

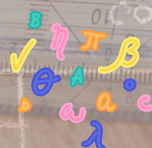


ISBN 978-623-198-331-2



MATEMATIKA TERAPAN II

Fathan Mubina Dewadi, Cynthia Tri Octavianti, Nanang,
Joni Wilson Sitopu, Novita Aswan, Devi Eka Wardani Meganingtyas,
Leny Dhianti Haeruman, Wilminche M. D. E. L. Kelen,
Erwin Randjawali, Haris Suhendar, Nining Puji Lestari,
Jan Setiawan, Sedyanto



MATEMATIKA TERAPAN II

Fathan Mubina Dewadi

Cynthia Tri Octavianti

Nanang

Joni Wilson Sitopu

Novita Aswan

Devi Eka Wardani Meganingtyas

Leny Dhianti Haeruman

Wilminche M. D. E. L. Kelen

Erwin Randjawali

Haris Suhendar

Nining Puji Lestari

Jan Setiawan

Sediyanto



PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI

MATEMATIKA TERAPAN II

Penulis :

Fathan Mubina Dewadi
Cynthia Tri Octavianti
Nanang
Joni Wilson Sitopu
Novita Aswan
Devi Eka Wardani Meganingtyas
Leny Dhianti Haeruman
Wilminche M. D. E. L. Kelen
Erwin Randjawali
Haris Suhendar
Nining Puji Lestari
Jan Setiawan
Sediyanto

ISBN : 978-623-198-331-2

Editor : Ari Yanto, M.Pd

Penyunting : Tri Putri Wahyuni, S.Pd

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd

Penerbit : PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :

Jl. Pasir Sebelah No. 30 RT 002 RW 001
Kelurahan Pasie Nan Tigo Kecamatan Koto Tengah
Padang Sumatera Barat
Website : www.globaleksekuatifteknologi.co.id
Email : globaleksekuatifteknologi@gmail.com

Cetakan pertama, Mei 2023

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Segala Puji dan syukur atas kehadirat Allah SWT dalam segala kesempatan. Sholawat beriring salam dan doa kita sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW. Alhamdulillah atas Rahmat dan Karunia-Nya penulis telah menyelesaikan Buku Matematika Terapan II ini.

Buku Ini Membahas Pengenalan Fungsi, Diferensial Fungsi Aljabar, Aturan Rantai, Diferensial Fungsi Transeden, Pendifferensialan Implisit, Pendifferensialan Logaritmik, Differensial Fungsi dengan 2 Variabel Bebas atau Lebih, Harga Ekstrim Fungsi, Aplikasi Differensial, Aplikasi Differensial Parsial, Anti Differensial, Menghitung Luas dan Volum Benda Putar, Aplikasi Integral.

Proses penulisan buku ini berhasil diselesaikan atas kerjasama tim penulis. Demi kualitas yang lebih baik dan kepuasan para pembaca, saran dan masukan yang membangun dari pembaca sangat kami harapkan.

Penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung dalam penyelesaian buku ini. Terutama pihak yang telah membantu terbitnya buku ini dan telah mempercayakan mendorong, dan menginisiasi terbitnya buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi masyarakat Indonesia.

Padang, Mei 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR TABEL	vii
BAB 1 PENGENALAN FUNGSI.....	1
1.1 Pendahuluan.....	1
1.2 Aplikasi Fungsi	2
1.3 Contoh Soal dan Pembahasan	3
1.4 Soal-Soal Latihan.....	4
DAFTAR PUSTAKA.....	6
BAB 2 DIFERENSIAL FUNGSI ALJABAR.....	11
2.1 Fungsi Aljabar	11
2.2 Definisi Diferensial Fungsi Aljabar.....	11
2.3 Rumus Diferensial Fungsi Aljabar.....	12
DAFTAR PUSTAKA.....	20
BAB 3 ATURAN RANTAI	21
3.1 Pendahuluan.....	21
3.2 Definisi Aturan Rantai.....	22
3.3 Contoh-contoh.....	23
3.4 Latihan	24
DAFTAR PUSTAKA.....	25
BAB 4 DIFFRENSIAL FUNGSI TRANSEDEN.....	27
4.1 Pendahuluan.....	27
4.2 Fungsi Logaritma Natural (Asli).....	27
4.2.1 Turunan Logaritma ASLI	28
4.2.2 Pendiferensialan Logaritma.....	29
4.3 Fungsi Invers Dan Turunannya.....	29
4.3.1 Fungsi Invers.....	31
4.4 Fungsi Eksponen Natural.....	33
4.5 Fungsi Eksponen Dan Logaritma Umum	34
4.6 Fungsi Invers Trigonometri	35

4.6.1 . Fungsi Invers	35
4.6.2 Turunan Fungsi Trigonometri.....	36
4.6.3 Invers Fungsi Trigonometri	37
4.7 Fungsi Hiperbolik	38
4.7.1 Turunan fungsi Hiperbol.....	39
4.7.2 Fungsi Invers Hiperbolik	39
DAFTAR PUSTAKA.....	42
BAB 5 PENDIFERENSIALAN IMPLISIT	43
5.1 Pendahuluan.....	43
5.2 Fungsi Implisit.....	44
5.3 Pendiferensialan Fungsi Implisit	46
5.4 Contoh Pendiferensialan Fungsi Implisit	50
DAFTAR PUSTAKA.....	57
BAB 6 PENDIFERENSIALAN LOGARITMIK.....	59
6.1 Pendahuluan.....	59
6.2 Fungsi Logaritmik.....	60
6.3 Differensiasi Logaritmik	61
6.3.1 Aturan Differensiasi Logaritmik.....	62
6.3.2 Langkah-langkah Differensiasi Logaritmik.....	63
6.3.3 Contoh Penyelesaian Pendiferensialan dengan Metode Differensiasi Logaritmik	66
DAFTAR PUSTAKA.....	68
BAB 7 DIFFERENSIAL FUNGSI DENGAN 2 VARIABEL BEBAS ATAU LEBIH.....	69
7.1 Pendahuluan.....	69
7.2 Differensial Fungsi Dua Peubah	70
7.3 Differensial Fungsi Tiga Peubah.....	74
7.4 Turunan Parsial Tingkat Tinggi.....	75
DAFTAR PUSTAKA.....	79
BAB 8 HARGA EKSTRIM FUNGSI	81
8.1 Pendahuluan.....	81
8.2 Nilai Ekstrim Mutlak.....	81
8.3 Kemonotonan, Kecekungan, dan Titik Belok.....	83

8.3.1	Kemonotonan Fungsi dan Uji Turunan Pertama.....	83
8.3.2	Kecekungan Fungsi dan Uji turunan Kedua.....	85
8.3.3	Titik Belok.....	86
8.4	Nilai Ekstrim Relatif.....	86
8.4.1	Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Relatif.....	87
8.4.2	Uji Turunan Kedua untuk Ekstrim Relatif.....	88
	DAFTAR PUSTAKA.....	89
	BAB 9 APLIKASI DIFERENSIASI.....	91
9.1	Pendahuluan.....	91
9.2	Nilai Minimum dan Nilai Maksimum.....	91
9.3	Kemonotonan Fungsi	95
9.4	Kecekungan Fungsi.....	99
9.5	Penggambaran Grafik Fungsi Menggunakan Kalkulus....	102
9.6	Permasalahan Optimasi Fungsi.....	106
9.7	Aplikasi Diferensiasi di Ekonomi.....	110
	DAFTAR PUSTAKA.....	113
	BAB10 APLIKASI DIFERENSIAL PARSIAL	115
10.1	Masalah Maximum dan Minimum dengan Constrain....	117
10.2	Masalah Syarat Batas.....	129
	DAFTAR PUSTAKA.....	131
	BAB 11 ANTI DIFERENSIAL	133
11.1	Pendahuluan.....	133
11.2	Sifat-sifat Integral Tak Tentu.....	135
11.3	Integral Substitusi.....	138
11.4	Integral Parsial	139
11.5	Integral Parsial Berulang.....	141
11.6	Strategi Pengintegralan.....	145
11.6.1	Menyederhanakan Integran Jika Memungkinkan.	145
11.6.2	Mencari Substitusi yang Jelas	146
11.6.3	Membedakan Integran Berdasarkan Bentuknya...	147
11.6.4	Mencoba Lagi.....	148
11.7	Soal Latihan.....	149
	DAFTAR PUSTAKA.....	150

BAB 12 MENGHITUNG LUAS PERMUKAAN DAN

VOLUME BENDA PUTAR.....151

12.1 Luas Permukaan Benda Putar 151

12.2 Volume Benda Putar 157

 12.2.1 Metode Cakram 158

 12.2.2 Metode Cincin..... 160

 12.2.3 Metode Silindris 163

DAFTAR PUSTAKA..... 166

BAB 13 APLIKASI INTEGRAL.....167

13.1 Pendahuluan..... 167

13.2 Luas Daerah Bidang Datar 168

13.3 Volume Benda Putar 169

13.4 Panjang Kurva..... 171

DAFTAR PUSTAKA..... 174

BIODATA PENULIS

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Tabel Limit $\frac{\sin x}{x}$	17
Gambar 9.1. Nilai maksimum dan nilai minimum.....	92
Gambar 9.2. Grafik fungsi $f(x) = 2x^2$	94
Gambar 9.3. Grafik fungsi $f(x) = x^5 - \frac{25x^3}{3} + 20x$	95
Gambar 9.4. f naik dan f turun	96
Gambar 9.6. Contoh 3	98
Gambar 9.7. Turunan pertama f menaik	99
Gambar 9.8. Turunan pertama f menurun.....	100
Gambar 9.9. Visualisasi fungsi $f(x) = 4x^4 - 2x^3 + 4$	102
Gambar 9.10. Sketsa kurva $f(x) = 3x^3 - 27x$	106
Gambar 9.11. Bentuk kandang untuk Contoh 6	108
Gambar 9.12. Biaya marjinal minimum	112
Gambar 12.1. Ilustrasi (a) fungsi $y = \frac{1}{2}x^2$ yang dibatasi oleh (b) rentang $0 \leq x \leq 2$	155
Gambar 12.2. Ilustrasi penentuan luas permukaan benda putar (a) fungsi $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ yang dibatasi oleh rentang $0 \leq x \leq 2$, (b) diputar terhadap sumbu-x	157
Gambar 12.3. Ilustrasi penentuan volume benda putar.....	159
Gambar 12.4. Fungsi $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ diputar terhadap sumbu-x yang dibatasi oleh $x = 1$ dan $x = 4$	160
Gambar 12.5. Ilustrasi penentuan volume benda putar menggunakan metode cincin.	161
Gambar 12.6. Fungsi $y_1 = \frac{3}{2}x + 1$ dan $y_2 = x^2 + 1$ diputar terhadap sumbu-x yang dibatasi oleh $x = 0$ dan $x = 1,5$	162

Gambar 12.7. Ilustrasi (a) fungsi $y = -\frac{5}{4}x + 5$ yang
diputar terhadap sumbu-y, (b) silindris
dalam penentuan volume benda putar..... 167

DAFTAR TABEL

Tabel 9.1. Tabel penolong contoh 3	98
Tabel 9.2. Tabel penolong contoh 4	101
Tabel 9.3. Tabel penolong contoh 5 untuk menentukan interval fungsi menaik dan fungsi menurun.....	104
Tabel 9.4. Tabel penolong contoh 5 untuk menentukan kecekungan fungsi	105
Tabel 9.5. Tabel penolong contoh 6 untuk menentukan fungsi menaik dan fungsi menurun	109
Tabel 9.6. Tabel penolong contoh 7 untuk menentukan fungsi menaik dan fungsi menurun	111
Tabel 11.1. Cepat Pengintegralan Parsial	143

BAB 1

Pengenalan Fungsi

Oleh Fathan Mubina Dewadi

1.1 Pendahuluan

Penafsiran guna dalam matematika ialah pemetaan tiap badan suatu gabungan (dikenal selaku daerah), pada badan gabungan yang lain (dikenal selaku kodomain). Guna yang diartikan, berlainan dengan arti guna dalam arti dengan cara biasa. Pada guna, ada sebagian sebutan berarti, di antara lain merupakan daerah ialah wilayah asal guna f dilambangkan dengan $D f$ (Tifani, 2022).

Kodomain ialah wilayah teman guna f dilambangkan dengan $K f$. Range ialah wilayah hasil yang ialah gabungan bagian dari kodomain. Range guna f dilambangkan dengan $R f$ (Wibowo & Dewadi, 2022). Penafsiran guna dalam matematika pula bisa dimaksud selaku sesuatu kedekatan yang mengaitkan tiap badan x dalam sesuatu gabungan yang diucap wilayah asal (daerah) dengan sesuatu angka tunggal $f(x)$ dari sesuatu gabungan kedua yang diucap wilayah teman (kodomain) (Dewadi & Dewadi, 2022). Gabungan angka yang didapat dari kedekatan itu diucap wilayah hasil (*Range*) (Dewadi, 2021). Dikutip dari *The Story of Mathematics*, guna merupakan ketentuan yang mengaitkan tiap bagian dalam sesuatu gabungan, alhasil guna bisa dibilang selaku bagian spesial dari kedekatan (Dewadi, 2016).

Tetapi, tidak seluruh kedekatan merupakan guna. Kemudian apakah yang melainkan kedekatan serta guna (Abbas, et al., 2020). Diucap guna satu demi satu. Contoh guna f melaporkan A ke B hingga guna f diucap sesuatu guna satu demi satu (injektif),

bila tiap 2 bagian yang berbeda di A hendak dipetakan pada 2 bagian yang berlainan di B (Dewadi, *et al.*, 2021).

1.2 Aplikasi Fungsi

Tidak semua orang suka analitis. Alasannya sederhana, tidak sepi (Dimiyati, *et al.*, 2021). Lebih baik seimbangkan dan uraikan di puncak apa yang telah Anda capai, seperti saat Anda duduk di bangku akademi kategori saat ini atau akademi menengah (Farida, 2020). Mari kita terima barang-barang tertentu atau terbaru, berbagai merek, penggunaan angka yang rumit dan rumit (Dewadi, 2021). Mulai dengan logaritma, aljabar, matriks, fungsi kuadrat, dll. Menyelesaikan hanya satu pertanyaan menyebabkan mereka merasa seperti zaman kita telah terkuras oleh tahun biner. Banyak dari kita mungkin terpesona mengapa kita melakukan analitis. Dalam kasus, setelah ambiguitas, matematika banyak digunakan dalam kehidupan kita sehari-hari (Dewadi, *et al.*, 2020).

Matematika dapat dikatakan sebagai tindakan seseorang tentang administrasi aturan-aturan yang berlaku. Demikian pula, aktivitas kuadrat dapat didaur ulang untuk memperjelas setiap bagasi dengan tenang (Al-Afgani, *et al.*, 2021). Bahkan, kita sering menjumpai kurva fungsi kuadrat (Dewadi, 2021).

Busur kuadrat tinggal sangat populer luar biasa diarahkan ke bentuknya yang harmonis dan mirip dengan satu parabola. Arsitektur B (Farahdiansari, *et al.*, 2021). Anda dapat membagi titik terbaik pelembar atau percepatan bola di sekitar kurva parabola dengan pertemuan setiap kotak. Nyatanya, ada banyak kesimpulan matematis lain yang bisa muncul di luar dalam kehidupannya yang terus-menerus (Wibowo, *et al.*, 2022).

Bagi mereka yang menuduh diarahkan untuk tetap tidak percaya dengan asumsi bahwa kita akan menggunakan formula ini di masa depan, itu tidak berarti kita bisa meremehkan matematika (Dewadi, *et al.*, 2021).

1.3 Contoh Soal dan Pembahasan

Mengenai soal dan pembahasan fungsi yang cukup umum adalah mengenai fungsi dasar dengan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian (Dewadi, 2023).

Terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai soal-soal terkait fungsi masing-masing dua soal dalam operasi sederhana. Berikut akan dijelaskan mengenai penyelesaian fungsi sederhana dengan penjumlahan (Tanya-tanya, 2023).

Jika formula seperti $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, maka hanya jumlahkan variabel yang sama saja. Jika berbeda maka hanya ditambahkan saja. Misalkan nilai $f(x) = 2x + 3$ dan nilai $g(x) = x^2 - 5$ (Dewadi, 2023).

Maka nilai $(f + g)(x)$ adalah penjumlahan dari nilai $f(x)$ dan $g(x)$ dimana $2x + 3$ ditambah $x^2 - 5$ (Jati, et al., 2022). Maka nilai $(f + g)(x)$ adalah $x^2 + 2x - 2$. Nilai x^2 berasal dari $g(x)$ dimana hanya $g(x)$ yang memiliki x^2 karena variabel $g(x)$ hanyalah x^2 dan -5 (Dewadi, 2022).

Variabel x terdapat pada $f(x)$ yang bernilai x^2 . Untuk variabel yang terdiri angka saja terdapat pada $f(x)$ dan $g(x)$ dimana pada $f(x)$ terdapat 3 dan $g(x)$ terdapat -5 (Dewadi, 2021). Ketika dijumlahkan maka $3 + (-5)$ hasilnya adalah -2 . Dengan kedua perbedaan tersebut maka hasilnya adalah $x^2 + 2x - 2$ (Mulyadi, et al., 2023).

Pengurangan fungsi tidak jauh berbeda dengan penjumlahan fungsi yang ada dan cenderung menggunakan rumus $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. Misalkan untuk nilai $f(x)$ diasumsikan sebesar $x^2 + 3x$ dan nilai $g(x)$ sebesar $2x - 1$ (Supriyanto, et al., 2022).

Maka pengurangan fungsi ini yaitu dengan menyamakan variabel terlebih dahulu kemudian cari variabel pembeda atau yang berbeda. Variabel yang sama adalah $3x$ pada $f(x)$ dan $2x$ pada $g(x)$. Oleh karena itu nilai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ adalah $x^2 + x + 1$. Penjabarannya adalah sebagai berikut (Raja Ma'arof, et al., 2021):

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\(f - g)(x) &= x^2 + 3x - (2x - 1) \\(f - g)(x) &= x^2 + 3x - 2x + 1 \\(f - g)(x) &= x^2 + x + 1\end{aligned}$$

Perkalian fungsi memiliki formula yaitu $(f \times g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. kita asumsikan bahwa $f(x)$ sebesar $x + 4$ dan $g(x)$ sebesar $x^2 - 4x$. maka dalam hal ini dengan cara kali pelangi dimana kiri dikali kiri lalu kiri dikali kanan lalu kanan dikali kiri dan terakhir kanan dikali kanan. Hal ini berlaku jika terdapat 4 variabel. Berikut akan dijelaskan mengenai perkalian fungsi (Lutfin, et al., 2023):

$$\begin{aligned}(f \times g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\(f \times g)(x) &= (x + 4) \cdot (x^2 - 4x) \\(f \times g)(x) &= x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x \\(f \times g)(x) &= x^3 - 16x\end{aligned}$$

Yang terakhir pada bab ini adalah operasi pembagian fungsi. Namun untuk melakukan pembagian fungsi harus memenuhi syarat bahwa variabel pembilang harus merupakan gabungan perkalian dari salah satu penyebut. Misalkan $x^2 - 1$ dibagi dengan $x + 1$. $x^2 - 1$ merupakan perkalian dari $x + 1$ dan $x - 1$ (Nanda, et al., 2022).

Maka dari itu formula $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = x^2 - 1 / x + 1$. Lalu $[(x + 1)(x - 1)]/x + 1$ sama dengan $x - 1$ karena nilai atas dan bawah terdapat variabel yang sama (Nanda, et al., 2023).

1.4 Soal-Soal Latihan

1. Diketahui $f(x) = x^2 - 9$ dan $g(x) = x + 3$. Tentukan nilai $(f/g)(x)$ (Dewadi, 2021)!
2. Diketahui nilai-nilai yang ada pada nomor 1, tentukanlah nilai $(f \times g)(x)$ (Dewadi, 2023)!

3. Diketahui nilai $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = x - 1$. Tentukan nilai $(f \times g)(x)$ (Dewadi, 2022) (Dewadi, 2016)!
4. Diketahui nilai $f(x) = x^2 + 6$ dan $g(x) = x - 4$. Tentukan nilai $(f + g)(x)$ (Dewadi, 2016)!
5. Diketahui nilai $f(x) = x^3 - 5$ dan $g(x) = f(x)$. tentukan nilai $(f - g)(x)$ (Dewadi, et al., 2022)!

DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, A. et al., 2020. *mplementation of Clustering Unsupervised Learning using K-Means Mapping Techniques*. Medan, OP Conf. Series: Materials Science and Engineering, pp. 1-7.
- A. & Dewadi, F. M., 2022. Perancangan Mesin Roll Plat Listrik sebagai Peningkatan Efisiensi Kerja di ndustri Manufaktur. *Jurnal Mekanik Terapan*, pp. 18-25.
- Al-Afgani, A., Dewadi, F. M. & Wibowo, C., 2021. mplementasi Material Titanium pada Sepeda Listrik sebagai Rangka yang Efisien. *JTMMX*, pp. 13-18.
- Dewadi, F. M., 2016. *Perancangan Mesin Roll Pelat Dengan Penggerak Motor Listrik Ac 1 Fasa Kapasitas Daya Listrik 180 W*, Jakarta: Fakultas Sains dan Teknologi, nstitut Sains Dan Teknologi Al-Kamal, Jakarta.
- Dewadi, F. M., 2016. *Perancangan Mesin Roll Pelat Dengan Penggerak Motor Listrik Ac 1 Fasa Kapasitas Daya Listrik 180 W*, Jakarta: Fakultas Sains dan Teknologi, nstitut Sains Dan Teknologi Al-Kamal.
- Dewadi, F. M., 2021. Analisis Efektivitas Liquid Section Heat Exchanger dengan Tube n Tube Heat Exchanger dari Sisi Aplikatif. *JTMMX*, pp. 28-36.
- Dewadi, F. M., 2021. *Pembelajaran dan Pengenalan Musik dalam Melatih Daya ngat Anak*. Surabaya, UIN Surabaya.
- Dewadi, F. M., 2021. *Pengaruh Analisis Menejemen Stres Kinerja Perusahaan terhadap Pencapaian Kinerja Karyawan Optimal berdasarkan Pengalaman Pemuda Kreatif Kavling Rawa Bunga Tangerang Selatan*. Bukit Tinggi, AIN Bukit Tinggi.
- Dewadi, F. M., 2021. *Pengaruh Analisis Menejemen Stres Kinerja Perusahaan terhadap Pencapaian Kinerja Karyawan Optimal berdasarkan Pengalaman Pemuda Kreatif Kavling Rawa Bunga, Tangerang Selatan*. Bukit Tinggi, AIN Bukit Tinggi.

- Dewadi, F. M., 2021. Sistem Homeschooling dalam novasi Pendidikan di Era Revolusi Industri 5.0. *Jurnal Informatikadan Teknologi Pendidikan*, pp. 1-8.
- Dewadi, F. M., 2022. Matriks dan Operasinya. n: P. T. Cahyono, ed. *Matriks dan Ruang Vektor*. Batam: Cendikia Mulia Mandiri, p. 109.
- Dewadi, F. M., 2022. Perpindahan Panas. n: R. Pido, ed. *Klasifikasi Perpindahan Panas*. Bandung: ndie Press, p. 170.
- Dewadi, F. M., 2023. Kimia Dasar I. n: M. Sari, ed. *Gejala Keradioaktifan Unsur-Unsur Tidak Stabil*. Padang: PT. Global Eksekutif Teknologi, p. 146.
- Dewadi, F. M., 2023. *Pengaruh Pemanasan BBM Campuran dengan Parameter Pemanasan Suhu terhadap Densitas Bahan Bakar*. Karawang, Universitas Buana Perjuangan Karawang.
- Dewadi, F. M., 2023. Ruang Lingkup Teknik Pendingin dan Pengkondisian. n: A. Yanto, ed. *Teknik Pendingin dan Tata Udara*. Padang: Global Eksekutif Teknologi, p. 117.
- Dewadi, F. M. et al., 2022. Upaya Meminimalisir Kadar Debu Pada Laboratorium Teknik Mesin dengan Vertical Garden. *Praxis : Jurnal Sains, Teknologi, Masyarakat dan Jejaring*, 4(2), pp. 128-135.
- Dimiyati, D. et al., 2021. Evaluasi Kekuatan Resistance Spot Welding Pada Proses Tailor Welded Blankss Menggunakan Mill-SteelBeda Ketebalan. *BorobudurEngineering Research (BENR)*, 02(01), pp. 96-107.
- Farahdiansari, A. P., Dewadi, F. M. & Rahdiana, N., 2021. Analisis Unjuk Kerja BBM dengan Eco-Racing sebagai Campuran BBM yang Ekonomis. *JTMMX*, I(1), pp. 1-5.
- Farida, ., 2020. *Kelas Pintar*. [Online] Available at: <https://www.kelaspintar.id/blog/edutech/aplikasi-fungsi-kuadrat-dalam-kehidupan-sehari-hari-2820>. [Accessed 15 April 2023].

- Jati, R. R., Sofiyanti, B. & Dewadi, F. M., 2022. Pengenalan Material Yang Digunakan Dalam Proses Pengelasan Berdasarkan Spesifikasi Material. *Empowerment: Jurnal Pengabdian Masyarakat*, pp. 300-305.
- K. et al., 2021. A Report on Metal Forming Technology Transfer from Expert to Industry for Improving Production Efficiency. *Mechanical Engineering for Society and Industry*, (2), pp. 96-103.
- Lutfin, N. A. et al., 2023. Indonesia, Patent No. 000454120.
- M., Dewadi, F. M., A. & Sigalingging, W. S., 2021. Pengaruh Parameter Temperatur Quenching terhadap Sifat Mekanik dan Struktur Mikro Rear Hub Spindles. *Buana Ilmu*, pp. 101-118.
- M., Dewadi, F. M. & S., 2020. *Analisis Unjuk Kerja Ecoracing sebagai Suplemen Penghemat Bahan Bakar*. Malang, Universitas Widyagama Malang, pp. 335-340.
- Mulyadi, D. et al., 2023. *Perbandingan Sifat-Sifat Mekanik Material Hytrel 5557M Murni dan Campuran Daur Ulang*. Karawang, Universitas Buana Perjuangan Karawang.
- Nanda, R. A., Supriyanto, A., K. & Dewadi, F. M., 2023. Penggunaan Sensor MPX5500DP Untuk Monitoring Sistem HVAC Berbasis Mikrokontroler dan OT. *R.E.M. (Rekayasa Energi Manufaktur) Jurnal*, pp. 1-8.
- Nanda, R. A. et al., 2022. Analisis Chassis Mobil Robot Penanaman Bibit Kangkung Menggunakan Metode Elemen Hingga. *JTMMX*, I(2), pp. 1-8.
- Raja Ma'arof, R. A., Saputra, O. A. & Dewadi, F. M., 2021. Coordinated Way to Deal With Schooling Educational Plan Based on Current Industry Needs in Indonesia. *on Advancing and Redesigning Education*, pp. 131-140.
- Supriyanto, A. et al., 2022. Perancangan dan Perakitan Elektronika Mikrokontroler Berbasis OT untuk Studi Pengukuran Sistem HVAC. *Buana Ilmu*, pp. 43-55.

- ., 2022. *Katadata*. [Online] Available at: <https://katadata.co.id/intan/berita/6332c9d93547d/pengertian-fungsi-dalam-matematika-berikut-contohnya> [Accessed 15 April 2023].
- Tanya-tanya, 2023. *Tanya-tanya.com*. [Online] Available at: <https://tanya-tanya.com/rangkuman-contoh-soal-pembahasan-fungsi-komposisi/> [Accessed 15 April 2023].
- Wibowo, C. & Dewadi, F. M., 2022. Design Pressure Reduction System (PRS) untuk Compressed Natural Gas (CNG) Kapasitas 30 Nm³/h dalam Sisi Teknis dan Ekonomis. *TEKINFO : Jurnal Penelitian Teknik dan nformatika* , pp. 60-65.
- Wibowo, C., Sukarno, S., Nursanti, Y. B. & Dewadi, F. M., 2022. Kebutuhan Perguruan Tinggi di Wonogiri sebagai Bagian dari Pengembangan Sumber Daya Manusia. *VISIONER : Jurnal Penelitian Komunikasi dan Sosial Politik*, pp. 20-27.

BAB 2

DIFERENSIAL FUNGSI ALJABAR

Oleh Cynthia Tri Octavianti

2.1 Fungsi Aljabar

Fungsi Aljabar merupakan suatu fungsi matematika yang terdiri dari kombinasi bilangan, variabel, dan operator matematika berupa penambahan, selisih, hasil kali, hasil bagi, pangkat dan akar (Tampomas, 2018). Fungsi Aljabar terdiri dari dua, yaitu:

1. Fungsi Irasional

Fungsi dengan variabel independennya terletak di bawah tanda akar merupakan definisi dari fungsi irasional. Contohnya $h(y) = \sqrt{y}$

2. Fungsi Rasional

Pengertian dari suatu fungsi Rasional adalah jika suatu fungsi dengan variabel independennya mempunyai pangkat suatu bilangan bulat. Adapun Fungsi polinomial, fungsi kuadrat, fungsi kubik, fungsi linear, fungsi pecahan, dan fungsi pangkat adalah jenis-jenis fungsi rasional.

2.2 Definisi Diferensial Fungsi Aljabar

Turunan atau Diferensial Fungsi Aljabar merupakan bentuk lain yang berupa fungsi dari suatu fungsi terdahulu, secara umum didefinisikan sebagai limit perubahan fungsi terhadap perubahan variabel masukan ketika perubahan masukan mendekati nol. Dalam notasi matematika, turunan atau diferensial dari fungsi $h(y)$ dapat ditulis sebagai $h'(y)$ atau $\frac{dh(y)}{dy}$.

Jika diferensial fungsi aljabar adalah suatu perumuman dari materi limit fungsi sehingga dapat didefinisikan sebagai berikut

$$h'(y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(y+s) - h(y)}{s}$$

(Sumber(Damari, 2009))

2.3 Rumus Diferensial Fungsi Aljabar

Berikut diberikan rumus-rumus diferensial fungsi aljabar beserta contohnya.

1. Aturan Diferensial Fungsi Konstanta

Jika diketahui $h(y) = p$ dengan p suatu konstanta, maka diperoleh untuk sembarang y , $h'(y) = 0$ atau $\frac{dh(y)}{dy} = 0$

Bukti :

$$h'(y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(y+s) - h(y)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p-p}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} 0 = 0. \blacksquare$$

Contoh 1. Tentukan diferensial dari fungsi $h(y) = 5$

Penyelesaian

$$\frac{d(5)}{dy} = 0$$

2. Aturan Diferensial Fungsi Identitas

Jika diketahui $h(y) = y$, maka diperoleh $h'(y) = 1$ atau $\frac{dh(y)}{dy} = 1$

Bukti :

$$h'(y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(y+s) - h(y)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(y+s) - y}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s} = 1. \blacksquare$$

Contoh 2. Tentukan diferensial dari fungsi $h(y) = y$

Penyelesaian

$$\frac{d(y)}{dy} = 1$$

3. Aturan Diferensial suatu Fungsi Pangkat

Jika diketahui $h(y) = y^n$, dengan n suatu bilangan bulat positif, maka diperoleh $h'(y) = ny^{n-1}$.

Bukti

$$\begin{aligned} h'(y) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(y+s) - h(y)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(y+s)^n - y^n}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y^n + ny^{n-1}s + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}s^2 + \dots + nys^{n-1} + s^n - y^n}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \left[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}s + \dots + nys^{n-2} + s^{n-1} \right]}{s} \end{aligned}$$

Suku-suku yang terdapat di dalam kurung kecuali yang awal atau pertama mempunyai s sebagai faktor. Jadi setiap suku ini diperoleh hasil limitnya nol bila s yang mendekati nol. Maka

$$h'(y) = ny^{n-1}. \blacksquare$$

Contoh 3. Tentukan diferensial dari fungsi $h(y) = y^7$

Penyelesaian

$$\frac{d(y^7)}{dy} = 7y^6.$$

4. Aturan Diferensial suatu fungsi dengan kelipatan Konstanta

Jika diberikan p sebuah konstanta dan h sebuah fungsi yang terdiferensialkan, maka $(ph)'(y) = p \cdot h'(y)$

Bukti. Andaikan $F(y) = p \cdot h(y)$. Maka

$$\begin{aligned} F'(y) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(y+s) - F(y)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p \cdot h(y+s) - p \cdot h(y)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} p \cdot \frac{h(y+s) - h(y)}{s} = p \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(y+s) - h(y)}{s} \\ &= p \cdot h'(y) \blacksquare \end{aligned}$$

Contoh 4. Tentukan diferensial dari fungsi $h(y) = \frac{4}{3}y^6$

Penyelesaian

$$\frac{d(\frac{4}{3}y^6)}{dy} = \frac{4}{3} \frac{d(y^6)}{dy} = \frac{4}{3} \cdot 6y^5 = 8y^5$$

5. Aturan Diferensial Jumlah dan Selisih

Jika dua buah fungsi h dan g adalah fungsi yang terdiferensialkan, maka $(h + g)'(y) = h'(y) + g'(y)$ dan $(h - g)'(y) = h'(y) - g'(y)$.

Bukti.

Andaikan $F(y) = h(y) + g(y)$. Maka

$$\begin{aligned} F'(y) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[h(y+s) + g(y+s)] - [h(y) + g(y)]}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{h(y+s) - h(y)}{s} + \frac{g(y+s) - g(y)}{s} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(y+s) - h(y)}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(y+s) - g(y)}{s} \\ &= h'(y) + g'(y). \blacksquare \end{aligned}$$

Untuk pembuktian selisih langkah pembuktian sama.

Contoh 5. Tentukan diferensial dari fungsi $h(y) = 5y^2 + 7y - 6$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} h'(y) &= \frac{d(5y^2)}{dy} + \frac{d(7y)}{dy} + \frac{d(-6)}{dy} = 5.2y + 7.1 + 0 \\ &= 10y + 7 \end{aligned}$$

6. Aturan Diferensial Hasil Kali

Jika dua buah fungsi h dan g adalah fungsi yang terdiferensialkan, maka $(h \cdot g)'(y) = h(y)g'(y) + h'(y) \cdot g(y)$

Bukti. Andaikan $F(y) = h(y)g(y)$

$$\begin{aligned}
F'(y) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[F(y+s)] - [F(y)]}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(y+s)g(y+s) - h(y)g(y)}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(y+s)g(y+s) - h(y+s)g(y) + h(y+s)g(y) - h(y)g(y)}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left[h(y+s) \cdot \frac{g(y+s) - g(y)}{s} + g(y) \cdot \frac{h(y+s) - h(y)}{s} \right] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} h(y+s) \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(y+s) - g(y)}{s} \\
&\quad + g(y) \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(y+s) - h(y)}{s} \\
&= h(y)g'(y) + g(y)h'(y) \blacksquare.
\end{aligned}$$

Berikut diberikan contoh:

Contoh 6. Tentukan diferensial dari $(3y^2 - 10)(2y^4 - y)$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
&\frac{d((3y^2 - 10)(2y^4 - y))}{dy} \\
&= (3y^2 - 10) \frac{d(2y^4 - y)}{dy} + \frac{d(3y^2 - 10)}{dy} (2y^4 - y) \\
&= (3y^2 - 10)(8y^3 - 1) + (6y)(2y^4 - y) \\
&= 24y^5 - 3y^2 - 80y^3 + 10 + 12y^5 - 6y^2 \\
&= 36y^5 - 80y^3 - 9y^2 + 10
\end{aligned}$$

7. Aturan Diferensial Hasil Bagi

Jika diketahui dua buah fungsi h dan g merupakan fungsi yang terdiferensialkan dengan $g(y) \neq 0$. Maka diperoleh

$$\left(\frac{h}{g}\right)'(y) = \frac{g(y)h'(y) - h(y)g'(y)}{g^2(y)}$$

Bukti Andaikan $F(y) = \frac{h(y)}{g(y)}$

$$F'(y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[F(y+s)] - [F(y)]}{s}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{h(y+s)}{g(y+s)} - \frac{h(y)}{g(y)}}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(y)h(y+h) - h(y)g(y+h)}{s} \cdot \frac{1}{g(y)g(y+s)} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{g(y)h(y+s) - g(y)h(y) + h(y)g(y) - h(y)g(y+s)}{s} \cdot \frac{1}{g(y)g(y+s)} \right] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \left[g(y) \frac{h(y+s) - h(y)}{s} - h(y) \frac{g(y+s) - g(y)}{s} \right] \frac{1}{g(y)g(y+s)} \right\} \\
&= [g(y)h'(y) - h(y)g'(y)] \cdot \frac{1}{g(y)g(y)} \blacksquare
\end{aligned}$$

Contoh 7.

Tentukan diferensial $\frac{(3y-10)}{(y^2+7)}$

Penyelesaian.

$$\begin{aligned}
&\frac{d\left(\frac{(3y-10)}{(y^2+7)}\right)}{dy} \\
&= \frac{(y^2+7) \frac{d(3y-10)}{dy} - (3y-10) \frac{d(y^2+7)}{dy}}{(y^2+7)^2} \\
&= \frac{(y^2+7)(3) - (3y-10)(2y)}{(y^2+7)^2} \\
&= \frac{-3y^2 + 20y + 21}{(y^2+7)^2}
\end{aligned}$$

8. Aturan Diferensial Sinus dan Kosinus

Sebelum masuk dalam pembahasan aturan diferensial sinus dan kosinus terlebih dahulu akan diberikan Sifat limit trigonometri berikut, untuk membantu memudahkan pembuktian turunan sinus dan kosinus

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin s}{s} = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \cos s}{s} = 0$$

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
-0.01	0.99998
-0.1	0.99833
-1.0	0.84147

Gambar 2.1. Tabel Limit $\frac{\sin x}{x}$.
(Varberg, Purcell and Rigdon, 2003)

Rumus turunan Sinus

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sin y)}{dy} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin(y + s) - \sin y}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin y \cos s + \cos y \sin s - \sin y}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\sin y \frac{1 - \cos s}{s} + \cos y \frac{\sin s}{s} \right) \\
 &= (-\sin y) \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \cos s}{s} \right] + (\cos y) \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin s}{s} \right]
 \end{aligned}$$

$$= (-\sin y) \cdot 0 + \cos y \cdot 1 = \cos y$$

Demikian pula, rumus turunan kosinus

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos y)}{dy} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos(y+s) - \cos y}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos y \cos s + \sin y \sin s - \cos y}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\cos y \frac{1 - \cos s}{s} - \sin y \frac{\sin s}{s} \right) \\ &= (-\cos y) \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \cos s}{s} \right] - (\sin y) \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin s}{s} \right] \\ &= (-\cos y) \cdot 0 - \sin y \cdot 1 = -\sin y \end{aligned}$$

Dari hasil di atas diperoleh aturan diferensial sinus dan kosinus. Fungsi-fungsi $h(y) = \sin y$ dan $g(y) = \cos y$ keduanya terdiferensialkan. Maka

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin y)}{dy} &= \cos y \\ \frac{d(\cos y)}{dy} &= -\sin y \end{aligned}$$

Berikut diberikan beberapa contoh :

Contoh 8. Cari diferensial dari $(3 \sin y - 2 \cos y)$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \frac{d(3 \sin y - 2 \cos y)}{dy} &= 3 \frac{d(\sin y)}{dy} - 2 \frac{d(\cos y)}{dy} \\ &= 3 \cos y + 2 \sin y \end{aligned}$$

Contoh 9. Cari diferensial dari $\tan y$

Penyelesaian.

$$\frac{d(\tan y)}{dy} = \frac{d\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)}{dy}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos y \frac{d(\sin y)}{dy} - \sin y \frac{d(\cos y)}{dy}}{\cos^2 y} \\
 &= \frac{\cos y \cos y + \sin y \sin y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y.
 \end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Damari, A. 2009. *Kupas Matematika SMA untuk kelas 1, 2, & 3 - Google Books, WahyuMedia*. Available at: https://www.google.co.id/books/edition/Kupas_Matematika_SMA_untuk_kelas_1_2_3/G0O_mFi7QRoC?hl=en&gbpv=1&dq=diferensial+fungsi+aljabar&pg=PA312&printsec=frontcover (Accessed: 26 April 2023).
- Tampomas, H. 2018. ** SUU:Fungsi Komposisi&Fungsi Invers - Google Books*. Available at: https://www.google.co.id/books/edition/SUU_Fungsi_Komposisi_Fungsi_Invers/3ekYR2TgYBwC?hl=en&gbpv=1&dq=fungsi+aljabar+adalah&pg=PA17&printsec=frontcover (Accessed: 26 April 2023).
- Varberg, D., Purcell, E.J. and Rigdon, S.E. 2003. 'Kalkulus Jil. 1 Ed. 8'. Edited by H.W. Hardani. Available at: <https://books.google.co.id/books?id=TksIOewEGZ8C> (Accessed: 22 April 2022).

BAB 3

ATURAN RANTAI

Oleh Nanang

3.1 Pendahuluan

Aturan rantai digunakan untuk menentukan turunan fungsi komposisi. Misalnya kita akan mencari turunan dari $(3x + 4)^2$. Untuk menentukan turunan fungsi tersebut, kita bisa saja mengalikan $(2x + 4)$ terlebih dahulu sebanyak dua kali. Sehingga kegunaan aturan rantai belum begitu terasa. Akan tetapi, coba bayangkan jika fungsi yang akan dicari turunannya adalah $g(x) = (2x + 4)^{10}$. Sangat tidak efisien, jika kita menguraikannya terlebih dahulu. Risiko kesalahannya pun menjadi lebih besar.

Contoh di atas masih dapat diselesaikan tanpa menggunakan aturan rantai, meskipun akan memakan waktu yang cukup lama. Namun, terdapat fungsi-fungsi tertentu yang memang sulit atau bahkan tidak bisa dicari turunannya tanpa menggunakan aturan rantai. Salah satunya adalah fungsi $f(x) = 5x^3 + 1$.

Nah, melalui uraian di atas, kita pasti menyadari bahwa aturan rantai sangat membantu dalam menentukan turunan suatu fungsi. Selanjutnya, kita akan membahas lebih lanjut tentang aturan rantai, termasuk bagaimana penerapan aturan rantai dalam menentukan turunan fungsi.

Fungsi yang akan dicari turunannya dengan aturan rantai tidak mesti ditulis secara eksplisit sebagai komposisi dari beberapa fungsi. Misalnya, $f(x) = x^2 + 6x + 9$ bukanlah fungsi komposisi. Tetapi, fungsi ini dapat ditulis sebagai $f(x) = (x + 3)^2$ yang merupakan komposisi dari fungsi $g(x) =$

x^2 dan $h(x) = x + 3$. Karenanya, turunan $f(x)$ ini dapat dicari dengan aturan rantai, meskipun lebih mudah jika dicari secara langsung. $f(x) = \cos(\sin 4x)$ juga merupakan fungsi komposisi. $f(x)$ dapat ditulis sebagai $(g \circ h \circ i)(x)$, dengan $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sin x$, dan $i(x) = 4x$.

3.2 Definisi Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g terdiferensialkan pada x dan f terdiferensialkan pada $u = g(x)$, maka fungsi komposisi $f \circ g$ yang didefinisikan sebagai $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ terdiferensialkan pada x , dengan $Dx(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Misalkan $y = f(u)$, $u = g(v)$ dan $v = h(x)$. Jika h terdiferensialkan pada x , g terdiferensialkan pada v , dan f terdiferensialkan pada u , maka fungsi komposisi $f \circ g \circ h$ yang didefinisikan sebagai $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ terdiferensialkan pada x , dengan $Dx(f(g(h(x))))$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$.

Dari bentuk di atas, terlihat bahwa seakan-akan du pada ruas kanan dapat dicoret, sehingga ruas kanan menjadi sama persis dengan ruas kiri. Meskipun, sebenarnya tidak seperti ini, tetapi hal ini dapat memudahkan kita dalam mengingat aturan rantai pada turunan. Berikut adalah beberapa contoh penerapan aturan rantai.

3.3 Contoh-contoh

Contoh 1:

Tentukan turunan pertama dari $f(x) = (2x + 1)^{10}$.

Jawab:

Pertama, tulis fungsi di atas sebagai $y = (2x + 1)^{10}$. Selanjutnya, kita misalkan $u = 2x + 1$, sehingga $y = u^{10}$. Tentukan turunan masing-masing fungsi $u = 2x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2$, $y = u^{10} \Rightarrow \frac{dy}{du} = 10u^9$.

Dengan aturan rantai, diperoleh: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot 2 = 20u^9 = 20(2x + 1)^9$. Jadi, turunan pertama $f(x)$ adalah $f'(x) = 20(2x + 1)^9$.

Contoh 2:

Tentukan turunan pertama dari $y = \sin 7x$.

Jawab:

Pertama, kita misalkan $u = 7x$, sehingga $y = \sin u$. Tentukan turunan kedua fungsi di atas: $u = 7x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 7$, $y = \sin u \Rightarrow \frac{dy}{du} = \cos u$.

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u) \cdot 7 = 7 \cos u = 7 \cos 7x$. Jadi, turunan pertama dari $y = \sin 7x$ adalah $y' = 7 \cos 7x$.

Contoh 3:

Tentukan turunan pertama dari $y = \sin^3 2x$.

Jawab:

Fungsi di atas merupakan komposisi dari tiga buah fungsi. Tulis $y = (\sin 2x)^3$. Misalkan $u = 2x$, $v = \sin u$, dan $y = v^3$. Untuk pemisalan, kita mulai dari fungsi yang letaknya lebih

dalam, diikuti oleh fungsi-fungsi yang berada di luarnya. Selanjutnya, kita tentukan turunan fungsi-fungsi tersebut. $u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2$, $v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{du} = \cos u$, $y = v^3 \Rightarrow \frac{dy}{dv} = 3v^2$.

Selanjutnya, kita gunakan aturan rantai: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3v^2 \cdot (\cos u) \cdot 2 = 6v^2 \cos u$.

Turunan fungsi di atas masih memuat variabel u dan v . Ingat bahwa $u = 2x$ dan $v = \sin u = \sin 2x$. Akibatnya: $\frac{dy}{dx} = 6v^2 \cos u = 6 \cdot (\sin 2x)^2 \cdot \cos 2x = 6 \cdot \sin^2 2x \cdot \cos 2x$. Jadi, turunan pertama dari $y = \sin^3 2x$ adalah $y' = 6 \cdot \sin^2 2x \cdot \cos 2x$.

3.4 Latihan

Tentukan turunan pertama atau $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi berikut.

1. $y = (3x + 7)^{20}$
2. $y = \sin (3x + 7)$
3. $y = \sin^{20}(3x + 7)^{20}$
4. $y = \sin^{20}(3x + 7)^{10}$

DAFTAR PUSTAKA

- J. P. Edwin and V. Dale. 1987. Kalkulus dan Geometri Analitik, Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.
- Budhi, Setya Wono. 2001. Kalkulus Peubah Banyak. Bandung: ITB Bandung.
- Fitriani, Elis. 2015. Kalkulus 1. [Online]. Tersedia: <http://elisfitrianiannajah.blogspot.com/2015/11kalkulus1.html?m=1> [20 Mei 2016]
- Fitriani, Elis. 2015. Soal dan Pembahasan Aturan Rantai. [Online]. Tersedia: <http://bahanbelajarsekolah.blogspot.co.id/2015/04/soaldan-pembahasan-aturan-rantai.html?en> [20 Mei 2016]
- Agung Izzulhaq 2019. Menentukan Turunan Fungsi dengan Aturan Rantai. [Online]. Tersedia: <https://www.kimiamath.com/post/aturan-rantai-pada-turunan> [21 Juni 2019]

BAB 4

DIFFERENSIAL FUNGSI TRANSEDEN

Oleh Joni Wilson Sitopu

4.1 Pendahuluan

Materi Derferensial/turunan merupakan pengembangan dari fungsi limit aljabar. Turunan merupakan suatu perhitungan terhadap perubahan nilai fungsi karena perubahan nilai input (variabel). Turunan dapat disebut juga sebagai diferensial dan proses dalam menentukan turunan suatu fungsi disebut sebagai diferensiasi (Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., 2006). Sejauh ini kita hanya menggunakan fungsi aljabar, sebagai contoh ketika menemukan turunan, yaitu fungsi yang dapat dibangun dengan operasi aljabar biasa seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan pangkat konstan. Baik dalam teori maupun praktik, ada fungsi lain yang disebut transendental yang sangat berguna. Yang paling penting di antaranya adalah fungsi logaritma dan eksponen, fungsi trigonometri, fungsi invers trigonometri, dan Hiporbolik.

4.2 Fungsi Logaritma Natural (Asli)

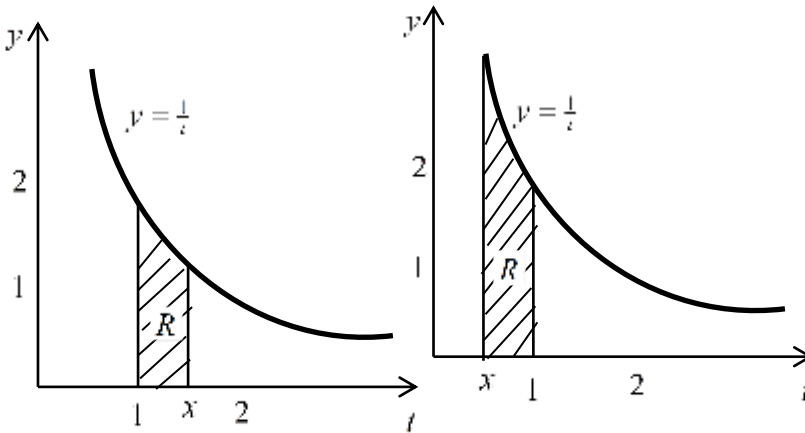
Logaritma natural didefinisikan untuk semua bilangan real positif x dan juga dapat didefinisikan untuk bilangan kompleks yang bukan nol. (dalam (Joni Wilson Sitopu, dkk., (2023)).

Definisi 1

Fungsi logaritma, ditulis $\ln$, didefinisikan sebagai berikut ;

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0, \text{ Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S. (2006)}$$

Daerah definisinya adalah himpunan bilangan riil positif



Jika $x > 1$, $\ln x = \text{luas } R$

Jika $0 < x < 1$, $\ln x = -\text{luas } R$

Gambar diatas menunjukkan arti geometri dari $\ln x$, diagram ini mengukur luas dibawah kurva $y = \frac{1}{t}$, antara 1 dan x . Jika $x > 1$ dan nilai positif dari luas ini jika $0 < x < 1$, dan $\ln 1 = 0$

4.2.1 Turunan Logaritma ASLI

$y = f(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = D_x y = \frac{df(x)}{dx}$, (dalam Joni Wilson Sitopu, dkk, (2023)).

Jika $y = \ln x$, maka $D_x y = D_x \ln x = \frac{1}{x}$, $x > 0$

Dengan menggunakan aturan rantai, andaikan $u = f(x) > 0$, maka, jika f dapat didiferensialkan, maka diperoleh,

$$D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u$$

Contoh . Tentukan $D_x \ln(x^2 + 3x - 4)$

Penyelesaian :

Jika $(x^2 + 3x - 4) > 0$, maka $(x^2 + 3x - 4) = (x + 4)(x - 1)$ positif bila $x < -4$ atau $x > 1$, sehingga daerah definisi fungsi $\ln(x^2 + 3x - 4)$ adalah $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$ pada daerah ini berlaku :

$$D_x \ln(x^2 + 3x - 4) = \frac{1}{(x^2 + 3x - 4)} D_x(x^2 + 3x - 4)$$

$$D_x \ln(x^2 + 3x - 4) = \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 4)}$$

Jika $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, x \neq 0$, maka, jika x diganti dengan variabel u , maka diperoleh

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c, u \neq 0$$

Ini melengkapi rumus pengintegralan

$$\int u^n du = \frac{1}{(n+1)} u^{n+1} + c, n \neq -1$$

(Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S. (2006))

4.2.2 Pendiferensialan Logaritma

Menentukan turunan dari suatu fungsi yang melibatkan hasil bagi, hasil kali, dan pangkat eksponensial dapat disederhanakan dengan terlebih dahulu mengambil logaritma asli dari fungsi tersebut. Metode ini disebut diferensial logaritma.

Contoh. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk $y = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)}{x^3}}, x > 1$

Penyelesaian :

Untuk mencari turunan tersebut, kita tulis y sebagai berikut :

$$y = \ln\left(\frac{x-2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x-2}{x^3}\right)$$

$$y = \frac{1}{3} (\ln(x-2) - \ln x^3)$$

$$y = \frac{1}{3} (\ln(x-2) - 3\ln x)$$

Sehingga,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x} \right) = \frac{6-2x}{3x^2-6x}$$

4.3 Fungsi Invers Dan Turunannya

Definisi :

Invers $\ln$ disebut fungsi eksponen asli, ditulis $\exp$, yaitu :

$$x = \exp y \leftrightarrow y = \ln x$$

Sehingga diperoleh :

1. $\exp(\ln x) = x, x > 0$

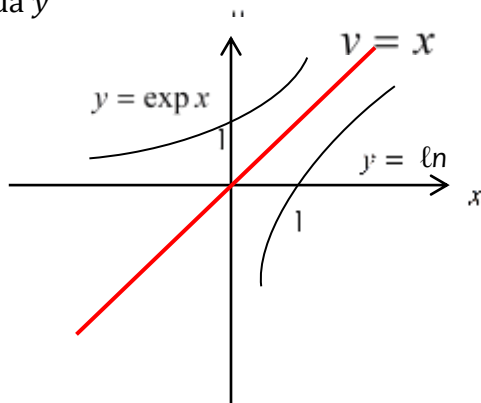
2. $\ln(\exp y) = y, \text{ untuk semua } y$

maka $\exp$ dan $\ln$ adalah fungsi-fungsi invers, grafik $y = \exp x$ adalah grafik $y = \ln x$ yang tercerminkan pada garis $y = x$.

1. $e^{\ln x} = x, x > 0$

2. $\ln(e^y) = y, \text{ untuk semua } y$

3. $e^x = \exp x$



Definisi :

Bilangan e adalah bilangan riil positif yang bersifat $\ln e = 1$

Jika $\ln e = 1$, maka $\exp 1 = e$

Contoh : Tentukan $D_x e^{x^3 \ln x}$

Penyelesaian :

$$D_x e^{x^3 \ln x} = e^{x^3 \ln x} D_x (x^3 \ln x), \text{ diffrensial parsial}$$

$$D_x e^{x^3 \ln x} = e^{x^3 \ln x} (x^3 \cdot \frac{1}{x} + 3x^2 \ln x)$$

$$D_x e^{x^3 \ln x} = x^2 e^{x^3 \ln x} (1 + \ln x^3)$$

Dari $D_x e^x = e^x$ sehingga $\int e^x dx = e^x + c$, jika $x=u$, diperoleh :

$$\int e^u du = e^u + c$$

Contoh 1. Tentukan $\int e^{-2x} dx$

Penyelesaian :

Andaikan $u = -2x$, sehingga $du = -2dx$,

$$\text{Maka } \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} (-2dx)$$

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x)$$

$$\begin{aligned}\int e^{-2x} dx &= \int e^u (du) = e^u + c \\ &= e^{-2x} + c\end{aligned}$$

Contoh 2. Tentukan $\int x^2 e^{-x^3} dx$

Penyelesaian :

Andaikan $u = -x^3$, sehingga $du = -3x^2 dx$,

$$\text{Maka } \int x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3} \int e^{-x^3} (-3x^2 dx)$$

$$\int x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3} \int e^u du = -\frac{1}{3} e^u + c = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + c$$

4.3.1 Fungsi Invers

Apabila fungsi $f: x \rightarrow y$ ditentukan melalui pasangan berurutan $f: \{(x, y) | x \in A \text{ dan } y \in B\}$ sehingga invers dari fungsi f adalah $f^{-1}: \{(y, x) | y \in B \text{ dan } x \in A\}$, (Lulut Alfari., dkk, 2022).

Jika $f(x)$ adalah suatu fungsi, maka $\frac{1}{f(x)}$ atau $f(x)^{-1}$ disebut fungsi invers dari $f(x)$. Fungsi invers ialah cerminan dari $f(x)$ terhadap garis $y = x$

Contoh 1: Tentukan rumus $f(x)^{-1}$ apabila $y = f(x) = \frac{x}{(2-x)}$

penyelesaian :

jika f memiliki invers, maka diperoleh satu nilai x untuk tiap y , sehingga f^{-1} ada. (misalnya untuk $y = g(x) = x^2$, maka $x = \pm\sqrt{y}$, artinya g^{-1} tidak ada dengan membatasi daerah asal x , sehingga diperoleh g^{-1})

$$\text{Langkah 1. } y = \frac{x}{(2-x)} \leftrightarrow (2-x)y = x$$

$$2y - xy = x \rightarrow x + xy = 2y$$

$$x(1+y) = 2y,$$

$$x = \frac{2y}{1+y}$$

$$\text{Langkah 2. } f(y)^{-1} = \frac{2y}{1+y}$$

$$\text{Langkah 3. } f(x)^{-1} = \frac{2x}{1+x}$$

4.3.2 Turunan Fungsi Invers

$(f)^{-1}(y) = \frac{1}{f(y)} \rightarrow$ persamaan ini dapat ditulis $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Contoh 1 :

$y = x^x, x > 0$, tentukan $D_x y$

Cara 1 :

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$

$$D_x y = e^{x \ln x} D_x (x \ln x) = x^x \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \right) = x^x (1 + \ln x)$$

Cara 2 : (Pendiferensialan logaritma)

$$y = x^x \leftrightarrow \ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} D_x y = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$$

$$D_x y = y(1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x)$$

Contoh 2 :

$y = (x^2 + 1)^{\sin x}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$

Gunakan pendiferensialan logaritma ;

$$\ln y = \sin x \ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (\sin x) \frac{2x}{x^2 + 1} + (\cos x) \ln(x^2 + 1)$$

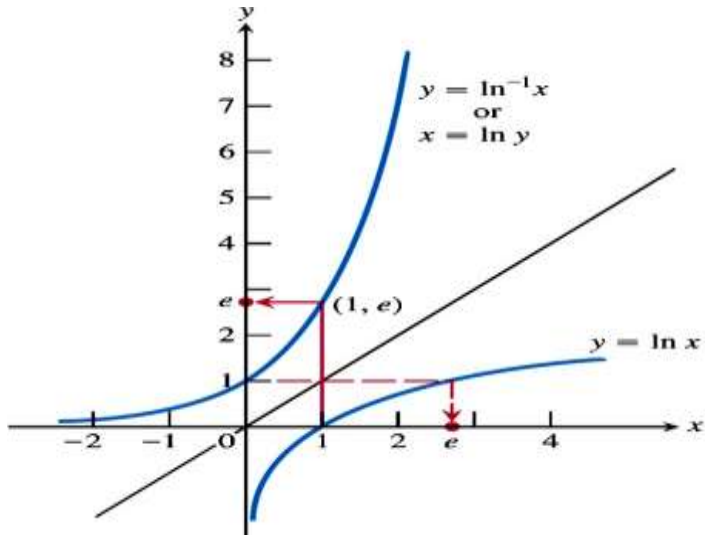
$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)^{\sin x} \left(\frac{2x \sin x}{x^2 + 1} + (\cos x) \ln(x^2 + 1) \right)$$

Contoh 3 : $y = (x^2 + 1)^\pi + \pi^{\sin x}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \pi (x^2 + 1)^{\pi-1} (2x) + \pi^{\sin x} \ln \pi \cos x$$

4.4 Fungsi Eksponen Natural

$y = \exp(x)$ adalah fungsi eksponensial natural, yaitu invers dari logaritma natural. $x = \exp(y) \rightarrow y = \ln x$. Bilangan basis fungsi ini, ditulis $e = \exp(1)$ sehingga $\ln e = 1$. Ekspansi desimal bilangan ini adalah $e \approx 2,71828182845\dots$ Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S. (2006)



Dengan demikian

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

Sehingga

1. $\exp(\ln x) = x$, bila $x > 0$.
2. $\ln(\exp(x)) = x$

Untuk bilangan rasional r , bahwa $y = \exp(x)$ adalah sebuah fungsi eksponensial, maka

$$e^r = \exp(\ln e^r) = \exp(r \ln e) = \exp(r)$$

dari definisi bilangan pangkat rasional, maka untuk x irrasional, dapat didefinisi fungsi eksponensial, yaitu ;

$$e^x = \exp(x)$$

sehingga,

1. $e^{\ln x} = x$, untuk $x > 0$.
2. $\ln(e^x) = x$, untuk tiap x

Turunan dari exp (x)

Ambil $y = e^x$. Dengan $\ln x$ dan $\exp (x)$ saling invers, maka $x = \ln y$.
 $x = \ln y$, kedua sisi didiferensialkan, maka diperoleh

$$1 = \frac{1}{y} D_x y \rightarrow D_x y = y$$

Teorema

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

sehingga diperoleh ;

Teorema

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Contoh

Tentukan turunan dari $y = e^{1-2x}$

Misalkan $u = 1 - 2x$, maka $u' = -2$ maka diperoleh bahwa

$$y' = e^u u' = e^{1-2x}(-2) = -2 e^{1-2x}$$

contoh

Tentukan turunan dari $y = e^{x \ln x}$

Penyelesaian :

$$y' = e^{x \ln x} D_x(x \ln x) = e^{x \ln x} (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$$

4.5 Fungsi Eksponen Dan Logaritma Umum

Dari definisi e^x untuk tiap bilangan real x , termasuk e^π , maka untuk π^e dapat digunakan hubungan $x = \exp(\ln x)$.

Definisi

Jika $a > 0$ dan x adalah bilangan real sebarang, maka
 $a^x = e^{x \ln a}$

$$\text{sehingga, } \ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a$$

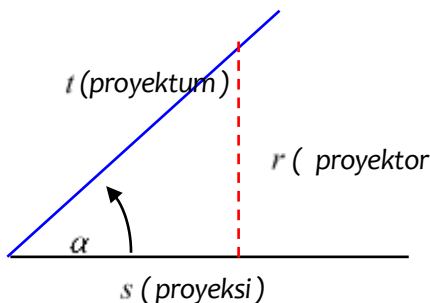
Dengan demikian dari definisi di atas dapat dikembangkan aturan,

$\ln(a^r) = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$ yang sebelumnya hanya berlaku untuk r rasional.

4.6 Fungsi Invers Trigonometri

Fungsi dasar trigonometri (dalam Nasruddin, dkk., 2022) yaitu :

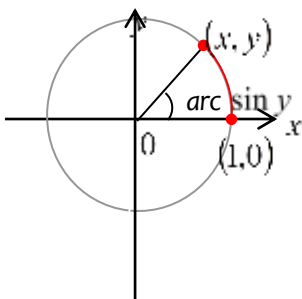
1. *sinus* ($\sin$) $\frac{r}{t}$
2. *cosinus* ($\cos$) $\frac{s}{t}$
3. *tangen* ($\tan$) $\frac{r}{s}$
4. *cotangen* ($\cot$) $\frac{s}{r}$
5. *sekan* ($\sec$) $\frac{t}{s}$
6. *cosekan* ($\csc$) $\frac{t}{r}$



4.6.1 . Fungsi Invers

$\sin^{-1}$ sering dituliskan sebagai arc sin dan $\cos^{-1}$ sebagai arc cos, *arc* sin berarti busur yang sinusnya adalah atau sudut yang sinusnya adalah.

Definisi dari fungsi-fungsi invers sinus dan cosinus sebagai berikut :



Definisi :

Invers dari sinus dan kosinus, terdapat domain dari fungsi-fungsi pada selang $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dan $(0, \pi)$, sehingga

$$x = \sin^{-1} y \leftrightarrow y = \sin x \text{ dan } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos^{-1} y \leftrightarrow y = \cos x \text{ dan } 0 \leq x \leq \pi$$

Definisi

invers fungsi tangen, domain fungsi pada selang $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sehingga

$$x = \tan^{-1} y \leftrightarrow y = \tan x \text{ dan } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Definisi

invers fungsi secan, domain sekan pada himpunan $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, sehingga $x = \sec^{-1} y \leftrightarrow y = \sec x$ dan $0 \leq x \leq \pi$, dengan $x \neq \frac{\pi}{2}$

4.6.2 Turunan Fungsi Trigonometri

Adapun aturan rumus turunan yang digunakan dalam fungsi trigonometri adalah sebagai berikut

$$y = \sin x, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y = \cos x, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$y = \tan x, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$y = \cot x, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$$

$$y = \sec x, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$$

$$y = \csc x, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x$$

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{Bukti: } y = \cot x, \text{ maka } D_x y = \frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$$

Penyelesaian :

$$D_x \cot x = D_x \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \text{ qed.}$$

Fungsi-fungsi komposit, aturan diatas dapat kita rangkai dengan *aturan rantai* untuk memperoleh turunan fungsi u yang lebih rumit misalnya, kalau $u = f(x)$ dapat didiferensialkan, maka

$$D_x \sin u = \cos u D_x u$$

$$\text{Contoh. } y = \frac{\sin^2 x}{(1 - \cot x)}, \text{ tentukan } \frac{dy}{dx}$$

$$\text{Penyelesaian : } \frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \cot x) D_x (\sin^2 x) - \sin^2 x D_x (1 - \cot x)}{(1 - \cot x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \cot x) \cdot 2 \sin x \cos x - \sin^2 x \csc^2 x}{(1 - \cot x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x - 1}{(1 - \cot x)^2}$$

4.6.3 Invers Fungsi Trigonometri

1. $y = \sin^{-1} x$, maka $D_x \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$
2. $y = \cos^{-1} x$, maka $D_x \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$
3. $y = \tan^{-1} x$, maka $D_x \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$
4. $y = \sec^{-1} x$, maka $D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

Bukti $y = \sin^{-1} x$, maka $D_x \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

Penyelesaian :

Misal $y = \sin^{-1} x$, maka $x = \sin y$

$$1 = \cos y D_x y$$

$$1 = \cos(\sin^{-1} x) D_x (\sin^{-1} x)$$

$$1 = \sqrt{1-x^2} D_x (\sin^{-1} x)$$

$$D_x (\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Hasil 2, 3 dan 4 diatas dapat dibuktikan dengan cara yang sama. Untuk (4) ada hal yang lain sedikit.

Sebagai berikut :

Andaikan $y = \sec^{-1} x$, maka

$$x = \sec y, \text{ digunakan } \frac{dy}{dx}$$

$$1 = \sec y \tan y D_x y$$

$$1 = \sec(\sec^{-1} x) \tan(\sec^{-1} x) D_x (\sec^{-1} x)$$

$$1 = (\pm x \sqrt{x^2 - 1}) D_x (\sec^{-1} x)$$

Untuk langkah terakhir kita gunakan kesamaan (4), kita gunakan tanda positif untuk $x > 1$ dan tanda negatif untuk $x < -1$, sehingga

$$1 = \pm x \sqrt{x^2 - 1} D_x(\sec^{-1} x)$$

$$1 = |x| \sqrt{x^2 - 1} D_x(\sec^{-1} x)$$

Qed.

Tiap rumus pendiferensialan menghasilkan rumus integral

5. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$
6. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} |x| + c$

Contoh : Hitunglah

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Penelesaian :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1} x]_0^{\frac{1}{2}} = \sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} 0$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

4.7 Fungsi Hiperbolik

Misalkan $x(t) = (\frac{e^t + e^{-t}}{2})$ dan $y(t) = (\frac{e^t - e^{-t}}{2})$. Periksa bahwa kedua fungsi tersebut memenuhi hubungan

$$x(t)^2 - y(t)^2 = 1$$

Artinya, semua titik $Q(t)=(x(t), y(t))$ terletak pada hiperbola $x^2 - y^2 = 1$, Maka kedua fungsi tersebut disebut fungsi hiperbolik.

Definisi fungsi hiperbol ;

$$\sinh x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Dapat dilihat dalam trigonometri kesamaan dasar fungsi hiperbol $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ adalah $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \right) - \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \right) = 1$$

4.7.1 Turunan fungsi Hiperbol

$$y = \sinh x \rightarrow D_x y = \cosh x$$

$$y = \operatorname{csch} x \rightarrow D_x y = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$y = \cosh x \rightarrow D_x y = \sinh x$$

$$y = \operatorname{sech} x \rightarrow D_x y = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$y = \tanh x \rightarrow D_x y = \operatorname{sech}^2 x$$

$$y = \coth x \rightarrow D_x y = -\operatorname{csch}^2 x$$

Bukti :

$$y = \sinh x \rightarrow D_x y = D_x \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh x$$

$$y = \cosh x \rightarrow D_x y = D_x \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh x$$

Contoh ;

Tentukan $D_x \cosh^2 (3x - 1)$

Penyelesaian :

Kita gunakan dua kali aturan rantai

$$D_x \cosh^2 (3x - 1) = 2 \cosh(3x - 1) D_x \cosh(3x - 1)$$

$$D_x \cosh^2 (3x - 1) = 2 \cosh(3x - 1) \sinh(3x - 1) D_x (3x - 1)$$

$$D_x \cosh^2 (3x - 1) = 6 \cosh(3x - 1) \sinh(3x - 1)$$

4.7.2 Fungsi Invers Hiperbolik

Invers fungsi hiperbola ;

$$x = \sinh^{-1} y \leftrightarrow y = \sinh x$$

$$x = \cosh^{-1} y \leftrightarrow y = \cosh x \text{ dan } x \geq 0$$

$$x = \tanh^{-1} y \leftrightarrow y = \tanh x$$

$$x = \operatorname{sech}^{-1} y \leftrightarrow y = \operatorname{sech} x \text{ dan } x \geq 0$$

Ambil ;

$$y = \cosh x, \text{ untuk } x \geq 0, \text{ maka } y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \geq 0$$

Dikalikan (x) dengan $2e^x$, diperoleh

$$y \cdot 2e^x = 2e^{2x} + 1 \text{ atau } (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0, x \geq 0$$

Sehingga diperoleh

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{(2y)^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Kita tarik ke-logaritma asli-nya

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

Syarat agar $x \geq 0$, mengakibatkan bahwa kita harus memilih tanda positif, sehingga,

$$x = \cosh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, -1 < x < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2} \right), 0 < x \leq 1$$

Tiap fungsi diatas dapat didiferensialkan

$$D_x \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D_x \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1$$

$$D_x \tanh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, -1 < x < 1$$

$$D_x \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}, -0 < x < 1$$

Contoh ;

$$\text{Buktikan bahwa } D_x \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

cara 1.

$$\text{Ambil } y = \sinh^{-1} x, \text{ maka } x = \sinh y$$

Sama-sama dideffrensialkan terhadap x, maka

$$1 = (\cosh y)D_x y$$

Jadi

$$D_x y = D_x(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

cara 2. Gunakan bentuk logaritma $\sinh^{-1} x$

$$D_x(\sinh^{-1} x) = D_x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$D_x(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} D_x(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$D_x(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$D_x(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Joni Wilson Sitopu, dkk., 2023. *Kalkulus*. PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI. Padang
- Lulut Alfari, dkk. 2022. LOGIKA DAN STRUKTUR DISKRIT. PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI. Padang.
- Purcell E. J., Varberg D., Rigdon S. E. 2007. *Calculus*, Ninth edition. USA. Pearson, Prentice Hall Inc.
- Meilida Eka Sari, dkk. 2022. *Matematika Dasar*. PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI. Padang.
- Nasruddin, dkk., 2022. *Matematika Untuk Perguruan Tinggi*. PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI. Padang.
- Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S. 2006. *Calculus*, 9th ed., Pearson.
- Varberg D., Purcell E. J. dan Rigdon S. E. 2010. *Kalkulus* Edisi Kesembilan Jilid 1. Jakarta. Penerbit Erlangga.

BAB 5

PENDIFERENSIALAN IMPLISIT

Oleh Novita Aswan

5.1 Pendahuluan

Diferensial dalam istilah lain kita sebut turunan merupakan salah satu bagian dari matematika yang wajib dipahami untuk dapat memahami matematika terapan. Dalam kalkulus, diferensial implisit merujuk pada teknik untuk menemukan turunan suatu fungsi yang tidak dinyatakan secara eksplisit. Ini terjadi ketika fungsi tersebut tidak dapat dipecahkan menjadi bentuk yang memungkinkan kita untuk langsung menghitung turunan secara eksplisit.

Dalam diferensial implisit, kita biasanya menggunakan persamaan implisit yang menghubungkan variabel-variabel yang terlibat dalam fungsi yang ingin kita turunkan. Kemudian kita menggunakan aturan diferensiasi untuk mencari turunan fungsi tersebut dengan memperlakukan variabel yang tidak dinyatakan secara eksplisit sebagai fungsi dari variabel yang lain.

Diferensial implisit sangat berguna dalam matematika dan fisika. Ketika kita ingin menghitung gradien atau turunan dari suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk persamaan implisit diferensial implisit berguna untuk menyelesaikannya. Teknik ini juga dapat digunakan dalam banyak masalah geometri dan optimasi. Pada prakteknya, diferensial implisit sering digunakan dalam pemodelan dan analisis sistem dinamis, seperti dalam mekanika kuantum, mekanika fluida, dan banyak lagi. Dengan menggunakan teknik ini, kita dapat menghitung turunan fungsi secara efisien dan akurat, bahkan ketika fungsi tersebut tidak dinyatakan secara eksplisit.

Salah satu contoh penerapan diferensial implisit adalah ketika kita ingin mencari turunan fungsi dalam kasus di mana variabel yang ingin kita turunkan tidak dinyatakan secara eksplisit dalam persamaan yang diberikan. Dalam situasi ini, kita dapat menggunakan aturan diferensiasi untuk mencari turunan tersebut. Pada bab ini, akan kita bahas tentang pendiferensialan implisit yang mencakup dari fungsi implisit dan diferensial fungsi implisit serta contoh implementasi pendiferensialan implisit.

5.2 Fungsi Implisit

Dalam kalkulus, hanya dipelajari fungsi real yaitu fungsi dengan domain dan kodomain subhimpunan bilangan real. Konsep fungsi sendiri merupakan suatu konsep yang mendasar pada kalkulus dan berperan penting dalam kalkulus. Dalam buku dasar-dasar kalkulus (Marsitin and Sesanti, 2013) fungsi didefinisikan sebagai berikut:

“Suatu fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan tiap obyek x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal (domain), dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (range) fungsi”

Secara umum, fungsi memiliki bentuk persamaan yang sederhana atau eksplisit seperti $2x + 2y = 5$, yang mana dapat kita ketahui dengan cepat nilai variabel x maupun y nya. Bagaimana jika persamaan fungsi tidak berbentuk eksplisit, dalam artian tidak dapat dengan mudah diketahui nilai x dan y nya. Fungsi berbentuk ini disebut fungsi implisit.

Fungsi implisit adalah sebuah fungsi matematika yang dinyatakan dalam bentuk persamaan implisit, di mana variabel bebas tidak dinyatakan secara eksplisit. Dalam arti lain, variabel bebas terdapat pada kedua sisi persamaan. Oleh karena itu, fungsi implisit tidak dapat dinyatakan dalam bentuk yang memungkinkan

kita untuk langsung menghitung nilai fungsi tersebut (Azizah and Ariyanti, 2018). Berikut beberapa contoh fungsi implisit:

$$\begin{aligned}x^2y + xy^2 &= 6 \\(x + y)^3 - (x - y)^4 &= xy \\\sin(xy) - \cos(xy) + y &= 0 \\\frac{x^4y^2}{x^4 + y^3} &= x^4 + 4y + 5\end{aligned}$$

Oleh karena itu, Secara umum persamaan fungsi implisit dinyatakan dengan bentuk $f(x, y) = c$, dimana c adalah bilangan riil.

Contoh sederhana fungsi implisit adalah persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Persamaan ini menyatakan hubungan antara variabel x dan y dalam sebuah lingkaran dengan jari-jari r . Kita dapat memecahkan persamaan ini dengan mengubah menjadi bentuk fungsi eksplisit, yaitu $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Namun, jika kita ingin mencari nilai x atau y pada titik tertentu di dalam lingkaran, kita harus menggunakan persamaan implisit tersebut.

Dalam kalkulus, fungsi implisit sangat berguna ketika kita ingin menghitung turunan atau gradien dari sebuah fungsi yang dinyatakan dalam bentuk persamaan implisit. Teknik yang digunakan untuk menghitung turunan tersebut disebut diferensial implisit (Setyansah, 2018). Misalnya, jika kita memiliki persamaan implisit $x^3 + y^3 - 6xy = 0$, dan kita ingin mencari turunan y terhadap x , kita dapat mengambil turunan kedua persamaan tersebut terhadap x , yakni:

$$3x^2 + 3y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right) - 6y - 6x \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Kemudian, kita dapat menyelesaikan untuk dy/dx , yang akan memberikan kita turunan y terhadap x pada setiap titik dalam fungsi.

Fungsi implisit juga sering digunakan dalam pemodelan dan analisis sistem dinamis, seperti dalam mekanika kuantum dan mekanika fluida. Teknik diferensial implisit juga sangat berguna

dalam kalkulus vektor, di mana kita dapat menghitung turunan dari fungsi vektor yang dinyatakan dalam bentuk persamaan implisit. Dalam prakteknya, banyak masalah matematika dan ilmu pengetahuan yang melibatkan fungsi implisit, dan teknik diferensial implisit sangat penting untuk menyelesaikan masalah tersebut. Oleh karena itu, pemahaman tentang fungsi implisit dan diferensial implisit sangatlah penting bagi siapa saja yang ingin mempelajari kalkulus dan matematika secara lebih lanjut (Adriani, 2020).

5.3 Pendiferensialan Fungsi Implisit

Diferensiasi fungsi implisit adalah teknik yang digunakan untuk menghitung turunan dari sebuah fungsi yang dinyatakan dalam bentuk persamaan implisit. Dalam fungsi implisit, variabel bebas tidak dinyatakan secara eksplisit, sehingga sulit untuk menghitung turunan secara langsung. Dengan menggunakan teknik diferensial fungsi implisit, kita dapat menghitung turunan tersebut secara efisien dan akurat (In'am, 2016)

Secara teori, Misalkan sebuah fungsi dinyatakan dalam persamaan $y = f(x)$ maka fungsi ini selalu dapat dinyatakan dalam bentuk $F(x, y) = 0$, dimana $F(x, y) = y - f(x)$ atau $F(x, y) = f(x) - y$. Sebaliknya jika diberikan fungsi dalam bentuk $F(x, y) = 0$ dengan y fungsi dari x diketahui, ternyata tidak selalu dapat dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$ (Irmayanti, 2021)

Misalkan kita memiliki persamaan implisit $F(x, y) = 0$. Untuk mencari turunan y terhadap x pada titik tertentu (a, b) , kita dapat mengambil turunan kedua persamaan tersebut terhadap x :

$$\frac{d}{dx}(F(x, y)) = \frac{d}{dx}(0)$$

Dalam turunan ini, kita harus memperlakukan variabel y sebagai fungsi dari x , sehingga:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$$

Kemudian, kita dapat menyelesaikan untuk dy/dx , yang akan memberikan kita turunan y terhadap x pada setiap titik dalam fungsi.

Proses ini dapat diterapkan pada fungsi implisit dengan lebih dari dua variabel. Misalkan kita memiliki persamaan implisit $F(x, y, z) = 0$. Dalam hal ini, untuk mencari turunan z terhadap x pada titik tertentu (a, b, c) , kita dapat mengambil turunan kedua persamaan tersebut terhadap x :

$$\frac{d}{dx}(F(x, y, z)) = \frac{d}{dx}(0)$$

Dalam turunan ini, kita harus memperlakukan variabel y dan z sebagai fungsi dari x , sehingga:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{dz}{dx} \right) = 0$$

Kemudian, kita dapat menyelesaikan untuk dz/dx , yang akan memberikan kita turunan z terhadap x pada setiap titik dalam fungsi.

Diferensiasi fungsi implisit dilakukan pada kedua sisi fungsi dengan memandang y sebagai fungsi dari x dan juga tidak dapat dihindarkan bahwa digunakan pula aturan rantai dalam proses perhitungannya (Azizah and Ariyanti, 2018). Untuk menurunkan fungsi implisit (diferensial fungsi implisit) aturan diferensial dasar (fungsi yang hanya terdiri dari satu variabel) tetap berlaku. Akan tetapi, notasi diferensial yang digunakan adalah **notasi Leibniz** seperti $\frac{dy}{dx}$.

Ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam proses pendiferensialan fungsi implisit, khususnya pada fungsi dengan dua variabel (In'am, 2016) yaitu:

1. jika suku hanya memuat variabel x maka turunannya (diferensiasi) terhadap x berbentuk $x \frac{d}{dx}$.

2. Jika suku hanya memuat variabel y maka turunannya (diferensiasi) terhadap x berbentuk $y \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx}$.
3. Jika suku memuat variabel x dan y sekaligus, misalkan xy , maka turunannya (diferensiasi) terhadap x berbentuk $xy \frac{d}{dx} + xy \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx}$

Secara umum, ada dua cara yang dapat dilakukan dalam pendiferensialan fungsi implisit (Setyansah, 2018) yaitu:

1. Lakukan modifikasi pada fungsi implisit sehingga menjadi fungsi eksplisit yang kemudian dilakukan proses diferensialnya sebagaimana mendiferensialkan fungsi eksplisit sehingga diperoleh bentuk turunannya (diferensiasi) $\frac{dy}{dx}$.
2. Melakukan diferensial langsung yakni mendiferensialkan kedua ruas persamaan fungsi implisit (variabel x dan y) secara bergantian dan kemudian sederhanakan untuk memperoleh hasil yang diinginkan (bentuk $\frac{dy}{dx}$).

Adapun langkah-langkah yang perlu dilakukan dalam pendiferensial fungsi implisit (WikiHow, 2023) adalah:

- A. Metode Pertama: Diferensialkan fungsi-fungsi sederhana dengan cepat dengan cara
 - Diferensialkan suku-suku x seperti biasa
 - Diferensialkan suku-suku y dan tambahkan $\frac{dy}{dx}$ disebelah masing-masing suku
 - Gunakan aturan hasil kali atau aturan hasil bagi untuk suku-suku yang memiliki x dan y .

B. Metode Kedua: Menggunakan Teknik-teknik Lanjut dengan cara

- Memasukkan nilai (x,y) dalam menentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk titik apapun
- Gunakan aturan rantai untuk fungsi dalam fungsi
- Untuk fungsi dengan variabel x, y dan z maka carilah $\frac{dz}{dx}$ dan $\frac{dz}{dy}$

Berdasarkan kedua metode tersebut diatas ada disebutkan teknik aturan rantai. Aturan rantai merupakan adalah satu teknik pendiferensialan yang banyak digunakan untuk menemukan solusi pada fungsi-fungsi yang berlipat (ada fungsi di dalam fungsi). Pada dasarnya aturan rantai dapat dijadikan solusi untuk menyelesaikan persoalan diferensial pada fungsi dalam bentuk apapun termasuk bentuk fungsi implisit. Aturan rantai pada diferensial ditulis sebagai berikut (Setyansah, 2018):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan beberapa langkah-langkah pendiferensialan fungsi implisit:

1. Tentukan variabel bebas dan variabel terikat Sebelum memulai pendiferensialan fungsi implisit, tentukan terlebih dahulu variabel bebas dan variabel terikat yang terlibat dalam fungsi.
2. Tulis persamaan fungsi implisit Tuliskan persamaan fungsi implisit yang akan difersensialkan. Pastikan persamaan tersebut hanya terdiri dari variabel bebas dan variabel terikat.
3. Diferensialkan persamaan fungsi implisit Lakukan diferensial terhadap persamaan fungsi implisit dengan variabel bebas dan variabel terikat. Dalam melakukan

diferensial, gunakan aturan diferensial produk dan diferensial kalkulus lanjutan lainnya.

4. Tentukan nilai turunan yang dicari Tentukan nilai turunan yang ingin dicari dari persamaan fungsi implisit. Misalnya, kita ingin menghitung turunan fungsi terhadap variabel tertentu pada titik tertentu.
5. Selesaikan persamaan diferensial implisit Gunakan persamaan diferensial implisit untuk menyelesaikan turunan yang dicari. Jika perlu, lakukan manipulasi aljabar untuk mendapatkan nilai turunan yang tepat.
6. Verifikasi hasil Pastikan hasil pendiferensialan yang didapatkan konsisten dengan persamaan fungsi implisit asli. Verifikasi hasil dengan memasukkan nilai variabel ke dalam persamaan awal dan hasil yang didapatkan.

Dengan mengikuti langkah-langkah di atas, kita dapat menghitung turunan dari suatu fungsi implisit menggunakan diferensial implisit. Namun, perlu diingat bahwa proses pendiferensialan fungsi implisit dapat cukup rumit dan memerlukan pemahaman yang kuat tentang kalkulus. Oleh karena itu, disarankan untuk mempelajari kalkulus dengan baik sebelum mencoba menerapkan diferensial implisit dalam pendiferensialan fungsi implisit.

5.4 Contoh Pendifferensialan Fungsi Implisit

Berikut adalah beberapa contoh persamaan implisit dan penggunaan diferensial implisit untuk menghitung turunannya:

1. Persamaan lingkaran.

Persamaan lingkaran dalam koordinat kartesian dapat dinyatakan sebagai $x^2 + y^2 = r^2$, di mana r adalah jari-jari lingkaran. Untuk menghitung turunan y terhadap x , kita dapat mengambil turunan kedua persamaan ini terhadap x dan memperlakukan y sebagai fungsi dari x . Dengan

demikian, kita dapat menghitung turunan y terhadap x sebagai:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2. **Persamaan elips.**

Persamaan elips dalam koordinat kartesian dapat dinyatakan sebagai $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, di mana a dan b adalah panjang sumbu utama dan sumbu kedua elips. Untuk menghitung turunan y terhadap x , kita dapat mengambil turunan kedua persamaan ini terhadap x dan memperlakukan y sebagai fungsi dari x . Dengan demikian, kita dapat menghitung turunan y terhadap x sebagai:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y}$$

3. **Persamaan parabola.**

Persamaan parabola dalam koordinat kartesian dapat dinyatakan sebagai $y = ax^2 + bx + c$. Untuk menghitung turunan y terhadap x , kita dapat mengambil turunan kedua persamaan ini terhadap x dan memperlakukan y sebagai fungsi dari x . Dengan demikian, kita dapat menghitung turunan y terhadap x sebagai:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

4. **Persamaan lingkaran dalam koordinat polar.**

Persamaan lingkaran dalam koordinat polar dapat dinyatakan sebagai $r = a$, di mana r adalah jarak dari titik ke pusat lingkaran dan a adalah jari-jari lingkaran. Untuk menghitung turunan sudut θ terhadap r , kita dapat mengambil turunan kedua persamaan ini terhadap r dan memperlakukan θ sebagai fungsi dari r . Dengan demikian, kita dapat menghitung turunan sudut θ terhadap r sebagai:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{ar}$$

5. **Persamaan garis singgung.**

Persamaan garis singgung suatu kurva dalam koordinat kartesian dapat dinyatakan sebagai $y - f(x) = f'(x)(x - x_0)$, di mana $f(x)$ adalah persamaan kurva, $f'(x)$ adalah turunan pertama kurva, dan $(x_0, f(x_0))$ adalah titik pada kurva di mana garis singgung dihitung. Untuk menghitung turunan kedua kurva pada titik tersebut, kita dapat menggunakan diferensial implisit dengan mengambil turunan kedua persamaan garis singgung terhadap x . Dengan demikian, kita dapat menghitung turunan kedua kurva pada titik tersebut sebagai:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f'(x_0) + 2f'(x_0) \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

6. **Persamaan panas.**

Persamaan panas adalah persamaan diferensial parsial yang digunakan untuk memodelkan aliran panas pada suatu benda. Persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk implisit, dan diferensial implisit dapat digunakan untuk menghitung turunan parsial suhu terhadap waktu dan koordinat. Sebagai contoh, persamaan panas pada satu dimensi dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dimana u adalah suhu, t adalah waktu, x adalah koordinat, dan k adalah konduktivitas termal. Untuk menghitung turunan parsial suhu terhadap waktu dan koordinat, kita dapat menggunakan diferensial implisit.

7. **Persamaan gerak**

Persamaan gerak suatu benda dalam satu dimensi dapat dinyatakan sebagai $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} t^2$ di mana x adalah

posisi benda pada waktu t , x_0 adalah posisi awal, v_0 adalah kecepatan awal, a adalah percepatan, dan t adalah waktu. Untuk menghitung turunan percepatan terhadap waktu, kita dapat menggunakan diferensial implisit dengan memperlakukan x sebagai fungsi dari t . Dengan demikian, kita dapat menghitung turunan percepatan terhadap waktu sebagai:

$$a = \frac{2 \left(\frac{dx}{dt} - v_0 \right)}{t^2}$$

Dari contoh-contoh diferensial implisit di atas, dapat dilihat bahwa teknik ini sangat berguna dalam banyak aplikasi matematika dan ilmu pengetahuan, termasuk dalam geometri, fisika, dan rekayasa. Dengan menggunakan diferensial implisit, kita dapat menghitung turunan dari suatu fungsi implisit yang sulit atau bahkan tidak mungkin diselesaikan secara eksplisit. Teknik ini sangat berguna dalam banyak aplikasi matematika dan ilmu pengetahuan. Oleh karena itu, diferensial implisit menjadi bagian penting dari matematika modern dan tetap menjadi topik penelitian aktif di bidang matematika dan ilmu pengetahuan lainnya.

Sebagai bahan pemantapan lainnya tentang pendiferensialan fungsi implisit mari kita bahas beberapa contoh soal diferensial fungsi implisit berikut ini:

Contoh 1:

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan fungsi implisit y berikut:

$$ax^2 + by^2 = 1, \quad b \neq 0$$

Pembahasan 1:

Diferensialkan setiap suku terhadap x . Maka akan diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(ax^2) + \frac{d}{dx}(by^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2ax + \left(0 + 2by \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$2by \frac{dy}{dx} = -2ax$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2ax}{2by}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by}$$

Sehingga, hasil diferensial fungsi implisit y adalah:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by}$$

Contoh 2:

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan fungsi implisit y berikut:

$$xy + (x + y + 1)^3 = 0$$

Pembahasan 2:

Masing-masing suku didiferensialkan terhadap variabel x .
Selanjutnya, gunakan aturan hasil kali untuk menghitung turunan suku pertama dan aturan rantai untuk suku kedua.

$$\frac{d}{dx} xy + \frac{d}{dx} (x + y + 1)^3 = \frac{d}{dx} 0$$

$$\left(x \frac{d}{dx} + y\right) + 3(x + y + 1)^2 \frac{d}{dx} (x + y + 1) = 0$$

$$x \frac{d}{dx} + y + 3(x + y + 1)^2 \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$x \frac{d}{dx} + y + 3(x + y + 1)^2 + 3(x + y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + 3(x + y + 1)^2) \frac{dy}{dx} = -(y + 3(x + y + 1)^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3(x + y + 1)^2}{x + 3(x + y + 1)^2}$$

Sehingga, hasil diferensial dari fungsi implisit x adalah :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3(x + y + 1)^2}{x + 3(x + y + 1)^2}$$

Contoh 3

Carilah diferensial dari fungsi $4x^2y - 3y = x^3 - 1$.

Pembahasan 3:

Cara 1:

Ubahlah bentuk fungsi implisit sehingga menjadi bentuk fungsi eksplisit:

$$2x^3y - 3y = x^3 - 1$$

Menjadi

$$y(2x^3 - 3) = x^3 - 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{2x^3 - 3}$$

Kemudian dengan menggunakan rumus turunan pembagian, kita peroleh turunan dari fungsi eksplisit di atas sebagai berikut:

Misalkan $u = x^3 - 1$ dan $v = 2x^3 - 3$ maka turunan dari u dan v berturut-turut adalah $u' = 3x^2$ dan $v' = 6x^2$. Maka akan diperoleh hasil diferensialnya sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 3)(3x^2) - ((x^3 - 1)(6x^2))}{(2x^3 - 3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 9x^2 - 6x^5 + 6x^2}{(2x^3 - 3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{(2x^3 - 3)^2}$$

Cara 2:

Diferensialkan kedua ruas persamaan yang diberikan, yaitu:

$$\frac{dy}{dx}(2x^3y - 3y) = \frac{dy}{dx}(x^3 - 1)$$

Untuk mencari turunan pada ruas kiri persamaannya, kita bisa memakai aturan perkalian, sedangkan untuk ruas kanannya bisa menggunakan rumus dasar turunan. Kita peroleh berikut ini:

$$2x^3 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 6x^2 - 3 \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} (2x^3 - 3) = 3x^2 - 6x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6x^2y}{2x^3 - 3}$$

Meskipun hasil diferensial pada cara 1 dan cara 2 mendapatkan hasil yang berbeda, tetapi keduanya adalah sama. Sebagai bahan pembuktian dapat diikuti cara berikut ini.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6x^2y}{2x^3 - 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6x^2(\frac{x^3 - 1}{2x^3 - 3})}{2x^3 - 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - \left(\frac{6x^5 - 6x^2}{2x^3 - 3}\right)}{2x^3 - 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 9x^2 - 6x^5 + 6x^2}{(2x^3 - 3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{(2x^3 - 3)^2}$$

Maka kesimpulannya adalah cara 1 atau cara 2 yang digunakan dalam menyelesaikan diferensial fungsi implisit akan memberikan hasil yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

- Adriani, P. 2020. *Kalkulus Peubah Banyak*. Mataram: Sanabil.
- Azizah, N. L. and Ariyanti, N. 2018. *Kalkulus*. Sidoarjo: Umsida Press.
- In'am, A. 2016. *Kalkulus Diferensial*.
- Irmayanti, D. 2021. *Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar*. Aceh: &ayasan Penerbit Muhammad Zaini.
- Marsitin, R. and Sesanti, N. R. 2013. *Dasar-Dasar Kalkulus*. Malang: Ediide Infografika.
- Setyansah, R. K. 2018. *Kalkulus Diferensial dilengkapi Tutorial Matlab*. Sleman: Penerbit Deepublish.
- WikiHow. 2023. *Cara Melakukan Turunan Fungsi Implisit*, WikiHow. Available at: <https://id.wikihow.com/Melakukan-Turunan-Fungsi-Implisit>.

BAB 6

PENDIFFERENSIALAN LOGARITMIK

Oleh Devi Eka Wardani Meganingtyas

6.1 Pendahuluan

Dalam matematika, ketika suatu fungsi tidak dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi berhingga dari operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, pembagian, atau perkalian yang dipangkatkan dan diekstrak akarnya, maka fungsi-fungsi tersebut dikatakan sebagai fungsi transendental. Beberapa contoh fungsi transendental dapat berupa $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, dll. Fungsi-fungsi yang bersifat non-aljabar ini hanya dapat dinyatakan dalam deret tak terhingga.

Fungsi transendental adalah fungsi analitik yang tidak aljabar, dan oleh karenanya tidak memenuhi persamaan polinomial. Dengan kata lain, fungsi transendental tidak dapat dinyatakan dalam urutan terbatas dari operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, pangkat, dan ekstraksi akar. Fungsi-fungsi seperti logaritma, fungsi trigonometri, dan fungsi eksponensial adalah beberapa contoh fungsi transendental.

Dalam aljabar, fungsi transendental hanya dapat diekspresikan dalam bentuk barisan tak terhingga. Oleh karena itu, istilah transendental dapat diartikan sebagai non-aljabar. Fungsi transendental dapat didefinisikan sebagai fungsi yang bukan aljabar dan tidak dapat dinyatakan dalam urutan terbatas dari operasi aljabar seperti $\sin x$.

Contoh fungsi transendental yang biasa dikenal adalah fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik, dan invers dari semua fungsi tersebut. Namun

demikian, ada juga jenis fungsi transendental yang lain yang masih kurang dikenal, contohnya fungsi Gamma, Elliptic, dan Zeta.

Pada bab ini, akan dibahas tentang metode pendifferensialan logaritmik dengan menggunakan sifat-sifat logaritma. Penerapan metode ini dimaksudkan untuk mempermudah penyelesaian soal turunan fungsi yang lebih kompleks.

6.2 Fungsi Logaritmik

Fungsi $f(t) = \frac{1}{t}$ kontinu pada $(0, \infty)$. Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus, fungsi f memiliki antiturunan pada interval dengan titik akhir x dan 1, dimana $x > 0$. Berdasarkan hasil pengamatan yang dilakukan pada fungsi $f(t)$, diperoleh definisi fungsi logaritma natural.

Definisi. Fungsi logaritma natural (*natural logarithm*), yang disimbolkan dengan $\ln(x)$, merupakan suatu antiturunan dari $\frac{1}{x}$ yang dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Beberapa sifat dari logaritma natural yang dapat digunakan untuk membantu penyederhanaan penyelesaian soal adalah sebagai berikut.

- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln x^q = q \ln x$

6.3 Differensiasi Logaritmik

Proses menemukan turunan dari suatu fungsi disebut differensiasi dalam kalkulus. Turunan adalah laju perubahan suatu fungsi terhadap besaran lain. Hukum Kalkulus Diferensial diletakkan oleh Sir Isaac Newton. Prinsip limit dan turunan digunakan dalam banyak disiplin ilmu. Differensiasi dan integrasi membentuk konsep utama kalkulus.

Differensiasi berarti tingkat perubahan satu kuantitas terhadap yang lain. Kecepatan dihitung sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu. Kecepatan ini pada setiap saat tidak sama dengan rata-rata yang dihitung. Kecepatan sama dengan kemiringan, yang tidak lain adalah laju perubahan jarak sesaat selama periode waktu tertentu.

Rasio perubahan kecil dalam satu besaran dengan perubahan kecil dalam besaran lain yang bergantung pada besaran pertama disebut differensiasi. Salah satu konsep penting dalam kalkulus terutama difokuskan pada differensiasi suatu fungsi. Nilai maksimum atau minimum suatu fungsi, kecepatan dan percepatan benda bergerak, dan garis singgung suatu kurva ditentukan oleh differensiasi. Jika $y = f(x)$ yang dapat dibedakan, maka turunannya direpresentasikan sebagai $f'(x)$ atau dy/dx .

Metode differensiasi logaritmik adalah metode differensiasi yang menggunakan sifat dan turunan dari fungsi logaritma natural, sebagai upaya untuk mempersingkat langkah yang ditempuh dalam menentukan turunan dari fungsi yang melibatkan pembagian, perkalian, dan perpangkatan (Sari, 2018).

Mengapa hal ini dilakukan? Simak perumpamaan berikut.

Hari ini Fariski bangun dan lupa mengeluarkan ayam yang akan dimakan untuk makan malam dari freezer. Apa yang harus Fariski lakukan? Pemikiran umum yang logis untuk dilakukan adalah menenggelamkan bungkus ayam ke dalam air agar lebih cepat mencair. Tapi tentu saja Fariski tidak makan ayam dengan air

untuk makan malam. Fariski hanya menggunakan air sebagai perantara agar makan malamnya tidak beku.

Nah, sekarang kita coba misalkan ayam sebagai fungsi dan makan malam dimisalkan menjadi turunannya. Apa yang bisa menjadi air dalam kesulitan di atas? Perumpamaan di atas mengungkap bahwa metode differensiasi logaritmik digunakan untuk membuat differensiasi lebih mudah walaupun tidak nampak pada hasil akhirnya.

6.3.1 Aturan Differensiasi Logaritmik

Dalam mempelajari logaritma natural, ada beberapa sifat logaritma yang dapat kita gunakan. Hal ini dimaksudkan salah satunya untuk dapat menyederhanakan fungsi saat mencari turunan dari fungsi yang kompleks. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode differensiasi logaritmik.

Differensiasi logaritmik merupakan suatu metode yang digunakan untuk menemukan turunan dari logaritma fungsi daripada fungsi aslinya. Metode ini pada dasarnya dapat digunakan untuk mendifferensiasikan berbagai macam persamaan. Namun, tidak semua persamaan dapat diselesaikan secara efisien dengan menggunakan metode ini sehingga kita juga perlu menentukan metode apa yang efisien digunakan untuk menyelesaikan permasalahan turunan.

Biasanya metode differensiasi logaritmik digunakan untuk keluarga fungsi-fungsi khusus yang tidak dapat dibedakan menggunakan aturan diferensiasi yang diketahui. Keluarga fungsi yang sangat erat terkait dengan differensiasi logaritmik adalah fungsi eksponensial yang dapat ditulis dalam bentuk $y = ab^x$. Oleh karenanya, biasanya penyelesaian turunan fungsi eksponensial menggunakan metode differensiasi logaritmik.

Mengapa secara umum metode differensiasi logaritmik dapat digunakan untuk berbagai persamaan? Berikut penjelasannya.

Misalkan kita mempunyai persamaan $y = f(x)$.

Jika kita mendiferensialkan persamaan tersebut menggunakan metode differensiasi logaritmik, diperoleh:

$$\ln y = \ln f(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\ln f(x))$$

Dengan menggunakan turunan secara implisit diperoleh:

$$\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{f(x)} (f'(x))$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{f(x)} (f'(x))(y)$$

Karena $y = f(x)$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} (f'(x))(f(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Begitulah kira-kira bagaimana metode differensiasi logaritmik bekerja untuk menyelesaikan permasalahan turunan. Untuk langkah-langkah dalam menyelesaikan soal menggunakan metode differensiasi logaritmik akan dijelaskan pada subbab berikutnya.

6.3.2 Langkah-langkah Differensiasi Logaritmik

Berikut adalah langkah-langkah yang secara umum dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan turunan dengan menggunakan metode differensiasi logaritmik.

1. Ubahlah persamaan yang ingin diselesaikan menjadi bentuk logaritma naturalnya.
2. Gunakan sifat-sifat logaritma pada persamaan yang akan diselesaikan. Tujuannya adalah untuk dapat menyederhanakan fungsi.
3. Gunakan aturan rantai, aturan pangkat, dan aturan turunan pada logaritma natural untuk dapat mendiferensialkan setiap fungsi.
4. Kalikan hasilnya dengan fungsi aslinya sehingga akan diperoleh turunan dari fungsi aslinya.

Pada langkah-langkah metode differensiasi logaritmik diatas, langkah kedua merupakan langkah dimana kita dapat memanfaatkan differensiasi logaritmik. Oleh karenanya, pemahaman tentang sifat-sifat logaritma natural pada turunan harus dikuasai agar penyelesaian soal dapat dilakukan dengan benar.

Agar lebih jelas untuk dipahami, berikut diberikan contoh penyelesaian permasalahan turunan menggunakan metode differensiasi logaritmik sesuai dengan langkah-langkah yang telah dijelaskan sebelumnya.

Contoh 6.1:

Tentukan turunan dari fungsi

$$f(x) = x^6 e^x$$

Penyelesaian:

Sebelum menyelesaikan persoalan ini dengan metode differensiasi logaritmik, diharapkan kita dapat menggunakan Aturan Perkalian untuk mencari turunan dari fungsi yang akan diselesaikan. Berikut adalah langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode differensiasi logaritmik.

1. Ubahlah persamaan yang ingin diselesaikan menjadi bentuk logaritma naturalnya.

Dari persamaan $f(x) = x^6 e^x$, maka bentuk logaritma naturalnya adalah sebagai berikut.

$$\ln f(x) = \ln(x^6 e^x) \quad (1)$$

2. Gunakan sifat-sifat logaritma pada persamaan yang akan diselesaikan. Tujuannya adalah untuk dapat menyederhanakan fungsi.

Kita dapat mengubah bentuk logaritma natural pada persamaan yang ada di langkah 1 menggunakan sifat-sifat logaritma. Seperti yang telah kita ketahui bahwa salah satu sifat logaritma natural yakni $\ln ab = \ln a + \ln b$, sehingga Persamaan (1) dapat diubah menjadi persamaan berikut.

$$\ln f(x) = \ln x^6 + \ln e^x \quad (2)$$

Selanjutnya, gunakan sifat logaritma yang lain, yakni $\ln a^r = r \ln a$ sehingga Persamaan (2) dapat diubah menjadi:

$$\ln f(x) = 6 \ln x + x \ln e \quad (3)$$

Karena $\ln e = 1$ maka Persamaan (3) dapat diubah menjadi:

$$\ln f(x) = 6 \ln x + x \quad (4)$$

3. Gunakan aturan rantai, aturan pangkat, dan aturan turunan pada logaritma natural untuk dapat mendiferensialkan setiap fungsi.

Langkah selanjutnya adalah mendiferensialkan setiap fungsi menggunakan aturan rantai dan aturan turunan yang berlaku pada logaritma natural. Seperti yang telah diketahui bahwa $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ maka menggunakan aturan rantai, aturan pangkat, dan aturan turunan sehingga Persamaan (4) dapat diubah menjadi:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)(f'(x)) = \frac{6}{x} + 1$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{6}{x} + 1 \quad (5)$$

4. Kalikan hasilnya dengan fungsi aslinya sehingga akan diperoleh turunan dari fungsi aslinya.

Langkah terakhir, pisahkan bagian turunannya dengan cara mengalikan kedua ruas Persamaan (5) dengan fungsi aslinya, yakni $f(x) = x^6 e^x$, kemudian sederhanakan hasilnya.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \left(\frac{6}{x} + 1 \right) \\ &= x^6 e^x \left(\frac{6}{x} + 1 \right) \\ &= e^x \left(\frac{6x^6}{x} + x^6 \right) \end{aligned}$$

$$= e^x(6x^5 + x^6)$$

(6)

Dengan demikian, diperoleh bahwa turunan dari fungsi $f(x) = x^6 e^x$ adalah $f'(x) = e^x(6x^5 + x^6)$ dengan menggunakan metode differensiasi logaritmik.

6.3.3 Contoh Penyelesaian Pendifferensialan dengan Metode Differensiasi Logaritmik

Berikut adalah beberapa contoh soal terkait turunan yang dapat diselesaikan menggunakan metode differensiasi logaritmik.

1. Tentukan turunan dari fungsi $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} \\ \ln g(x) &= \ln \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^2} \right) \\ \ln g(x) &= \ln(\sqrt{x+1}) - \ln x^2 \\ \ln g(x) &= \frac{1}{2} \ln(x+1) - 2 \ln x \\ \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} \right) - 2 \left(\frac{1}{x} \right) \\ \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{1}{2(x+1)} - \frac{2}{x} \\ \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{-3x-4}{2x(x+1)} \\ g'(x) &= \frac{-3x-4}{2x(x+1)} (g(x)) \\ g'(x) &= \frac{-3x-4}{2x(x+1)} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^2} \right) \\ g'(x) &= \frac{-3x-4}{2x^3\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Jadi, nilai turunan dari fungsi $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$ adalah

$$\frac{-3x-4}{2x^3\sqrt{x+1}}$$

2. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = (2x^3 + 8)(6x^2 - 1)(3x^5 - 2x^2 + 11)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2x^3 + 8)(6x^2 - 1)(3x^5 - 2x^2 + 11) \\
 \ln f(x) &= \ln((2x^3 + 8)(6x^2 - 1)(3x^5 - 2x^2 + 11)) \\
 \ln f(x) &= \ln(2x^3 + 8) + \ln(6x^2 - 1) + \ln(3x^5 - 2x^2 + 11) \\
 \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{6x^2}{2x^3+8} + \frac{12x}{6x^2-1} + \frac{15x^4-4x}{3x^5-2x^2+11} \\
 f'(x) &= \left(\frac{6x^2}{2x^3+8} + \frac{12x}{6x^2-1} + \frac{15x^4-4x}{3x^5-2x^2+11} \right) (f(x)) \\
 f'(x) &= \left(\frac{6x^2}{2x^3+8} + \frac{12x}{6x^2-1} + \frac{15x^4-4x}{3x^5-2x^2+11} \right) ((2x^3 + 8)(6x^2 - 1)(3x^5 - 2x^2 + 11))
 \end{aligned}$$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x)$ yang dimaksud adalah

$$\left(\frac{6x^2}{2x^3+8} + \frac{12x}{6x^2-1} + \frac{15x^4-4x}{3x^5-2x^2+11} \right) ((2x^3 + 8)(6x^2 - 1)(3x^5 - 2x^2 + 11)).$$

Bentuk di atas mungkin masih terlihat tidak terlalu sederhana, namun kita dapat menyelesaikan permasalahan pada soal nomor 2 tanpa menghabiskan banyak waktu untuk melakukan perhitungan. Itulah mengapa pada kondisi-kondisi tertentu metode differensiasi logaritmik ini dapat dipilih untuk menyelesaikan masalah turunan dengan lebih mudah dibanding metode lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Guichard, David, dkk. Tanpa Tahun. *Calculus: late transcendentals*, diakses pada tanggal 8 April 2023, <https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_late_online/section09.02.html>
- Irmayanti, dkk. 2021. *Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar*. Aceh: Yayasan Penerbit Muhammad Zain
- Landau, Edmund. 1951. *Differential and Integral Calculus*. New York: Chelsea Publishing Company.
- Murray, D. A. 1908. *Differential and Integral Calculus*. New York: Longmans, Green, & Co.
- Saraswati, Sari dan Rodliyah, Iesyah. 2020. *Kalkulus Dasar Pendekatan Blended Learning*. Banten: CV. AA Rizky.
- Sari, Puspita. 2018. Analisis Strategi Mahasiswa dalam Menentukan Turunan Fungsi dengan Metode Diferensiasi Logaritmik. *JRPIPM: Jurnal Riset Pendidikan dan Inovasi Pembelajaran Matematika*, 2(1), 1-14. <https://journal.unesa.ac.id/index.php/jrpiPM/article/view/2506/>.
- StudySmarter. Tanpa Tahun. *Logarithmic Differentiation*, diakses pada tanggal 8 April 2023, <<https://www.studysmarter.co.uk/explanations/math/calculus/logarithmic-differentiation/>>
- TechnologyUK. Tanpa Tahun. *Logarithmic Differentiation*, diakses pada tanggal 8 April 2023, <<https://www.technologyuk.net/mathematics/differential-calculus/logarithmic-differentiation.shtml>>

BAB 7

DIFFERENSIAL FUNGSI DENGAN 2 VARIABEL BEBAS ATAU LEBIH

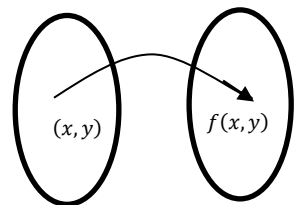
Oleh Leny Dhianti Haeruman

7.1 Pendahuluan

7.1.1 Fungsi dengan Dua Variabel Bebas atau Lebih

Fungsi dengan dua variabel bebas disebut juga fungsi dua peubah. Fungsi dua variabel adalah suatu fungsi dari dua peubah x dan y yang mempunyai suatu aturan yang memetakan (x, y) di dalam suatu himpunan D (domain) dengan suatu nilai tunggal f yang dapat dinyatakan dengan $f(x, y)$ dalam daerah R (Range) atau disebut daerah hasil. (Stewart, 2012)

Daerah asal fungsi dua peubah $f(x, y)$ adalah himpunan bilangan real (x, y) sedemikian sehingga $z = f(x, y)$ terdefinisi. x dan y merupakan peubah bebas, sedangkan z merupakan variabel terikat. (Varbeg, Purcell, & Rigdon, 2011)



Contoh fungsi dua peubah

1. $f(x, y) = 3x^2 - y^2$

2. $g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

Untuk lebih memahami tentang fungsi dua peubah beserta grafiknya, perhatikan contoh berikut ini.

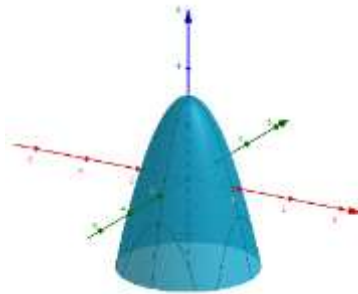
Contoh 1

Gambarkan grafik fungsi

$$f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$$

Penyelesaian

Fungsi $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ mempunyai grafik berbentuk parabola



Demikian pula fungsi dengan tiga variabel bebas atau disebut fungsi tiga peubah. Daerah asal fungsi tiga peubah $g(x, y, z)$ adalah himpunan bilangan real (x, y, z) sedemikian sehingga $w = g(x, y, z)$ terdefinisi, dimana x, y dan z merupakan peubah bebas, sedangkan w merupakan variabel terikat.

Contoh fungsi tiga peubah

$$f(x, y, z) = 16x^2 + 16y^2 - 9z^2$$

$$g(x, y, z) = \frac{(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{3/2}}{xyz}$$

7.2 Differensial Fungsi Dua Peubah

Anggap f merupakan fungsi dua variabel x dan y . Jika $y = y_0$ dianggap variabel tetap atau konstan, maka $f(x, y_0)$ merupakan fungsi satu peubah dengan peubah x . Anggap

$g(x) = f(x, y_0)$, maka turunannya pada $x = x_0$ disebut turunan parsial x di (x_0, y_0) dan dituliskan dengan $f_x(x_0, y_0)$. Maka:

$$f_x(x_0, y_0) = g'(x_0) \text{ dengan } g(x) = f(x, y_0) \quad (1)$$

Berdasarkan definisi turunan, maka didapat:

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \quad (2)$$

Substitusi persamaan (2) ke persamaan (1)

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (3)$$

Turunan parsial y di titik (x_0, y_0) dan dituliskan dengan $f_y(x_0, y_0)$, dengan menganggap variabel x konstan, maka

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (4)$$

Jika f merupakan fungsi dua variabel, maka turunan parsial dari fungsi f_x dan f_y adalah

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Notasi turunan parsial dapat dituliskan sebagai berikut (Varbeg, Purcell, & Rigdon, 2011).

jika $z = f(x, y)$, maka

$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ $f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right _{(x_0, y_0)}$	$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$ $= \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ $f_y(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right _{(x_0, y_0)}$
---	---

Contoh 2

Tentukan turunan dari $f(x, y) = \sqrt{(4x - y^2)^3}$

Penyelesaian

$$f(x, y) = (4x - y^2)^{3/2}$$

Turunkan fungsi $f(x, y)$ terhadap x dengan menggunakan aturan rantai

$$f_x = \frac{3}{2} (4x - y^2)^{1/2} (4)$$

$$f_x = 6(4x - y^2)^{1/2}$$

$$f_x = 6\sqrt{4x - y^2}$$

Dengan cara yang sama, kita dapat menurunkan fungsi $f(x, y)$ terhadap y

$$f_y = \frac{3}{2} (4x - y^2)^{1/2} (2y)$$

$$f_y = -3y(4x - y^2)^{1/2}$$

$$f_y = -3y\sqrt{4x - y^2}$$

Jadi turunannya adalah $f_x = 6\sqrt{4x - y^2}$ dan

$$f_y = -3y\sqrt{4x - y^2}$$

Contoh 3

Diketahui $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$, tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan soal di atas, kita dapat menurunkan secara implisit.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ merupakan turunan implisit terhadap x

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} &= -3x^2 - 6yz \\ \frac{\partial z}{\partial x} (3z^2 + 6xy) &= -3x^2 - 6yz \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-3x^2 - 6yz}{(3z^2 + 6xy)} \end{aligned}$$

$\frac{\partial z}{\partial y}$ merupakan turunan implisit terhadap y

$$\begin{aligned} 3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} (3z^2 + 6xy) &= -3y^2 - 6xz \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-3y^2 - 6xz}{(3z^2 + 6xy)} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - 6yz}{(3z^2 + 6xy)} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3y^2 - 6xz}{(3z^2 + 6xy)}$$

7.3 Differensial Fungsi Tiga Peubah

Turunan parsial fungsi tiga variabel didefinisikan sebagai berikut.

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Untuk mencari f_x dilakukan dengan mencari turunan terhadap x dan menganggap variabel y dan z konstan.

Contoh 4

Diketahui $f(x, y, z) = 3x^2y - xyz + y^2z^2$. Tentukan $f_x(x, y, z)$ dan $f_y(0, 1, 2)$

Penyelesaian

$f_x(x, y, z)$ merupakan turunan fungsi $f(x, y, z)$ terhadap variabel x

$$f_x(x, y, z) = 6xy - yz$$

$f_y(x, y, z)$ merupakan turunan fungsi $f(x, y, z)$ terhadap variabel y

$$f_y(x, y, z) = 3x^2 - xz + 2yz^2$$

$$f_y(0, 1, 2) = 3(0)^2 - (0)(2) + 2(1)(2)^2$$

$$f_y(0, 1, 2) = 8$$

Jadi $f_x(x, y, z) = 6xy - yz$ dan $f_y(0, 1, 2) = 8$

Contoh 5

Diketahui $e^{xy} \ln z$, tentukan f_x , f_y , dan f_z

Penyelesaian

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

$$f_y = xe^{xy} \ln z$$

$$f_z = \frac{e^{xy}}{z}$$

7.4 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Jika f merupakan fungsi dua peubah, lalu f_x dan f_y juga merupakan fungsi dua peubah, maka f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , dan f_{yy} disebut turunan parsial kedua dari f . Jika $z = f(x, y)$, maka dapat ditulis:

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Contoh 6

Tentukan turunan parsial kedua dari $f(x, y) = x^2 y^4$

Penyelesaian

Sebelum mencari turunan kedua, terlebih dahulu kita mencari turunan pertama fungsi $f(x, y)$, yaitu $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 2xy^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 4x^2 y^3$$

Setelah itu kita bisa mendapat turunan parsial kedua fungsi $f(x, y)$ dengan menurunkan f_x dan f_y masing-masing terhadap x dan y .

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy^4) = 2y^4 \\f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^4) = 8xy^3 \\f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (4x^2 y^3) = 8xy^3\end{aligned}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (4x^2y^3) = 12x^2y^2$$

Berdasarkan penyelesaian di atas maka dapat disimpulkan bahwa $f_{xy} = f_{yx}$

Contoh 7

Tentukan turunan parsial kedua dari $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$

Penyelesaian

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y, z) = y + 3z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y, z) = x + 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y + 3z) = 0$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y + 3z) = 1$$

$$f_{xz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (y + 3z) = 3$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x + 2z) = 1$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x + 2z) = 0$$

$$f_{yz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (x + 2z) = 2$$

$$f_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y + 3x) = 3$$

$$f_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y + 3x) = 2$$

$$f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (2y + 3x) = 0$$

Contoh 8

Hitunglah f_{xxyz} jika $f(x, y, z) = \sin(2x + yz)$

Penyelesaian

$$f_x = 2 \cos(2x + yz)$$

$$f_{xx} = -4 \sin(2x + yz)$$

$$f_{xxy} = -4z \cos(2x + yz)$$

$$f_{xxyz} = -4 \cos(2x + yz) + 4yz \sin(2x + yz)$$

Latihan

1. Tentukan turunan parsial pertama dari fungsi dibawah ini.
 - a. $f(x, y) = 2x^3y^2 - 3x^2y$
 - b. $f(x, t) = 2e^{-t} \cos \pi x$
 - c. $g(x, y) = \ln(x + 2y + 3z)$
 - d. $g(x, y) = x \sin^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$
 - e. $f(r, \theta) = 2r^3 \sin 2\theta$
2. Jika $F(x, y) = \frac{6x-3y}{2xy}$, tentukan $F_x(2, -1)$ dan $F_y(4, 1)$
3. Jika $f(x, y, z) = 2x^2y + 3xy^2 - x^3y^2$, tentukan:
 - a. $f_x(x, y, z)$
 - b. $f_y(x, y, z)$
 - c. $f_x(0, -1, 2)$
 - d. $f_y(3, -2, 5)$

4. Diketahui $2x^2y + xy^2 - 3xyz = 3$, tentukan:
- $\frac{\partial z}{\partial x}$
 - $\frac{\partial z}{\partial y}$
5. Jika $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3 + 5xy$, tentukan:
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
 - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
 - $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
6. Jika $f(x, y) = 3e^{2x} \cos y$, buktikan bahwa $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
7. Jika $f(x, y, z) = 3xy^2 - 2x^3y$, tentukan:
- f_{xxy}
 - f_{xyy}
 - f_{xxxy}
 - f_{yyy}
8. Jika $u = x^4y^3 - y^4$, buktikan bahwa $u_{xy} = u_{yx}$

DAFTAR PUSTAKA

Stewart, J. 2012. *Calculus 7E*. Belmont, USA: Cengage Learning.

Varbeg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. 2011. *Calculus, 9th Edition*. New York.

BAB 8

HARGA EKSTRIM FUNGSI

Oleh Wilminche M. D. E. L. Kelen

8.1 Pendahuluan

Harga ekstrim fungsi adalah harga atau nilai yang berkaitan dengan maksimum atau minimum fungsi tersebut. Ada dua jenis nilai ekstrim yaitu nilai ekstrim mutlak dan nilai ekstrim relatif.

8.2 Nilai Ekstrim Mutlak

Nilai ekstrim mutlak didefinisikan sebagai berikut:

Misalnya I adalah selang tertutup yang merupakan daerah asal dari f dan di dalamnya terdapat c ,

- 1) $f(c)$ disebut nilai maksimum mutlak f jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x pada I .
- 2) $f(c)$ disebut nilai minimum mutlak f jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x pada I .
- 3) $f(c)$ disebut nilai ekstrim mutlak dari f , baik maksimum maupun minimum mutlak.
- 4) Fungsi f yang akan dicari nilai ekstrimnya disebut fungsi objektif.

Titik-titik yang berpeluang menghasilkan nilai ekstrim disebut titik kritis. Yang termasuk titik-titik kritis adalah:

- 1) Titik ujung selang tertutup I
- 2) Titik stasioner dari f yakni titik c , di mana $f'(c) = 0$, atau
- 3) Titik singular dari f di mana $f'(c)$ tidak terdefinisi.

Contoh 1

Sebuah fungsi didefinisikan pada selang $[-3, 6]$ sebagai berikut $f(x) = x^3 - 48x + 4$. Carilah nilai ekstrim fungsi tersebut!

Penyelesaian

Titik-titik kritis fungsi di atas sebagai berikut:

(1) titik ujung selang, yakni $x = -3$ dan $x = 6$

(2) titik stasioner,

$$\begin{aligned}f'x &= 3x^2 - 48 = 0 \\3(x - 4)(x + 4) &= 0\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $x = -4$ (berada di luar selang $[-3, 6]$ berarti tidak memenuhi) dan $x = 4$, atau

(3) titik singular (tetapi fungsi ini tidak memiliki titik singular).

Dengan demikian titik kritis fungsi di atas adalah $x = -3$, 4 dan 6 . Nilai ekstrimnya dicari dengan memasukkan titik-titik kritis di atas pada fungsi objektif sebagai berikut.

$$f(-3) = -3^3 - 48(-3) + 4 = 121$$

$$f(4) = 4^3 - 48(4) + 4 = -124$$

$$f(6) = 6^3 - 48(6) + 4 = -68$$

Maka, nilai maksimum mutlak adalah 121 sedangkan nilai minimum mutlak adalah -124 .

Contoh 2

Carilah nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ pada $[-1, 2]$!

Penyelesaian

Titik-titik kritis fungsi di atas sebagai berikut.

(1) titik ujung selang, yakni $x = -1$ dan $x = 2$

(2) titik stasioner, $f'(x) = 0$. Akan tetapi $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt{x}}$ tidak pernah nol.

(3) titik singular, $f'(x)$ tidak terdefinisi pada $x = 0$
 dengan demikian, titik-titik kritisnya adalah $-1, 0$, dan 2 .
 Selanjutnya,

$$f(-1) = \sqrt[3]{-1^2} = 1$$

$$f(0) = \sqrt[3]{0^2} = 0$$

$$f(2) = \sqrt[3]{2^2} = 1,6$$

Maka, nilai maksimum mutlakny adalah $1,6$ sedangkan nilai minimum mutlakny adalah 0 .

8.3 Kemonotonan, Kecekungan, dan Titik Belok

8.3.1 Kemonotonan Fungsi dan Uji Turunan Pertama

Perhatikan gambar yang ditunjukkan oleh Gambar 8.3 . jika kita bergerak dari titik A ke titik B pada kurva, nilai $f(x)$ bertambah besar dikatakan bahwa fungsi tersebut monoton naik. Demikian sebaliknya, jika bergerak dari B ke C jika nilai $f(x)$ bertambah kecil, dikatakan fungsi tersebut monoton turun. Kemonotonan fungsi didefinisikan sebagai berikut.

Misalnya f didefinisikan pada selang I (terbuka, tertutup, atau keduanya),

- (1) f monoton naik pada I jika, untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I , $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$
- (2) f monoton turun pada I jika, untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I , $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

Kemonotonan dapat dicari dengan menguji turunan pertama sebagai berikut.

- (1) Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam I , f monoton naik pada I
- (2) Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam I , f monoton turun pada I

Contoh 1

Jika $f(x) = 3x + 3$, cari di mana f monoton naik dan monoton turun!

Penyelesaian

Uji turunan pertama $f'(x) = 3 > 0$. Ini menunjukkan turunan pertama selalu positif untuk setiap x . Jadi, f monoton naik pada $(-\infty, \infty)$ dan f tidak pernah turun.

Contoh 2

Jika $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, cari di mana f monoton naik dan monoton turun!

Penyelesaian

Turunan pertama $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$. Untuk mengetahui selang di mana $f'(x) > 0$ (positif) dan $f'(x) < 0$ (negatif), cari terlebih dahulu titik pemisah selang dengan mengambil $f'(x) = 0$ maka

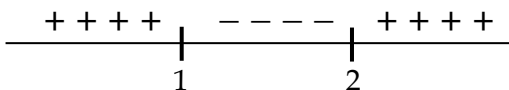
$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

$$6(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$6(x - 1)(x - 2) = 0$$

Sehingga diperoleh titik pemisah selang yakni $x = 1$ dan $x = 2$. Titik-titik ini membagi garis bilangan menjadi tiga selang yaitu $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, dan $(2, \infty)$. Nilai $f'(x)$ dicari dengan memasukkan salah satu titik pada tiap selang. Misalnya untuk kasus ini selang $(-\infty, 1)$ kita pilih titik $x = 0$ maka diperoleh $f'(x) = 12 > 0$ maka selang tersebut bernilai positif. Untuk selang kedua $(1, 2)$ misalnya kita pilih titik $x = 1,5$ maka diperoleh $f'(x) = -1,5 < 0$ maka selang tersebut bernilai negatif. Untuk selang ketiga $(2, \infty)$, misalnya kita pilih titik $x = 3$ maka diperoleh $f'(x) = 12 > 0$ maka selang tersebut bernilai positif.

f'



Jadi, f monoton naik pada $(-\infty, 1)$ dan $(2, \infty)$ dan monoton turun pada $(1, 2)$.

8.3.2 Kecekungan Fungsi dan Uji turunan Kedua

Misalnya f terdiferensialkan pada selang terbuka I , f cekung ke atas pada I jika f' monoton naik pada I , dan f cekung ke bawah pada I jika f' monoton turun pada I .

Kecekungan fungsi dapat dicari dengan menguji turunan kedua pada I sebagai berikut.

- (1) jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam I , f cekung ke atas dalam I
- (2) jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam I , f cekung ke bawah dalam I

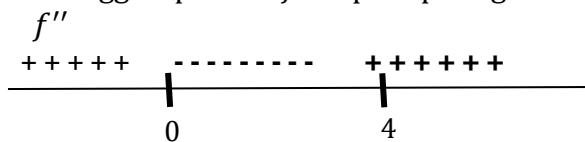
Contoh 1

Jika $f(x) = x^4 - 8x^3 - 2$, cari di mana f cekung ke atas dan cekung ke bawah!

Penyelesaian

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 48x = 0 \\ &= 12x(x - 4) = 0 \end{aligned}$$

Berarti, $x = 0$ dan $x = 4$. Kemudian kita lakukan uji pada titik -1 , 1 dan 5 sehingga diperoleh f'' seperti pada gambar di bawah.



Jadi, f cekung ke atas pada $(-\infty, 0]$ dan $[4, \infty)$ sedangkan f cekung ke bawah pada $[0, 4]$.

8.3.3 Titik Belok

Misalkan f kontinu di titik c , maka titik $(c, f(c))$ disebut titik belok grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan f cekung ke bawah pada sisi lainnya. Kemungkinan titik belok terjadi di c di mana $f''(c) = 0$ atau $f''(c)$ tidak terdefinisi.

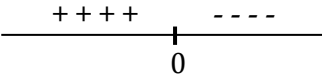
Contoh 1

Cari semua titik belok dari $f(x) = \sqrt[3]{x} + 3!$

Penyelesaian

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

Turunan ke dua tidak pernah nol dan tidak terdefinisi pada $x = 0$ sehingga $x = 0$ merupakan titik pemisah selang. Hasil uji nilai turunan ke dua dapat dilihat pada gambar berikut.



Hasil uji turunan ke dua menunjukkan bahwa:

- 1) untuk $x < 0$, maka $f'' > 0$ sehingga f cekung ke atas
- 2) untuk $x > 0$ maka $f'' < 0$ sehingga f cekung ke bawah

Koordinat titik beloknya ditentukan dengan cara, untuk $x = 0$ maka $f(0) = \sqrt[3]{0} + 3 = 3$. Jadi, titik $(0, 3)$ merupakan titik belok.

8.4 Nilai Ekstrim Relatif

Misalnya S adalah daerah asal f yang di dalamnya terdapat c maka,

- 1) $f(c)$ disebut nilai maksimum relatif (relatif) jika terdapat selang (a, b) yang di dalamnya terdapat c sedemikian rupa sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a, b) \cap S$
- 2) $f(c)$ disebut nilai minimum relatif (relatif) jika terdapat selang (a, b) yang di dalamnya ada c sedemikian rupa sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a, b) \cap S$

- 3) $f(c)$ disebut nilai ekstrim relatif (relatif) jika ia berupa nilai maksimum relatif atau nilai minimum relatif.

Nilai ekstrim dapat terjadi pada titi-titik kritis (titik ujung, titik stasioner, titik singular).

8.4.1 Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Relatif

Misalnya f kontinu pada selang terbuka (a, b) yang di dalamnya terdapat c .

- 1) Jika f monoton naik $\{f'(x) > 0\}$ untuk semua x dalam (a, c) dan monoton turun $\{f'(x) < 0\}$ untuk semua x dalam (c, b) , $f(c)$ adalah nilai maksimum relatif f .
- 2) Jika f monoton turun $\{f'(x) < 0\}$ untuk semua x dalam (a, c) dan monoton naik $\{f'(x) > 0\}$ untuk semua x dalam (c, b) , $f(c)$ adalah nilai minimum relatif f .
- 3) Jika $f(x)$ bertanda sama pada $x < c$ dan $x > c$, $f(c)$ bukan nilai ekstrim relatif f .

Contoh 1

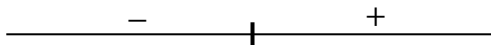
Cari nilai ekstrim relatif dari fungsi $f(x) = x^2 - 10x + 6$ pada $(-\infty, \infty)$!

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\text{Turunan pertama } f'(x) &= 2x - 10 = 0 \\ x - 5 &= 0\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $x = 5$ (memenuhi karena berada dalam selang $(-\infty, \infty)$)

Nilai f'



f monoton turun pada $(-\infty, 5)$, maka sesuai dengan uji turunan pertama $f(5) = 5^2 - 10(5) + 6 = -19$ adalah nilai minimum relatif.

8.4.2 Uji Turunan Kedua untuk Ekstrim Relatif

Misalnya f kontinu pada selang terbuka (a, b) yang di dalamnya terdapat c sedemikian rupa sehingga $f'(c) = 0$.

- 1) Jika $f''(c) < 0$, $f(c)$ merupakan nilai minimum relatif
- 2) Jika $f''(c) > 0$, $f(c)$ merupakan nilai maksimum relatif
- 3) Jika $f''(c) = 0$, $f(c)$ merupakan titik belok

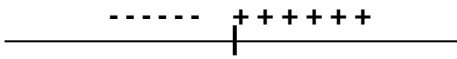
Contoh 2

Tentukan nilai ekstrim relatif dari $f(x) = x^3 + 3x + 1$!

Penyelesaian

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

$$f''(x) = 6x$$



- 1) $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$ sehingga $f(-1)$ merupakan nilai minimum relatif karena berada dalam selang terbuka $(-\infty, 0)$ sedangkan
- 2) $f''(1) = 6(1) = 6 > 0$ sehingga $f(1)$ merupakan nilai maksimum relatif karena berada dalam selang terbuka $(0, \infty)$.
- 3) $f''(0) = 6(0) = 0$ sehingga $f(0)$ merupakan titik belok.

DAFTAR PUSTAKA

http://file.upi.edu/Direktori/FPTK/JUR._PEND._TEKNIK_ELEKTRON/197004182005011-AIP_SARIPUDIN/Matematika/05-Penggunaan_Turunan.pdf

BAB 9

APLIKASI DIFERENSIASI

Oleh Erwin Randjawali

9.1 Pendahuluan

Turunan merupakan salah satu materi dalam Matematika yang banyak diterapkan dalam bidang ilmu lainnya, seperti fisika, ekonomi, biologi, kimia, dan lain-lain. Sebagai contoh, (1) konsep kecepatan sesaat dalam fisika; (2) konsep untuk menentukan keuntungan maksimal di bidang ekonomi; (3) laju pertumbuhan tanaman di bidang biologi; dan (4) laju pemisahan di bidang kimia. Beberapa contoh soal yang terdapat dalam sub bab ini terinspirasi dari buku-buku yang terdapat pada bagian referensi (Giancoli, 2014; Stewart, 2001).

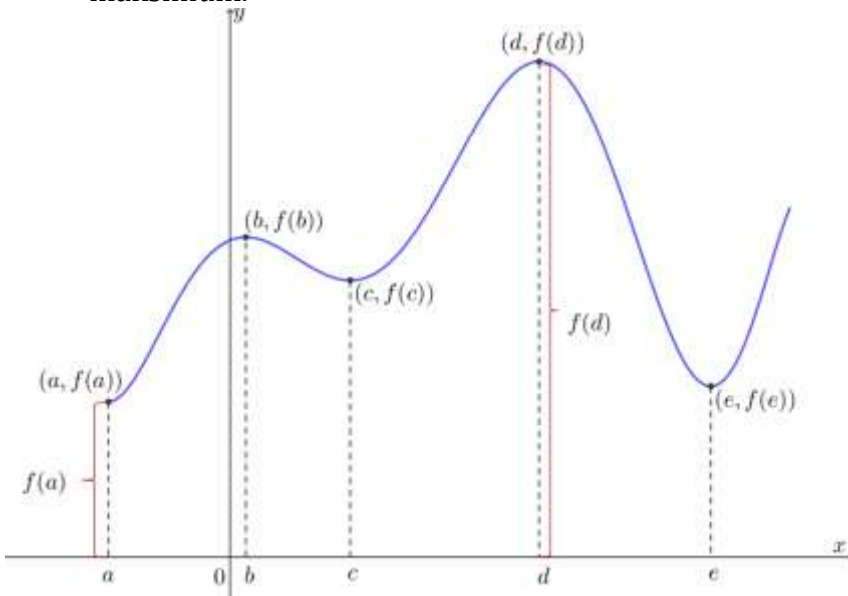
9.2 Nilai Minimum dan Nilai Maksimum

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering kali perlu menentukan langkah yang paling tepat untuk melaksanakan suatu hal. Misalnya, bagi seorang pengusaha makanan kaleng, dibutuhkan ukuran kaleng yang dapat mengecilkan biaya produksi. Contoh lainnya adalah seorang tenaga kesehatan yang berupaya untuk meresepkan dosis obat paling kecil agar dapat menyembuhkan penyakit yang diderita pasien. Demikian halnya dengan seorang petani yang berupaya untuk menentukan perpaduan jenis tanaman agar memperoleh keuntungan dari hasil bertani secara maksimal (Stewart, 2001; Varberg, Purcell, & Rigdon, 2010). Masalah-masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep nilai maksimum maupun nilai minimum dari sebuah fungsi.

Definisi

Misalkan D adalah sebuah daerah asal dari sebuah fungsi f , dan pada daerah asal tersebut terdapat sebuah titik c , maka dapat dikatakan (Varberg et al., 2010):

- (i). Fungsi f bernilai maksimum global di titik c pada D , jika $f(c) \geq f(x)$ untuk seluruh nilai x di D .
- (ii). Fungsi f bernilai minimum global di titik c pada D , jika $f(c) \leq f(x)$ untuk seluruh nilai x di D .
- (iii). Nilai $f(c)$ disebut sebagai nilai ekstrim jika nilai tersebut merupakan nilai minimum atau nilai maksimum.



Gambar 9.1. Nilai maksimum dan nilai minimum ((Stewart, 2001)

Berdasarkan definisi di atas, maka dari Gambar 9.1 terlihat bahwa grafik fungsi f memiliki nilai maksimum global di titik $(d, f(d))$. Titik $(d, f(d))$ merupakan titik yang paling tinggi dibandingkan dengan keempat titik lainnya pada grafik. Grafik tersebut bernilai minimum global di titik $(a, f(a))$. Titik $(a, f(a))$

merupakan titik paling rendah dibandingkan titik-titik lainnya pada grafik tersebut.

Definisi

Nilai maksimum relatif dari fungsi f berada di c jika $f(x) \leq f(c)$ ketika x dekat c . Oleh karena itu, $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x yang di dalamnya terdapat c pada sebuah interval terbuka. Demikian halnya, nilai minimum relatif fungsi f berada di c jika $f(x) \geq f(c)$ ketika x dekat c (Stewart, 2001).

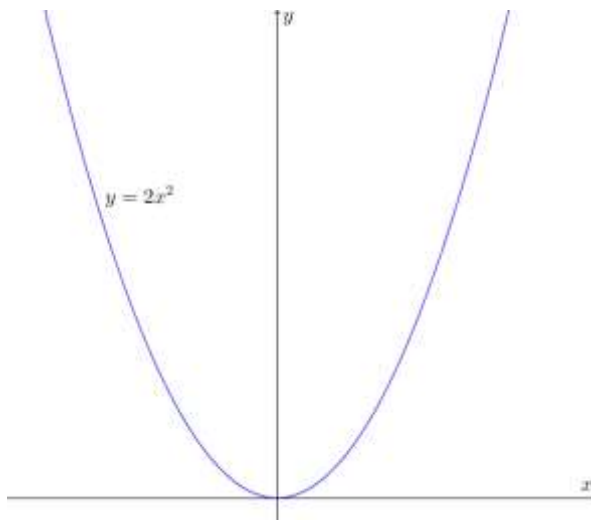
Berdasarkan definisi di atas, jika nilai x yang dipilih pada Gambar 9.1 dibatasi pada interval $a < x < c$, maka titik maksimum berada di $(b, f(b))$. Oleh karena itu, $f(b)$ merupakan nilai maksimum relatif dari fungsi f . Sedangkan apabila nilai x yang dipilih berada pada interval $c < x < e$, maka titik minimum berada di $(e, f(e))$. Dengan demikian, $f(e)$ adalah titik minimum relatif dari fungsi f .

Contoh 1

Tentukan nilai minimum dan nilai maksimum dari $f(x) = 2x^2$ pada interval $(-\infty, \infty)$, seperti pada Gambar 9.2.

Jawab

Fungsi $f(x) = 2x^2$ tidak memiliki nilai maksimum pada interval terbuka tersebut. Oleh karena itu, tidak terdapat titik yang paling tinggi pada fungsi tersebut. Fungsi ini memiliki nilai minimum relatif $f(0)$, baik pada interval $(-\infty, 0)$ maupun $(0, \infty)$. Dengan kata lain, titik $(0,0)$ adalah titik minimum global dari fungsi $f(x) = 2x^2$. $f(0) \leq f(x)$ untuk semua nilai x pada interval $(-\infty, \infty)$.



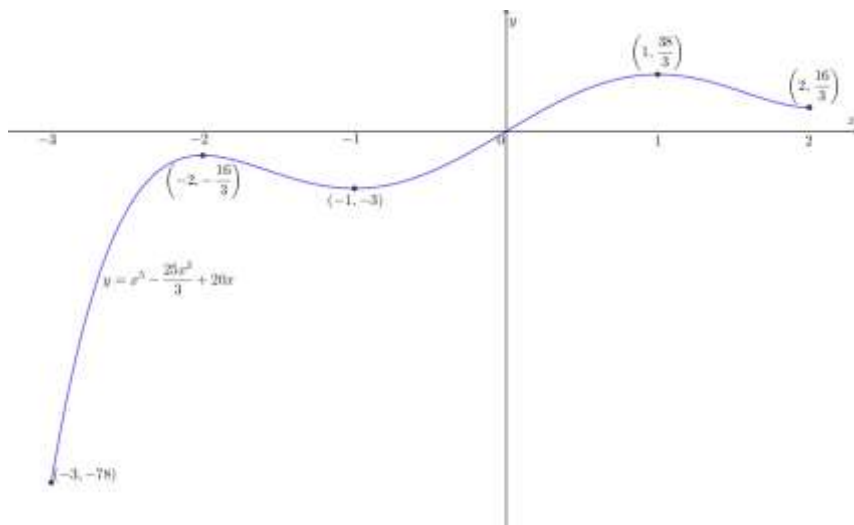
Gambar 9.2. Grafik fungsi $f(x) = 2x^2$

Contoh 2

Tentukan nilai minimum dan nilai maksimum dari $f(x) = x^5 - \frac{25x^3}{3} + 20x$ pada interval $[-3, 2]$, seperti pada Gambar 9.3 (Varberg et al., 2010).

Jawab

Fungsi $f(x) = x^5 - \frac{25x^3}{3} + 20x$ bernilai maksimum relatif $f(-2) = -\frac{16}{3}$, dan bernilai maksimum global $f(1) = \frac{38}{3}$. Sedangkan minimum global adalah $f(-3) = -78$, dan nilai minimum relatif adalah $f(-1) = -3$ dan $f(2) = \frac{16}{3}$.



Gambar 9.3. Grafik fungsi $f(x) = x^5 - \frac{25x^3}{3} + 20x$

9.3 Kemonotonan Fungsi

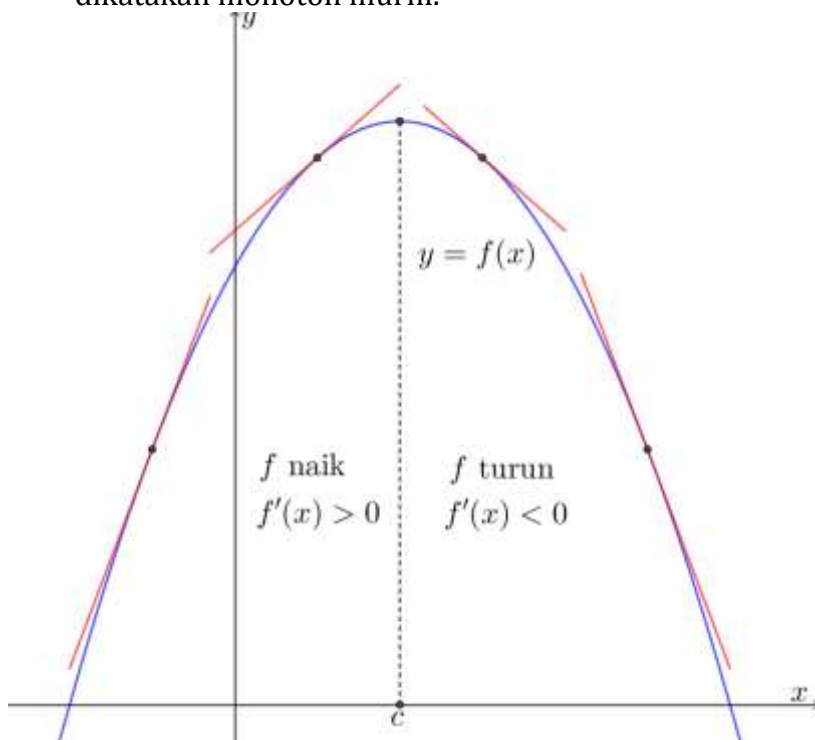
Salah satu konsep yang perlu dikuasai dalam sub bab ini adalah terkait cara menentukan bilamana fungsi menaik atau menurun. Adapun definisi fungsi turun dan fungsi naik adalah sebagai berikut.

Definisi

Andaikan fungsi f dapat didefinisikan pada sebuah selang I , dimana I dapat berupa selang tertutup, selang terbuka, maupun tidak keduanya, maka:

- (i). Jika untuk masing-masing bilangan x_1 dan x_2 yang terdapat pada selang I dengan $x_1 < x_2$, sehingga $f(x_1) < f(x_2)$, maka fungsi f menaik.
- (ii). Jika untuk masing-masing bilangan x_1 dan x_2 yang terdapat pada selang I dengan $x_1 < x_2$, sehingga $f(x_1) > f(x_2)$, maka fungsi f menurun.
- (iii). Jika pada selang I fungsi f menaik, maka fungsi f dikatakan monoton murni. Hal demikian pun berlaku

apabila pada selang I fungsi f menurun, maka f juga dikatakan monoton murni.



Gambar 9.4. f naik dan f turun

Gambar 9.5 menunjukkan bahwa fungsi f menaik pada interval $(-\infty, c)$, dan menurun pada interval (c, ∞) . Cara menentukan bilamana fungsi f menurun maupun menaik dapat dilakukan dengan menggunakan turunan pertama fungsi tersebut. Hal ini karena turunan pertama f di x atau $f'(x)$ menunjukkan kemiringan garis singgung pada grafik fungsi f di x . Apabila $f'(x) > 0$ maka garis singgungnya menaik ke kanan, sedangkan apabila $f'(x) < 0$ maka garis singgungnya menurun ke kiri. Berikut ini adalah teorema kemonotonan fungsi dengan menggunakan turunan pertama fungsi (Varberg et al., 2010).

Teorema A

Misalkan pada sebuah interval I terdefinisikan sebuah fungsi f , dan memiliki turunan pada masing-masing titik yang terdapat pada interval I .

- (i). f dikatakan menaik pada interval I apabila $f'(x) > 0$ untuk semua titik pada interval I .
- (ii). f dikatakan menurun pada interval I apabila $f'(x) < 0$ untuk semua titik pada interval I .

Contoh 3

Carilah interval dimana grafik fungsi $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 9$ menaik dan menurun.

Jawab

Langkah pertama yang perlu dilakukan adalah menentukan turunan pertama f di x .

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(4x^3 - 3x^2 - 6x + 9) \\ &= 12x^2 - 6x - 6 \end{aligned}$$

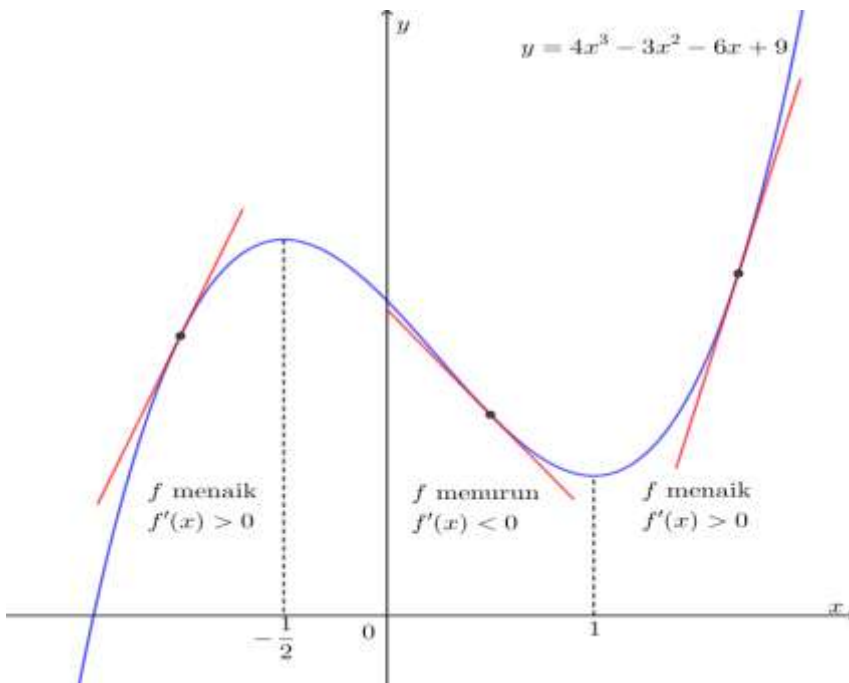
Langkah berikutnya adalah menentukan nilai x yang memenuhi $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 12x^2 - 6x - 6 &= 0 \\ 6(2x^2 - x - 1) &= 0 \\ 6(2x + 1)(x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan di atas memberikan solusi $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = 1$ yang merupakan titik-titik stasioner dari fungsi tersebut. Kedua titik tersebut memisahkan interval menjadi tiga bagian, yakni $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 1)$, dan $(1, \infty)$. Selanjutnya ditentukan nilai x yang memenuhi $f'(x) < 0$ dan yang memenuhi $f'(x) > 0$. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan tabel berikut ini.

Tabel 9.1. Tabel penolong contoh 3

Interval	x (titik uji)	$f'(x)$	Keterangan
$(-\infty, -\frac{1}{2})$	-1	12	f menaik
$(-\frac{1}{2}, 1)$	0	-6	f menurun
$(1, \infty)$	2	30	f menaik

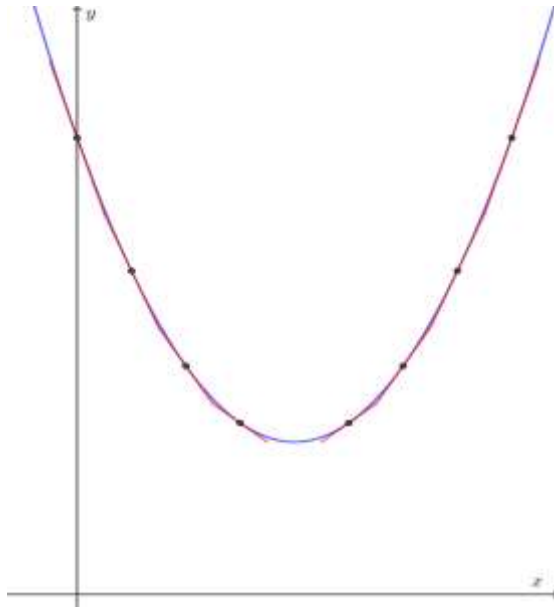


Gambar 9.6. Contoh 3

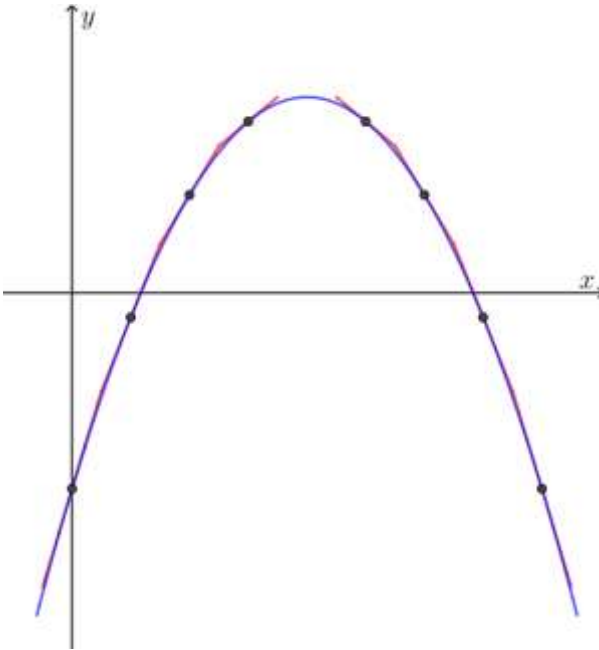
Dari Tabel 9.1 Dapat disimpulkan bahwa fungsi menaik pada interval $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$, dan menurun pada $(-\frac{1}{2}, 1)$. Hal ini ditunjukkan pada Gambar 9.6.

9.4 Kecekungan Fungsi

Pada sub bab sebelumnya telah digunakan kemiringan garis singgung untuk menentukan interval fungsi menaik dan fungsi menurun. Apabila garis singgung grafik berbelok dengan konstan berlawanan arah dengan perputaran jarum jam, maka grafik cekung ke bawah. Apabila garis singgung grafik berbelok dengan konstan searah dengan perputaran jarum jam, maka grafik cekung ke atas. Seperti ditunjukkan pada Gambar 9.7 dan Gambar 9.8 berikut ini.



Gambar 9.7. Turunan pertama f menaik



Gambar 9.8. Turunan pertama f menurun

Teorema B

Misalkan fungsi f dapat diturunkan dua kali pada interval I yang merupakan selang terbuka.

- (i). Fungsi f cekung ke bawah di selang I apabila turunan kedua f bernilai negatif untuk semua titik pada interval I .
- (ii). Fungsi f cekung ke atas di selang I apabila turunan kedua f bernilai positif untuk semua titik pada interval I .

Contoh 4

Carilah interval dimana grafik fungsi $f(x) = 4x^4 - 2x^3 + 4$ cekung ke bawah dan cekung ke atas.

Jawab

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan turunan pertama dari f di x .

$$\begin{aligned}f'(x) &= D_x(4x^4 - 2x^3 + 4) \\&= 16x^3 - 6x^2\end{aligned}$$

Selanjutnya ditentukan turunan kedua dari f di x .

$$\begin{aligned}f''(x) &= D_x(16x^3 - 6x^2) \\&= 48x^2 - 12x\end{aligned}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan nilai x yang memenuhi $f''(x) = 0$.

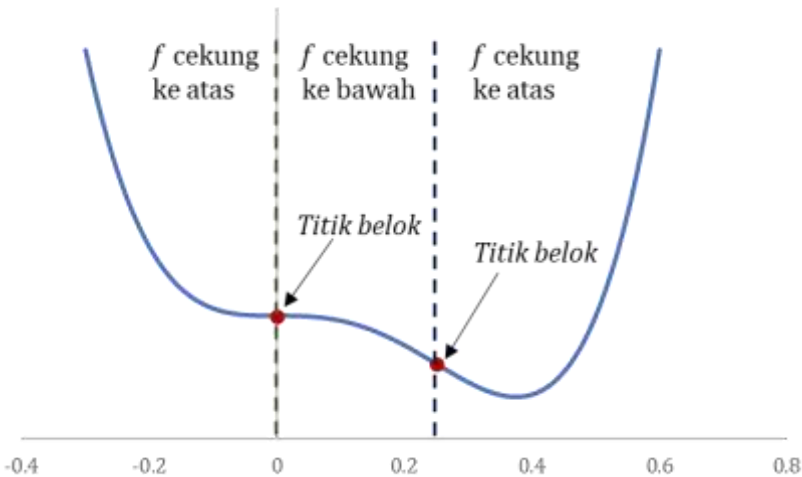
$$\begin{aligned}48x^2 - 12x &= 0 \\12x(4x - 1) &= 0\end{aligned}$$

Solusi dari persamaan di atas adalah $x = 0$ dan $x = \frac{1}{4}$, yang merupakan titik-titik belok dari grafik. Kedua titik tersebut juga adalah titik-titik pemisah yang membagi interval terbuka tersebut menjadi tiga bagian yakni: $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{4})$, dan $(\frac{1}{4}, \infty)$. Selanjutnya ditentukan nilai x yang memenuhi $f''(x) < 0$ dan $f''(x) > 0$ dengan menggunakan tabel penolong berikut ini.

Tabel 9.2. Tabel penolong contoh 4

Interval	x (titik uji)	$f''(x)$	Keterangan
$(-\infty, 0)$	-1	0	f cekung ke atas
$(0, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{12}{25}$	f cekung ke bawah
$(\frac{1}{4}, \infty)$	1	25	f cekung ke atas

Dari Tabel 9.2 terlihat bahwa f cekung ke atas di $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$, dan f cekung ke bawah di $(0, \frac{1}{4})$. Hal ini diilustrasikan pada Gambar 9.9.



Gambar 9.9. Visualisasi fungsi $f(x) = 4x^4 - 2x^3 + 4$

9.5 Penggambaran Grafik Fungsi Menggunakan Kalkulus

Salah satu penerapan kalkulus adalah dalam menggambarkan grafik fungsi. Pada dasarnya, penggambaran grafik fungsi dapat dilakukan dengan menggunakan komputer. Namun, diperlukan ketelitian dalam menentukan tangkapan layar segi empat yang ditampilkan oleh komputer. Informasi yang diperlukan untuk menentukan hal tersebut dapat diperoleh dengan benar menggunakan kalkulus, misalnya titik minimum, titik maksimum, serta titik belok (Stewart, 2001).

Berikut ini adalah langkah-langkah yang dapat dijadikan sebagai pedoman ketika menggambarkan grafik dengan menggunakan kalkulus, yakni (Stewart, 2001; Varberg et al., 2010):

1. Menentukan domain fungsi.
2. Mencari perpotongan fungsi, baik terhadap sumbu-x maupun sumbu-y.

3. Menentukan kesimetrian fungsi dengan cari menentukan apakah fungsi tersebut merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil maupun fungsi periodik.
4. Menentuk asimtot fungsi, yakni asimtot datar, asimtot tegak, maupun asimtot miring.
5. Menentukan interval fungsi menurun dan fungsi menaik.
6. Menentukan titik maksimum dan titik minimum fungsi.
7. Menentukan titik belok dan interval kecekungan fungsi.
8. Menggambarkan sketsa grafik fungsi.

Contoh 5

Gunakan langkah-langkah di atas untuk membuat grafik fungsi dari $f(x) = 3x^3 - 27x$.

Jawab

1. Domain: $(-\infty, \infty)$.
2. Perpotongan fungsi:
 - a. Perpotongan fungsi terhadap sumbu-x adalah saat $f(x) = 0$ atau saat $3x^3 - 27x = 0$, sehingga diperoleh solusi $x = 0$. Dengan demikian, titik perpotongannya adalah $(0,0)$.
 - b. Perpotongan fungsi terhadap sumbu-y adalah saat $x = 0$, sehingga $f(0) = 0$. Dengan demikian, titik perpotongannya adalah $(0,0)$.
3. Fungsi ini merupakan fungsi ganjil karena $f(-x) = -f(x)$ untuk semua selang pada domain. Dengan demikian, kurva simetri terhadap titik asal sumbu-y.
4. Fungsi ini tidak memiliki asimtot.
5. Interval fungsi menaik dan menurun.

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan turunan pertama dari f di x .

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(3x^3 - 27x) \\ &= 9x^2 - 27 \end{aligned}$$

Ketika $f'(x) = 0$, diperoleh solusi $x = -\sqrt{3}$ dan $x = \sqrt{3}$. Dengan demikian, f memiliki titik stasioner di $x = -\sqrt{3}$ dan $x = \sqrt{3}$. Kedua titik ini membagi interval daerah asal menjadi tiga bagian, yakni $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, dan $(\sqrt{3}, \infty)$.

Selanjutnya ditentukan nilai x yang memenuhi $f'(x) < 0$ dan yang memenuhi $f'(x) > 0$. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan tabel berikut ini.

Tabel 9.3. Tabel penolong contoh 5 untuk menentukan interval fungsi menaik dan fungsi menurun

Interval	x (titik uji)	$f'(x)$	Keterangan
$(-\infty, -\sqrt{3})$	-2	9	f menaik
$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	1	-18	f menurun
$(\sqrt{3}, \infty)$	2	9	f menaik

Dari Tabel 9.3 Dapat disimpulkan bahwa fungsi menaik pada interval $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, dan menurun pada $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

6. Nilai maksimum relatif dan nilai minimum relatif:

a. Nilai maksimum relatif

Fungsi $f'(x) > 0$ di interval $(-\infty, -\sqrt{3})$ dan $f'(x) < 0$ di interval $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, dengan demikian nilai maksimum relatifnya adalah $f(-\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$.

b. Nilai minimum relatif

Fungsi $f'(x) < 0$ di interval $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ dan $f'(x) > 0$ di interval $(\sqrt{3}, \infty)$, dengan demikian nilai minimum relatifnya adalah $f(\sqrt{3}) = -18\sqrt{3}$.

7. Titik belok dan interval kecekungan fungsi

Turunan kedua dari f di x adalah:

$$\begin{aligned} f''(x) &= D_x(9x^2 - 27) \\ &= 18x \end{aligned}$$

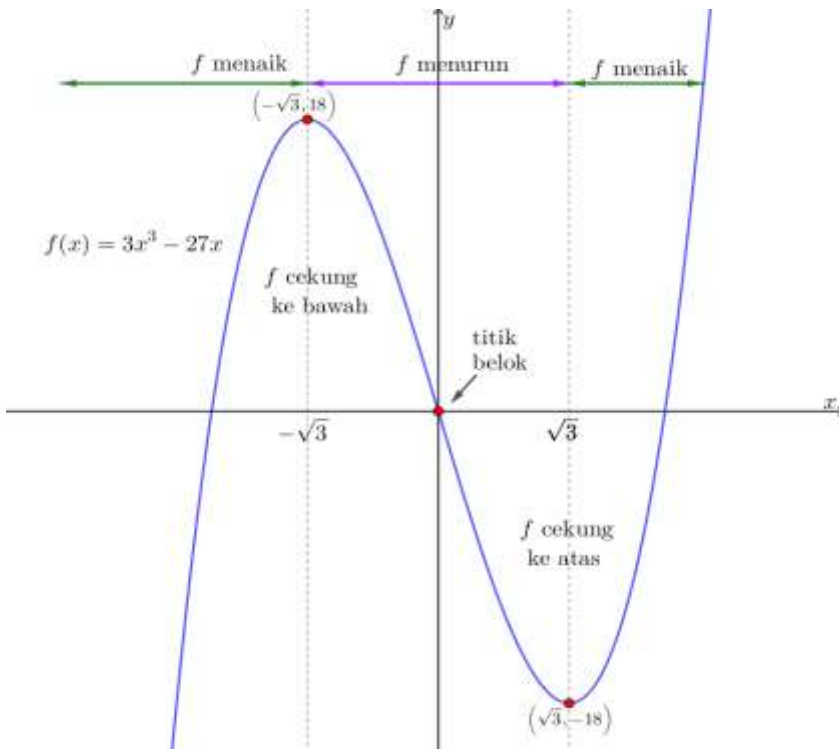
Nilai x yang memenuhi $f''(x) = 0$ atau $18x = 0$ adalah $x = 0$, yang merupakan titik belok dari grafik saat merubah kecekungan. Titik ini juga merupakan titik pemisah yang membagi interval daerah asal tersebut menjadi dua bagian yakni: $(-\infty, 0)$, dan $(0, \infty)$. Selanjutnya ditentukan nilai x yang memenuhi $f''(x) < 0$ dan $f''(x) > 0$ dengan menggunakan tabel penolong berikut ini.

Tabel 9.4. Tabel penolong contoh 5 untuk menentukan interval kecekungan fungsi

Interval	x (titik uji)	$f''(x)$	Keterangan
$(-\infty, 0)$	-1	-18	f cekung ke bawah
$(0, \infty)$	1	18	f cekung ke atas

Dari tabel di atas terlihat bahwa f cekung ke bawah di $(-\infty, 0)$, dan f cekung ke atas di $(0, \infty)$.

8. Sketsa kurva ditunjukkan pada gambar berikut ini.



Gambar 9.10. Sketsa kurva $f(x) = 3x^3 - 27x$

9.6 Permasalahan Optimasi Fungsi

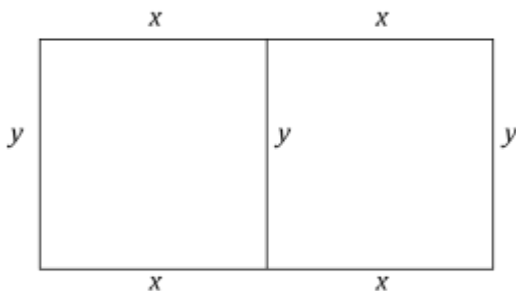
Pada sub bab ini dibahas terkait penggunaan konsep nilai maksimum dan minimum dalam menyelesaikan beberapa masalah. Terdapat beberapa langkah yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan masalah optimasi. Akan tetapi, pembaca dapat menggunakan cara yang lain, maupun menghilangkan beberapa langkah berikut ini (Stewart, 2001; Varberg et al., 2010).

1. Membaca permasalahan yang ingin dioptimalkan hingga dapat dipahami dengan baik, dan selanjutnya mengidentifikasi besaran yang diketahui, dan besaran yang ditanyakan.

2. Membuat sketsa gambaran kondisi permasalahan, serta menuliskan besaran yang dinyatakan dalam soal. Besaran tersebut dinyatakan dalam bentuk variabel. Huruf depan besaran dapat digunakan sebagai simbol variabel, misalnya „ h “ untuk menyatakan besaran tinggi, „ A “ untuk menyatakan besaran luas, „ t “ untuk menyatakan besaran waktu.
3. Membuat fungsi tujuan bagi besaran yang ingin diminimumkan dan dimaksimumkan. Fungsi tujuan ini dinyatakan dalam bentuk rumus.
4. Menyatakan fungsi tujuan sebagai fungsi dari sebuah variabel saja, dengan cara menghilangkan variabel-variabel lainnya menggunakan kondisi-kondisi dalam permasalahan optimasi.
5. Mencari titik maksimum dan titik minimum. Nilai tersebut selanjutnya disubstitusikan pada fungsi tujuan sehingga diperoleh minimum maupun maksimum.

Contoh 6

Seorang petani memiliki dua buah kandang dengan bentuk dan ukuran yang sama, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.11. Adapun bentuk kandang tersebut adalah segi empat, dengan luas masing-masing sebesar $400m^2$. Kedua kandang ini dibuat dengan menggunakan sejumlah kawat. Berapakah panjang dan lebar dari masing-masing kandang untuk meminimumkan jumlah kawat yang dibutuhkan?



Gambar 9.11. Bentuk kandang untuk Contoh 6

Jawab

Bentuk kandang tersebut adalah segi empat, dengan demikian luas setiap kandang dapat dituliskan sebagai:

$$A = 400$$

$$yx = 400$$

Persamaan di atas dapat dituliskan ulang menjadi:

$$y = \frac{400}{x}$$

Dengan demikian, nilai x yang memenuhi persamaan di atas adalah $x > 0$ atau $(0, \infty)$. Berdasarkan Gambar 9.11, maka keliling kedua kandang tersebut adalah:

$$K = 4x + 3y$$

Substitusikan nilai $y = \frac{400}{x}$ ke persamaan di atas, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} K &= 4x + 3\left(\frac{400}{x}\right) \\ &= 4x + \frac{1200}{x} \end{aligned}$$

Turunan pertama dari fungsi di atas adalah:

$$\frac{dK}{dx} = 4 - \frac{1200}{x^2}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari nilai x yang memenuhi sehingga $\frac{dK}{dx} = 0$.

$$4 - \frac{1200}{x^2} = 0$$

$$4x^2 - 1200 = 0$$

$$4(x + 10\sqrt{3})(x - 10\sqrt{3}) = 0$$

Solusi dari persamaan di atas adalah $x = 10\sqrt{3}$ dan $x = -10\sqrt{3}$. Namun, karena x yang memenuhi persamaan haruslah $x > 0$, maka solusi yang dipilih adalah $x = 10\sqrt{3}$. Titik pemisah ini membagi interval menjadi 2 bagian, yakni $(0, 10\sqrt{3})$ dan $(10\sqrt{3}, \infty)$. Tabel berikut ini digunakan untuk menentukan interval fungsi menaik dan menurun.

Tabel 9.5. Tabel penolong contoh 6 untuk menentukan interval fungsi menaik dan fungsi menurun

Interval	x (titik uji)	$\frac{dK}{dx}$	Keterangan
$(0, 10\sqrt{3})$	5	-44	K menurun
$(10\sqrt{3}, \infty)$	20	1	K menaik

Berdasarkan tabel di atas, dapat dikatakan bahwa $K = 4x + 3y$ memiliki titik minimum di $x = 10\sqrt{3}$. Nilai ini selanjutnya disubstitusikan kembali ke $y = \frac{400}{x}$, sehingga diperoleh:

$$y = \frac{400}{10\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

Dengan demikian, lebar kandang adalah $x = 10\sqrt{3} \approx 17.32 \text{ m}$, dan panjang kandang adalah $y = \frac{40\sqrt{3}}{3} \approx 23.09 \text{ m}$.

9.7 Aplikasi Diferensiasi di Ekonomi

Dalam memproduksi x satuan dari sebuah barang, diperlukan sejumlah biaya. Fungsi biaya untuk memproduksi x barang tersebut dinyatakan dalam bentuk $C(x)$. Sedangkan fungsi biaya rata-rata merupakan biaya dalam satuan pada saat memproduksi x satuan. Fungsi biaya rata-rata tersebut dinyatakan sebagai (Stewart, 2001; Varberg et al., 2010):

$$c(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Biaya marjinal dinyatakan sebagai turunan fungsi biaya C terhadap x .

$$\text{Biaya Marjinal} = \frac{dC}{dx}$$

Contoh 7

Hitunglah biaya marjinal minimum bagi sebuah pabrik yang memproduksi serta menjual $150x$ unit barang di setiap minggu. Adapun biaya total yang diperlukan adalah $C(x) = 1000 + 32x - 6x^2 + x^3$.

Jawab

Langkah pertama yang perlu dilakukan adalah mencari nilai x yang memenuhi agar mencapai biaya marjinal minimum. Hal ini dilakukan dengan menghitung biaya marjinal dengan cara menentukan turunan pertama C terhadap x .

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dx} &= D_x(1000 + 32x - 6x^2 + x^3) \\ C'(x) &= 32 - 12x + 3x^2\end{aligned}$$

Selanjutnya dihitung turunan pertama dari biaya marjinal terhadap x .

$$\begin{aligned}\frac{dC'}{dx} &= D_x(32 - 12x + 3x^2) \\ &= -12 + 6x\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai x yang memenuhi agar $\frac{dC'}{dx} = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dC'}{dx} &= 0 \\ -12 + 6x &= 0 \\ x &= 2\end{aligned}$$

Adapun daerah asal untuk fungsi C' adalah $(0, \infty)$. Dengan demikian $x = 2$ sebagai titik stasioner sekaligus titik pemisah membagi interval tersebut menjadi dua bagian, yakni $(0, 2)$ dan $(2, \infty)$. Tabel berikut ini digunakan untuk menentukan interval fungsi menaik dan fungsi menurun.

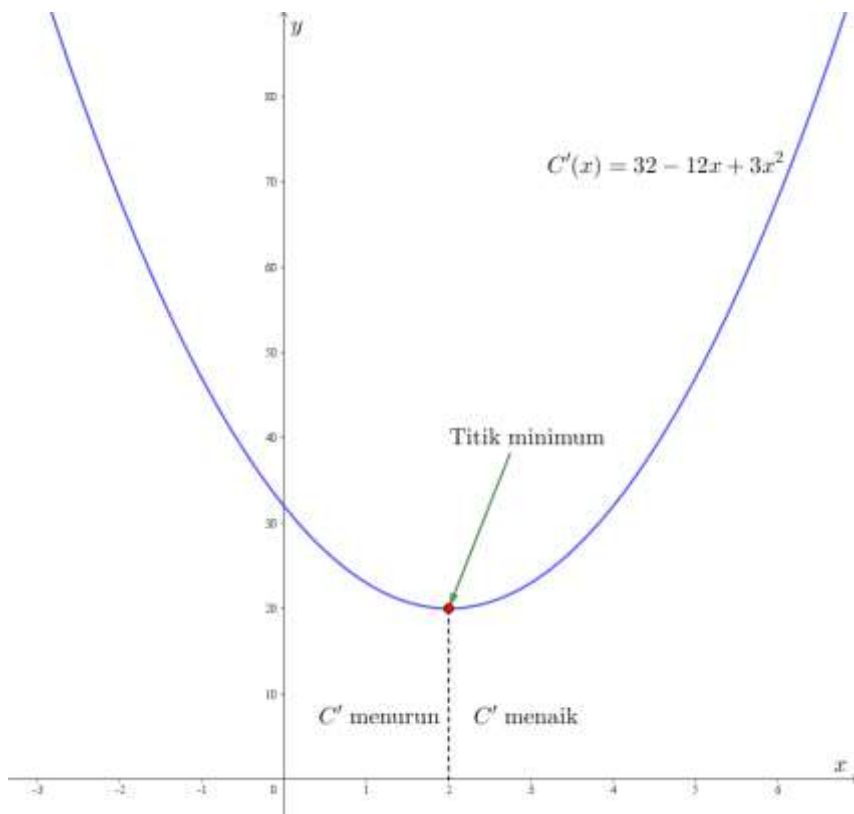
Tabel 9.6. Tabel penolong contoh 7 untuk menentukan fungsi menaik dan fungsi menurun

Interval	x (titik uji)	$\frac{dC'}{dx}$	Keterangan
$(0, 2)$	1	-6	C' menurun
$(2, \infty)$	3	6	C' menaik

Berdasarkan tabel di atas terlihat bahwa biaya marjinal (C') bernilai minimum di $x = 2$. Dengan demikian, jumlah unit yang dijual setiap minggu adalah $150x = (150)(2) = 300 \text{ unit}$. Biaya marjinal minimumnya adalah:

$$\begin{aligned}C'(x) &= 32 - 12x + 3x^2 \\ C'(2) &= 32 - (12)(2) + (3)(2^2) \\ &= 20\end{aligned}$$

Hal ini diilustrasikan pada Gambar 9.12.



Gambar 9.12. Biaya marjinal minimum

DAFTAR PUSTAKA

- Giancoli, D. C. 2014. *Fisika: Prinsip dan Aplikasi, Jilid 1 (Terjemahan Irzam Hardiansyah, S.T)* (7th ed., Vol. 1). Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Stewart, J. 2001. *Kalkulus (Terjemahan Drs. I Nyoman Susila, M.Sc. Dan Hendra Gunawan, Ph.D.)* (4th ed., Vol. 1). Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. 2010. *Kalkulus (Terjemahan I Nyoman Susila, Ph.D.)* (9th ed., Vol. 1). Jakarta: Penerbit Erlangga.

BAB10

APLIKASI DIFERENSIAL PARSIAL

Oleh Haris Suhendar

Salah satu aplikasi dari penyelesaian persamaan diferensial parsial adalah pada pencarian titik minimum dan titik maksimum dari suatu fungsi. Sering kali kita mencari titik maksimum atau minimum dari suatu fungsi dengan lebih dari satu variabel, misalkan fungsi $z = f(x, y)$ yang merupakan suatu permukaan. Jika terdapat titik maksimum pada fungsi tersebut, maka kurva untuk x konstan dan y konstan yang melalui titik maksimum akan juga memiliki titik maksimum pada titik yang sama. Oleh karena itu, $\partial z / \partial x$ dan $\partial z / \partial y$ bernilai nol pada titik maksimum. Dengan mencari titik maksimum dan minimum dari suatu fungsi maka metode ini dapat digunakan untuk optimasi suatu fungsi. Kita ingat kembali bahwa $dy/dx = 0$ adalah kondisi yang dibutuhkan untuk mengetahui titik maksimum dari fungsi $y = f(x)$, akan tetapi kondisi ini tidak cukup untuk mengatakan titiknya bernilai maksimum, namun memiliki kemungkinan bernilai minimum atau juga merupakan suatu titik belok dengan garis tangensial yang horizontal. Hal ini juga berlaku serupa untuk fungsi lebih dari satu variabel $z = f(x, y)$. Titik dimana $\partial z / \partial x = 0$ dan $\partial z / \partial y = 0$ dapat menjadi titik maksimum, titik minimum, atau tidak keduanya. Dalam pencarian titik maksimal dari $y = f(x)$, seringkali dapat dilakukan pengecekan dari geometry atau konsep fisis bahwa $\partial y / \partial x = 0$ merupakan titik maksimum. Jika dibutuhkan kita dapat mencari turunan keduanya $\partial^2 y / \partial^2 x$ yang mana jika bernilai negatif berarti merupakan titik maksimum, sedangkan jika bernilai positif berarti merupakan titik minimum. Hal ini juga berlaku (sedikit lebih kompleks) pada fungsi dengan 2 variabel, akan tetapi

ini digunakan ketika dibutuhkan karena biasanya kita dapat memperkirakan masalah yang dihitung apakah merupakan titik maksimum, minimum, atau bukan keduanya. Tinjaulah contoh masalah pencarian titik maksimum dan minimum dari masalah berikut:

Contoh

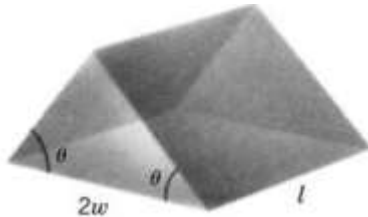
Suatu tenda segitiga (Gambar.1) dengan volume V , dengan penutup tanpa alas akan dibuat dengan jumlah material yang sedikit mungkin. Cari nilai rasio untuk masing – masing w , l , dan θ .

Penyelesaian :

Kita dapat menghitung volume dan luasan untuk tenda

$$V = \frac{1}{2} \cdot 2w \cdot l \cdot w \tan \theta = w^2 l \tan \theta$$

$$A = 2 w^2 \tan \theta + \frac{2lw}{\cos \theta}$$



Karena V diketahui, hanya dua dari tiga variabel yang saling bebas sehingga kita dapat mengeliminasi salah satunya dari persamaan A sebelum kita menghitung titik minimum dari A . Dengan memodifikasi persamaan V untuk l dan mensubstitusikannya ke dalam persamaan A maka akan diperoleh

$$A = 2w^2 \tan \theta + \frac{2w}{\cos \theta} \frac{V}{w^2 \tan \theta} = 2w^2 \tan \theta + \frac{2V}{w} \csc \theta$$

Sekarang kita punya persamaan A sebagai fungsi dari dua buah variabel independent w dan θ . Untuk menghitung nilai minimum A maka dapat dihitung dengan differensial parsial $\partial A / \partial w$ dan $\partial A / \partial \theta$ dan memberikan nilai keduanya sama dengan nol.

$$\frac{\partial A}{\partial w} = 4w \tan \theta - \frac{2V \csc \theta}{w^2} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 2w^2 \sec^2 \theta - \frac{2V}{w} \csc \theta \cot \theta = 0$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan diatas untuk w^3 dan membuat kedua hasilnya sama maka diperoleh persamaan berikut

$$w^3 = \frac{V \csc \theta}{2 \tan \theta} = \frac{V \csc \theta \cot \theta}{\sec^2 \theta} \quad \text{atau} \quad \frac{\cos \theta}{2 \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

Dari persamaan ini terlihat bahwa hasilnya tidak mungkin $\sin \theta = 0$ atau $\cos \theta = 0$ karena ini akan membuat Volume bernilai 0. Oleh karena itu kita dapat mengasumsikan bahwa $\sin \theta \neq 0$ dan $\cos \theta \neq 0$ sehingga kedua faktor ini dapat saling menghilangkan pada persamaan dan diperoleh $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$ atau $\theta = 45^\circ$. Maka $\tan \theta = 1$, sehingga $V = w^2 l$, dan dari persamaan $\partial A / \partial w$ kita peroleh bahwa $2w = l\sqrt{2}$. Kemudian ketinggian dari tenda (pada puncak) adalah $w \tan \theta = w = l/\sqrt{2}$.

10.1 Masalah Maximum dan Minimum dengan Constrain

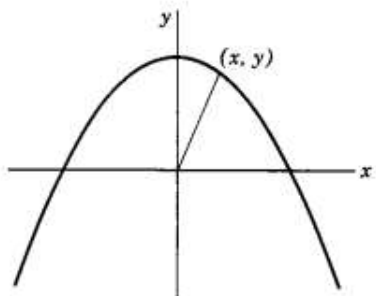
Beberapa contoh berikut akan memberikan gambaran terkait masalah yang sedang dipelajari.

Contoh :

Suatu kawat dibengkokkan membentuk kurva $y = 1 - x^2$ (Gambar.2). Suatu tali elastis ditarik dari titik pusat ke suatu titik (x,y) pada kurva. Carilah posisi (x,y) untuk mendapatkan panjang tali yang paling pendek.

Penyelesaian :

Kita akan meminimalkan jarak $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ dari titik pusat ke titik (x,y) pada kurva, hal ini



ekuivalen dengan meminimalisir fungsi $f = d^2 = x^2 + y^2$. Akan tetapi titik x dan y tidak saling bebas, yang mana mereka saling berhubungan dengan persamaan pada kurva. Hubungan tambahan antar variabel ini disebut sebagai constrain. Permasalahan dengan constrain seringkali muncul dalam beberapa aplikasi.

Terdapat beberapa cara untuk menyelesaikan permasalahan tersebut yang akan kita diskusikan pada metode berikut yaitu (a) eliminasi, (b) diferensial implisit, dan (c) Lagrange multiplier.

(a) Metode Eliminasi

Metode yang sangat jelas yaitu dengan mengeliminasi y . Kemudian kita akan meminimalisir fungsi

$$f = x^2 + (1 - x^2)^2 = x^2 + 1 - 2x^2 + x^4 = x^4 - x^2 + 1$$

Ini adalah persamaan kalkulus sederhana :

$$\frac{df}{dx} = 4x^3 - 2x = 0, \quad x = 0, \text{ atau } x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Berdasarkan solusi tersebut, kita masih belum bisa mengetahui yang mana solusi nilai maksimum dan yang mana solusi nilai minimum, oleh karena itu kita dapat mencari turunan kedua nya :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 - 2 = -2 \text{ pada } x = 0 \quad (\text{relative maximum})$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 - 2 = 4 \text{ pada } x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (\text{minimum})$$

Nilai minimum yang diperoleh kemudian diperoleh $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$y = \frac{1}{2}$$

(b) Metode Diferensial Implisit

Apabila tidak memungkinkan untuk menyelesaikan y dengan eliminasi dan substitusi maka dapat dilakukan metode lain. Melalui persamaan $f = x^2 + y^2$ diperoleh

$$df = 2x dx + 2y dy \text{ atau } \frac{df}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$$

Dari persamaan $y = 1 - x^2$ yang berhubungan dengan x dan y diperoleh nilai dy dalam bentuk dx jika persamaan tersebut belum menyelesaikan nilai y .

$$dy = -2x dx$$

Dengan mengeleminasi dy dari df maka diperoleh nilai

$$df = (2x - 4xy)dx \text{ atau } \frac{df}{dx} = 2x - 4xy$$

Untuk menurunkan nilai f maka dimisalkan nilai $\frac{df}{dx} = 0$ sehingga diperoleh

$$2x - 4xy = 0$$

Persamaan diatas akan terselesaikan bersamaan dengan persamaan kurva $y = 1 - x^2$, sehingga diperoleh

$$2x - 4x(1 - x^2) = 0 \text{ dimana } x = 0 \text{ atau } x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Untuk menguji nilai maksimum atau minimum dibutuhkan $\frac{d^2y}{dx^2}$ sehingga diperoleh

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2y \frac{d^2y}{dx^2}$$

Pada nilai $x = 0$ diperoleh solusi $y=1$, $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$ sehingga

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 2 = -2 \text{ merupakan nilai maksimum}$$

Pada nilai $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ diperoleh solusi $y = \frac{1}{2}$, $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2, \text{ sehingga}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 + 4 - 2 = 4$ merupakan nilai minimum. Langkah-langkah diatas diambil apabila tidak ditemukan solusi y melalui persamaan kurva, sehingga beberapa permasalahan

harus diselesaikan dengan variable independen melalui metode lain. Berikut contoh soal dengan variable independen
Soal : Temukan jarak terdekat dari pusat suatu lempeng dengan persamaan $x - 2y - 2z = 3$!

Berasarkan soal diinginkan nilai minimum jarak $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dari titik pusat (x, y, z) pada sebuah lempeng. Persamaan tersebut dapat dijabarkan melalui $f = d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ jika $x - 2y - 2z = 3$. Kita dapat mengeleminasi salah satu variable terlebih dahulu menggunakan persamaa fungsi pada lempeng, misalkan eleminasi x maka

$$f = (3 + 2y + 2z)^2 + y^2 + z^2$$

Diperoleh f merupakan fungsi dua independen variable yakni y dan z , maka untuk meminimumkan fungsi f kita gunakan differensial $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, dan $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(3 + 2y + 2z)(2 + 2y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(3 + 2y + 2z)(2 + 2z) = 0$$

Solusi untuk persamaan y dan z maka diperoleh $y = z = -\frac{2}{3}$
shingga dari persamaan lempeng diperoleh nilai $x = \frac{1}{3}$

Maka hasil akhir fungsi minimum yang diperoleh

$$f_{min} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1, \text{ atau } d_{min} = 1$$

Jelas diperoleh dari sebuah geometri bahwa nilai merupakan minimum jarak dari suatu pusat lempeng.

(c) Metode Lagrange Multiplier

Penyelesaian masalah menggunakan metode eliminasi maupun metode differential implisit masih menimbulkan beberapa persamaan aljabar yang tidak dapat terselesaikan. Persamaan aljabar tersebut dapat diselesaikan melalui suatu proses yang kita kenal dengan istilah metode lagrange

multiplier atau undetermined multiplier. Berkorelasi dengan metode-metode sebelumnya, secara umum kita ingin menemukan solusi maksimum dan minimum dari suatu fungsi dengan satu variable. Untuk menemukan titik maksimum dan minimum dari fungsi f dimana $\frac{df}{dx} = 0$ atau $df = 0$ seperti pada metode sebelumnya. Jika nilai $\phi = \text{konstan}$ dengan $d\phi = 0$ maka

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

Dalam metode differential implisit kita menyelesaikan persamaan $d\phi$ untuk nilai dy dalam bentuk dx dan disubstitusikan kedalam df , namun hal tersebut masih menyisakan persamaan aljabar yang belum ringkas. Maka langkah yang dapat dilakukan dengan mengalikan persamaan $d\phi$ dengan λ kemudian mensubstitusikan kedalam persamaan df maka diperoleh hasil

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dy = 0$$

Jika kita pilih nilai λ adalah $-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$ maka

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Dengan menggunakan nilai permisalan λ untuk nilai yang lebih rumit akan mengurangi dan memperingkas persamaan aljabar yang mungkin dapat muncul. Sehingga dapat kita peroleh

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

Jika dinyatakan $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}$, dan $\phi(x, y)$ adalah konstan maka kita dapat menyelesaikan variable x, y, λ . Nilai dari λ sebenarnya tidak dibutuhkan, tetapi digunakan untuk mempersingkat langkah dalam mencari nilai x dan y yang kita

butuhkan. Apabila terdapat persamaan yang ditulis dalam bentuk fungsi

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y)$$

Dimana terdapat dua variable independen yakni x dan y yang dibutuhkan untuk menentukan nilai maksimum dan minimum. Persamaan diatas digunakan untuk memperingkas persamaan-persamaan sebelumnya dimana variable x dan y yang berkorelasi dengan $d\phi$

Berdasarkan penjabaran tersebut maka kita dapat menyatakan bahwa metode lagrangian multiplier memenuhi syarat sebagai berikut :

Untuk menentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x, y)$ ketika x dan y berkorelasi dengan persamaan $\phi(x, y) = \text{konstan}$ maka menggunakan fungsi $F(x, y)$ dan dua partial derivatives dari F yang bernilai nol. Kemudian langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan tersebut dengan persamaan $\phi(x, y) = \text{konstan}$ untuk tiga buah variable yang belum diketahui yakni x, y , dan λ .

Dari ilustrasi singkat mengenai metode langrange multiplier maka kita dapat menyelesaikan contoh soal 1 berikut :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 \\ \phi(x, y) &= y + x^2 = 1 \end{aligned}$$

Atau dapat kita persingkat soal diatas menjadi

$$F(x, y) = f + \lambda \phi = x^2 + y^2 + \lambda(y + x^2)$$

Dimisalkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \lambda \cdot 2x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Kita selesaikan nilai ϕ dengan persamaan $y + x^2 = 1$ untuk $x = 0$ dan $\lambda = -1$, maka dari permisalan yang telah dibuat apabila nilai $x = 0$ diperoleh nilai $y = 1$ dan $\lambda = -2$ sedangkan apabila nilai $\lambda = -1$ diperoleh nilai $y = \frac{1}{2}$ dan $x^2 = \frac{1}{2}$. Maka dari nilai

tersebut kita menemukan nilai maksimum dan minimum bahwasannya sama dengan sebelumnya, hal ini menunjukkan jika langrange multiplier mempersingkat penyelesaian soal terhadap soal yang lebih kompleks walaupun persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan metode yang lain.

Sebagai contoh lain untuk memperjelas penggunaan metode lagrange multiplier sebagai berikut

Soal 2: tentukan volume terbesar dari sebuah balok dengan sisi sejajar sumbu dinyatakan dalam sebuah ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Jika (x, y, z) merupakan sudut pertama dimana balok menyentuk ellipsoid, kemudian (x, y, x) menunjukkan persamaan ellipsoid dan nilai volume balok adalah $8xyz$, maka persoalan nilai maksimum untuk $f(x, y, z) = 8xyz$ dimana x, y, z bagian dari persamaan ellipsoid adalah

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dengan menggunakan metode lagrange multiplier dapat dituliskan

$$F(x, y, z) = f + \lambda \Phi = 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)$$

Apabila kita jabarkan dalam tiga buah parsial derivatie maka F sama dengan nol diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8yz + \lambda \cdot \frac{2x}{a^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 8xz + \lambda \cdot \frac{2y}{b^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 8xy + \lambda \cdot \frac{2z}{c^2} = 0$$

Dapat diperoleh penyelesaian dari tiga persamaan diatas dan persamaan $\Phi = 1$ untu nila x, y, z dan λ . Mengalikan persamaan pertama dengan x , dan persamaan kedua dengan y

kemudian persamaan ketiga dengan x lalu disubstitusikan maka diperoleh

$$3 \cdot 8xyz + 2\lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = 0$$

Menggunakan persamaan ellipsoid dapat kita sederhanakan menjadi

$$24xyz + 2\lambda \text{ atau } \lambda = -12xyz$$

Suntitusikan nilai λ kedalam persamaan $\frac{\partial F}{\partial x}$ maka diperoleh

$$8yz - 12xyz \cdot \frac{2x^2}{a^2} = 0$$

Berdasarkan bentuk geometrinya tentu terlihat jelas bahwa sudut dari balok tidak berada pada $y = 0$ ataupun $z = 0$ sehingga kita nyatakan yz untuk menyelesaikan nilai x

$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$

Persamaan kedua dan ketiga juga menggunakan cara yang sama maka akan diperoleh hasil

$$y^2 = \frac{1}{3}b^2$$

$$z^2 = \frac{1}{3}c^2$$

Sehingga nilai maksimum dari volume yang diperoleh adalah

$$8xyz = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$$

Hal ini tentu sangat kontras apabila dibandingkan dengan soal yang memiliki simple aljabar yang dapat diselesaikan dengan metode eliminasi. Sekalipun soal persamaan ellipsoid diselesaikan dengan metode differential implisit tetap akan menghasilkan persamaan aljabar yang sisa dan tidak dapat dijabarkan jika tidak menggunakan metode lagrange multiplier.

Metode lagrange multiplier menunjukan bahwa permasalahan dengan beberapa variable indipenden dapat

terselesaikan. Jika kita ingin menentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x, y, z)$ atau $\phi(x, y, z) = \text{konstan}$ maka kita membutuhkan baik persamaan f maupun persamaan ϕ . Apabila $\phi = \text{konstan}$ maka kita dapat menyatakan $d\phi = 0$ dan $df = 0$ sehingga nilai maksimum dan minimum dari f dapat dituliskan sebagai berikut

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0$$

Dapat kita tentukan nilai dz dari persamaan $d\phi$ dan kita substitusikan kedalam persamaan df sehingga merujuk pada metode differential implisit dengan menyisakan nilai aljabar yang rumit. Namun apabila kita kolaborasikan dengan persamaan lagrange multiplier diatas dengan $F = f + \lambda \phi$ diperoleh hasil

$$dF = df + \lambda d\phi - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dz$$

Dikarenakan x dan y merupakan variable independen maka z dapat diperoleh dari persamaan ϕ , serupa dengan dx dan dy apabila nilainya telah dipilih maka nilai dz juga dapat di tentukan. Sehingga untuk menentukan nilai λ

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Kemudian untuk $dy = 0$ diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

Dan untuk $dx = 0$ maka

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Sehingga dapat kita nyatakan pula aturan yang sama untuk soal lagrange multiplier yang kedua dengan pernyataan

Untuk menentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x, y, z)$ jika $\phi(x, y, z) = \text{konstan}$ maka kita gunakan fungsi $F = f + \lambda\phi$ dengan permisalan tiga buah variable derivative dari F sama dengan nol. Kita dapat menyelesaikan persamaan tersebut untuk $\phi = \text{konstan}$. Beberapa kasus soal yang lain mungkin masih memiliki beberapa variable dan beberapa persamaan tetapi langkah yang digunakan secara umum pada metode ini adalah sama.

Dalam kasus tertentu perlu juga untuk mempertimbangkan makna persamaan geometri yang dinyatakan. Meninjau kembali bahwa variable x, y, z berhubungan erat dengan persamaan $\phi(x, y, z) = \text{konstan}$. Sebagai contoh lain jika kita ingin menentukan solusi persamaan ϕ untuk $z = z(x, y)$ maka dinyatakan bahwa x dan y adalah variable sedangkan z adalah fungsi. Secara geometri $z = z(x, y)$ adalah permukaan dari sebuah gambar. Jika kita mulai dengan titik P pada permukaan tersebut maka kita berada pada titik target disebut lempeng. Berikut merupakan vector $dr = i dx + j dy + k dz$ yang membentuk garis singgung dengan permukaan gambar. Apabila kita melakukan perkalian dot antara vektor dr dengan persamaan metode lagrange multiple diperoleh vektor

$$i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Kita dapat menuliskan persamaan sebagai $d\phi = (\text{grad } \phi) \cdot dr = 0$ dimana jika kita melakukan perkalian dot terhadap dua buah vektor maka akan bernilai nol. Dikarenakan dr bersinggungan dengan permukaan garis lengkung $\phi = \text{konstan}$ maka gradient ϕ tegak lurus terhadap bidang atau tegak lurus terhadap permukaan $\phi = \text{konstan}$ pada titik P . Selain itu dari persamaan metode lagrange multiple menyatakan gradient f juga tegak lurus terhadap bidang. Baik dari nilai gradient ϕ dan gradient f memiliki arah yang sama, sehingga komponennya proporsional sesuai dengan persamaan hasil metode lagrange multiplier. Dapat

kita nyatakan juga bahwa permukaan $\phi = \text{konstan}$ dan $f = \text{konstan}$ saling bersinggungan pada titik P. Hal tersebut bersifat normal terjadi dikarenakan keduanya memiliki arah yang sama.

Metode lagrange multiplier dapat digunakan dalam beberapa kondisi persamaan ϕ , sebagai contoh apabila kita akan mencari nilai maksimum dan minimum dari $f(x, y, z, w)$ atau $\phi_1(x, y, z, w) = \text{konstan}$ dan $\phi_2(x, y, z, w) = \text{konstan}$. Terdapat dua variable dalam persamaan tersebut yakni x dan y sehingga dapat dituliskan

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial w} dw = 0 \\ d\phi_1 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi_1}{\partial w} dw = 0 \\ d\phi_2 &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi_2}{\partial w} dw = 0 \end{aligned}$$

Sehingga kita dapat menggunakan ϕ_1 dan ϕ_2 untuk mengeliminasi dz dan dw dari df tetapi tidak dengan aljabar. Menggunakan metode lagrange multiplier dapat kita jabarkan fungsi $F = f + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$ dan dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} dF &= df + \lambda_1 d\phi_1 + \lambda_2 d\phi_2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) dz \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial w} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial w} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial w} \right) dw \end{aligned}$$

Dapat kita nyatakan λ_1 dan λ_2 dari dua persamaan

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial w} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial w} = 0$$

Kemudian untuk $dy = 0$ diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0$$

Dan untuk $dx = 0$ diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y}$$

Seperti sebelumnya bahwa persamaan diatas diperoleh dengan langkah bahwa untuk menentukan nilai maksimum atau minimum dari suatu subjek f dengan kondisi $\phi_1 = konstan$ dan $\phi_2 = konstan$ maka perlu menyatakan $F = f + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$ dan nilai turunan parsial dari F sama dengan nol. Kemudian langkah selanjutnya menyelesaikan persamaan untuk masing-masing variable.

Soal 4 : tentukan jarak minimum dari pusat suatu simpangan $xy = 6$ dengan $7x + 24z = 0$!

Untuk menyederhanakan subjek $x^2 + y^2 + z^2$ dengan dua kondisi yakni $xy = 6$ dan $7x + 24z = 0$, maka menggunakan metode lagrange multiplier dapat kita peroleh turunan parsial ketiganya yakni

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(7x + 24z) + \lambda_2 xy$$

Dan apabila kita misalkan masing-masing sama dengan nol, maka diperoleh

$$2x + 7\lambda_1 + \lambda_2 y = 0$$

$$2y + \lambda_2 x = 0$$

$$2z + 24\lambda_1 = 0$$

Sehingga persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan $xy = 6$ dan $7x + 24z = 0$ dan diperoleh

$$x = \pm \frac{12}{5}$$

$$y = \pm \frac{5}{2}$$

$$z = \pm \frac{7}{10}$$

Kemudian jarak minimum yang dapat diperoleh adalah

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.54$$

10.2 Masalah Syarat Batas

Apabila kita membuat asumsi terhadap nilai maksimum atau minimum, maka dalam perhitungan kalkulus akan diperoleh penyelesaiannya. Tetapi dalam beberapa kasus akan terdapat ketidak validan nilai terhadap pengasumsian tersebut. Sebagai contoh apabila kita diberi soal dimana x dapat bernilai antara 0 sampai dengan 1, dengan kurva $f(x) = 2 - x^2$ untuk x semua bilangan riil, tetapi jika $x = |\cos\theta|$ untuk semua θ bilangan riil. Maka grafik kurvanya tidak memiliki makna kecuali pada rentang $0 \leq x \leq 1$. Oleh karena itu terdapat kondisi syarat batas dalam menyelesaikan permasalahan differensial.

Contoh soal : sebuah kawat sepanjang 40 cm digunakan untuk membuat sebuah persegi dan sebuah lingkaran dengan total luasan persegi sama dengan luasan lingkaran yang bernilai maksimum. Apabila jari-jari lingkaran r kemudian keliling lingkaran $2\pi r$ sehingga sisa kawat $40 - 2\pi r$ digunakan untuk panjang sisi persegi dan diperoleh nilai untuk masing-masing sisi $10 - \frac{1}{2}\pi r$, jika total luasan adalah

$$A = \pi r^2 + \left(10 - \frac{1}{2}\pi r\right)^2$$

Kemudian

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= 2\pi r + 2\left(10 - \frac{1}{2}\pi r\right)\left(-\frac{1}{2}\pi\right) \\ \frac{dA}{dr} &= 2\pi r \left(1 + \frac{1}{4}\pi\right) - 10\pi \end{aligned}$$

Jika $\frac{dA}{dr} = 0$ maka diperoleh

$$r \left(1 + \frac{1}{4}\pi \right) = 5$$

$$r = 2.8 \quad \text{dan} \quad A = 56$$

Selanjutnya adalah menghitung luasan area dengan menggunakan turunan kedua untuk melihat apakah terdapat nilai maksimu. Setelah dilakukan perhitungan

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi \left(1 + \frac{1}{4}\pi \right) > 0$$

Diperoleh nilai minimum area, sedangkan pada soal dibutuhkan nilai maksimum area. Maka salah satu cara untuk menentukan nilai maksimum area adalah dengan membuat grafik A sebagai fungsi r dan melihat apakah grafik tersebut memiliki nilai area terbesar. A merupakan fungsi kontinyu dari r dengan nilai a adalah turunan takhingga. Jika terdapat nilai maksimum di antara $r = 0$ dan $2\pi r = 40$ maka dengan perhitungan kalkulus akan ditemukan solusinya. Nilai maksimum seharusnya berada diakhir atau di antaranya.

Pada $r = 0$, $A = 100$

$$\text{Pada } 2\pi r = 40, \quad r = \frac{20}{\pi}, \quad A = \frac{400}{\pi} = 127 +$$

Dapat kita simpulkan bahwa A merupakan nilai terbesar pada $r = \frac{20}{\pi}$; $A = \frac{400}{\pi} = 127 +$ dimana hal tersebut menunjukkan nilai maksimum. Maka kemungkinan menggunakan sebuah kawat untuk membuat lingkaran dan sebuah persegi sama besar adalah nol.

DAFTAR PUSTAKA

- Boas, Mary L., Mathematical Methods In The Physical Sciences, Wiley, third edition, 2006.
- Boyce, William E., and Richard C. DiPrima, Introduction to Differential Equations, Wiley, 1970.
- Goldstein, Herbert, Charles P. Poole, and John L. Safko, Classical Mechanics, Addison Wesley, third edition, 2002.
- Jackson, John David, Classical Electrodynamics, Wiley, third edition, 1999.
- Mathews, Jon, and R. L. Walker, Mathematical Methods of Physics, Benjamin, second edition, 1970.
- Strang, Gilbert, Linear Algebra and Its Applications, Harcourt, Brace, Jovanovich, third edition, 1988.
- Weinstock, Robert, Calculus of Variations, with Applications to Physics and Engineering, Dover edition, 1974

BAB 11

ANTI DIFERENSIAL

Oleh Nining Puji Lestari

11.1 Pendahuluan

Dalam matematika terdapat pasangan operasi balikan, misalkan operasi penjumlahan dengan pengurangan, perkalian dengan pembagian, serta perpangkatan dan penarikan akar. Tidak hanya operasi tersebut, materi yang telah dibahas sebelumnya yaitu diferensial memiliki balikan anti diferensial. Beberapa istilah lain dari anti diferensial yaitu anti turunan atau invers turunan, serta integral

Misal diketahui suatu fungsi $y = f(x)$, maka diferensial dari fungsi tersebut yaitu $y' = f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx}$. Notasi anti diferensial dari fungsi $y = f(x)$ yaitu:

$$\int y \, dx = \int f(x) \, dx$$

Contoh 11.1.1:

1. Diketahui $f(x) = x^5$, maka $f'(x) = 5x^4$. Karena anti diferensial (integral) merupakan balikan (invers) dari diferensial (turunan), maka $\int 5x^4 dx = x^5 + K$, dimana K merupakan konstanta.
2. Diketahui $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$, sehingga $\int -\sin x \, dx = \cos x + K$.

Anti diferensial digunakan untuk menentukan fungsi asli jika dalam permasalahan diketahui suatu fungsi turunannya.

Misal, tentukan $f(x)$ jika diketahui $f'(x) = 3x^2$.

Maka:

$f(x) = x^3$ merupakan salah satu jawaban dari permasalahan yang diberikan. Hal ini dikarenakan $\frac{d x^3}{d x} = 3x^2$.

Namun ternyata masih terdapat banyak fungsi lain yang memiliki turunan yaitu $3x^2$. Berikut beberapa fungsi lain yang dimaksud tersebut:

$$f(x) = x^3 + 4, \text{ maka } f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^3 - 7, \text{ maka } f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^3 + 21, \text{ maka } f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^3 + 15, \text{ maka } f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^3 + 9, \text{ maka } f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^3 - 11, \text{ maka } f'(x) = 3x^2$$

(dan beberapa fungsi lainnya).

Jadi beberapa fungsi yang telah disebutkan tersebut merupakan anti diferensial dari $3x^2$, yang membedakan yaitu suku konstanta dari masing-masing fungsi. Oleh karena itu, jawaban yang paling tepat untuk permasalahan yang diberikan yaitu $f(x) = x^3 + K$, dengan K merupakan konstanta sembarang.

Berdasarkan uraian penjelasan yang diberikan, maka dapat disimpulkan bahwa suatu fungsi memiliki anti diferensial lebih dari satu dan himpunan dari semua **anti diferensial** $f'(x)$ disebut **integral tak tentu** dari $f'(x)$ terhadap x .

Untuk selanjutnya, anti diferensial $f'(x)$ kita sebut dengan integral dari $f'(x)$ terhadap x . Kemudian secara simbol ditulis menjadi:

$$\int f'(x)dx = f(x) + K$$

Dengan:

1. $\int$ merupakan notasi integral.
2. $f'(x)$ merupakan integran atau fungsi yang diintegrasikan.
3. dx merupakan diferensial integrator atau kepada variabel apa fungsi akan diintegrasikan.
4. $f(x) + K$ merupakan hasil dari proses pengintegralan dengan K yaitu konstanta integrasi.

11.2 Sifat-sifat Integral Tak Tentu

Beberapa sifat-sifat integral tak tentu, yaitu sebagai berikut:

1. Sifat yang diperoleh langsung dari turunan

a. $\int m \, dx = mx + K, m = \text{konstanta}$

b. $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + K, n \neq -1$

c. $\int \sin x \, dx = -\cos x + K$

d. $\int \cos x \, dx = \sin x + K$

e. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + K$

f. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + K$

Contoh 11.2.1:

Tentukan hasil integral dari $f'(x) = 7$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int f'(x) \, dx &= \int 7 \, dx \\ &= 7x + K\end{aligned}$$

Contoh 11.2.2:

Tentukan hasil integral dari $f'(x) = x^7$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int f'(x) \, dx &= \int x^7 \, dx \\ &= \frac{1}{7+1} x^{7+1} + K \\ &= \frac{1}{8} x^8 + K\end{aligned}$$

2. Sifat Kelinearan

a. $\int m f'(x) \, dx = m \int f'(x) \, dx, m \text{ yaitu suatu konstanta}$

b. $\int [f'(x) + g'(x)] \, dx = \int f'(x) \, dx + \int g'(x) \, dx$

c. $\int [f'(x) - g'(x)] \, dx = \int f'(x) \, dx - \int g'(x) \, dx$

Contoh 11.2.3:

Tentukan hasil integral dari: $3f'(x) = 3x$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int m f'(x) \, dx &= \int 3x \, dx \\ &= 3 \int x \, dx \\ &= 3 \left(\frac{1}{1+1} x^{1+1} \right) + K\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + K$$

Contoh 11.2.4:

Tentukan hasil integral dari $4x^3 - 5x^2 + x - 3$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - 5x^2 + x - 3) dx &= \frac{4}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + K \\ &= x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + K \end{aligned}$$

3. Sifat-sifat lainnya

a. Integral Tak Tentu Bentuk Dasar

- 1) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + K$
- 2) $\int e^x dx = e^x + K$
- 3) $\int m^x dx = \frac{m^x}{\ln m} + K, m > 0, m \neq 1$
- 4) $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + K$
 $= -\ln|\cos x| + K$
- 5) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + K$
 $= -\ln|\csc x| + K$
- 6) $\int \tan x \sec x dx = \sec x + K$
- 7) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + K$
 $= -\ln|\sec x - \tan x| + K$
- 8) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + K$
 $= -\ln|\csc x + \cot x| + K$
 $= \ln\left|\tan \frac{1}{2}x\right| + K$
- 9) $\int \cot x \csc x dx = -\csc x + K$

b. Integral bentuk Invers Trigonometri

- 1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + K$
- 2) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + K$
- 3) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + K$
- 4) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + K$

Contoh 11.2.5:

Tentukan: $\int \frac{5}{x^2+4x+7} dx = \dots$

Penyelesaian:

Berdasarkan rumus integral bentuk invers trigonometri dapat dibuktikan untuk konstanta $m \neq 0$, sehingga berlaku:

$$\int \frac{1}{m^2+x^2} dx = \frac{1}{m} \tan^{-1} \left(\frac{x}{m} \right) + K$$

Bentuk penyebut dalam integran yaitu: $x^2 + 4x + 7$

Selanjutnya, penyelesaian bentuk integran akan ditentukan dengan terlebih dahulu menentukan: $\int \frac{1}{x^2+2bx+c} dx$

Jika $f(x) = x^2 + 2bx + c$ dengan $D = 4b^2 - 4c < 0$, maka $f(x)$ definit positif dan selalu dapat dibawa ke bentuk:

$$f(x) = (x + b)^2 + p^2$$

dengan $p^2 = c - b^2 > 0$

sehingga:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+2bx+c} dx &= \int \frac{1}{(x+b)^2+p^2} dx \\ &= \frac{1}{p} \tan^{-1} \left(\frac{x+b}{p} \right) + K \end{aligned}$$

Berdasarkan penurunan bentuk tersebut, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 7 \\ &= x^2 + 2 \cdot 2x + 7 \\ &= (x + 2)^2 + 3 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{x^2+4x+7} dx &= 5 \int \frac{1}{(x+2)^2+3} dx \\ &= 5 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x+2}{\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= \frac{5}{3} \sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{x+2}{3} \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

Contoh 11.2.6:

Tentukan: $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx = \dots$

Penyelesaian:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-4}{x^2+4x+7} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)}{x^2+4x+7} dx - \int \frac{4}{x^2+4x+7} dx \\
&= \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4x + 7| - 4 \int \frac{1}{(x+2)^2+3} dx \\
&= \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4x + 7| - 4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x+2}{\sqrt{3}} \right) \right) \\
&= \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4x + 7| - \frac{4}{3} \sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{x+2}{3} \sqrt{3} \right)
\end{aligned}$$

11.3 Integral Substitusi

Untuk menentukan hasil integral dari suatu turunan fungsi yang memiliki bentuk yang sudah baku, maka dapat dilakukan secara langsung. Namun, jika turunan fungsi yang akan ditentukan hasil integralnya belum baku, maka terlebih dahulu perlu untuk menentukan sebuah substitusi sehingga dapat mengubah turunan fungsi tersebut menjadi bentuk baku. Metode yang digunakan untuk melakukan hal tersebut yaitu aturan rantai yang merubah fungsi tak baku menjadi bentuk baku. Aturan rantai tersebut dikenal dengan **metode substitusi**.

Misal $u = g(x)$, $\frac{du}{dx} = g'(x)$, dan f merupakan suatu anti turunan dari f' , maka:

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = \int f'(u)du = f(u) + K = f(g(x)) + K$$

Contoh 11.3.1:

Tentukan: $\int (2x + 3)^7 dx = \dots$

Penyelesaian:

Misal: $u = 2x + 3$, maka $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
\int (2x + 3)^7 dx &= \int u^7 \frac{1}{2} du \\
&= \frac{1}{2} \int u^7 du \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} u^8 + K \right) \\
&= \frac{1}{16} (2x + 3)^8 + \frac{1}{2} K
\end{aligned}$$

Contoh 11.3.2:

Tentukan: $\int 12x^2(4x^3 - 7)^{21} dx = \dots$

Penyelesaian:

Misal: $u = 4x^3 - 7$, maka $\frac{du}{dx} = 12x^2 \Rightarrow 12x^2 dx = du$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int 12x^2(4x^3 - 7)^{21} dx &= \int u^{21} du \\ &= \frac{1}{22} u^{22} + K \\ &= \frac{1}{22} (4x^3 - 7)^{22} + K \end{aligned}$$

Contoh 11.3.3:

Tentukan: $\int \sin(7x + 2) dx$

Penyelesaian:

Misal: $u = 7x + 2$, maka $\frac{du}{dx} = 7 \Rightarrow dx = \frac{1}{7} du$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int \sin(7x + 2) dx &= \int \sin u \cdot \frac{1}{7} du \\ &= \frac{1}{7} \int \sin u du \\ &= \frac{1}{7} (-\cos u + K) \\ &= -\frac{1}{7} \cos(7x + 2) + \frac{1}{7} K \end{aligned}$$

11.4 Integral Parsial

Jika hasil integral dari suatu turunan fungsi yang tidak baku tidak dapat ditentukan dengan menggunakan metode substitusi, maka hasil integral tersebut ditentukan dengan menggunakan metode parsial. Bentuk umum dari turunan fungsi yang diintegrasikan dengan menggunakan **metode parsial** yaitu: $\int u dv$.

Misal: 1. $u = u(x)$

2. $v = v(x)$, dan

3. $f(x) = u \cdot v = u(x) \cdot v(x)$

Maka:

$$f'(x) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$$

Ketika kedua ruas diintegrasikan, maka diperoleh:

$$\int f'(x) dx = \int [u'(x) v(x) + u(x) v'(x)] dx$$

$$f(x) = \int [u'(x) v(x) + u(x) v'(x)] dx$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int [u'(x) v(x) + u(x) v'(x)] dx$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) v(x) dx + \int u(x) v'(x) dx$$

Sehingga:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

Misal: 1. $dv = v'(x) dx$

2. $du = u'(x) dx$

Maka:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

$$\int u(x) dv = u(x) v(x) - \int v(x) du$$

$$\int \mathbf{u} \, \mathbf{dv} = \mathbf{u} \, \mathbf{v} - \int \mathbf{v} \, \mathbf{du}$$

Contoh 11.4.1:

Tentukan: $\int 4x \sin x \, dx$

Penyelesaian:

Misal: $u = 4x$, maka $\frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow du = 4 \, dx$

$$dv = \sin x \, dx, \text{ maka } \int dv = \int \sin x \, dx$$

$$v = \int \sin x \, dx$$

$$v = -\cos x$$

Sehingga:

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

$$\int 4x \sin x \, dx = (4x)(-\cos x) - \int -\cos x \, 4 \, dx$$

$$= -4x \cos x + 4 \sin x + K$$

Catatan:

Menentukan hasil integral dari turunan fungsi dengan menggunakan metode integral parsial harus memilih pemisalan u dan dv secara tepat. Hal ini dikarenakan akan menentukan hasil integral yang diperoleh.

Pemilihan untuk pemisalan u dan dv yang tidak tepat dapat menyebabkan bentuk fungsi yang diintegrasikan menjadi lebih rumit dari bentuk awal.

Berdasarkan contoh 11.4.1 yaitu menentukan $\int 4x \sin x \, dx$.

Misalkan bentuk pemisalan yang dipilih yaitu:

$$u = \sin x, \text{ maka } \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow du = \cos x \, dx$$

$$dv = 4x \, dx, \text{ maka } \int dv = \int 4x \, dx$$
$$v = \frac{4}{2}x^2 = 2x^2$$

Sehingga bentuk integral parsial menjadi:

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$
$$\int \sin x \, 4x \, dx = (\sin x)(2x^2) - \int 2x^2 \cos x \, dx$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari pemisalan tersebut, terdapat bentuk $\int 2x^2 \cos x \, dx$ yang tidak dapat diintegrasikan secara langsung, bahkan lebih rumit dari bentuk awal yang harus diintegrasikan. Oleh karena itu, maka ketika memilih bentuk yang u dan dv yang dimisalkan harus setepat mungkin.

11.5 Integral Parsial Berulang

Contoh 11.5.1:

Tentukan: $\int x^2 \cos 3x \, dx = \dots$

Penyelesaian:

Misal: $u = x^2$, maka $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x \, dx$

$$dv = \cos 3x \, dx, \text{ maka } \int dv = \int \cos 3x \, dx$$

$$v = \int \cos 3x \, dx$$

$$v = \frac{1}{3} \sin 3x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int u \, dv &= u \, v - \int v \, du \\ \int x^2 \cos 3x \, dx &= (x^2) \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right) - \int \frac{1}{3} \sin 3x \, 2x \, dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{1}{3} \int 2x \sin 3x \, dx\end{aligned}$$

Pada langkah terakhir terdapat bentuk $\int 2x \sin 3x \, dx$, sehingga harus melakukan pengintegralan parsial kembali.

Misal: $u = 2x$, maka $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow du = 2 \, dx$

$$\begin{aligned}dv &= \sin 3x \, dx, \text{ maka } \int dv = \int \sin 3x \, dx \\ v &= \int \sin 3x \, dx \\ v &= \frac{1}{3}(-\cos 3x)\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int u \, dv &= u \, v - \int v \, du \\ \int x^2 \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{1}{3} \int 2x \sin 3x \, dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{1}{3} \left[2x \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) - \int -\frac{1}{3} \cos 3x \, 2 \, dx \right] \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{9} \int \cos 3x \, dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right) + K \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + K\end{aligned}$$

Contoh 11.5.1 menunjukkan penyelesaian permasalahan integral dengan pengintegralan parsial sebanyak 2 kali. Secara konsep berapapun pengintegralan parsial yang dilakukan akan melalui proses yang sama. Namun, karena banyaknya proses yang harus dilakukan, tidak sedikit yang kemudian melakukan kesalahan dalam penyelesaian.

Untuk mengurangi langkah yang panjang dalam penyelesaian, cara cepat berikut dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian masalah pengintegralan parsial berulang.

$$\int x^2 \cos 3x \, dx = \dots$$

Misal: $u = x^2$ dan $dv = \cos 3x \, dx$
 Sehingga:

Tabel 11.1. Cepat Pengintegralan Parsial

Turunan		Integral
$u = x^2$	(+)	$dv = \cos 3x \, dx$
$2x$	(-)	$\frac{1}{3} \sin 3x$
2	(+)	$-\frac{1}{9} \cos 3x$
0	(-)	$-\frac{1}{27} \sin 3x$

1. Perhatikan kolom turunan, baris selanjutnya merupakan hasil turunan dari baris di atasnya. Sedangkan kolom integral, baris selanjutnya merupakan hasil integral dari baris di atasnya.
2. Kolom turunan berhenti ketika baris telah bernilai 0, dan kolom integral berhenti mengikuti kolom turunan.
3. Selanjutnya, tanda panah menunjukkan pasangan perkalian antara kolom turunan dan integral. Terdapat tanda (+) dan (-) yang menunjukkan nilai dari perkalian antara kolom turunan dan integral.

Dengan menggunakan tabel tersebut, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \cos 3x \, dx &= \\
 x^2 \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right) - 2x \left(-\frac{1}{9} \cos 3x \right) + 2 \left(-\frac{1}{27} \sin 3x \right) + K \\
 &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + K
 \end{aligned}$$

Tidak semua bentuk pengintegralan parsial berulang dapat menggunakan tabel cara cepat. Misalkan contoh berikut:

Contoh 11.5.2:

Tentukan: $\int e^x \cos x \, dx = \dots$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Misal: } u = e^x, \text{ maka } \frac{du}{dx} = e^x &\Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x \, dx, \text{ maka } \int dv &= \int \cos x \, dx \\ v &= \int \cos x \, dx \\ v &= \sin x \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= u \, v - \int v \, du \\ \int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x - \int \sin x \, e^x dx \end{aligned}$$

Pada langkah terakhir terdapat bentuk $\int \sin x \, e^x dx$, sehingga harus melakukan pengintegralan parsial kembali.

$$\begin{aligned} \text{Misal: } u = e^x, \text{ maka } \frac{du}{dx} = e^x &\Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x \, dx, \text{ maka } \int dv &= \int \sin x \, dx \\ v &= \int \sin x \, dx \\ v &= -\cos x \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= u \, v - \int v \, du \\ \int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x - \int \sin x \, e^x dx \\ &= e^x \sin x - [e^x(-\cos x) - \int -\cos x \, e^x dx] \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx \end{aligned}$$

Perhatikan kesamaan yang diperoleh. Kedua ruas memuat bentuk $\int e^x \cos x \, dx$ sehingga dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} 2 \int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ \frac{2 \int e^x \cos x \, dx}{2} &= \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} \\ \int e^x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

11.6 Strategi Pengintegralan

Untuk mengintegalkan suatu bentuk integran perlu untuk mengetahui terlebih dahulu tentang rumus-rumus pengintegralan dasar. Pada umumnya rumus-rumus dasar tersebut perlu untuk dihafalkan dan dikuasai. Dengan demikian, ketika dihadapkan pada permasalahan pengintegralan, rumus-rumus dasar yang telah dikuasai tersebut akan dapat berguna untuk memilih strategi pengintegralan.

Ketika pemanfaatan rumus-rumus dasar masih belum dapat menyelesaikan permasalahan pengintegralan, maka dapat dengan mencoba strategi langkah Stewart (Meilasari & Handayani, 2019), berikut:

11.6.1 Menyederhanakan Integral Jika Memungkinkan

Biasanya dengan memanipulasi aljabar atau kesamaan trigonometri dapat menyederhanakan integran dan menjadikan metode pengintegralan menjadi lebih jelas.

Contoh 11.6.1.1:

Tentukan: $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx = \dots$

Penyelesaian:

Permasalahan yang diberikan terdiri dari 2 fungsi sederhana, sehingga untuk mengintegalkannya dapat dilakukan dengan cara mengalikan kedua fungsi tersebut sehingga menjadi fungsi yang lebih sederhana dan menjadi 1 fungsi.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx &= \int (\sqrt{x} + x) dx \\ &= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x\right) dx\end{aligned}$$

Setelah dua fungsi dikalikan, terbentuk satu fungsi yang lebih sederhana. Integral yang telah sederhana tersebut kemudian dapat langsung diselesaikan dengan menggunakan rumus dasar integral.

Contoh 11.6.1.2:

Tentukan: $\int (\sin x + \cos x)^2 dx = \dots$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan fungsi integran yang diberikan, terlebih dahulu dapat menjabarkan bentuk aljabarnya dengan menggunakan sifat perkalian dua suku aljabar.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dengan menggunakan sifat perkalian dua suku aljabar tersebut, maka integran yang diberikan dapat dijabarkan menjadi:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

Sehingga:

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) dx$$

Setelah bentuk integran dijabarkan, maka selanjutnya bentuk fungsi trigonometri tersebut dapat disederhanakan berdasarkan identitas trigonometri. Pada bentuk integran baru hasil penjabaran integran semula, terdapat bentuk $\sin^2 x$ dan $\cos^2 x$. Berdasarkan identitas trigonometri, kedua bentuk tersebut menjadi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Sehingga bentuk integran yang diberikan menjadi:

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) dx$$

$$= \int (1 + 2 \sin x \cos x) dx$$

Bentuk akhir dari fungsi integran yang diberikan, kemudian dapat diintegalkan dengan aturan integral substitusi.

11.6.2 Mencari Substitusi yang Jelas

Ketika diberikan suatu fungsi $u = f(x)$ dalam integran yang memiliki diferensial atau turunan $du = f'(x) dx$ pada integran terpisah dari faktor konstanta, maka untuk menyelesaikan

permasalahan integral tersebut menggunakan aturan integral substitusi bukan integral parsial.

Contoh 11.6.2.1:

Tentukan: $\int \frac{2x}{x^2-7} dx$

Penyelesaian:

Berdasarkan permasalahan yang diberikan, diperoleh permisalan sebagai berikut:

Misal: $u = x^2 - 7$, maka $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow 2x dx = du$

Sehingga selanjutnya permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan aturan integral substitusi.

11.6.3 Membedakan Integral Berdasarkan Bentuknya

Ketika dalam menyelesaikan permasalahan integral, ternyata langkah 1 dan 2 belum mengarah kepada penyelesaian yang diharapkan, maka perhatikan bentuk integral $f'(x)$.

1. Jika $f'(x)$ merupakan hasil kali pangkat dari $\sin x$ dan $\cos x$, $\tan x$ dan $\sec x$, atau $\cot x$ dan $\csc x$, maka penyelesaian dari bentuk integral yang diberikan tersebut dengan menggunakan aturan integral substitusi dengan memanfaatkan rumus dasar integral fungsi trigonometri.
2. Jika $f'(x)$ merupakan fungsi rasional, maka penyelesaian dari masalah integral yang diberikan dapat menggunakan prosedur penyelesaian seperti contoh penyelesaian fungsi rasional yang telah dijabarkan.
3. Jika $f'(x)$ merupakan hasil kali pangkat dari suatu bentuk polinom dan fungsi transeden (seperti fungsi trigonometri, eksponensial, atau logaritma), maka penyelesaian dari permasalahan integral yang diberikan dapat dengan memilih u dan dv secara tepat.
4. Jika muncul bentuk $\sqrt{\pm x^2 \pm m^2}$, maka penyelesaian dari permasalahan tersebut dengan menggunakan aturan

integral substitusi trigonometri (seperti pada uraian sifat dasar lainnya dari suatu integral).

5. Jika muncul bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$, maka penyelesaian dari permasalahan tersebut dengan menggunakan aturan integral substitusi yang merasionalkan $u = \sqrt[n]{ax+b}$.

11.6.4 Mencoba Lagi

Ketika langkah 1, 2, dan 3 ternyata belum menghasilkan jawaban yang diharapkan, maka ingat kembali bahwa pada dasarnya terdapat dua aturan dalam pengintegralan, yaitu integral substitusi dan integral parsial.

1. Walaupun tidak ada substitusi yang jelas (seperti pada langkah 2), kecerdikan bahkan keputusan dapat menyarankan suatu substitusi yang tepat.
2. Walaupun integral parsial hampir selalu digunakan untuk hasil kali seperti pada contoh pada langkah 3, terkadang dapat pula digunakan pada fungsi tunggal. Misal integral parsial untuk permasalahan $\tan^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, dan $\ln x$ (dimana semua integran tersebut merupakan fungsi invers).
3. Manipulasi integran juga dapat dilakukan, seperti merasionalkan penyebut atau menggunakan kesamaan trigonometri mungkin akan bermanfaat dalam mengubah bentuk integral menjadi bentuk yang lebih mudah. Manipulasi yang dilakukan mungkin lebih substansial dibandingkan dengan manipulasi sebelumnya pada langkah 1 dan mungkin memerlukan kecerdikan.
4. Jika sebelumnya telah memiliki pengalaman dalam pengintegralan, maka selanjutnya cenderung akan menggunakan aturan pengintegralan yang mirip dengan bentuk yang pernah ditemui, sehingga dalam penyelesaian permasalahan kemudian dapat dengan mengaitkan dengan permasalahan-permasalahan sebelumnya.

5. Penyelesaian permasalahan integral terkadang memerlukan beberapa metode untuk menentukan hasil suatu integral yang diharapkan. Penyelesaian dapat melibatkan beberapa substitusi berbeda secara berurutan ataupun kombinasi pengintegralan parsial dengan satu atau lebih substitusi.

11.7 Soal Latihan

1. Tentukan hasil integral dari masing-masing permasalahan yang diberikan berikut ini dan periksalah hasil penyelesaian yang diperoleh dengan mencari turunan dari masing-masing jawaban.

a. $\int 12x^3 dx$

b. $\int \sqrt[4]{x^5} dx$

c. $\int \left(3x^3 - 2x + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) dx$

d. $\int \frac{x^2+x-7}{2x^2} dx$

e. $\int \frac{5x}{\sqrt{3x^2+5}} dx$

f. $\int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$

g. $\int \frac{12}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} dx$

h. $\int \frac{2x-1}{2x^2+x-1} dx$

i. $\int x^3 e^{-2x} dx$

j. $\int \frac{6}{2x^2+x-3} dx$

k. $\int \sin^4 2x dx$

l. $\int \tan^3 x dx$

m. $\int \sqrt{7+5x-5x^2} dx$

n. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5} dx$

2. Buktikan hasil pengintegralan berikut ini:

a. $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + K$

b. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + K$

c. $\int e^{2x} \sin 5x dx = \frac{e^{2x}(2 \sin 5x - 5 \cos 5x)}{2^2+5^2}$

DAFTAR PUSTAKA

- Aprianto, N. H., 2016. Anti Derivatif (Integral). Jakarta: Trustco.
https://www.academia.edu/61765887/Anti_Derivatif_Integral
- Azizah, N. L., & Ariyanti, N. 2018. *Kalkulus*. Sidoarjo: UMSIDA Press.
- Bagio, T. H. 2010. *Kalkulus Dasar*. Fakultas Ilmu Komputer: Universitas Narotama Surabaya.
- Lestari, D., Kusumawati, R., & Binatari, N. 2013. *Kalkulus Dasar*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam: Universitas Negeri Yogyakarta.
- Meilasari, V., & Handayani, R. 2019. *Kalkulus Integral: Teknik Pengintegralan*. Lampung Utara: Universitas Muhammadiyah Kotabumi.
- Putranti, S. R. D., 2018. Hubungan antara Differensial dan Integral. *Jurnal Online Universitas 45 Surabaya*.
<https://oai:ajs.jurnal.univ45sby.ac.id:article/197>

BAB 12

MENGHITUNG LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME BENDA PUTAR

Oleh Jan Setiawan

12.1 Luas Permukaan Benda Putar

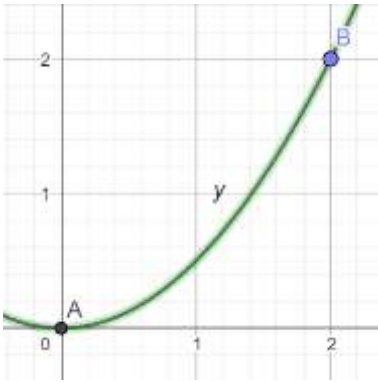
Dalam menentukan luasan permukaan yang dibentuk oleh fungsi yang diputar terhadap sumbu/poros tertentu tidak terlepas dari penentuan nilai panjang kurva/lintasan yang dibentuk oleh fungsi tersebut. Panjang kurva dapat ditentukan dengan persamaan 12.1 berikut,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (12.1)$$

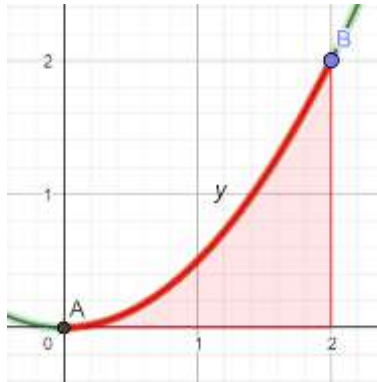
dengan L adalah panjang kurva yang dibatasi oleh titik a dan b dengan fungsi $y = f(x)$ (Irmayanti dkk, 2021; Hernaeny dkk, 2021; Fernandez, 2019; Purcell, Varberg dan Rigdon, 2007; Stewart, Clegg, dan Watson, 2020). Sedangkan untuk fungsi $x = h(y)$ yang dibatasi oleh titik c dan d , panjang kurvanya dituliskan dengan persamaan 12.2 berikut,

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (12.2)$$

Ilustrasi penggunaan persamaan 12.1 dan 12.2, dapat digunakan untuk menentukan panjang kurva dari fungsi $y = \frac{1}{2}x^2$, yang dibatasi oleh rentang $0 \leq x \leq 2$. Untuk menyelesaikan persoalan ini dapat digunakan persamaan 12.1. Pada Gambar 12.1 diberikan ilustrasi dari fungsi tersebut.



(a)



(b)

Gambar 12.1. Ilustrasi (a) fungsi $y = \frac{1}{2}x^2$ yang dibatasi oleh (b) rentang $0 \leq x \leq 2$.

Untuk menghitung panjang kurva diawali dengan menentukan turunan pertama dari fungsinya,

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Selanjutnya hasil turunan pertama dan rentangnya diimplementasikan pada persamaan 12.1

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (x)^2} dx$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + x^2} dx$$

Integrasi dari fungsi tersebut dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 L &= \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1+x^2}| \right) \Big|_0^2 \\
 L &= \left(\frac{1}{2} 2 \sqrt{1+(2)^2} + \frac{1}{2} \ln |2 + \sqrt{1+(2)^2}| \right) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2} 0 \sqrt{1+(0)^2} + \frac{1}{2} \ln |0 + \sqrt{1+(0)^2}| \right) \\
 L &= \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln |2 + \sqrt{5}| \right) - 0 \approx 2,9579
 \end{aligned}$$

Terlihat panjang kurva yang diperoleh dari perhitungan sebesar 2,9579 satuan panjang.

Setelah mengetahui panjang kurva dari suatu fungsi, dapat ditentukan luas permukaan benda dari fungsi yang diputar terhadap sumbu tertentu. Secara umum luas permukaan benda putar dapat diilustrasikan pada Gambar 12.2 dan persamaan untuk penyelesaian benda putar pada gambar tersebut diberikan pada persamaan 12.4 (Irmayanti dkk, 2021; Hernaeny dkk, 2021; Fernandez, 2019; Purcell, Varberg dan Rigdon, 2007; Stewart, Clegg, dan Watson, 2020). Dari fungsi $y = f(x)$ yang diputar terhadap sumbu- x , luas permukaan yang dibentuk dapat ditentukan dengan persamaan,

$$A = p \times l \quad (12.3)$$

Untuk panjang (p) dapat diperoleh dari keliling (K) yang dibentuk oleh kurva yang membentuk benda putar, dan dapat ditentukan dengan $2\pi y$. Sedangkan lebar (l) dapat diperoleh dengan persamaan panjang kurva (L). Untuk luas permukaan yang sangat tipis dapat ditentukan dengan,

$$\begin{aligned}
 \Delta A &= K \times \Delta L \\
 \Delta A &= 2\pi y \times \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Delta x
 \end{aligned}$$

$$A = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (12.4)$$

Sedangkan dalam menghitung luas permukaan benda putar dari fungsi $x = h(y)$ yang diputar terhadap sumbu- y dan dibatasi oleh titik c dan d , dituliskan dengan persamaan 12.5 berikut,

$$A = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (12.5)$$

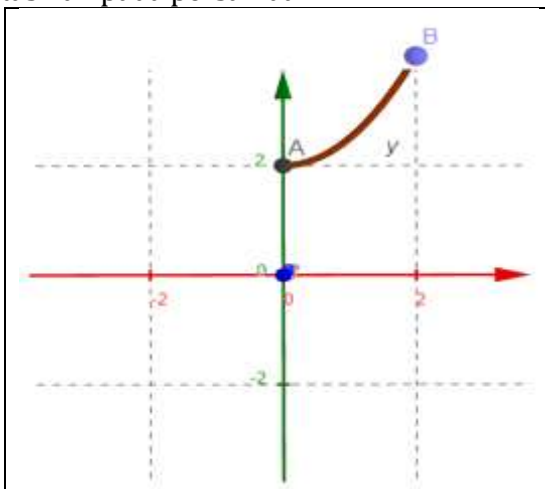
Untuk menyelesaikan luas permukaan yang diilustrasikan pada Gambar 2.2, tahapan pertamanya adalah menentukan turunan pertama dari fungsi,

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

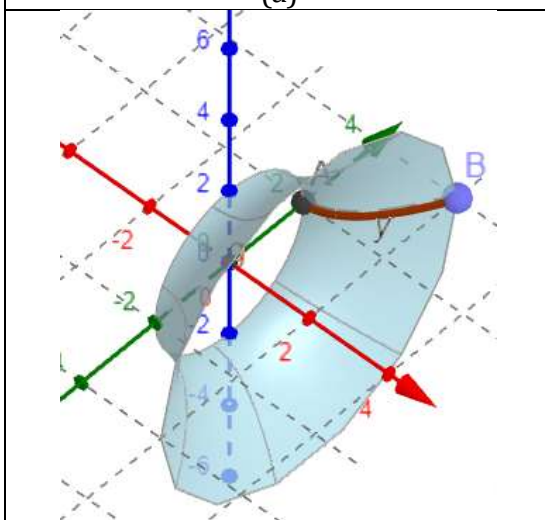
diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Selanjutnya hasil turunan pertama dan rentangnya diimplementasikan pada persamaan 12.4



(a)



(b)

Gambar 12.2. Ilustrasi penentuan luas permukaan benda putar (a) fungsi $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ yang dibatasi oleh rentang $0 \leq x \leq 2$, (b) diputar terhadap sumbu-x.

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^2 2\pi \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) \sqrt{1 + (x)^2} dx \\
A &= \pi \int_0^2 \left(x^2 \sqrt{1 + x^2} + 4 \sqrt{1 + x^2} \right) dx \\
A &= \pi \left(\int_0^2 x^2 \sqrt{1 + x^2} dx + \int_0^2 4 \sqrt{1 + x^2} dx \right) \\
A &= \pi \left(\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4} x (x^2 + 1)^{3/2} \right) \Big|_0^2 \right. \\
&\quad \left. + 4 \left(\left(\frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| \right) \Big|_0^2 \right) \right) \\
A &= \pi \left(\left[\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} 2 \sqrt{1 + 2^2} + \frac{1}{2} \ln |2 + \sqrt{1 + 2^2}| \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4} 2 (2^2 + 1)^{3/2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} 0 \sqrt{1 + 0^2} + \frac{1}{2} \ln |0 + \sqrt{1 + 0^2}| \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4} 0 (0^2 + 1)^{3/2} \right) \right] \\
&\quad + \left[4 \left(\left(\frac{1}{2} 2 \sqrt{1 + (2)^2} + \frac{1}{2} \ln |2 + \sqrt{1 + (2)^2}| \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{2} 0 \sqrt{1 + (0)^2} + \frac{1}{2} \ln |0 + \sqrt{1 + (0)^2}| \right) \right) \right] \right) \\
A &= \pi \left(\left[\left(-\frac{1}{4} \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln |2 + \sqrt{5}| \right) + \frac{5}{2} \sqrt{5} \right) - 0 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[4 \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln |2 + \sqrt{5}| - 0 \right) \right] \right) \approx 52,4088
\end{aligned}$$

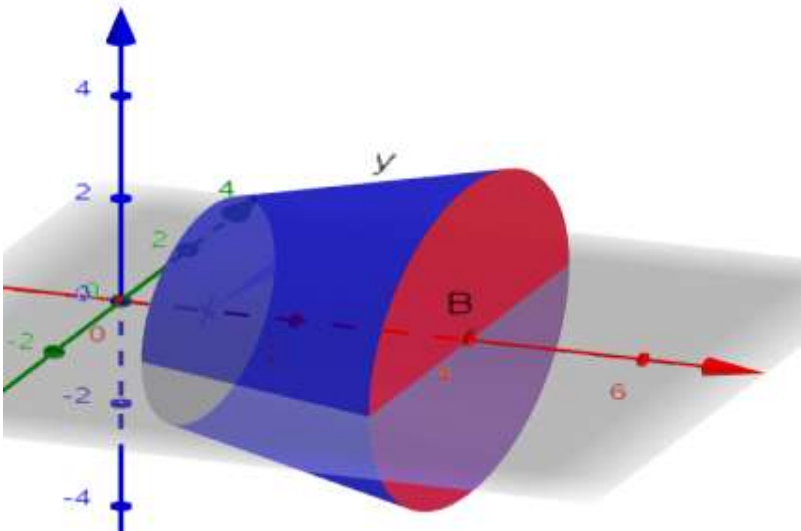
terlihat luas permukaan yang diperoleh dari perhitungan sebesar 52,4088 satuan luas.

12.2 Volume Benda Putar

Setelah mengetahui penentuan panjang kurva dan luas permukaan benda putar, besaran berikutnya yang perlu diketahui adalah volum benda putar. Secara umum volume (V) ditentukan oleh persamaan 12.6 (Purcell, Varberg dan Rigdon, 2007),

$$V = A \times h \quad (12.6)$$

dengan A adalah luas alas, dan h adalah tinggi benda. Pada volume benda putar, luas alas dapat diambil dari permukaan yang dibentuk oleh kurva yang diputar Apabila tinggi benda digantikan dengan bagian yang sangat kecil seperti ditunjukkan oleh bidang B pada Gambar 12.3.



Gambar 12.3. Ilustrasi penentuan volume benda putar.

Volume dari bidang B dapat ditentukan dengan menggunakan $A(x)$ sebagai luas permukaan bidang tersebut. Sehingga persamaannya dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\Delta V = A(x) \times \Delta h$$

Sehingga secara umum persamaan volume benda putar yang diputar terhadap sumbu- x dituliskan pada persamaan 12.7 (Irmayanti dkk, 2021; Hernaeny dkk, 2021).

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad (12.7)$$

12.2.1 Metode Cakram

Metode pertama yang akan digunakan dalam menyelesaikan volume benda putar adalah metode cakram. Metode ini dapat digunakan pada benda putar yang tidak memiliki rongga atau celah pada sisi yang akan menjadi alasnya. Sehingga dapat dikatakan metode ini dapat diaplikasikan pada benda putar yang menghasilkan benda pejal. Salah satu bentuknya seperti ditunjukkan pada Gambar 12.3. Untuk menyelesaikan penentuan volumenya dari persamaan 12.7, fungsi $A(x) = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi f(x)^2$. Secara umum penentuan volume benda putar dengan metode cakram ditentukan dengan persamaan 12.8 (Irmayanti dkk, 2021; Hernaeny dkk, 2021; Fernandez, 2019; Purcell, Varberg dan Rigdon, 2007; Stewart, Clegg, dan Watson, 2020).

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx \quad (12.8)$$

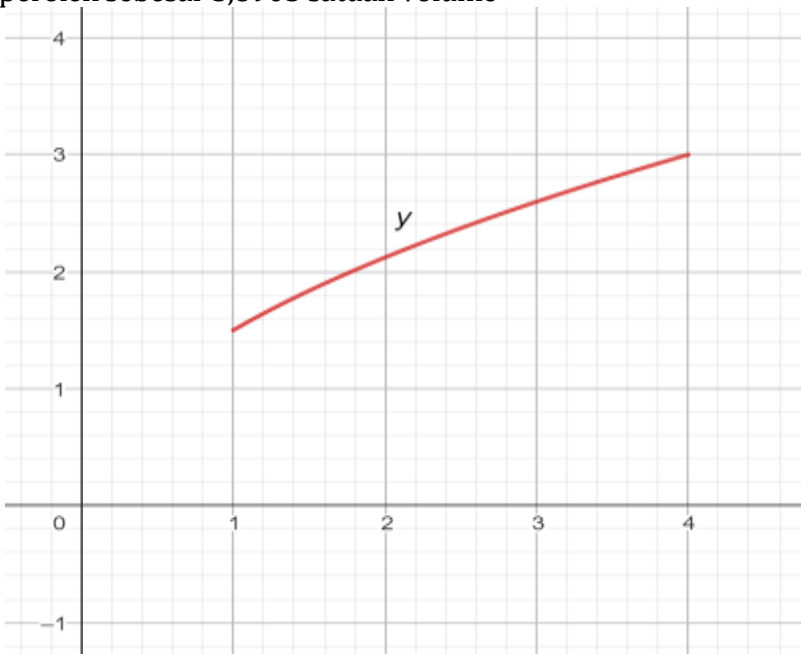
Diberikan ilustrasi fungsi yang akan membentuk benda putar pada Gambar 12.4. Untuk penentuan volume benda putar tersebut dengan metode cakram luasan permukaan alas yang dibentuk adalah,

$$A(x) = \pi f(x)^2$$

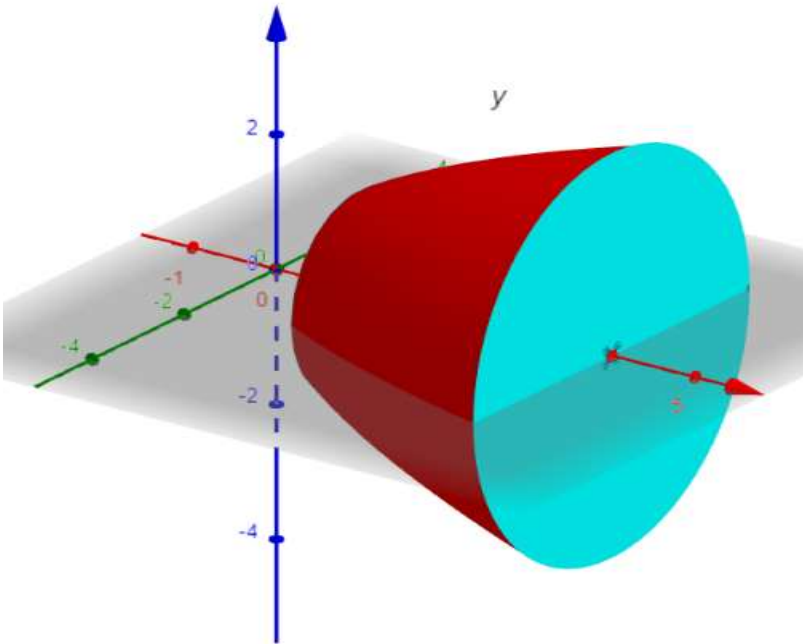
$$A(x) = \pi \left(\frac{1}{2} \sqrt{x} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{4}\pi x \\
 V &= \int_a^b A(x) dx \\
 V &= \int_1^4 \frac{1}{4}\pi x dx \\
 V &= \frac{1}{4}\pi \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^4 dx \\
 V &= \frac{1}{4}\pi \left[\left(\frac{1}{2}4^2 \right) - \left(\frac{1}{2}1^2 \right) \right] = \frac{1}{4}\pi \left(8 - \frac{1}{2} \right) = \frac{15}{8}\pi \approx 5,8905
 \end{aligned}$$

Dari perhitungan, volume benda putar yang terbentuk diperoleh sebesar 5,8905 satuan volume



(a)



(b)

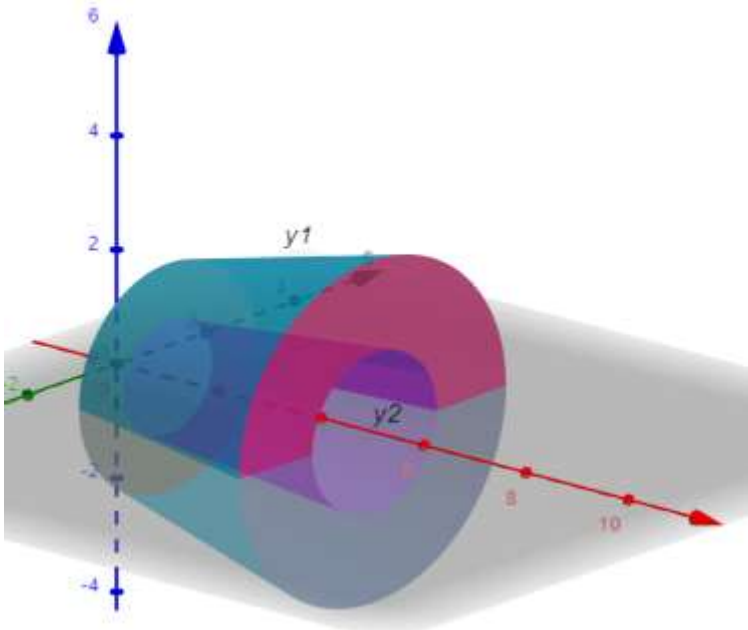
Gambar 12.4. Fungsi $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ diputar terhadap sumbu-x yang dibatasi oleh $x = 1$ dan $x = 4$.

12.2.2 Metode Cincin

Metode cincin ini memiliki keunikan dapat digunakan pada benda putar yang memiliki rongga atau celah pada sisi yang akan menjadi alasnya. Salah satu bentuknya seperti ditunjukkan pada Gambar 12.5. Untuk menyelesaikan penentuan volumenya dari persamaan 12.7, fungsi $A(x) = \pi[r_1^2 - r_2^2] = \pi[y_1^2 - y_2^2] = \pi[f(x)^2 - g(x)^2]$. Secara umum penentuan volume benda putar dengan metode cincin ditentukan dengan persamaan 12.9 (Irmayanti dkk, 2021; Hernaeny dkk, 2021; Fernandez, 2019;

Purcell, Varberg dan Rigdon, 2007; Stewart, Clegg, dan Watson, 2020).

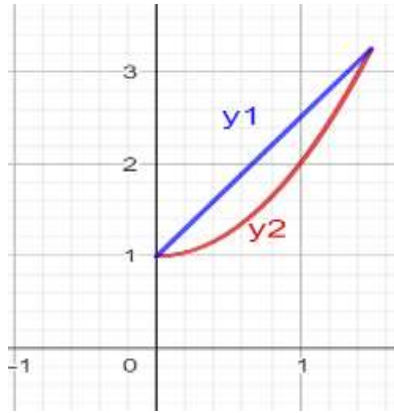
$$V = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2] dx \quad (12.9)$$



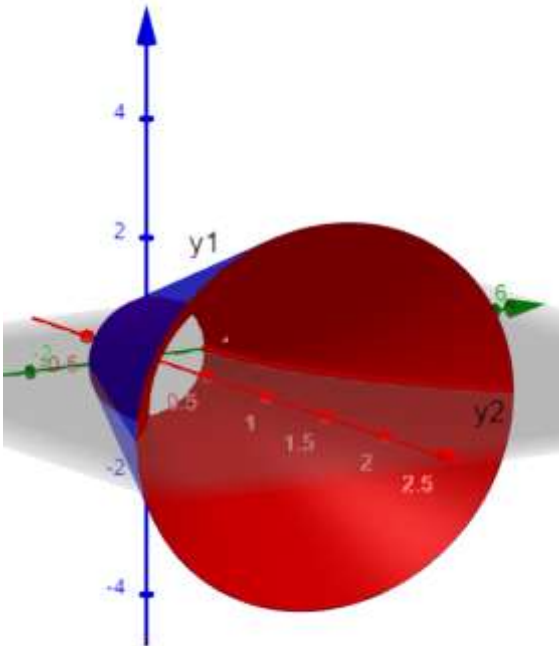
Gambar 12.5. Ilustrasi penentuan volume benda putar menggunakan metode cincin.

Sebagai contoh diberikan dua buah fungsi y_1 dan y_2 yang diputar terhadap sumbu- x . Kedua fungsi dibatasi oleh $x = 0$ dan $x = 1,5$. Ilustrasi untuk persoalan ini diberikan pada Gambar 12.6. Untuk menentukan luas bidang alasnya ditentukan dengan menggunakan persamaan

$$A(x) = \pi[y_1^2 - y_2^2]$$



(a)



(b)

Gambar 12.6. Fungsi $y_1 = \frac{3}{2}x + 1$ dan $y_2 = x^2 + 1$ diputar terhadap sumbu-x yang dibatasi oleh $x = 0$ dan $x = 1,5$.

$$A(x) = \pi \left[\left(\frac{3}{2}x + 1 \right)^2 - (x^2 + 1)^2 \right]$$

$$A(x) = \pi \left[\frac{x^2 + 12x + 4}{4} - x^4 - 1 \right]$$

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$$V = \int_0^{3/2} \pi \left(\frac{x^2 + 12x + 4}{4} - x^4 - 1 \right) dx$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 4x \right) - \frac{x^5}{5} - x \right) \Big|_0^{3/2}$$

$$V = \pi \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{12} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^{3/2}$$

$$V = \pi \left[\left(-\frac{(3/2)^5}{5} + \frac{(3/2)^3}{12} + \frac{3(3/2)^2}{2} \right) - 0 \right] = 2,1375\pi$$

$$\approx 6,7152$$

Dari perhitungan, volume benda putar yang dibentuk dari irisan fungsi y_1 dan y_2 diperoleh sebesar 6,7152 satuan volume.

12.2.3 Metode Silindris

Metode ini merupakan metode yang lebih fleksibel dalam menentukan volume benda putar. Metode silindris sangat mungkin digunakan untuk menentukan volume benda putar baik benda pejal maupun benda berongga atau yang memiliki celah. Ilustrasi penentuan volume benda putar dengan metode ini diberikan pada Gambar 12.7. Untuk menyelesaikan penentuan volumenya dari persamaan 12.7, fungsi $A(x) = 2\pi rh = 2\pi xy = 2\pi xf(x)$. Secara umum penentuan volume benda putar dari fungsi

yang diputar terhadap sumbu-y menggunakan metode silindris ditentukan oleh persamaan 12.10 (Irmayanti dkk, 2021; Hernaeny dkk, 2021; Fernandez, 2019; Purcell, Varberg dan Rigdon, 2007; Stewart, Clegg, dan Watson, 2020).

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad (12.10)$$

Penyelesaian volume benda putar dari fungsi $y = -\frac{5}{4}x + 5$ yang diputar terhadap sumbu-y dengan batas integrasi 0 dan 4 sebagai berikut,

$$A(x) = 2\pi x f(x) = 2\pi x \left(-\frac{5}{4}x + 5\right)$$

sehingga bentuk integrasi untuk volumenya adalah,

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

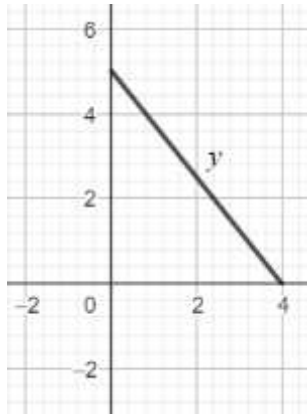
$$V = \int_0^4 2\pi x \left(-\frac{5}{4}x + 5\right) dx$$

$$V = 10\pi \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{4} + x\right) dx$$

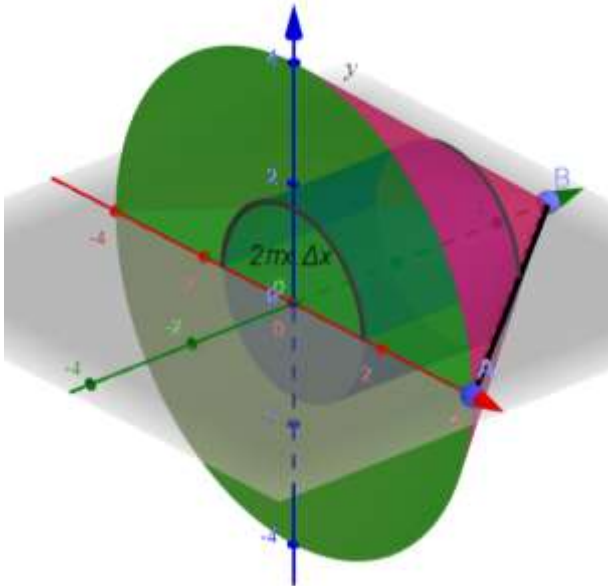
$$V = 10\pi \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} \right]_0^4$$

$$V = 10\pi \left[\left(-\frac{4^3}{12} + \frac{4^2}{2}\right) - \left(-\frac{0^3}{12} + \frac{0^2}{2}\right) \right] = 10\pi \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{80}{3}\pi$$

Volume benda putar yang dibentuk dari fungsi $y = -\frac{5}{4}x + 5$, diperoleh sebesar $\frac{80}{3}\pi \approx 83,7758$ satuan volume.



(a)



(b)

Gambar 12.7. Ilustrasi (a) fungsi $y = -\frac{5}{4}x + 5$ yang diputar terhadap sumbu-y, (b) silindris dalam penentuan volume benda putar.

DAFTAR PUSTAKA

- Fernandez, O., 2019. *Calculus Simplified*. Princeton University Press.
- Hernaeny, U., Nurrahmah, A., Indrawati, F., Panggabean, S., Nurhayati, Riaddin, D., Rabiudin, Apriyanto, M.T., Setiawan, J., dan Dodi, 2021. *Kalkulus Integral*. Media Sains Indonesia.
- Irmayanti, Henra, K., Asnita, A.U., Munaji, Riaddin, D., Fitriani, Junaedi, Resi, B.B.F., Setiawan, J. dan Dahlan, T., 2021. *Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar*. Yayasan Penerbit Muhammad Zaini.
- Purcell, E. J., Varberg, D., dan Rigdon, S. E., 2007. *Calculus (9th Edition)*. Pearson.
- Stewart, J., Clegg, D. K., dan Watson, S., 2020. *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning

BAB 13

APLIKASI INTEGRAL

Oleh Sedyanto

13.1 Pendahuluan

Integral merupakan konsep penjumlahan secara berkesinambungan dalam matematika bersama inversnya diferensial dan dikembangkan untuk menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan solusi diferensiasi, sehingga integral juga disebut dengan antiderivatif atau anti turunan. Dalam Pengaplikasiannya sendiri, integral banyak ditemukan pada bidang-bidang lainnya, terutama ilmu fisika maupun teknik (Utari & Utami, 2020).

Seperti yang kita ketahui jenis Integral ada dua, yaitu integral tertentu serta integral tidak tentu. Integral tentu merupakan integral yang mempunyai ambang batas nilai atas dan batas nilai bawah. Sedangkan integral tidak tentu merupakan integral yang tidak mempunyai ambang batas nilai atas dan ambang batas nilai bawah dan ini biasanya digunakan untuk memperoleh nilai atau fungsi daerah asal atau domain dari turunan suatu fungsi (Supriyatin & Masanggeni, 2022).

Pada Aplikasi integral banyak permasalahan atau pun pembahasan yang berhubungan dengan konteks keseharian si pembelajar dan keadaan ini membutuhkan langkah-langkah seperti identifikasi masalah, asumsi, manipulasi dalam pembentukan model matematikanya. Pemodelan matematika yang di inginkan dapat berupa representasi matematika yang meliputi representasi verbal, visual dan simbolik / model. Representasi visual merupakan tahapan utama pemecahan masalah dalam

aplikasi kalkulus integral untuk menetapkan batas integrasi suatu daerah(Lusiana, 2019).

13.2 Luas Daerah Bidang Datar

Dalam matematika, luas daerah bidang datar merupakan salah satu aplikasi penting dari integral. Luas daerah bidang datar adalah ukuran ruang yang dimiliki oleh sebuah bidang datar tertentu. Untuk menghitung luas daerah bidang datar, integral dapat digunakan sebagai salah satu metode perhitungan yang efektif dan akurat.

Dalam menggunakan integral untuk menghitung luas daerah bidang datar, area bidang datar tersebut dibagi menjadi beberapa bagian dengan lebar Δx yang sangat kecil. Kemudian, setiap bagian dihitung luasnya dengan menghitung integral dari kurva fungsi yang merepresentasikan batas atas dan batas bawah dari setiap bagian. Total luas daerah bidang datar tersebut kemudian dihitung dengan menjumlahkan luas setiap bagian kecil tersebut.

Secara matematis, rumus untuk menghitung luas daerah bidang datar dengan integral adalah sebagai berikut:

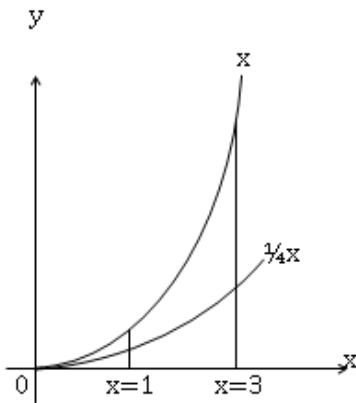
$$L = \int_a^b Y \, dx \quad \text{Batas-batasnya ada pada sumbu-}x$$

atau

$$L = \int_c^d X \, dy$$

Tentukanlah luas daerah bidang datar yang dibatasi oleh $x^2, \frac{1}{4}x^2, x = 1$ dan $x = 3$

Penyelesaian :



$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) - g(x)] dx &= \int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \int_1^3 \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4} \int_1^3 x^2 dx \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}x^3\right) \Big|_1^3 = \frac{1}{4}(27 - 1) = \frac{13}{2}\end{aligned}$$

13.3 Volume Benda Putar

Volume benda putar merupakan konsep matematika yang digunakan untuk menghitung volume suatu benda yang terbentuk dari benda putar. Pada aplikasi integral, konsep volume benda putar dihitung dengan menggunakan integral .

Benda putar adalah benda tiga dimensi yang dihasilkan dari memutar suatu kurva tertentu sepanjang sumbu tertentu. Misalnya, benda putar dapat dihasilkan dari memutar sebuah kurva lingkaran atau kurva fungsional sepanjang sumbu x atau sumbu y.

Secara matematis, jika sebuah bidang diputar di sekitar sumbu x atau sumbu y, maka volume benda putar yang dihasilkan dapat dihitung dengan integral tertentu dengan batas yang sesuai. Jika sebuah bidang diputar di sekitar sumbu x, maka volume benda

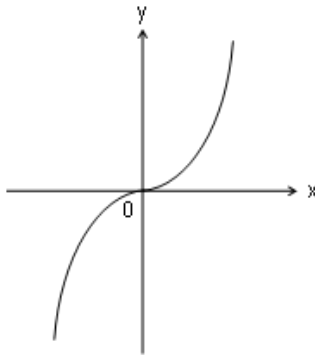
putar dapat dihitung dengan menggunakan integral tertentu dengan batas bawah dan atas yang sesuai dengan batas integral dari sumbu x.

Contoh penerapan integral dalam menghitung volume benda putar adalah saat menghitung volume tabung, bola, kerucut, dan lain sebagainya. Dalam kasus ini, perhitungan integral dilakukan dengan menggunakan rumus-rumus geometris dan integral untuk mencari volume benda putar yang dihasilkan dari memutar bidang geometris tersebut.

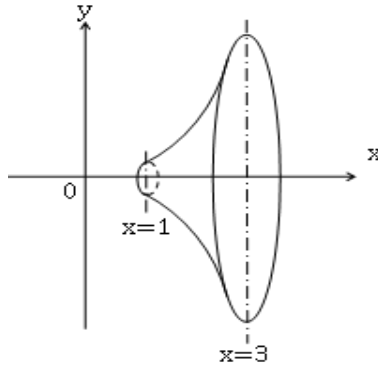
Tentukan luas kulit dan volume benda putar jika $y = \frac{1}{4}x^3$ diputar mengelilingi sumbu x mulai dari $x=1$ sampai $x=3$

Penyelesaian :

Grafik $y = \frac{1}{4}x^3$



a) Perputaran mengelilingi sumbu x dari $x=1$ sampai $x=3$



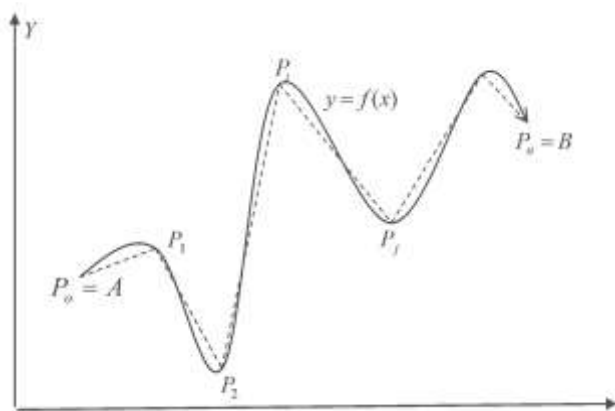
$$\begin{aligned}\text{Luas kulit } A &= \int_a^b 2\pi f(x) \, dx = \int_1^3 (2\pi) \frac{1}{4} x^3 \, dx \\ &= \int_1^3 x^3 \, dx = \left. \frac{\pi}{8} x^4 \right|_1^3 = 10\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Volume benda putar } V &= \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx = \int_1^3 (\pi) \left[\frac{1}{4} x^3 \right]^2 \, dx \\ &= \frac{\pi}{16} \int_1^3 x^6 \, dx = \left. \frac{\pi}{16} \frac{1}{7} x^7 \right|_1^3 \\ &= \frac{\pi}{112} (3^7 - 1^7) = \frac{2186\pi}{112}\end{aligned}$$

13.4 Panjang Kurva

Panjang kurva adalah jarak total yang ditempuh oleh suatu kurva atau garis lengkung dari satu titik ke titik yang lain di sepanjang kurva tersebut. Dalam aplikasi integral, untuk menghitung panjang kurva, digunakan integral.

Secara matematis, panjang kurva dapat dihitung dengan menggunakan integral tertentu. Dalam proses perhitungan, kurva atau garis lengkung yang diberikan dapat dipecah-pecah menjadi sejumlah bagian yang sangat kecil sehingga dapat didekati oleh garis lurus. Kemudian, panjang setiap bagian kecil tersebut dihitung dengan menggunakan rumus Pythagoras dan dijumlahkan untuk mendapatkan panjang kurva secara keseluruhan.



Pada gambar AB adalah suatu bagian kurva $y = f(x)$. dan merupakan limit penjumlahan dari panjang sekumpulan tali busur $AP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-2}P_{n-1}, P_{n-1}B$ yang menghubungkan titik-titik pada busur itu. Jika banyaknya titik-titik pada kurva $y = f(x)$ banyaknya menuju tak hingga maka panjang tiap tali busur tersebut menuju nol.

Selanjutnya jika $A(a, c)$ dan $B(b, d)$ sebarang dua titik pada kurva $y = f(x)$ dengan turunan $y = f(x)$ adalah $y' = f'(x)$ yang masing-masing kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ maka panjang tali busur dinyatakan sebagai berikut :

$$s = \int_{AB} ds$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Dengan cara yang sama, jika $A(a, c)$ dan $B(b, d)$ dua titik pada kurva yang persamaannya dinyatakan dengan $x = f(y)$ dengan $x = f(y)$ turunannya adalah $x' = f'(y)$ yang masing-

masing kontinu pada $c \leq y \leq d$ maka panjang busur AB dinyatakan sebagai berikut :

$$s = \int_{AB} ds$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Tentukan panjang tali busur AB pada kurva $y^2 = 8x^2$ jika $A(0,0)$ dan $B(1,2)$

Penyelesaian :

Karena $y^2 = 8x^2$ maka $2y \frac{dy}{dx} = 16x$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{16x}{2\sqrt{8x^2}}$ dan

berubah dari $x = 0$ dan $x = 1$ sehingga

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{16x}{\sqrt{8x^2}}\right)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1 + (32)} dx$$

$$= \left(x\sqrt{33}\right)_0^1$$

$$= (\sqrt{33})$$

DAFTAR PUSTAKA

- Frank. Ayres J.R. 2004. Kalkulus Diferensial dan Integral, Erlangga, Jakarta.
- Lusiana. 2019. Pemecahan masalah melalui pemodelan matematika dalam aplikasi kalkulus integral. *Prosiding NaCoME 2019, Palembang, 27 November 2019, November, 1–9*.
- Purcell, Edwin J. 2003. Kalkulus jilid I, Erlangga, Jakarta.
- Supriyatin, T., & Masanggeni, R. C. 2022. Pengaruh efikasi diri terhadap pemahaman konsep matematika mahasiswa pada materi integral. *Research and Development Journal of Education, 8*(2), 801–807.
- Salas. 1990. Calculus 6th edition, John Wiley and Sons, Inc, Canada.
- Stroud, K.A. 2003. Matematika Teknik, Jilid I, Erlangga, Jakarta.
- Utari, R. S., & Utami, A. 2020. Kemampuan Pemahaman Konsep Mahasiswa dalam Mengidentifikasi Penyelesaian Soal Integral Tak Tentu dan Tentu. *Jurnal Pendidikan Matematika, 14*(1), 39–50.
- Wikaria Gazali, Soedadyatmodjo. 2007. Kalkulus, Graha Ilmu, Yogyakarta.

BIODATA PENULIS



Fathan Mubina Dewadi

Dosen Universitas Buana Perjuangan Karawang

Fathan Mubina Dewadi merupakan pria yang berusia 30 tahun sudah tertarik dengan bidang Pendidikan tinggi sejak tahun 2015. Sejak lulus jurusan Teknik mesin program pascasarjana Universitas Pancasila. Kini penulis sedang bekerja sebagai dosen tetap program studi Teknik mesin di Universitas Buana Perjuangan Karawang. Kini kesibukan penulis ialah lebih menghabiskan waktu untuk mengajar dan menulis. Karya-karya yang telah dibuat dimuat di media *online*, jurnal nasional, jurnal internasional dan jurnal nasional bereputasi. Sudah lebih dari 50 karya yang telah dibuat dan sedang proses untuk pembuatan buku dan bab buku.

BIODATA PENULIS



Cynthia Tri Octavianti

Staf Dosen Jurusan Pendidikan Matematika

Penulis lahir di Tegal tanggal 3 Oktober 1986. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas FKIP, Universitas Wisnuwardhana Malang. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada.

BIODATA PENULIS



Dr. H. Nanang, M.Pd.

Staf Dosen Jurusan Teknik Sipil
Institut Teknologi Garut

Penulis lahir di Bandung tanggal 1 Juli 1964. Penulis adalah dosen dpk Kopertis Wilayah VII Surabaya pada Program Studi Pendidikan FKIP Universitas Muhammadiyah Jember dari tahun 1990 s.d. 2000 dan dosen LLDIKTI Wilayah IV Jawa Barat dan Banten pada Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Sipil dan Arsitektur Institut Teknologi Garut (ITG) dari Tahun 2000 s.d. sekarang. Dari tahun 1986 s.d 1990, penulis bekerja sebagai guru di SMAN 1 Bandung, SMA 55 Asia Afrika Bandung, SMA Karya Agung Bandung, SMA Swadaya Bandung.

Penulis menyelesaikan: S1 Pendidikan di IKIP Bandung (UPI) Tahun 1989, S2 Pendidikan di IKIP Surabaya (UNESA) Tahun 1999, dan S3 Pendidikan di UPI Bandung Tahun 2009. Penulis menekuni bidang Pembelajaran. Penulis juga sebagai Tim Penilai DUPAK Kepangkatan Guru-guru di Kabupaten Garut dari tahun 2015 s.d. sekarang. Telah beberapa kali memperoleh hibah penelitian dan pengabdian pada masyarakat dari Universitas Muhammadiyah Jember, Institut Teknologi Garut, dan Ristek Dikti Kemendikbud.

BIODATA PENULIS



Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd.

Dosen FKIP Universitas Simalungun

Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd, lahir di Medan, Pendidikan S1, S2 dan S3 Prodi Pendidikan Matematika dan Matematika FMIPA USU Medan. Dosen di FKIP dan SPS Program S2. Penulis aktif mengikuti sebagai pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional dan aktif menulis Buku, Jurnal OJS, Sinta, dan Scopus.

BIODATA PENULIS



Novita Aswan

Dosen di Fakultas Pertanian Universitas Graha Nusantara
Padangsidempuan

Novita Aswan lahir di Desa Napa Batangtoru pada 9 November 1987. Ia tercatat sebagai Dosen di Fakultas Pertanian Universitas Graha Nusantara Padangsidempuan. Novita merupakan anak dari pasangan Irwan Basril Siregar (ayah) dengan Sulastri Tanjung, S.Pd (Ibu). Ia menyelesaikan Pendidikan Sarjana dari Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara pada tahun 2010. Kemudian ia melanjutkan Pendidikan Magister di Program Studi Magister Ilmu Matematika Universitas Andalas Padang dan lulus pada tahun 2014. Pada tahun yang sama telah tercatat sebagai dosen tetap di Universitas Graha Nusantara Padangsidempuan dan masih aktif melaksanakan tridarma sampai dengan saat ini.

BIODATA PENULIS



Devi Eka Wardani Meganingtyas, S.Pd., M.Si.

Dosen Program Studi Matematika
Fakultas MIPA Universitas Negeri Jakarta

Penulis lahir di Jember, pada 16 Mei 1990. Ia tercatat sebagai lulusan Universitas Jember. Wanita yang kerap disapa Devi ini adalah anak pertama dari pasangan Ahmad Rifa'i, S.Pd. (ayah) dan Sumiatun (ibu). Penulis sudah berkeluarga dan memiliki seorang anak. Saat ini, penulis menjadi seorang pengajar di salah satu perguruan tinggi. Sejak kecil, penulis selalu tertarik dengan dunia pendidikan. Hal ini kemungkinan terjadi karena pengaruh lingkungan keluarga dimana ayahnya merupakan seorang guru. Hingga saat ini penulis sudah berkontribusi menulis *book chapter* sebanyak tiga buku. Hal ini merupakan salah satu impiannya untuk dapat terus berkontribusi di dunia pendidikan.

BIODATA PENULIS



Leny Dhianti Haeruman, S.Pd., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Jakarta

Penulis lahir di Madiun, 15 Januari 1993. Penulis menempuh studi S1-nya di STKIP Kusumanegara Jakarta pada tahun 2010-2014 dengan mengambil jurusan pendidikan matematika dan melanjutkan S2 di Universitas Negeri Jakarta pada tahun 2015-2017 jurusan pendidikan matematika. Penulis mengajar sebagai guru matematika di SMA Negeri Jonggol pada tahun 2015-2018.

Tahun 2019, Penulis lolos tes calon pegawai negeri sipil dan diangkat sebagai pegawai negeri sipil di Universitas Negeri Jakarta sebagai dosen matematika dengan bidang keahlian yaitu kalkulus dan geometri. Selama menjadi dosen di Universitas Negeri Jakarta, Penulis telah menghasilkan lima artikel penelitian yang dipublikasikan pada prosiding internasional maupun jurnal nasional terakreditasi. Penelitian itu antara lain berjudul: (1) Pengaruh Pembelajaran Online Berbasis Masalah Terhadap Peningkatan Kemampuan Berpikir Kritis Matematis Ditinjau

dengan Motivasi Belajar Siswa; (2) Pengembangan Perangkat Pembelajaran Kalkulus Integral Berbasis Blended Learning Menggunakan Multi Channel Learning; (3) Pengaruh Kemampuan Pemahaman Konsep dan Penalaran Matematis terhadap Kemampuan Literasi Matematika; (4) Pengembangan Soal Ujian Sekolah Matematika Tipe Hots Tingkat SD. Selain melakukan penelitian, Penulis juga mengikuti kegiatan pengabdian kepada masyarakat dengan judul pelatihan: (1) Pelatihan Pembuatan Media Pembelajaran Berbantuan Software Geogebra Pada Materi Integral; (2) Pelatihan Pembelajaran Trigonometri berbantuan Geogebra untuk Guru Matematika SMA di Kabupaten Bogor Provinsi Jawa Barat; (4) Pelatihan pembuatan media pembelajaran berbantuan software geogebra pada materi transformasi; dan (5) Pengembangan Kompetensi Guru Sekolah Dasar Melalui Pendalaman Materi Geometri di Kecamatan Jatiasih, Kota Bekasi, Propinsi Jawa Barat.

BIODATA PENULIS



Wilminche M. D. E. L. Kelen, M.Pd.
Staf Dosen Pendidikan Matematika IKTL

Penulis lahir di Flores Timur tanggal 11 Juli 1982. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Institut Keguruan dan Teknologi Larantuka (IKTL). Menyelesaikan pendidikan S1 di Institut Keguruan dan Teknologi Larantuka dan melanjutkan S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika Program Magister Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

BIODATA PENULIS



Erwin Randjawali, S.Pd., M.Si.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Kristen Wira Wacana Sumba

Penulis menyelesaikan studi sarjana di Universitas Nusa Cendana, serta studi magister di Institut Teknologi Bandung. Hingga kini penulis merupakan dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Wira Wacana Sumba. Dalam melaksanakan tridharma perguruan tinggi, penulis menjadi pengampu dari beberapa matakuliah seperti Kalkulus, Fisika Dasar, Pemrograman Komputer, dan lain-lain. Penulis juga aktif meneliti dan menghasilkan karya ilmiah di bidang pendidikan dan fisika. Selain itu, penulis juga aktif menerapkan IPTEKS melalui kegiatan PkM kepada para guru dan kalangan umum.

BIODATA PENULIS



Nining Puji Lestari, M.Pd.

Dosen Program Studi Tadris Matematika
Fakultas Tarbiyah IAIN Fattahul Muluk Papua

Penulis lahir di Jayapura tanggal 29 November 1988. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah, IAIN Fattahul Muluk Papua. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Cenderawasih pada tahun 2012 dan melanjutkan S2 pada Program Pascasarjana Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya lulus pada tahun 2017. Menyenangi matematika sejak masa sekolah, karena suatu ungkapan oleh S. Gudder: “Inti dari matematika adalah untuk tidak membuat hal-hal sederhana menjadi rumit, tetapi untuk membuat hal-hal rumit menjadi sederhana”. Maka senangilah matematika agar masalah rumitmu dapat disederhanakan.

BIODATA PENULIS



Dr. Jan Setiawan, S.Si, M.Si

Staf Periset Badan Riset dan Inovasi Nasional
Staf Dosen Prodi Teknik Elektro Universitas Pamulang

Penulis lahir di Jakarta pada tahun 1980. Saat ini penulis adalah staf Peneliti Ahli Madya pada Badan Riset dan Inovasi Nasional (BRIN). Penulis menyelesaikan studi S1 di prodi Fisika Institut Pertanian Bogor pada tahun 2003. Penulis melanjutkan studi S2 di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia yang diselesaikan pada tahun 2010. Penulis menyelesaikan studi S3 pada tahun 2015 di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia. Bidang kepakaran penelitian Penulis adalah teknik material. Selain berkarir sebagai peneliti Penulis juga aktif menjadi pengajar pada Program Studi Teknik Elektro - Universitas Pamulang. Penulis juga aktif menjadi editor untuk jurnal ilmiah nasional dan mitra bestari untuk jurnal ilmiah baik nasional maupun internasional. Penulis mulai berkecimpung dalam penulisan buku untuk bidang MIPA dan keteknikan semenjak tahun 2020.

Email Penulis: jansetiawan.lecturer@gmail.com

BIODATA PENULIS



Sedyanto, ST,MM

Dosen di Universitas Mercu Buana

Sedyanto, ST ,MM adalah salah satu dosen di Universitas Mercu Buana. Ia menyelesaikan Pendidikan sarjana program studi teknik kimia di Institut Teknologi Sepuluh Nopember tahun 1995. Program Magister Manajemen diselesaikannya di Universitas Budi Luhur tahun 2008. Penulis sudah menulis beberapa artikel ilmiah yang telah diterbitkan dalam jurnal nasional.