OZ

Misalkan : $\bar{i}$ = vektor satuan dalam arah OX

$\bar{j}$ = vektor satuan dalam arah OY

$\bar{k}$ = vektor satuan dalam arah OZ

Maka :

$$\overline{OP} = \bar{a}\bar{i} + \bar{b}\bar{j} + \bar{c}\bar{k}$$

$$OL^2 = a^2 + b^2 \text{ dan } OP^2 = OL^2 + c^2$$

$$OP^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{Jadi, } \vec{r} = \vec{ai} + \vec{bj} + \vec{ck}$$

12.4.1 Sistem koordinat dalam ruang

Sistem koordinat spasial (ruang) terdiri dari tiga sumbu yaitu sdx, sby, dan sbz yang saling tegak lurus. Ketiga sumbu tersebut bertemu di titik awal O. Sumbu x positif, sumbu y positif, dan sumbu z positif tampak seperti gambar. Disisi lain, untuk arah yang berlawanan didefinisikan sebagai arah negatif, dan dapat dinyatakan sebagai :

a. Vektor kolom

$$OP = P = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

b. Vektor baris

$$OP = P = (X_p, Y_p, Z_p)$$

c. Vektor posisi

Misalkan OA dan OB masing-masing adalah vektor

posisi titik A dan B terhadap O dan $OA = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $OB = b$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ maka :}$$

$$\text{Vektor posisi } AB = OB - OA = b - a = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Contoh soal :

Nyatakan vektor $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dalam bentuk vektor baris !

Jawab :

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3i + 4j + 5k$$

12.4.2 Operasi aljabar pada vektor di R^3

Seperti dilihat penjelasan pada vektor R^2 , sifat-sifat dan operasi aljabar pada vektor juga dapat dijelaskan pada vektor R^3 .

a. Besar dan panjang vektor

Misalkan dapat dilihat pada vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, dan vektor b

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Besar vektor } a = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\text{Besar vektor } b = |b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Pembahasan soal :

$$\text{Tentukan besar vektor } a \text{ jika } a = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Jawab :

$$\text{Besar vektor } a = |a| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

b. Kesamaan dua vektor

Kesamaan dua vektor adalah dua vektor dikatakan sama apabila kedua vektor itu memiliki besar dan arah yang sama. Jika vektor a dan vektor b sama maka $a = b$.

c. Vektor satuan

Vektor satuan merupakan suatu vektor yang biasanya 1

satuan searah dengan vektor a . jika $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, maka disimpulkan vektor spasial (vektor satuan) dari a ditulis e , ditulis dengan ketentuan :

$$e = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

d. Penjumlahan dan pengurangan vektor

Seperti pada vektor di R^2 dalam operasi penjumlahan atau pengurangan hanya komponen sejenis yang dijumlahkan atau dikurangkan.

Misalkan pada vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, dan vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, maka dapat ditulis dengan:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

contoh soal :

- Jika $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, maka tentukanlah vektor b

- a .

Jawab :

$$b - a = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e. Perkalian vektor dengan skalar

Seperti perkalian vektor dan skalar di R^2 , setiap bagian vektor dikalikan dengan skalar tersebut.

Jika pada vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, dan k adalah skalar (bilangan riil), maka:

$$ka = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

Contoh soal :

- Misalkan $a = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, maka tentukanlah $6a$.

$$\text{Jawab : } 6a = 6 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ 30 \end{pmatrix}$$

f. Perkalian skalar antara dua vektor

Seperti pada pembahasan perkalian skalar dua vektor di R^2 , pada penjelasan beriku ini juga berlaku untuk perkalian skalar dua vektor di R^3 .

Misalkan diketahui vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, maka perkalian skalar (perkalian titik atau dot product) antara dua vektor a dan b dapat dirumuskan oleh :

- $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- $a \cdot b = |a| |b| \cos \alpha$, dengan α adalah sudut antara a dan b adalah 60° . maka tentukanlah $a \cdot b$

Contoh soal :

- Diketahui $|a| = 5$ dan $|b| = 6$ serta sudut antara a dan b adalah 60° , maka tentukanlah $a \cdot b$.

jawab:

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= |a| |b| \cos \theta \\
 &= 5 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ \\
 &= 30 \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

g. Sudut antara dua vektor

Misalkan vektor $a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ merupakan vektor di R^3 dan sudut yang dibentuk oleh kedua rumus dapat ditentukan dengan rumus :

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Contoh soal :

-

Diketahui $a =$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Hitunglah sudut antara vektor a dan b .

jawab :

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{(3 \cdot 0) + (2 \cdot 4) + ((-2) \cdot 4)}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{0}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{32}}$$

$$\cos \theta = 0, \text{ maka } \theta = 90$$

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard., Elementary Linear Algebra (Fourth Edition).
John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1984.
- Holland, D-Treeby, T., Vektor (Pure and Applied). Edward
Arnold Limited, London, 1983.
- Muharti HW., Ilmu Ukur Analit Ruang, FPMIPA IKIP
Yogyakarta, 1975
- Raharjo, M., Vektor R2 dan R3 (Standar Bahan Ajar Penataran
Matematika Guru SMA), PPPG Matematika, Yogyakarta,
2000.
- Thomas, George B – Finley, Ross L., Calculus and Analytic
Geometry. Addisson Wesley Publishing Co, Boston, 1986.

BIODATA PENULIS



Nasruddin, S.Pd., M.Si.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Sembilanbelas November Kolaka

Penulis lahir di Sani-sani, 09 September 1988. Tinggal di dusun 1 Sani-sani Desa Lawulo Kecamatan Samaturu Kabupaten Kolaka - Sulawesi Tenggara. Pendidikan SDN kecil Liku lulus pada tahun 2000, lanjut pendidikan menengah di SMP Negeri 3 Kolaka lulus pada tahun 2003, selanjutnya di SMK Negeri 1 Kolaka lulus tahun 2006. Kemudian melanjutkan pendidikan untuk gelar Sarjana di Universitas 19 November Kolaka (USN Kolaka) mengambil Jurusan Pendidikan Matematika lulus pada tahun 2010. Pada tahun 2013 melanjutkan Magister di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya dengan konsentrasi bidang Matematika Terapan dan lulus pada tahun 2015. Sejak tahun 2011 menjadi Dosen di USN Kolaka pada program studi pendidikan matematika FKIP-USN Kolaka sampai sekarang. Saat ini penulis sedang melanjutkan pendidikan Doktor di Universitas Negeri Surabaya (UNESA) pada Program Studi S3 Pendidikan Matematika dan aktif melakukan penelitian dibidang pendidikan matematika dan berbagai kegiatan pengabdian kepada masyarakat.

BIODATA PENULIS



Lulut Alfaris, S.T., M.T.

Dosen Program Studi Teknologi Kelautan
Politeknik Kelautan dan Perikanan Pangandaran

Penulis menyelesaikan Pendidikan di SMAN 1 Genteng Banyuwangi, selanjutnya menempuh pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Teknik Kelautan, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya . Saat ini menjadi dosen di Program Studi Teknologi Kelautan, Politeknik Kelautan dan Perikanan Pangandaran. Mata Kuliah yang Penulis ajar ialah Oseanografi serta Matematika Teknik. Buku-buku penulis yang telah terbit diantaranya: Artificial Intelligence; Riset Operasi; Filsafat Pendidikan Matematika; Konsep Dasar Matematika; dan Termodinamika: Tinjauan Teoritis dan Praktis. Penulis bisa dihubungi di lulut.alfaris@kkp.go.id

BIODATA PENULIS



Agung Prasetyo, S.Pd.

Mahasiswa S2 Pendidikan Matematika dan *Awardee* LPDP. Di usianya yang menginjak 22 tahun, ia telah menapakkan kakinya untuk menempuh jenjang Magister Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Yogyakarta (UNY). Sebelumnya, ia adalah alumnus dari Universitas Negeri Surabaya. Bila selama sarjana penulis memperoleh beasiswa Bidikmisi, maka saat ini ia tercatat sebagai penerima beasiswa *fully-funded* LPDP 2021. Buku ini merupakan buku kolaborasi kedua yang berhasil diterbitkan, sebelumnya ia telah berkontribusi dalam menulis buku berjudul 'filsafat pendidikan matematika'. Hingga saat ini dirinya tertarik untuk menekuni bidang pendidikan matematika, khususnya: pemecahan dan pengajuan masalah, penalaran analogi, dan filsafat. Selain menulis buku, penulis juga sering membuat konten untuk matematika, pembimbingan beasiswa, dan olimpiade. Apabila anda tertarik untuk menelusuri karya dan goresan pemikirannya, silakan mengunjungi: <https://agungprasetyo4131.wordpress.com/> dan <https://youtu.be/nxQnbKkFYNY>.

Penulis selalu berpesan bahwa di dalam hidup ini kita harus memperjuangkan impian atau "Kilapnya emas terbentuk dari tempaan logam yang panas".

BIODATA PENULIS



Ichsan

Dosen Program Studi Manajemen Perkebunan
Politeknik Negeri Pontianak

Penulis lahir di Sejangkung, Kalimantan Barat tanggal 09 Desember 1968. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Manajemen Perkebunan Politeknik Negeri Pontianak. Menyelesaikan pendidikan S1 di Universitas Tanjungpura tahun 1991 dan S2 di Universitas Negeri Surabaya tahun 2000 pada Program Studi pada Program Studi Pendidikan Matematika, dan S3 di Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2011 pada program studi Pendidikan Umum/Nilai.

BIODATA PENULIS



Nurul Ainun Fajriah

Penulis lahir di Welonge tanggal 7 September 1998. Penulis adalah alumni Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar pada jenjang sarjana dan tahun ini (2022) melanjutkan pendidikan ke jenjang magister di Universitas Negeri Yogyakarta dengan program studi yang sama.

BIODATA PENULIS



Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd,
Dosen Pendidikan Matematika
Universitas Simalungun

Penulis lahir di Medan. Pendidikan S1, S2 dan S2 Prodi Pendidikan Matematika dan Matematika. Dosen di FKIP dan SPS Program S2 Universitas Simalungun. Aktif mengikuti sebagai pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif menulis jurnal OJS, Sinta, dan Scopus, dan aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional.

BIODATA PENULIS



Elfira Rahmadani, S.Pd.I., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Asahan

Penulis lahir di Sei Kamah II tanggal 3 September 1990. Penulis adalah dosen tetap pada program studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Asahan. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 jurusan Pendidikan Matematika di Institut Agama Islam Negeri Sumatera Utara pada tahun 2009-2013. Kemudian melanjutkan studinya pada tahun yang sama (2013) ke jenjang S2 jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Medan dan selesai pada tahun 2015. Saat ini penulis sedang menempuh jenjang S3 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan.

BIODATA PENULIS



Syahrani Sirait

Dosen Tetap Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Asahan

Penulis lahir di Sei Alim Hasak, 02 Agustus 1988, anak pertama dari pasangan bapak Idris Sirait, A.Mpd dan Ibu Rusmi. Sejak Tahun 2014 penulis merupakan salah satu dosen tetap pada program studi Pendidikan matematika Universitas Asahan yang terletak pada kecamatan kota kisaran Timur, Kabupaten Asahan, Provinsi Sumatera Utara. Selama menjadi dosen tetap, penulis aktif melaksanakan kegiatan Pendidikan dan pengajaran, penelitian dan publikasi ilmiah serta pengabdian kepada masyarakat di bidang Pendidikan khususnya Pendidikan matematika. Pendidikan Dasar di SD Negeri 010246 Banjar selesai tahun 2000, melanjutkan sekolah di SMP N 1 Air Joman selesai tahun 2003, kemudian melanjutkan sekolah di SMA N 1 Kisaran dan selesai tahun 2006. Pendidikan tinggi yang telah ditempuh adalah program sarjana program studi Pendidikan matematika Universitas Negeri Medan dan selesai tahun 2011 dengan judul skripsi “ Penerapan Metode *Stop Think Do* untuk meningkatkan Motivasi Belajar Siswa Pada Pokok Bahasan Sistem Persamaan

Linear Dua Variabel di kelas VIII SMP N 1 Silau Laut Asahan Tahun Ajaran 2010/2011”, melanjutkan ke program magister Pascasarjana Universitas Negeri Medan pada program studi Pendidikan matematika dengan judul tesis “ Pengaruh Model Pembelajaran Kooperatif Tipe *Group Investigation* GI terhadap Kemampuan Pemahaman Konsep dan Komunikasi Matematika Siswa SMA di Kota Kisaran” dan pada tahun 2021 sampai sekarang melanjutkan Pendidikan di program Doctor program studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan (UNIMED).

BIODATA PENULIS



La Ode Asmin, S.Si., M.Sc.
Staf Dosen IAIN Kendari

Penulis lahir dan dibesarkan di desa bagian timur Kabupaten Muna tepatnya di desa Pola tanggal 26 Desember 1988. Menempuh pendidikan dasar dari SD sampai SMA di Pola Kecamatan Pasir Putih. Melanjutkan pendidikan S-1 tahun 2007 dan Lulus di Program Studi Fisika FMIPA Universtas Halu Oleo (UHO) tahun 2012. Lulus S2 di Program Pascasarjana Ilmu Fisika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta tahun 2015. Sejak kuliah S1 aktif sebagai Koordinator Praktikum di Laboratorium Dasar Unit Fisika UHO. Karir mengajar dimulai sejak tahun 2016 sebagai dosen tetap Bukan-PNS Program Studi Tadris Fisika Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan IAIN Kendari dan terangkat menjadi PNS tahun 2020. Mengampu mata kuliah Fisika Dasar, Fisika Matematika, Fisika Kuantum, dan Gelombang Optik.

BIODATA PENULIS

Agustin Fatmawati, S.Pd., M.Pd

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Kupang

Penulis lahir di Blitar pada tanggal 30 Agustus 1992. Penulis merupakan dosen tetap di Universitas Muhammadiyah Kupang Program Studi Pendidikan Matematika. Penulis telah menyelesaikan pendidikan S2 di Magister Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Malang.

BIODATA PENULIS



Anim, S.Si.,M.Pd

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Asahan

Penulis lahir di Balimbingan tanggal 30 Maret 1991. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Asahan. Menyelesaikan pendidikan S1 (2009-2014) pada Jurusan Matematika dan melanjutkan S2 (2014-2016) pada Jurusan Pendidikan Matematika. Tahun 2021 terdaftar sebagai mahasiswa S3 Pendidikan matematika di Universitas Negeri Medan dan saat ini (2022) semester 3. Penulis menekuni bidang Aljabar, Logika Matematika dan Statistika.

BIODATA PENULIS



Ely Syafitri, M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Asahan

Penulis lahir di Pulau Mandi, 17 April 1991. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Asahan. Menyelesaikan pendidikan S1 di Universitas Negeri Medan, dan S2 di Universitas Negeri Yogyakarta, saat ini sedang menempuh jenjang S3 di Universitas Negeri Medan.