

MATEMATIKA TERAPAN DALAM ILMU PENGETAHUAN DAN TEKNOLOGI

Lulut Alfaris, Rianto Wibowo, Zaitun,
Hanna Hilyati Aulia, Aprizal Resky



MATEMATIKA TERAPAN DALAM ILMU PENGETAHUAN DAN TEKNOLOGI

**Lulut Alfaris
Rianto Wibowo
Zaitun
Hanna Hilyati Aulia
Aprizal Resky**



GETPRESS INDONESIA

Matematika Terapan alam Ilmu Pengetahuan dan Teknologi

Penulis :

Lulut Alfaris
Rianto Wibowo
Zaitun
Hanna Hilyati Aulia
Aprizal Resky

ISBN : 978-623-125-590-7

Editor : Dr. Oktavianis, M.Biomed.

Tri Putri Wahyuni, S.Pd.

Penyunting: Yuliatrini Novita, M.Hum.

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd.

Penerbit: CVGETPRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi:

Jl. Palarik RT 01 RW 06, Kelurahan Air Pacah
Kecamatan Koto Tengah, Padang, Sumatera Barat

website: www.getpress.co.id

email: adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, Januari 2025

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan puji syukur kehadiran Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayahNya, maka Penulisan Buku dengan judul *Matematika Terapan alam Ilmu Pengetahuan dan Teknologi* dapat diselesaikan dengan kerjasama tim penulis. *Matematika Terapan alam Ilmu Pengetahuan dan Teknologi* merupakan buku ini berisikan bahasan mengenai pengantar matematika terapan, matematika dalam ilmu fisika, matematika dalam teknik dan teknologi, matematika dalam ilmu biologi dan kedokteran, dan matematika dalam ekonomi dan keuangan.

Buku ini masih banyak kekurangan dalam penyusunannya. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan dan kesempurnaan buku ini selanjutnya. Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam proses penyelesaian Buku ini. Semoga Buku ini dapat menjadi sumber referensi dan literatur yang mudah dipahami.

Padang, Januari 2025

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR.....	iv
BAB 1 PENGANTAR MATEMATIKA TERAPAN	1
1.1 Pendahuluan.....	1
1.2 Sejarah Singkat Matematika Terapan.....	2
1.3 Sejarah Singkat Matematika Terapan.....	5
1.3.1 Penerapan dalam Fisika	5
1.3.2 Penerapan dalam Kimia	5
1.3.3 Penerapan dalam Biologi.....	6
1.4 Matematika dalam Teknologi	6
1.4.1 Aplikasi dalam Komputasi dan Algoritma	6
1.4.2 Aplikasi dalam Data <i>Science</i> dan AI	7
1.4.3 Aplikasi dalam Teknik	7
1.5 Aplikasi Matematika Terapan.....	8
1.5.1 Pemodelan Cuaca dan Iklim	8
1.5.2 Pemodelan Epidemi dan Penyebaran Virus	9
1.5.3 Simulasi Kendaraan Otonom.....	9
BAB 2 MATEMATIKA DALAM ILMU FISIKA	11
2.1 Pendahuluan.....	11
2.2 Matematika Sebagai Bahasa Fisika	12
2.2.1 Kalkulus Diferensial dan Integral.....	12
2.2.2 Aljabar Linier.....	14
2.2.3 Teori Grup	15
2.3 Matematika dan Fisika Modern	16
2.3.1 Teori Relativitas Einstein	16
2.3.2 Fisika Partikel	20
2.4 Matematika dalam Fisika Eksperimen.....	24
2.4.1 Analisis Statistik.....	24
2.4.2 Pemodelan Numerik dan Simulasi.....	27
DAFTAR PUSTAKA	31
BAB 3 MATEMATIKA DALAM TEKNIK DAN TEKNOLOGI.....	33
3.1 Pendahuluan.....	33
3.2 Persamaan Diferensial dalam Pemodelan	34
3.3 Aljabar Linier dalam Teknik.....	41
DAFTAR PUSTAKA	48
BAB 4 MATEMATIKA DALAM ILMU BIOLOGI DAN KEDOKTERAN	49
4.1 Pendahuluan.....	49
4.2 Model Matematika dalam Populasi	50

4.3 Model Dinamika Populasi Sederhana.....	54
4.3.1 Model Logistik	56
4.4 Sistem Dinamik	58
4.5 Model Populasi dengan Interaksi.....	59
4.6 Model Epidemik SIR (<i>Susceptible, Infected, Recovered</i>).....	62
DAFTAR PUSTAKA	67
BAB 5 MATEMATIKA DALAM EKONOMI DAN KEUANGAN	69
5.1 Pengantar Matematika Ekonomi dan Keuangan.....	69
5.2 Aljabar dan Fungsi dalam Ekonomi	71
5.2.1 Fungsi Linear dalam Analisis Ekonomi.....	71
5.2.2 Persamaan dan Sistem Persamaan.....	72
5.2.3 Fungsi Non-Linear : Kuadrat, Ekponensial, dan Logaritma	74
5.3 Optimasi dalam Ekonomi.....	75
5.3.1 Teori Maksimum dan Minimum.....	75
5.3.2 Aplikasi Derivatif dalam Pengambilan Keputusan Ekonomi.....	76
5.3.3 Fungsi Lagrange dan Kendala dalam Optimasi	77
5.3.4 Penggunaan Metode Optimasi dalam Keuangan.....	79
5.4 Teori Matriks dan Aplikasinya dalam Ekonomi	80
5.4.1 Pengantar Matriks dan Determinan.....	80
5.4.2 Sistem Persamaan Linear dan Matriks	82
5.4.3 Aplikasi Matriks dalam Model Ekonomi <i>Input-Output</i>	83
5.5 Model Linear Programming dalam Ekonomi	84
5.5.1 Pengantar Program Linear	84
5.5.2 Metode Simpleks	86
5.5.3 Aplikasi Linear <i>Programming</i> dalam Ekonomi dan Keuangan.....	87
5.6 Teori Permainan dan Strategi dalam Ekonomi	89
5.6.1 Pengenalan Teori Permainan	89
5.6.2 Strategi Dominan dan Ekuilibrium Nash	90
5.6.3 Penerapan Teori Permainan dalam Kompetensi Ekonomi.....	90
5.6.4 Strategi Optimal dalam Negosiasi dan <i>Bidding</i>	91
5.6.5 Permainan Berulang dan Dinamis dalam Pasar Keuangan.....	92
DAFTAR PUSTAKA	93
BIODATA PENULIS	94

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1 Buku Euclid's Elements.....	3
Gambar 4. 1 Diagram Proses Dalam Pemodelan Matematika Bidang Biologi	53
Gambar 4. 2 Solusi Model Populasi Logistik.....	57

BAB 1

PENGANTAR MATEMATIKA

TERAPAN

Oleh Lulut Alfaris

1.1 Pendahuluan

Matematika terapan telah menjadi tulang punggung perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi modern. Dalam sejarah peradaban manusia, matematika berkembang bukan hanya sebagai alat untuk menyelesaikan perhitungan aritmatika sederhana, melainkan juga sebagai bahasa universal untuk menggambarkan fenomena alam dan teknologi. Berbagai cabang matematika, seperti kalkulus, aljabar linier, teori probabilitas, hingga analisis numerik, memainkan peran yang sangat penting dalam memahami, memprediksi, dan mengontrol sistem yang kompleks di berbagai disiplin ilmu.

Matematika terapan memfasilitasi pemodelan fenomena di dunia nyata, mulai dari perubahan suhu atmosfer dalam meteorologi, hingga simulasi dinamika fluida dalam desain pesawat terbang. Dengan kemajuan teknologi komputasi, aplikasi matematika telah meluas lebih jauh ke dalam berbagai domain, seperti ilmu data, kecerdasan buatan, dan teknologi informasi, yang pada gilirannya mempercepat perkembangan inovasi teknologi.

Matematika terapan telah menjadi penggerak utama bagi inovasi teknologi. Peningkatan daya komputasi dan pengembangan metode numerik yang lebih efisien telah memungkinkan para ilmuwan dan insinyur menangani permasalahan yang sebelumnya tidak dapat diselesaikan. Hal ini berkontribusi pada akselerasi inovasi di berbagai bidang untuk menghadapi tantangan di masa depan.

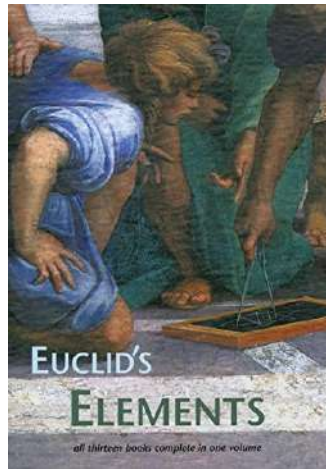
1.2 Sejarah Singkat Matematika Terapan

Sejak masa Yunani kuno, matematika sudah digunakan untuk menyelesaikan masalah praktis, seperti menentukan volume dan luas lahan pertanian. Namun, perkembangan yang lebih signifikan terjadi pada era Renaissance, ketika matematika mulai digunakan dalam pemahaman gerak planet oleh Johannes Kepler dan Isaac Newton. Teori Newton tentang kalkulus, misalnya, membuka pintu bagi banyak aplikasi matematika dalam fisika, terutama dalam pemodelan gerak dan gaya. Di abad ke-20, perkembangan komputasi memungkinkan penerapan matematika di berbagai bidang baru, seperti rekayasa, biologi, ekonomi, dan bahkan seni.

1. Zaman Kuno: Geometri untuk Arsitektur dan Pertanian

Pada masa peradaban awal, matematika berkembang dari kebutuhan praktis dalam kehidupan sehari-hari. Bangsa Mesir dan Babilonia menggunakan geometri untuk mengukur tanah dan mendirikan bangunan, terutama setelah banjir Sungai Nil yang sering mengubah batas lahan. Geometri juga berperan dalam membangun struktur arsitektur monumental seperti Piramida Giza. Di Yunani Kuno, tokoh seperti Euklides merumuskan teorema-teorema dalam bukunya, *Elements*, yang menjadi dasar geometri selama ribuan tahun. Aplikasi matematika pada

masa ini juga terlihat dalam perhitungan astronomi dan kalender.



Gambar 1. 1 Buku Euclid's Elements

2. *Renaissance*: Kalkulus dan Fisika Klasik

Renaissance menandai kebangkitan intelektual di Eropa, dengan matematika mulai digunakan untuk memahami fenomena alam secara lebih mendalam. Pada abad ke-17, Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz secara independen mengembangkan kalkulus, yang menjadi alat esensial untuk menganalisis perubahan. Kalkulus memungkinkan pemodelan gerak planet dan benda di bawah pengaruh gravitasi. Newton, dalam karyanya *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, memperkenalkan persamaan gerak dan hukum gravitasi yang menjadi dasar fisika klasik. Aplikasi matematika berkembang pesat di bidang optik, mekanika, dan astronomi, membantu membangun fondasi bagi ilmu pengetahuan modern.

3. Abad ke-20: Komputasi dan Optimasi dalam Teknologi

Abad ke-20 membawa revolusi baru dengan munculnya komputer dan teknik komputasi numerik. Matematikawan seperti John von Neumann mengembangkan arsitektur komputasi dan metode simulasi numerik untuk memecahkan masalah-masalah ilmiah yang rumit. Optimasi menjadi salah satu cabang penting dalam teknik dan industri, terutama dalam desain manufaktur, transportasi, dan manajemen logistik. Pada saat yang sama, kriptografi modern berkembang pesat dengan munculnya algoritma seperti RSA, yang memastikan keamanan komunikasi di era digital. Simulasi numerik seperti Finite Element Analysis (FEA) juga memungkinkan perancangan struktur dan material yang lebih efisien.

4. Era Modern: Matematika dalam Ilmu Data, AI, dan Komputasi Kuantum

Di abad ke-21, matematika terapan telah berkembang ke arah yang lebih kompleks, terutama dengan munculnya ilmu data, kecerdasan buatan (AI), dan komputasi kuantum. Ilmu data menggunakan teknik matematika seperti statistika inferensial dan machine learning untuk mengekstrak wawasan dari dataset besar (big data). AI menggunakan jaringan saraf tiruan dan algoritma optimasi untuk menciptakan sistem otomatis yang mampu melakukan tugas kompleks seperti pengenalan wajah dan analisis teks.

Sementara itu, komputasi kuantum menawarkan paradigma baru dalam pemrosesan informasi, dengan potensi untuk menyelesaikan masalah yang tidak dapat diselesaikan dengan komputer klasik. Algoritma kuantum seperti Algoritma Shor dan Algoritma Grover bergantung pada prinsip matematika seperti

aljabar linier dan teori grup, membuka jalan untuk inovasi di bidang kriptografi dan optimasi komputasi.

1.3 Sejarah Singkat Matematika Terapan

1.3.1 Penerapan dalam Fisika

Fisika, sebagai ilmu yang mengkaji fenomena alam, sangat mengandalkan matematika dalam menjelaskan dan memprediksi berbagai fenomena fisik. Matematika terapan, terutama dalam bentuk kalkulus dan persamaan diferensial, menjadi alat utama untuk memodelkan gerakan partikel, gelombang, serta interaksi energi. Sebagai contoh, Hukum Gerak Newton dijelaskan menggunakan kalkulus diferensial untuk mengkaji hubungan antara massa, percepatan, dan gaya yang bekerja pada objek.

Ilustrasi:

Grafik Gerak Parabola: Diagram yang menggambarkan lintasan gerak parabola benda yang dilempar dengan sudut tertentu, menunjukkan hubungan antara kecepatan awal, percepatan gravitasi, dan waktu tempuh.

1.3.2 Penerapan dalam Kimia

Dalam kimia, matematika digunakan untuk memodelkan reaksi kimia dan kinetika molekuler. Misalnya, Hukum Laju Reaksi menggunakan persamaan diferensial untuk menggambarkan laju perubahan konsentrasi zat selama reaksi berlangsung. Selain itu, teori kuantum dalam kimia banyak menggunakan aljabar linier dan analisis numerik untuk memodelkan distribusi elektron di sekitar inti atom.

Ilustrasi:

Diagram Energi Aktivasi: Diagram yang menunjukkan profil energi selama reaksi kimia berlangsung, menyoroti titik energi aktivasi yang harus dicapai untuk terjadinya reaksi.

1.3.3 Penerapan dalam Biologi

Dalam biologi, aplikasi matematika telah berkembang pesat, terutama dengan munculnya biologi komputasional. Pemodelan populasi organisme, misalnya, sering kali menggunakan persamaan Lotka-Volterra untuk menggambarkan interaksi antara predator dan mangsa. Di sisi lain, dalam bioinformatika, algoritma matematika seperti algoritma pencarian sekuens membantu dalam analisis genom dan proteom.

Ilustrasi:

Grafik Dinamika Populasi Predator-Mangsa: Grafik yang menggambarkan interaksi populasi antara dua spesies (predator dan mangsa), menunjukkan pola fluktuasi populasi dalam ekosistem.

1.4 Matematika dalam Teknologi

1.4.1 Aplikasi dalam Komputasi dan Algoritma

Matematika adalah inti dari pengembangan algoritma komputasi. Dalam bidang ini, algoritma untuk pengolahan sinyal, kompresi data, hingga pencarian informasi bergantung pada teknik matematika seperti teori graf dan teori kompleksitas. Algoritma kriptografi, misalnya, menggunakan teori bilangan dan aljabar untuk memastikan keamanan dalam transmisi data.

Ilustrasi:

Diagram Algoritma Kriptografi RSA: Diagram yang menunjukkan bagaimana pasangan kunci publik dan privat digunakan dalam proses enkripsi dan dekripsi pesan.

1.4.2 Aplikasi dalam Data Science dan AI

Dalam Data Science, metode statistik dan probabilitas adalah komponen utama yang digunakan dalam machine learning dan kecerdasan buatan (AI). Teknik seperti regresi, klusterisasi, dan jaringan saraf tiruan memanfaatkan prinsip matematika untuk menemukan pola, melakukan prediksi, dan membuat keputusan berbasis data.

Ilustrasi:

Diagram Jaringan Saraf Tiruan (*Neural Network*): Diagram yang menunjukkan struktur jaringan saraf, dengan lapisan input, lapisan tersembunyi, dan lapisan output.

1.4.3 Aplikasi dalam Teknik

Dalam bidang teknik, matematika digunakan untuk simulasi dan optimasi. Teknik-teknik seperti *finite element analysis* (FEA) digunakan untuk memprediksi bagaimana material atau struktur akan berperilaku di bawah tekanan. Simulasi numerik ini membantu insinyur merancang struktur yang lebih aman dan efisien.

Ilustrasi:

Diagram *Finite Element Analysis* (FEA): Diagram simulasi struktur jembatan yang menunjukkan distribusi tekanan dan gaya yang bekerja pada struktur tersebut.

1.5 Aplikasi Matematika Terapan

1.5.1 Pemodelan Cuaca dan Iklim

Pemodelan cuaca merupakan salah satu aplikasi paling signifikan dari matematika terapan, yang memberikan kontribusi penting dalam memahami dan memprediksi fenomena atmosfer. Melalui penggunaan persamaan diferensial parsial, para ilmuwan iklim dapat menyusun model matematis yang menggambarkan bagaimana elemen-elemen atmosfer, seperti suhu, tekanan udara, dan kecepatan angin, berinteraksi dan berubah seiring waktu. Proses ini tidak hanya memungkinkan pemahaman yang lebih baik terhadap dinamika atmosfer tetapi juga menghasilkan prediksi cuaca yang akurat, yang sangat berguna dalam perencanaan berbagai aktivitas, mulai dari pertanian hingga perjalanan.

Dalam konteks pemodelan ini, diagram dan grafik simulasi cuaca memainkan peran penting dalam visualisasi data yang dihasilkan. Grafik-grafik ini menyajikan informasi tentang kecepatan angin, suhu, dan tekanan udara dengan cara yang mudah dipahami. Misalnya, kecepatan angin dapat ditunjukkan dengan panah yang mengindikasikan arah dan kekuatan, sementara suhu dapat divisualisasikan melalui skema warna yang menggambarkan variasi temperatur di suatu wilayah. Dengan demikian, data yang kompleks dapat disajikan secara intuitif, memungkinkan pengguna, baik peneliti maupun masyarakat umum, untuk mengambil keputusan yang lebih baik berdasarkan informasi yang akurat.

Selain itu, teknologi pemodelan cuaca yang terus berkembang memungkinkan peramalan cuaca dalam jangka waktu yang lebih panjang. Model-model ini tidak hanya mengandalkan data historis, tetapi juga mengintegrasikan

informasi terbaru dari berbagai sumber, termasuk satelit dan sensor meteorologi. Dengan demikian, kemajuan dalam pemodelan cuaca dan iklim dapat berdampak luas, tidak hanya pada sektor terkait, tetapi juga dalam upaya mitigasi bencana alam, perencanaan kota, dan kebijakan lingkungan. Seiring dengan tantangan perubahan iklim yang semakin meningkat, pentingnya pemodelan cuaca yang akurat dan efektif akan terus bertambah, memberikan landasan bagi kebijakan dan tindakan yang lebih responsif terhadap kondisi atmosfer yang dinamis. Ilustrasi:

Grafik Simulasi Cuaca: Diagram yang menunjukkan hasil simulasi cuaca, dengan data visualisasi kecepatan angin, suhu, dan tekanan udara di wilayah tertentu.

1.5.2 Pemodelan Epidemi dan Penyebaran Virus

Matematika juga digunakan dalam memodelkan penyebaran penyakit. Model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) sering digunakan untuk memprediksi bagaimana suatu penyakit menular akan menyebar dalam populasi, berdasarkan tingkat penularan dan tingkat pemulihan.

Ilustrasi:

Grafik Model SIR: Grafik yang menunjukkan perubahan jumlah individu dalam setiap kategori (terpapar, terinfeksi, pulih) seiring waktu selama berlangsungnya suatu epidemi.

1.5.3 Simulasi Kendaraan Otonom

Dalam teknologi kendaraan otonom, matematika memainkan peran penting dalam pengolahan sinyal dan optimasi jalur. Algoritma seperti algoritma Dijkstra digunakan untuk menghitung jalur tercepat atau paling efisien bagi kendaraan untuk mencapai tujuan.

Ilustrasi:

Diagram Algoritma Jalur Terpendek: Diagram yang menggambarkan bagaimana algoritma jalur terpendek digunakan dalam sistem navigasi kendaraan otonom untuk mencari rute terbaik.

BAB 2

MATEMATIKA DALAM ILMU FISIKA

Oleh Rianto Wibowo

2.1 Pendahuluan

Telah lama ada hubungan erat antara matematika dan fisika dalam perkembangan teori ilmiah. Matematika, sebagai bahasa universal yang abstrak dan tepat, memungkinkan fisikawan menggambarkan hukum alam secara kuantitatif. Dengan bantuan matematika, fisika mampu menjelaskan fenomena alam secara logis dan sistematis, memprediksi kejadian, dan menguji keabsahan teori melalui perhitungan dan eksperimen.

Fisika menggunakan berbagai konsep matematika dasar untuk menjelaskan fenomena alam secara kuantitatif. Matematika menyediakan struktur logis dan ketepatan untuk menganalisis hukum fisika, membuat prediksi, dan melakukan perhitungan dalam berbagai skenario. Konsep dasar matematika ini sangat penting untuk pemahaman fisika yang komprehensif.

Di bawah ini adalah konsep dasar matematika yang digunakan dalam fisika. Matematika dasar, seperti analisis, aljabar linier, persamaan diferensial, teori grup, trigonometri, dan statistik, menjadi dasar dari hampir semua fisika teoretis. Tanpa alat matematika tersebut, fisikawan akan kesulitan merumuskan, menjelaskan, dan memprediksi fenomena alam yang kita amati. Memahami konsep dasar matematika ini

merupakan langkah awal menuju pembelajaran fisika yang lebih komprehensif (Sri Astutik :2012.)

2.2 Matematika Sebagai Bahasa Fisika

Fisika dan matematika memiliki keterkaitan yang sangat erat satu sama lain. Dalam pembahasan fisika, matematika tidak hanya digunakan untuk menjelaskan fenomena, tetapi juga untuk memprediksi hasil percobaan yang belum dilakukan.

2.2.1 Kalkulus Diferensial dan Integral

Kalkulus Diferensial dan Integral digunakan dalam Fisika mekanika dan dinamika, yakni untuk mempelajari gerak partikel. Newton dan Leibniz mengembangkan kalkulus pada abad ke-17 untuk memahami bagaimana kecepatan dan percepatan sebuah benda berubah seiring waktu. Kalkulus juga digunakan untuk menghitung luas dan volume dalam berbagai kasus fisika.

Kalkulus diferensial berfokus pada perubahan suatu kuantitas dalam waktu yang sangat kecil yaitu melalui konsep turunan. Dalam mekanika, kalkulus diferensial digunakan untuk menghitung laju perubahan posisi, kecepatan dan percepatan (Sri Astutik :2012.).

Pada pembahasan mengenai gerak lurus berubah beraturan, yang berarti bahwa kecepatan benda selama bergerak tidaklah tetap. Saat benda bergerak dengan nilai posisi X sebagai fungsi waktu (t) , maka kecepatan $v(t)$ dihasilkan dari laju perubahan posisi X terhadap waktu (t) atau didefinisikan sebagai turunan posisi terhadap waktu :

$$v(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

Persamaan kecepatan sebagai fungsi waktu $v(t)$ jika diturunkan lagi maka akan diperoleh percepatan $(a(t))$, dengan kata lain, percepatan pada waktu t adalah turunan

pertama dari fungsi kecepatan dan merupakan turunan kedua dari posisi yang merupakan fungsi waktu yaitu:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2X(t)}{dt}$$

Penggunaan diferensial dalam ilmu fisika untuk menentukan kecepatan dan percepatan dari posisi partikel terlihat seperti pada contoh berikut :

Jika posisi sebuah partikel memenuhi persamaan $X = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (t dalam detik dan s dalam meter), Maka persamaan kecepatan dan percepatan sebagai fungsi waktu adalah :

$$X(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{dX}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

Kalkulus integral digunakan untuk menghitung total perubahan suatu kuantitas sepanjang interval waktu tertentu. Dalam fisika mekanika, kalkulus integral digunakan untuk menghitung perpindahan dari kecepatan, perubahan kecepatan dari percepatan, serta menghitung energi dari gaya yang bekerja pada benda.

Posisi $X(t)$ sebuah partikel dapat dihitung dengan mengintegalkan kecepatan terhadap waktu, selanjutnya kecepatan $V(t)$ dihasilkan dari pengintegralan persamaan percepatan terhadap waktu, dengan persamaan :

$$X(t) = \int V(t) dt$$

$$V(t) = \int a(t) dt$$

2.2.2 Aljabar Linier

Memiliki peran yang signifikan dalam mekanika kuantum dan teori relativitas umum. Dalam mekanika kuantum, aljabar linier diterapkan untuk merepresentasikan keadaan sistem fisika dengan menggunakan: 1) vektor dan 2) matriks.

Vektor dalam fisika menggambarkan besaran yang memiliki besar dan arah, biasanya ditunjukkan dengan huruf tebal atau simbol panah di atasnya, seperti vektor **A** atau $\vec{A}$ (Sri Astutik :2012.).

Pemanfaatan vektor nampak dalam penulisan hukum kedua Newton, yaitu:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Persamaan diatas menunjukkan bahwa **F** dan **a** pada penulisan tersebut merupakan vektor sehingga selain memiliki besar juga memiliki arah.

Vektor digunakan untuk menggambarkan lokasi dalam ruang dua dimensi dan tiga dimensi. Komponen vektor dalam ruang dua dimensi terdiri dari vektor satuan yang mengarah ke sumbu *x* dan *y*, sementara komponen vektor dalam ruang tiga dimensi terdiri dari vektor satuan yang mengarah ke sumbu *x*, *y*, dan *z*. Penggambaran vektor posisi dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \quad (\text{dua dimensi})$$

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (\text{tiga dimensi})$$

Pada vektor juga dapat dilakukan operasi aljabar yaitu penjumlahan, pengurangan dan perkalian. Pada penjumlahan dan selisih vektor dilakukan operasi penjumlahan dan selisih untuk vektor satuan pada arah yang sama. Perkalian vektor terdiri atas perkalian titik (dot) dan perkalian silang (kros).

Pada pembahasan medan magnet, penggunaan vektor terlihat pada perkalian vektor besaran kuat medan magnet ($\mathbf{B}$) dan vektor kecepatan ($\mathbf{v}$), pada persamaan menentukan gaya Lorentz :

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Pada persamaan diatas menunjukkan bahwa $\mathbf{F}$ (gaya Lorentz), $\mathbf{v}$ (kecepatan gerak partikel) dan $\mathbf{B}$ (kuat medan magnet) merupakan vektor.

2.2.3 Teori Grup

Digunakan untuk menganalisis simetri pada partikel subatom. Simetri memiliki peran krusial dalam fisika kontemporer, khususnya dalam teori partikel dasar. Teori grup digunakan untuk menggambarkan simetri yang ada di alam dan menjadi landasan bagi model-model fisika partikel, termasuk Model Standar (Husin Alatas ; 2014).

Penerapan teori grup menggunakan matriks untuk menggambarkan sifat simetris tersebut. Sebagai contoh, persamaan yang terdapat dalam sub-bab sebelumnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = \begin{bmatrix} A_x & A_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix}$$

Maka apabila didapati pula pernyataan lain:

$$\mathbf{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

Kedua persamaan tersebut dapat ditulis bersama menjadi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix}$$

Kelebihan dari representasi menggunakan matriks adalah ketika persamaan di fisika modern memiliki begitu banyak dimensi sehingga sulit untuk di representasikan dengan aljabar linier saja.

2.3 Matematika dan Fisika Modern

2.3.1 Teori Relativitas Einstein

Memanfaatkan geometri diferensial untuk menggambarkan gravitasi sebagai suatu kelengkungan pada ruang-waktu. Teori relativitas baik yang khusus maupun yang umum, yang diperkenalkan oleh Albert Einstein, memanfaatkan geometri diferensial dan tensor untuk menjelaskan hubungan antara ruang dan waktu. Matematika ini berperan dalam meramalkan fenomena yang sulit dipahami tanpa adanya konsep ruang-waktu yang melengkung, seperti pergeseran merah akibat gravitasi atau jalur cahaya yang melintasi objek besar.

Geometri Diferensial merupakan bidang matematika yang fokus pada analisis bentuk dan struktur geometris melalui penerapan konsep turunan dan integral pada manifold (permukaan yang halus). Manifold adalah suatu ruang yang terlihat seperti ruang Euclidean pada skala lokal, tetapi dapat memiliki bentuk yang lebih rumit secara keseluruhan. Dalam teori relativitas umum, ruangwaktu diwakili sebagai suatu manifold yang memiliki empat dimensi, yakni tiga dimensi ruang ditambah satu dimensi waktu (Husin Alatas ; 2014).

Contoh: Manifold Ruangwaktu

Dalam teori relativitas umum, ruangwaktu bukanlah datar (Euclidean), tetapi melengkung akibat adanya massa

dan energi. Misalnya, deformasi ruangwaktu di sekitar benda berat seperti bintang atau planet dapat menyebabkan fenomena gravitasi.

Tensor: Alat untuk Menggambarkan Ruang dan Waktu

Tensor adalah objek matematika yang digunakan dalam berbagai dimensi untuk menggambarkan hubungan antara komponen ruang dan waktu. Tensor yang paling sering digunakan dalam fisika relativitas umum adalah tensor metrik dan tensor energi-momentum.

Tensor Metrik

Tensor metrik, biasanya dilambangkan sebagai $g_{\mu\nu}$ mendefinisikan jarak di antara titik-titik dalam manifold ruangwaktu. Dalam ruang Euclidean, jarak antara dua titik ditentukan oleh teorema Pythagoras. Dalam ruangwaktu, jarak (disebut interval) antara dua peristiwa ditentukan oleh tensor metrik (Husin Alatas ; 2014).

Rumus dasar interval ruangwaktu dalam koordinat Minkowski (ruang datar) adalah:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Di mana ds adalah interval ruangwaktu, c adalah kecepatan cahaya, dt adalah perubahan waktu, dan dx , dy , dz adalah perubahan koordinat ruang. Namun, dalam ruangwaktu yang melengkung, tensor metrik $g_{\mu\nu}$ mengubah interval ini menjadi:

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Dimana $g_{\mu\nu}$ menggambarkan bagaimana ruang dan waktu melengkung.

Tensor Energi-Momentum

Tensor energi-momentum, $T_{\mu\nu}$, menggambarkan distribusi energi dan momentum dalam ruangwaktu. Tensor ini digunakan dalam Persamaan Medan Einstein untuk menunjukkan bagaimana materi dan energi mempengaruhi kelengkungan ruangwaktu:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Dimana:

- o $R_{\mu\nu}$ adalah tensor Ricci yang menggambarkan kelengkungan lokal,
- o $g_{\mu\nu}$ adalah tensor metrik,
- o R adalah skalar Ricci (jejak dari tensor Ricci),
- o G adalah konstanta gravitasi, dan
- o c adalah kecepatan cahaya.

Kaitan antara Geometri Diferensial dan Fisika Ruangwaktu yang Terbendung

Dalam teori relativitas umum, keberadaan massa dan energi suatu objek menyebabkan dijalankannya kelengkungan ruangwaktu di sekitarnya. Sebagai contoh, Bumi menghasilkan kelengkungan ruangwaktu yang mengakibatkan benda jatuh ke tanah, bukan karena "gaya gravitasi" yang umum dipahami, melainkan karena lintasan alami dalam ruangwaktu yang melengkung.

Lintasan Geodesik: Sebuah partikel bergerak mengikuti jalur geodesik dalam ruangwaktu yang melengkung. Geodesik merupakan lintasan terpendek yang menghubungkan dua titik di dalam manifold, serupa dengan garis lurus pada ruang datar (Husin Alatas ; 2014).

Bukti adanya kelengkungan ruang waktu.

Cahaya yang berasal dari bintang yang jauh mengalami pembelokan ketika melewati dekat medan gravitasi pembiasan cahaya. Fenomena pembengkokan cahaya akibat gravitasi, yang terlihat selama gerhana matahari pada tahun 1919, menjadi matahari, karena cahaya mengikuti jalur geodesik yang melengkung. Ilustrasi Penerapan Geometri Diferensial dan Tensor dalam Ilmu Fisika.

Lubang Hitam

Lubang hitam merupakan entitas yang memiliki gaya gravitasi yang sangat kuat, sehingga dapat membengkokkan ruang-waktu hingga mencapai titik di mana cahaya tidak dapat keluar. Tensor metrik digunakan untuk menggambarkan ruangwaktu di sekitar lubang hitam, seperti dalam solusi Schwarzschild:

$$ds^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Dimana M adalah massa lubang hitam dan r adalah jarak dari pusatnya

Gelombang Gravitasi

Gelombang Gravitasi merupakan riak yang dihasilkan oleh perubahan dalam medan gravitasi, yang dapat mengalir melalui ruang dan waktu. Gelombang gravitasi merupakan variasi dalam lengkungan ruangwaktu yang bergerak seperti gelombang. Penemuan gelombang gravitasi oleh LIGO pada tahun 2015 merupakan bukti nyata dari teori Einstein yang menyatakan bahwa ruangwaktu dapat bergetar (Husin Alatas ; 2014).

2.3.2 Fisika Partikel

Teori grup merupakan bagian dari matematika yang fokus pada penelitian tentang simetri. Dalam fisika partikel, teori grup diterapkan untuk menganalisis karakteristik simetri dari partikel-partikel dasar serta interaksi di antara mereka.

1. Grup Lie dan Simetri

Grup Lie merupakan salah satu jenis grup yang memiliki peranan yang sangat krusial dalam fisika partikel. Grup ini berfungsi untuk merepresentasikan simetri yang bersifat kontinu, seperti rotasi atau pergeseran. Dalam fisika partikel, grup Lie berfungsi untuk menjelaskan simetri yang terdapat dalam interaksi dasar seperti interaksi elektromagnetik, lemah, dan kuat (Miftachul Hadi : 2021).

- a. **Grup $SU(2)$** : digunakan untuk melukiskan simetri spin dan isospin. Sebagai contoh, simetri ini mencerminkan interaksi lemah yang terjadi di antara partikel-partikel subatomik seperti elektron, neutrino, dan lainnya.
- b. **Grup $SU(3)$** : Diterapkan dalam Kromodinamika Kuantum (QCD) untuk menjelaskan simetri kuat yang mengikat quark menjadi hadron, seperti proton dan neutron.

2. Representasi Kelompok

Dalam fisika partikel, partikel dijelaskan melalui representasi grup simetri. Representasi ini menggambarkan perubahan partikel saat mengalami transformasi simetri. Sebagai contoh, quark merupakan partikel yang memiliki muatan warna sesuai dengan simetri $SU(3)$. Dalam QCD, interaksi mereka berlangsung melalui pertukaran gluon, mengikuti prinsip-prinsip yang ditentukan oleh teori grup ini (Miftachul Hadi : 2021).

3. Teorema Noether

Teorema Noether adalah prinsip dalam fisika dan matematika yang menghubungkan simetri dalam suatu sistem dengan hukum kekekalan. Teorema ini diusulkan oleh matematikawan Emmy Noether pada awal abad ke-20 dan menjadi salah satu fondasi penting dalam teori fisika modern. Konsep ini menjelaskan bahwa setiap simetri yang ada dalam sebuah sistem fisik akan menghasilkan hukum kekekalan tertentu, seperti kekekalan energi, momentum, atau muatan. Teorema Noether mengaitkan simetri dengan prinsip hukum kekekalan. Setiap simetri yang berlangsung terus-menerus dalam teori fisika berhubungan dengan besaran yang dijaga. Sebagai contoh, simetri translasi berimplikasi pada pelestarian momentum, sementara simetri rotasi berhubungan dengan pelestarian momentum sudut (Miftachul Hadi : 2021).

Contoh Penggunaan

- a. Simetri Isospin $SU(2)$: Proton dan neutron dipandang sebagai dua konfigurasi berbeda dari partikel yang sama dalam kerangka simetri $SU(2)$. Perubahan antara proton dan neutron dapat dianalogikan dengan rotasi dalam ruang isospin.
- b. Simetri warna $SU(3)$ dalam Kromodinamika Kuantum (QCD): Terdapat tiga tipe quark (merah, hijau, dan biru) yang menjadi fondasi dari simetri warna. Gabungan mereka menghasilkan partikel seperti proton dan neutron yang tidak memiliki muatan warna.

Kombinatorika dalam Fisika Partikel

Kombinatorika merupakan metode untuk menghitung jumlah kemungkinan cara partikel-partikel dapat diatur atau berinteraksi, serta untuk menghitung

keadaan atau konfigurasi dalam sistem fisik (Miftachul Hadi : 2021).

Prinsip Eksklusi Pauli

Pada pembahasan statistik fermion, prinsip eksklusi Pauli menyatakan bahwa tidak ada dua fermion (seperti elektron) yang dapat menempati keadaan kuantum yang sama. Pernyataan ini merupakan aplikasi langsung dari teori kombinatorika, karena itu diperlukan proses menghitung jumlah konfigurasi yang mungkin dimana partikel-partikel fermion dapat diatur.

4. Statistik Bose-Einstein dan Fermi-Dirac

- a. **Statistik Fermi-Dirac** digunakan untuk menghitung distribusi partikel fermion dalam suatu sistem. Kombinatorika digunakan untuk menghitung jumlah kemungkinan distribusi fermion ke dalam keadaan kuantum yang berbeda, dengan syarat bahwa tidak ada dua fermion yang bisa berada dalam keadaan yang sama.
- b. **Statistik Bose-Einstein** digunakan untuk partikel boson (seperti foton), di mana tidak ada pembatasan seperti prinsip eksklusi Pauli. Kombinatorika digunakan untuk menghitung distribusi boson ke dalam keadaan kuantum yang mungkin.

5. Kombinasi dari Simetri dalam Penguraian Representasi

Dalam fisika partikel, harus dilakukan proses menghitung kombinasi yang mungkin dari partikel-partikel berdasarkan simetri yang partikel-partikel tersebut miliki, misalnya ketika menghitung bagaimana

dua partikel bergabung untuk membentuk partikel gabungan. Teori grup dan kombinatorika digunakan untuk menghitung kombinasi simetri yang mungkin.

Contoh Aplikasi

- a. **Penghitungan Spin Partikel:** Misalnya, dalam penggabungan dua partikel yang memiliki spin, kombinatorika digunakan untuk menghitung berapa cara spin partikel-partikel tersebut dapat bergabung untuk membentuk total spin sistem.
- b. **Statistik Fermi-Dirac pada Gas Elektron:** Dalam sebuah gas elektron, kombinatorika digunakan untuk menghitung distribusi elektron dalam keadaan kuantum berbeda, dengan mempertimbangkan prinsip eksklusi Pauli.

Contoh Aplikasi Gabungan: Kromodinamika Kuantum (QCD) dan Kombinatorika

Dalam Kromodinamika Kuantum (QCD), kombinatorika digunakan untuk menghitung berbagai cara *quark* dan gluon dapat bergabung menjadi hadron (seperti proton dan neutron). Misalnya, dengan menggunakan simetri $SU(3)$ dan prinsip eksklusi Pauli, kita dapat menghitung kemungkinan kombinasi quark untuk membentuk proton atau neutron (Ermawati: 2020).

Contoh Penghitungan Kombinasi dalam Hadron

Sebuah proton terdiri dari dua *quark up* (u) dan satu *quark down* (d). Kombinasi ini diatur oleh simetri $SU(3)$ warna, di mana kombinatorika digunakan untuk menghitung berapa cara warna quark dapat bergabung sehingga proton bersifat netral terhadap warna.

2.4 Matematika Dalam Fisika Eksperimen

Dalam eksperimen fisika, matematika digunakan untuk menganalisis data dan membuat model prediksi. Penggunaan statistik dan probabilitas berperan penting dalam memastikan hasil percobaan sesuai dengan teori. Algoritma matematis yang kuat digunakan dalam pemrosesan data hasil percobaan (Ermawati : 2020).

2.4.1 Analisis Statistik

Dalam fisika eksperimen, pengolahan data dari eksperimen memerlukan analisis statistik yang kompleks. Probabilitas digunakan untuk memperkirakan hasil eksperimen dan mengevaluasi apakah data konsisten dengan model fisika yang ada (Ermawati : 2020).

Peran Statistik dalam Fisika Eksperimental

1. **Mengidentifikasi Pola dan Tren:** Statistik membantu fisikawan menemukan pola dalam data yang tidak selalu jelas pada pandangan pertama. Ini memungkinkan pengujian hipotesis dan prediksi perilaku sistem fisika berdasarkan data yang ada.
2. **Estimasi Parameter:** Dengan menggunakan alat statistik, seperti rata-rata dan deviasi standar, kita bisa mendapatkan nilai parameter fisika yang paling mungkin dari pengukuran yang bervariasi. Statistik juga memberikan cara untuk mengekspresikan ketidakpastian dalam estimasi parameter tersebut.
3. **Uji Hipotesis:** Dalam eksperimen fisika, sering kali perlu diuji apakah hasil eksperimen mendukung atau bertentangan dengan teori yang ada. Melalui uji statistik (seperti uji t, uji chi-kuadrat), kita dapat menentukan apakah perbedaan antara hasil eksperimen dan prediksi teori itu signifikan atau hanya kebetulan.
4. **Pengolahan Data Eksperimen:** Metode statistik seperti regresi linier digunakan untuk mencari

hubungan antara dua variabel yang diukur. Teknik ini sangat penting untuk mendapatkan persamaan empiris yang menghubungkan variabel-variabel tersebut.

Teknik-Teknik Statistik yang Digunakan dalam Fisika Eksperimental

1. Rata-rata dan Standar Deviasi

- **Rata-rata (*Mean*):** Menghitung nilai rata-rata dari serangkaian pengukuran dapat memberikan nilai pusat yang representatif.

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Di mana x_i adalah pengukuran individual dan n adalah jumlah pengukuran.

- **Standar Deviasi (*Standard Deviation*):** Mengukur seberapa jauh pengukuran menyebar dari nilai rata-rata.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

- 2. Regresi Linier** Regresi linier digunakan untuk menemukan hubungan linier antara dua variabel, misalnya hubungan antara tegangan dan arus dalam hukum Ohm. Model regresi linier sederhana memiliki bentuk:

$$y = mx + b$$

Di mana m adalah gradien (kemiringan), dan b adalah intersep pada sumbu y .

- 3. Uji Chi-Kuadrat (*Chi-Square Test*)** Uji chi-kuadrat sering digunakan untuk membandingkan data yang diharapkan dengan data yang diukur dalam eksperimen. Rumusnya adalah:

$$\chi^2 = \sum (O_i - E_i)^2 / E_i = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Di mana O_i adalah nilai observasi dan E_i adalah nilai yang diharapkan berdasarkan teori.

4. **Propagasi Ketidakpastian** Ketika kita mengukur beberapa kuantitas yang terkait melalui persamaan, ketidakpastian dalam setiap pengukuran akan mempengaruhi ketidakpastian hasil akhir. Propagasi ketidakpastian dapat dihitung menggunakan rumus:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \sigma_2\right)^2 + \dots}$$

Di mana f adalah fungsi yang bergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots$ dengan ketidakpastian masing-masing $\sigma_1, \sigma_2, \dots$

Contoh Aplikasi dalam Fisika Eksperimental

1. **Eksperimen Hukum Ohm** Dalam eksperimen untuk menentukan hubungan antara tegangan (V) dan arus (I), data yang diperoleh biasanya memiliki variasi karena ketidakpastian alat ukur. Dengan menggunakan regresi linier, kita bisa menentukan gradien dari grafik V terhadap I , yang merepresentasikan hambatan listrik (R). Analisis statistik juga dapat digunakan untuk menghitung ketidakpastian pada nilai R .
2. **Pengukuran Gaya Gravitasi** Misalkan kita ingin mengukur percepatan gravitasi bumi (g) dengan menggunakan pendulum sederhana. Dari pengukuran periode ayunan (T) dan panjang tali (L), kita bisa menghitung g menggunakan persamaan:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Setelah melakukan beberapa kali pengukuran periode, kita bisa menghitung rata-rata nilai T dan propagasi ketidakpastian dari L dan T untuk memperkirakan ketidakpastian pada nilai g .

2.4.2 Pemodelan Numerik dan Simulasi

Matematika komputasi memungkinkan fisikawan membuat model yang kompleks untuk memprediksi fenomena yang sulit diamati secara langsung, seperti simulasi alam semesta atau interaksi partikel pada tingkat subatomik.

Pemodelan numerik dan simulasi merupakan alat penting dalam astrofisika dan kosmologi untuk memahami alam semesta. Keterbatasan dalam melakukan eksperimen fisik pada skala semesta, baik dalam waktu maupun ruang, menjadikan simulasi numerik sebagai metode utama dalam mempelajari dinamika semesta, pembentukan struktur besar, dan evolusi galaksi. Simulasi ini membantu ilmuwan menguji teori-teori kosmologi seperti Big Bang, materi gelap, energi gelap, dan evolusi struktur semesta (Paken Pandiagan : 2018).

1. Pemodelan Numerik

Pemodelan numerik mengacu pada metode matematika yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Beberapa metode numerik yang sering digunakan dalam simulasi kosmologi termasuk:

- a. **Metode Diferensial Numerik:** Persamaan diferensial digunakan untuk menggambarkan evolusi sistem dinamis dalam astrofisika, seperti evolusi bintang atau struktur galaksi.
- b. **Metode N-body:** Digunakan untuk mempelajari interaksi gravitasi antara sejumlah besar partikel (atau benda) dalam ruang waktu yang panjang. Ini adalah teknik dasar dalam simulasi kosmologi untuk memodelkan distribusi materi gelap dan formasi struktur besar.
- c. **Metode Hidrodinamika:** Digunakan untuk memodelkan dinamika fluida, yang penting dalam

pembentukan bintang dan galaksi serta evolusi medium antar bintang.

2. **Simulasi Semesta Alam**

Simulasi kosmologis dilakukan untuk merekonstruksi evolusi semesta dari kondisi awal yang diketahui, misalnya setelah peristiwa Big Bang, hingga saat ini. Simulasi ini memerlukan superkomputer karena kompleksitas interaksi yang terlibat, baik dalam skala kecil maupun besar (Paken Pandiagan : 2018).

Beberapa aspek penting dalam simulasi semesta alam meliputi:

- a. **Simulasi Struktur Besar Semesta:** Menggambarkan distribusi materi dalam skala besar seperti filamen, superkluster, dan void. Contoh terkenal adalah **Millennium Simulation** yang memodelkan evolusi struktur besar alam semesta menggunakan sekitar 10 miliar partikel materi gelap.
- b. **Simulasi Pembentukan Galaksi:** Mencakup pemodelan pembentukan galaksi dari awan gas primordial hingga galaksi modern. Contoh simulasinya adalah **Illustris** dan **EAGLE**.
- c. **Simulasi Materi Gelap dan Energi Gelap:** Simulasi ini menginvestigasi peran materi gelap dan energi gelap dalam pembentukan struktur besar alam semesta, karena kedua komponen ini memiliki pengaruh dominan pada gravitasi skala besar.

3. **Contoh Simulasi: *Millennium Simulation***

Millennium Simulation adalah simulasi kosmologis besar yang dibuat oleh Virgo Consortium pada tahun 2005. Simulasi ini menggunakan superkomputer untuk memodelkan evolusi struktur besar alam semesta dengan menelusuri hampir 10 miliar partikel materi

gelap dalam kubus dengan panjang sisi sekitar 2 miliar tahun cahaya. Simulasi ini mendukung pemahaman tentang bagaimana galaksi, kelompok galaksi, dan superkluster terbentuk seiring dengan berjalannya waktu (Paken Pandiagan : 2018).

Metode:

- a. *N-body simulation* digunakan untuk memodelkan interaksi gravitasi antar partikel materi gelap.
- b. Simulasi ini dimulai dari kondisi awal yang diperoleh dari hasil pengamatan latar belakang gelombang mikro kosmik (CMB), yaitu sisa radiasi dari Big Bang.

Hasil:

- a. Simulasi ini memperlihatkan jaringan struktur besar semesta yang terbentuk dari filamen materi gelap, superkluster, dan void.
 - b. Hasil simulasi ini cocok dengan pengamatan alam semesta nyata, misalnya distribusi galaksi dalam survei astronomi.
4. Keuntungan dan Keterbatasan Simulasi

Keuntungan:

- a. Eksplorasi teori tanpa batasan fisik: Ilmuwan dapat mengeksplorasi berbagai skenario yang mungkin tidak bisa diuji dalam kondisi eksperimen langsung.
- b. Kecepatan waktu: Simulasi memungkinkan studi evolusi semesta dalam skala miliaran tahun yang tidak mungkin dipelajari dalam waktu nyata.

Keterbatasan:

- a. Ketergantungan pada model: Hasil simulasi sangat bergantung pada asumsi dan parameter yang digunakan, sehingga bisa menyimpang jika parameter yang digunakan tidak akurat.

- b. Kompleksitas komputasi: Simulasi kosmologis memerlukan daya komputasi yang sangat besar, sehingga dibatasi oleh teknologi yang tersedia.

DAFTAR PUSTAKA

- Alatas, Husin. 2014. *Matematika Fisika*. Bogor: Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor.
- Astutik, Sri. 2012. *Fisika Matematika*. Jember : Penerbitan UNEJ Jember
- Ermawati, I.R. 2020. *Fisika Matematika II*. Jakarta : Program Studi Pendidikan Fisika, FKIP UHAMKA.
- Hadi, Miftachul. 2021. *Matematika Fisika Teoretika*. Bogor: Institute of Mathematical Science.
- Pandiagan, Paken. 2018. *DModul 1 : Analisis Vektor* . Jakarta: Universitas Terbuka.

BAB 3

MATEMATIKA DALAM TEKNIK DAN TEKNOLOGI

Oleh Zaitun

3.1 Pendahuluan

Matematika seringkali disebut sebagai bahasa universal dalam dunia ilmu pengetahuan. Konsep-konsep matematis yang abstrak menjadi alat yang ampuh untuk mendeskripsikan fenomena alam dan merepresentasikan berbagai sistem kompleks. Dalam bidang teknik dan teknologi, matematika berperan sebagai fondasi yang kokoh dalam merancang, menganalisis, dan mengoptimalkan berbagai sistem. Mulai dari struktur bangunan hingga sirkuit elektronik, matematika memberikan kerangka kerja yang logis dan akurat untuk memahami perilaku sistem tersebut.

Peran matematika dalam teknik sangatlah krusial. Melalui model-model matematis, para insinyur dapat merancang sistem yang efisien dan handal. Misalnya, dalam perancangan jembatan, analisis struktur menggunakan persamaan diferensial memungkinkan para insinyur untuk menentukan kekuatan bahan yang diperlukan dan memastikan keamanan konstruksi. Selain itu, matematika juga digunakan untuk mengoptimalkan proses produksi, merancang algoritma yang efisien, dan

memecahkan masalah-masalah kompleks dalam berbagai bidang teknik, seperti teknik sipil, elektro, mesin, dan banyak lagi.

Perkembangan matematika berjalan seiring dengan kemajuan teknologi. Sejak zaman kuno, matematika telah digunakan untuk memecahkan masalah-masalah praktis dalam bidang teknik. Namun, revolusi industri dan perkembangan komputer telah mempercepat penerapan matematika dalam berbagai bidang. Matematikawan seperti Newton, Leibniz, dan Euler memberikan kontribusi yang sangat besar dalam pengembangan kalkulus dan mekanika klasik, yang menjadi dasar bagi banyak cabang teknik. Seiring dengan munculnya teknologi informasi, bidang-bidang seperti analisis numerik, optimasi, dan teori probabilitas semakin penting dalam memecahkan masalah-masalah teknik modern.

3.2 Persamaan Diferensial dalam Pemodelan

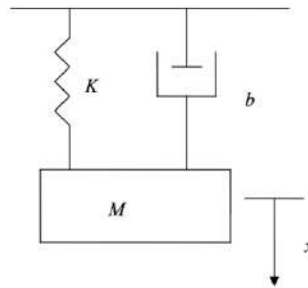
Persamaan yang terdiri dari turunan disebut persamaan diferensial. Persamaan diferensial memiliki aplikasi di semua bidang ilmu pengetahuan dan teknik. Formulasi matematika sebagian besar masalah fisika dan teknik menghasilkan persamaan diferensial. Oleh karena itu, penting bagi para insinyur dan ilmuwan untuk mengetahui cara menyusun persamaan diferensial dan menyelesaikannya. Persamaan diferensial terdiri dari 2 jenis yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). PDB merupakan persamaan turunan fungsi yang hanya mengandung satu variabel bebas, sedangkan PDP merupakan persamaan turunan fungsi yang mengandung dua, atau lebih variabel bebas. Berikut contoh persamaan diferensial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x + 3 = 0 \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1 \quad x(0) = 1$$

Pendekatan seorang insinyur terhadap persamaan diferensial berbeda dari seorang matematikawan. Sementara yang terakhir tertarik pada solusi matematika, seorang insinyur harus dapat menafsirkan hasilnya secara fisika. Jadi, pendekatan seorang insinyur dapat dibagi menjadi tiga fase yaitu:

- a) Melakukan formulasi persamaan diferensial dari suatu fenomena.
- b) Menyelesaikan persamaan diferensial dan mengevaluasi konstanta menyesuaikan kondisi fenomena, dan
- c) Menginterpretasi hasil secara fisis untuk diimplementasikan

Gerak Osilasi Pegas: Seperti yang dibahas di atas, formulasi persamaan diferensial didasarkan pada situasi fisik yang diberikan. Hal ini dapat diilustrasikan oleh sistem pegas-massa-peredam



Di atas adalah diagram skematik sistem pegas-massa-peredam. Sebuah balok digantung secara bebas menggunakan pegas. Karena sebagian besar sistem fisik melibatkan beberapa jenis redaman - redaman viskos, redaman kering, redaman magnetik, dll., sebuah peredam atau dashpot dipasang untuk memperhitungkan redaman viskos.

Misalkan massa balok adalah M , konstanta pegas adalah K , dan koefisien peredam adalah b . Jika kita mengukur perpindahan dari posisi kesetimbangan statis, kita tidak perlu mempertimbangkan gaya gravitasi karena seimbang dengan tegangan pegas pada kesetimbangan.

Di bawah ini adalah diagram benda bebas balok pada kesetimbangan statis dan dinamis. Jadi, persamaan gerak diberikan oleh

$$Ma = F_s + F_D \quad (3.1)$$

Dengan:

F_s adalah gaya pemulih pegas

F_D adalah gaya akibat redaman

a adalah percepatan dari massa M

Gaya pemulih pada pegas diberikan sebagai berikut

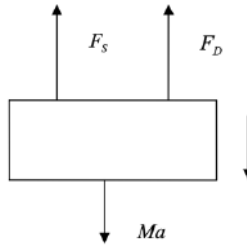
$$F_s = -Kx \quad (3.2)$$

karena gaya pemulih sebanding dengan perpindahan dan negatif karena menentang gerak. Gaya redaman pada peredam diberikan oleh

$$F_D = -bv \quad (3.3)$$

karena gaya redaman sebanding langsung dengan kecepatan dan juga menentang gerak. Oleh karena itu, persamaan gerak dapat ditulis sebagai

$$Ma = -Kx - bv \quad (3.4)$$



Karena $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ dan $v = \frac{dx}{dt}$

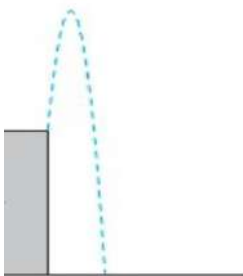
Dari persamaan (3.4), didapatkan persamaan berikut

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Kx = 0 \quad (3.5)$$

Permasalahan Benda Jatuh: misalkan percepatan suatu benda yang bergerak ke atas di suatu permukaan bumi adalah a dengan gesekan udara diabaikan. Jika suatu benda dilempar dari titik awal setinggi h dengan kecepatan awal v_0 , akan dihitung bagaimana posisi benda setelah t_r .

Pada masalah ini diasumsikan posisi benda s bernilai positif ketika bergerak ke atas sehingga persamaan kecepatan benda adalah $v = \frac{ds}{dt}$ bernilai positif namun nilai percepatan benda $a = \frac{dv}{dt}$ bernilai negatif



$$\frac{dv}{dt} = -a$$

$$v = \int -a \, dt = -at + C$$

Diketahui $v(0) = v_0$ sehingga $C = v_0$
dan

$$v = v_0 - at$$

Diketahui bahwa $v = \frac{ds}{dt}$ sehingga

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - at$$

Ketika jarak di integralkan

$$\begin{aligned} s &= \int (v_0 - at) dt \\ &= v_0 t - \frac{1}{2} at^2 + K \end{aligned}$$

Diketahui bahwa pada $t = 0$ nilai $s(0) = h$ sehingga $K = h$, sehingga dapat ditulis persamaan jarak dan kecepatan terhadap waktu

$$\begin{aligned} v &= v_0 - at \\ s &= h + v_0 t - \frac{1}{2} at^2 \end{aligned}$$

Kecepatan Roket Lepas: Gaya tarik gravitasi F yang diberikan oleh bumi pada suatu benda dengan massa m pada jarak s dari pusat bumi diberikan oleh $F = -mgR^2/s^2$, dengan $-g$ adalah percepatan gravitasi pada permukaan bumi dan R adalah jari-jari bumi. Akan ditunjukkan bahwa suatu benda yang diluncurkan keluar dari bumi dengan kecepatan awal $v_0 \geq \sqrt{2gR}$ tidak akan jatuh kembali ke bumi. Dalam persoalan ini perhitungan hambatan udara diabaikan.

Menurut Hukum Newton II, bahwa $F = ma$; sehingga

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = m \frac{dv}{ds} v$$

Kemudian

$$mv \frac{dv}{dt} = -mg \frac{R^2}{s^2}$$

Dengan memisahkan kedua variabel diferensiasi, dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned} v \, dv &= -gR^2 s^{-2} ds \\ \int v \, dv &= -gR^2 \int s^{-2} ds \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{gR^2}{s} + C \end{aligned}$$

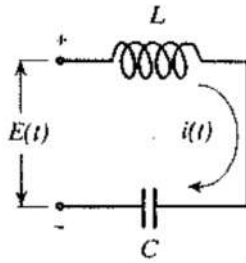
Karena $v = v_0$ ketika $s = R$, jadi $C = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$. Sehingga menghasilkan bentuk

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

Dari bentuk ini dapat dilihat bahwa untuk $\frac{2gR^2}{s}$ akan semakin besar untuk nilai s yang semakin besar, dapat dilihat juga bahwa nilai v akan selalu bernilai positif jika dan hanya jika $v_0 \geq \sqrt{2gR}$.

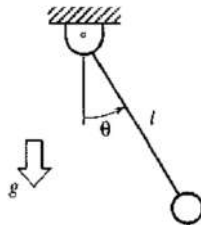
Sirkuit Listrik: Sirkuit listrik yang mengalir arus Listrik $i(t)$ di dalamnya terdapat suatu inductor dengan induktansi L , kapasitor dengan kapasitansi C , dan dipasang dengan suatu sumber tegangan $E(t)$ untuk t adalah waktu. Hukum kirchoff menyatakan jumlah aljabar dari perubahan tegangan di sekeliling rangkaian tertutup adalah nol.

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i - \frac{dE(t)}{dt} = 0$$



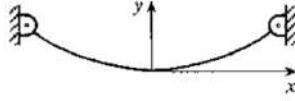
Gerak Osilasi Pendulum: Pergerakan osilasi dari pendulum dapat dimodelkan dalam persamaan diferensial dengan memisalkan posisi angular $\theta(t)$, panjang tali pendulum l , dan di bawah pengaruh gravitasi dengan percepatan gravitasi g serta t merupakan waktu.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$



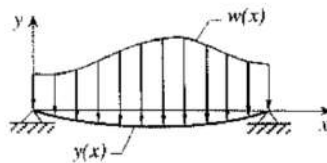
Lengkungan Gantungan Kabel: Bentuk defleksi gantungan kabel akibat gravitasi memungkinkan bentuk kabel melengkung akibat sifatnya yang fleksibel. Misalkan $y(x)$ merupakan simpangan teregang dan C merupakan konstanta yang bergantung pada kerapatan massa dari kabel dan tekanan dari titik Tengah.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$



Defleksi Balok: Proses defleksi suatu balok juga menerapkan persamaan diferensial dengan Seperti yang dibahas di atas, formulasi persamaan menurunkan variabel defleksi $y(x)$ dari balok dengan jumlah muatan $w(x)$, dengan E dan I adalah masing-masing merupakan konstanta fisik dari material balok dan data faktor resiko

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x)$$



3.3 Aljabar Linier dalam Teknik

Konsep-konsep dasar aljabar linier seperti vektor, matriks, dan sistem persamaan linear digunakan secara ekstensif untuk memodelkan dan menganalisis berbagai fenomena fisik. Salah satu metode numerik yang paling fundamental dalam aljabar linier adalah metode Gauss. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan cara melakukan operasi baris elementer pada matriks augmented. Dalam konteks teknik dan teknologi, metode Gauss memiliki aplikasi yang sangat luas, mulai dari analisis struktur, pemrosesan sinyal, hingga pemodelan sistem kontrol. Dengan memahami aljabar linier dan menguasai metode Gauss, para insinyur dan ilmuwan

dapat menyelesaikan berbagai permasalahan kompleks yang melibatkan sistem persamaan linear secara efisien dan akurat.

Misalkan diketahui sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

Sistem linier ini dimisalkan memiliki ukuran berhingga atau nilai m dan n merupakan bilangan bulat positif, nilai a_{ij} dan c_{ij} merupakan bilangan riil, jika nilai c_{ij} sama dengan nol maka persamaan linier disebut persamaan linier homogen dan sebaliknya apabila nilai c_{ij} tidak semua bernilai nol, maka persamaan linier disebut persamaan linier non-homogen.

Penyelesaian dari persamaan linier secara analitik dapat dilakukan dengan melakukan operasi baris elementer. Berikut langkah-langkah dalam operasi baris elementer

- a) Menambahkan persamaan dengan hasil perkalian dari persamaan lain.
- b) Mengalikan persamaan dengan bilang tak nol.
- c) Mengatur dengan menukar dua persamaan.

Contoh:

Misalkan diketahui persamaan linier berikut akan dicari solusinya

$$\begin{array}{rcl} B1: & x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ B2: & 3x_1 + x_2 + x_3 & = 9 \\ B3: & x_1 - x_2 + 4x_3 & = 8 \end{array}$$

Langkah 1: $B2^* = B2 - 3 B1$; $B3^* = B3 - B1$

$$\begin{array}{lcl} B1: & x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ B2: & -2x_2 + 4x_3 & = 6 \\ B3: & -2x_2 + 5x_3 & = 7 \end{array}$$

Langkah 2: $B3^* = B3 - B1$;

$$\begin{array}{lcl} B1: & x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ B2: & -2x_2 + 4x_3 & = 6 \\ B3: & x_3 & = 1 \end{array}$$

Langkah 3: Mengalikan B2 dengan $-\frac{1}{2}$ sehingga

$$\begin{array}{lcl} B1: & x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ B2: & x_2 - 2x_3 & = -3 \\ B3: & x_3 & = 1 \end{array}$$

Jadi, nilai $x_3 = 1$, kemudian x_3 substitusi ke B2, sehingga $x_2 = -1$, setelah itu x_2 dan x_3 substitusi ke B1, sehingga $x_1 = 3$.

Eliminasi Gauss: Operasi baris elementer yang telah dibahas sebelumnya juga merupakan metode eliminasi gauss dengan mengubah sedikit penulisan dengan target membuat matriks utama menjadi matriks segitiga atas. Berikut cconoth langkah-langkah dalam metode Gauss dengan persamaan yang identic dengan contoh 1

$$\begin{array}{lcl} B1: & x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ B2: & 3x_1 + x_2 + x_3 & = 9 \\ B3: & x_1 - x_2 + 4x_3 & = 8 \end{array}$$

Dibuat menjadi:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 4 & 8 \end{array}$$

Langkah 1: $B2^* = B2 - 3 B1$; $B3^* = B3 - B1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \end{array}$$

Langkah 2: $B3^* = B3 - B1$;

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Langkah 3: Mengalikan B2 dengan $-\frac{1}{2}$ sehingga

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Jadi, nilai $x_3 = 1$, kemudian x_3 substitusi ke B2, sehingga $x_2 = -1$, setelah itu x_2 dan x_3 substitusi ke B1, sehingga $x_1 = 3$.

Reduksi Gauss-Jordan: Masih identic dengan Metode gauss, metode gauss Jordan menambah target matriks utama dibuat menjadi matriks diagonal dengan nilai setiap elemen diagonal utama menjadi sama dengan 1. Metode ini hanya menambah langkah dalam prosesnya, berikut contohnya

$$\begin{array}{lcl} B1: & x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ B2: & 3x_1 + x_2 + x_3 & = 9 \\ B3: & x_1 - x_2 + 4x_3 & = 8 \end{array}$$

Dibuat menjadi:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 4 & 8 \end{array}$$

Langkah 1: $B2^* = B2 - 3 B1$; $B3^*=B3-B1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \end{array}$$

Langkah 2: $B3^* = B3 - B1$;

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Langkah 3: Mengalikan B2 dengan $-\frac{1}{2}$ sehingga

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Langkah 4: $B2^* = B2 + 2 B3$; $B1^* = B3 + B1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Langkah 5: $B1^* = B1 - B2$;

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Jadi, nilai $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, dan $x_3 = 1$.

Metode Gauss-Seidel: Selain secara analitik, penyelesaian persamaan linier dapat juga dilakukan dengan metode numerik. Metode Gauss-Seidel memiliki prinsip perhitungan *iterative* berulang dengan mengevaluasi setiap nilai baru dari nilai sebelumnya yang berasal dari nilai awal yang diberikan. Berikut contoh perhitungan metode ini

$$\begin{array}{lcl} B1: & 4x_1 + 2x_2 & = 5 \\ B2: & -x_1 + 5x_2 + x_3 & = -1 \\ B3: & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = -4 \end{array}$$

Persamaan di atas dibuat menjadi

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{5 - 2x_2}{4} \\x_2 &= \frac{-1 + x_1 - x_3}{5} \\x_3 &= \frac{-4 + x_1 - 2x_2}{3}\end{aligned}$$

Persamaan di atas diindeks sehingga menghasilkan persamaan iterative berikut

$$\begin{aligned}x_1^{n+1} &= \frac{5 - 2x_2^n}{4} \\x_2^{n+1} &= \frac{-1 + x_1^n - x_3^n}{5} \\x_3^{n+1} &= \frac{-4 + x_1^n - 2x_2^n}{3}\end{aligned}$$

Untuk $n = 0, 1, 2, \dots, N$, dengan $N \rightarrow \infty$

Misal nilai awal adalah

$$x_1^0 = 0; \quad x_2^0 = 0; \quad x_3^0 = 1$$

Langkah 1: $n = 0$

$$\begin{aligned}x_1^1 &= \frac{5 - 2(0)}{4} = 1,25 \\x_2^1 &= \frac{-1 + (1,25) - (1)}{5} = -0,15 \\x_3^1 &= \frac{-4 + (1,25) - 2(-0,15)}{3} = -0,817\end{aligned}$$

Langkah 2: $n = 1$; $x_1^1 = 1,25$; $x_2^1 = -0,15$; $x_3^1 = -0,817$

$$x_1^2 = \frac{5 - 2(1,25)}{4} = 1,325$$

$$x_2^2 = \frac{-1 + (1,325) - (-0,817)}{5} = 0,228$$

$$x_3^2 = \frac{-4 + (1,325) - 2(0,228)}{3} = -1,04$$

Langkah 3: $n = 2$; $x_1^2 = 1,325$; $x_2^2 = 0,228$; $x_3^2 = -1,04$

$$x_1^3 = \frac{5 - 2(1,325)}{4} = 1,135$$

$$x_2^3 = \frac{-1 + (1,135) - (-1,04)}{5} = 0,236$$

$$x_3^3 = \frac{-4 + (1,135) - 2(-1,04)}{3} = -1,11$$

Proses Iterasi dilakukan terus menerus hingga konvergen ke masing-masing satu nilai. Langkah di atas jika dilanjutkan maka akan memiliki nilai hasil perulangan $x_1 \approx 1,125$, $x_2 \approx 0,25$, dan $x_3 \approx -1,125$.

DAFTAR PUSTAKA

- Michael D. Greenberg. 1998. Advanced Engineering Mathematics
2nd Edition. Prentice Hall.
- Stewart, J. Calculus. 2016. Calculus. Early Transcendentals 7th
edition. Cengage Learning.
- Varberg, E. J. Purcell, S.E. Rigdon, 2007, Calculus 9th edition,
PEARSON, Prentice Hall.

BAB 4

MATEMATIKA DALAM ILMU BIOLOGI DAN KEDOKTERAN

Oleh Hanna Hilyati Aulia

4.1 Pendahuluan

Matematika terapan telah memainkan peran yang semakin penting dalam berbagai disiplin ilmu, termasuk biologi dan kedokteran. Bidang ini memungkinkan para peneliti dan praktisi untuk memahami fenomena biologis yang kompleks dan memecahkan masalah klinis dengan menggunakan pendekatan kuantitatif dan analitis. Dengan memanfaatkan konsep-konsep matematika, seperti persamaan diferensial, teori probabilitas, statistik, dan aljabar linier, kita dapat membangun model matematis untuk menggambarkan sistem biologis dan proses fisiologis.

Dalam biologi, matematika digunakan untuk memodelkan berbagai sistem, mulai dari dinamika populasi hingga proses molekuler pada tingkat seluler. Selain itu, model matematika juga membantu dalam memahami penyebaran penyakit menular, seperti epidemiologi virus, yang sangat berguna dalam pengendalian wabah. Di bidang kedokteran, aplikasi matematika terapan terlihat dalam pemrosesan citra medis, analisis data genomik, dan pengembangan terapi yang lebih efektif. Misalnya, matematika digunakan dalam analisis MRI dan CT scan untuk

mendeteksi tumor atau kelainan lain dalam tubuh manusia. Di sisi lain, model statistik digunakan untuk menganalisis uji klinis obat-obatan, membantu dalam pengambilan keputusan terkait efektivitas dan keamanan pengobatan.(Elango, 2014)

Seiring dengan berkembangnya teknologi dan data medis yang semakin besar, peran matematika dalam biologi dan kedokteran akan terus berkembang. Pendekatan berbasis data, dikombinasikan dengan model matematis, berpotensi untuk membawa kemajuan dalam diagnosis, pengobatan, serta pencegahan penyakit. Oleh karena itu, pemahaman yang kuat tentang matematika terapan menjadi sangat penting bagi ilmuwan biologi dan profesional kesehatan untuk berinovasi dan meningkatkan kualitas perawatan kesehatan. Matematika memiliki peran krusial dalam memahami sistem biologis dan kedokteran, terutama dalam menjelaskan fenomena kompleks melalui model dan analisis kuantitatif. Sistem biologis dan medis seringkali sangat dinamis, melibatkan interaksi rumit antara berbagai komponen pada tingkat molekuler, seluler, jaringan, organ, hingga populasi.(Hofmeyr, 2017) Dengan menggunakan matematika, kita dapat menyederhanakan, menganalisis, dan memprediksi perilaku sistem tersebut. Pada bab ini akan menjelaskan beberapa aplikasi matematika dalam bidang biologi dan kedokteran, khususnya dalam pemodelan matematika.

4.2 Model Matematika dalam Populasi

Sistem biologi di alam sangat kompleks dan banyak sifat-sifat dari unsur-unsurnya memuat interaksi antar berbagai komponen, sehingga interaksi tersebut mengikuti kaidah nonlinier. Artinya, peningkatan jumlah suatu variabel tidak selalu menyebabkan peningkatan proporsional dalam variabel lainnya. Pada kasus lain, efek acak atau stokastik juga digunakan untuk menggambarkan perilaku sistem yang tidak terduga.

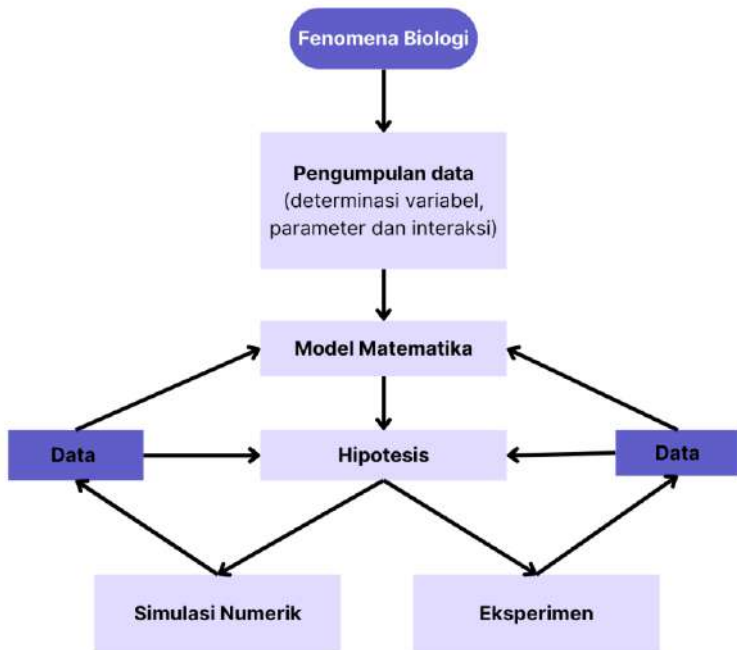
Model matematika dapat memperhitungkan faktor-faktor tersebut yang memungkinkan peneliti untuk menangkap fitur-fitur dari sistem biologis yang kompleks dan memahami bagaimana sistem tersebut merespon suatu sinyal input atau gangguan eksternal atau internal.

Representasi skematis dari proses pembentukan pengetahuan dalam biologi sistem menggambarkan bagaimana data eksperimen mengenai fenomena biologis digunakan untuk menyusun model matematika yang menghasilkan hipotesis mengenai dampak gangguan pada sistem. Hipotesis ini kemudian diuji melalui simulasi komputer eksperimen laboratorium yang menghasilkan data baru. Data ini kemudian dapat mengonfirmasi atau memodifikasi hipotesis dan model matematika yang mendasarinya, sehingga memperkaya pemahaman tentang sistem biologis tersebut. Proses ini bersifat iteratif, di mana pengetahuan terus berkembang seiring dengan pengujian dan penyempurnaan model.

Implementasi model matematika yang paling populer adalah pemodelan dinamika komponen dengan persamaan diferensial. Persamaan-persamaan ini mencakup parameter seperti laju peluruhan, laju reaksi dan difusi, serta ambang aktivasi, yang biasanya tidak diketahui dan harus diidentifikasi menggunakan data yang tersedia. Proses identifikasi parameter memerlukan penyelesaian persamaan diferensial dari model tersebut. Dalam banyak kasus, perkiraan awal dibuat untuk nilai numerik parameter-parameter tersebut, kemudian persamaan diselesaikan menggunakan algoritma numerik. Hasil dari model tersebut disimulasikan dan dibandingkan dengan data eksperimen. Jika hasilnya tidak cocok, perkiraan baru dibuat, dan proses ini diulangi sampai hasilnya sesuai dengan data yang diharapkan. Gambar 4.1 adalah bagan dari pemodelan matematika secara umum.

Model matematika dinamis berperan penting sebagai alat bantu dalam investigasi biologi dengan berbagai cara. Proses membangun model menuntut pertimbangan kritis terhadap mekanisme yang mendasari suatu proses biologis. Proses ini dapat mengungkapkan inkonsistensi dalam model dan menyoroti celah pengetahuan yang sebelumnya tidak terlihat. Model yang telah dibangun berfungsi sebagai deskripsi transparan dari sistem tersebut dan dapat diinterpretasikan dengan jelas. Selain itu, model mereplikasi perilaku sistem; model ini secara ringkas merangkum semua data yang digunakan dalam pembentukannya.

Model matematika adalah manifestasi dari suatu hipotesis: keduanya mewakili deskripsi dugaan tentang sistem dan perilakunya. Keunggulan model matematika adalah perilaku dinamisnya dapat diselidiki dengan jelas. Meskipun simulasi model tidak akan pernah menggantikan eksperimen laboratorium, model memungkinkan seseorang mengeksplorasi perilaku sistem dengan cara yang mungkin tidak dapat dilakukan di laboratorium. Simulasi dapat dilakukan dengan cepat (sering kali hanya dalam hitungan detik) tanpa biaya nyata. Perilaku model dapat dieksplorasi dalam kondisi yang tidak mungkin dicapai di laboratorium. Setiap aspek perilaku model dapat diamati pada semua titik waktu. Selain itu, analisis model memberikan wawasan mengapa sistem berperilaku seperti itu, sehingga menghubungkan antara struktur jaringan dan perilaku sistem.



Gambar 4. 1 Diagram Proses Dalam Pemodelan Matematika Bidang Biologi
(Sumber : (Tomlin & Axelrod, 2007))

Model yang dibangun merupakan hipotesis, sehingga hasil investigasi model itu sendiri adalah hipotesis. Simulasi tidak dapat secara pasti memprediksi perilaku seluler, tetapi mereka dapat menjadi panduan yang berharga dalam merancang eksperimen, dengan menunjukkan jalur investigasi yang menjanjikan atau mengungkapkan ketidaksesuaian antara pemahaman kita tentang sistem (yang diwakili oleh model) dan pengamatan di laboratorium. Identifikasi ketidaksesuaian semacam itu sebenarnya merupakan salah satu manfaat utama dari pemodelan. Hal ini dapat mengarah pada penyempurnaan hipotesis biologis, dan selanjutnya pada penyempurnaan model,

yang kemudian dapat diuji dengan eksperimen tambahan. Proses iteratif ini mengarah pada pemahaman sistem yang terus meningkat. Tujuan dari pemodelan adalah deskripsi yang sepenuhnya prediktif dan simulasi dijamin menjadi representasi yang akurat dari perilaku nyata.

4.3 Model Dinamika Populasi Sederhana

Pada buku ini akan dibahas model dinamika populasi terhadap waktu. Populasi dalam hal ini adalah sekumpulan individu memenuhi mekanisme dasar yang sama. Persamaan yang digunakan adalah persamaan diferensial biasa, dan berfokus pada bagaimana ukuran populasi berubah sepanjang waktu. Ketika kita berbicara tentang 'ukuran' suatu populasi, mungkin kita berpikir bahwa yang dimaksud adalah jumlah individu. Namun, karena kita akan menggunakan persamaan diferensial biasa, variabel yang kita gunakan harus kontinu, bukan diskrit. Oleh karena itu, kita akan melacak kepadatan populasi, yaitu jumlah individu dalam suatu satuan area.

Dalam notasi matematika kita misalkan $N(t)$ adalah kepadatan individu dalam populasi pada saat t . Selanjutnya untuk mempermudah penulisan, kita tuliskan sebagai N . Selanjutnya, kita tuliskan persamaan diferensial yang menggambarkan dinamika populasi tersebut, keadaan yang menyebabkan populasi bertambah atau berkurang dan bagaimana penulisan mekanisme yang dapat disertakan. Pada bagian awal ini, kita akan memilih contoh yang paling sederhana. Dengan pengetahuan biologi dasar, kepadatan jumlah penduduk suatu area akan bertambah karena kelahiran dan berkurang karena kematian sepanjang waktu. Dapat kita tuliskan sebagai berikut

$$\frac{dN}{dt} = \text{kelahiran} - \text{kematian}.$$

Kemudian, kita tentukan variabel dan parameter yang akan kita gunakan untuk menggambarkan kelahiran dan kematian dalam model matematika. Kita misalkan laju konstan kelahiran sebagai b . Notasi ini digunakan jika individu baru dalam populasi muncul dalam laju konstan. Laju perkapita bN , untuk laju penambahan ketika setiap individu dalam populasi menghasilkan keturunan pada laju tertentu, sehingga semakin besar populasi, maka keturunan yang diproduksi setiap waktunya akan semakin besar. Untuk model sederhana, misalkan besaran populasi per waktu bertambah sesuai laju pertumbuhan b dan berkurang karena laju kematian d , maka dalam laju perkapita, model menjadi

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN = (b - d)N = rN$$

dimana r adlah laju pertumbuhan populasi. Persamaan di atas adalah persamaan diferensial linier orde satu, dengan mudah dapat kita cari solusinya dengan *metode variabel terpisah* dan *faktor integrasi* (Bose, 2019), diperoleh:

$$\frac{dN}{N} = rdt$$

$$\ln(N) = rt + C$$

$$N(t) = e^{rt+C}$$

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

dengan $N(0)$ adalah nilai awal kepadatan populasi saat $t = 0$. Dari penyelesaian tersebut, solusi bergantung pada nilai r , ketika $r > 0$, maka populasi akan bertumbuh, namun saat $r < 0$ populasi akan menurun secara eksponensial.

4.3.1 Model Logistik

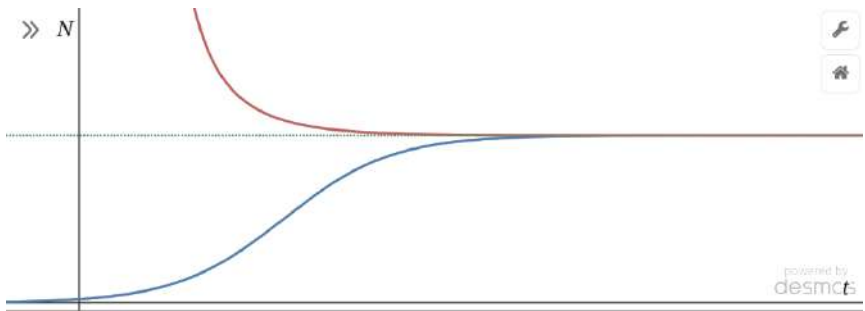
Asumsi yang dibangun pada model populasi biasanya menyatakan bahwa laju kelahiran lebih besar dari laju kematian yakni $b > d$ atau $r > 0$ dan populasi kita akan bertumbuh tak terbatas. Hal ini dapat dimaklumi, namun tidak realistis. Sehingga kita memerlukan pengembangan model yang lebih baik. Kita perlu memikirkan faktor lain yang dapat menyempurnakan model kita. Kita dapat menambahkan asumsi bahwa ketika populasi berkembang, namun perkembangan tersebut akan terbatas oleh lingkungannya. Misalnya dalam melanjutkan hidup, suatu individu membutuhkan lahan, makanan, dan sumber kehidupan yang terbatas. Dengan demikian, ada kapasitas maksimal yang bisa didukung oleh lingkungan. Menggunakan asumsi ini, kita memiliki model yang lebih baik. Misalkan kapasitas maksimal yang bisa didukung oleh lingkungan (*carrying capacity*) adalah K .

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

Model di atas disebut model logistik, dengan r adalah laju pertumbuhan populasi, K adalah *carrying capacity*. Persamaan logistik memiliki solusi

$$N(t) = \frac{K}{1 + C e^{-rt}}$$

dengan $C = \frac{K-N(0)}{N(0)}$. Perhatikan bahwa $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$, maka jika populasi awal kurang dari K , populasi tersebut akan naik secara eksponensial kemudian pertumbuhan melambat menuju K dan jika populasi awal melebihi K , maka populasi tersebut akan menurun dan melambat hingga K . Dinamika ini digambarkan pada grafik pada Gambar 4.2.



Gambar 4. 2 Solusi Model Populasi Logistik

(Sumber : desmos.com)

Salah satu metode dalam pemodelan matematika populasi adalah teknik nondimensionalisasi. Pada persamaan logistik (1), dengan memisalkan $n = N/K$, dengan n merupakan variabel nondimensional karena N dan K sama-sama memiliki satuan kepadatan, sehingga N/K tidak berdimensi. Persamaan (1) menjadi

$$\frac{d(N/K)}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dN}{dt} = rn(1 - n)$$

$$\frac{dn}{dt} = rn(1 - n)$$

sehingga kita memiliki model yang lebih sederhana. Model populasi yang dijelaskan di atas merupakan persamaan diferensial biasa yang linier, sehingga dengan mudah dapat kita selesaikan secara eksak. Namun, persamaan diferensial linier biasa tidak mampu menangkap interaksi antar kompartemen, sehingga kita memerlukan konsep sistem persamaan nonlinier yang memuat interaksi dua atau lebih kompartemen untuk mendapatkan model yang lebih nyata.

4.4 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah pendekatan yang digunakan dalam pemodelan matematika untuk menggambarkan perubahan suatu sistem seiring waktu. Dalam konteks biologi dan kedokteran, sistem dinamik sangat penting karena banyak fenomena biologis, seperti pertumbuhan populasi, penyebaran penyakit, metabolisme, dan regulasi gen, melibatkan perubahan yang terjadi secara kontinu dan saling memengaruhi. Pemodelan sistem dinamik memberikan kerangka kerja untuk memahami dan memprediksi perilaku sistem ini melalui persamaan matematika yang menggambarkan laju perubahan. Untuk membentuk suatu sistem dinamik, kita memerlukan:

1. Variabel keadaan (*state*), yaitu sekumpulan variabel yang memberikan deskripsi lengkap tentang sistem pada waktu tertentu.
2. Parameter, yaitu besaran yang nilainya bergantung pada kondisi tertentu. Contohnya laju pertumbuhan dan laju penyebaran.
3. Persamaan diferensial yang digunakan untuk mendeskripsikan bagaimana variabel keadaan berubah sepanjang waktu. Persamaan ini mengikuti hukum alam atau prinsip biologi yang menyatakan hubungan antar variabel. Pada bagian ini, persamaan dapat berupa persamaan diferensial linier, nonlinier maupun stokastik.
4. Nilai awal dan kondisi batas, yaitu nilai-nilai awal dari variabel keadaan pada waktu nol atau waktu awal.

Lebih lanjut, pada sistem persamaan diferensial nonlinier, kita tidak mendapatkan solusi eksak dari sistem, sehingga analisis yang digunakan dalam sistem dinamik adalah kestabilan lokal dan global untuk melihat dalam jangka waktu yang lama bagaimana sistem tersebut berperilaku.

Beberapa contoh model-model matematika populer dalam bidang biologi dan kedokteran akan dibahas satu persatu, hal ini menunjukkan penerapan matematika pada sistem yang sederhana hingga kompleks. terlihat bahwa matematika dalam hal ini pemodelan matematika merupakan alat analisis yang sangat kuat untuk menjadi alat pengukuran fenomena biologi. Jika ditambahkan data akurat dan pemahaman statistika yang baik, model yang diperoleh akan semakin baik dalam mendekati keadaan di lapangan.

4.5 Model Populasi dengan Interaksi

Dalam biologi populasi, suatu individu juga tidak hanya bergantung dari kapasitas lingkungan, namun juga harus bertahan dari persaingan antar individu. Model yang dapat menggambarkan fenomena ini adalah model *predator-prey* atau model antara pemangsa dan yang dimangsa. Misalkan suatu populasi dengan kepadatan N dan diketahui populasi predator dengan kepadatan P . Populasi akan bertumbuh dengan laju r , dan akan berkurang karena interaksi dengan predator/pemangsa dengan laju sebesar q . Sebaliknya populasi predator akan bertambah karena interaksi dengan populasi dengan laju sebesar s dan berkurang karena adanya kematian dengan laju d . Interaksi antara populasi dengan predator digambarkan sebagai perkalian variabel, yang dalam hal ini berupa persamaan nonlinier. Model sederhana predator prey ini dapat dituliskan dalam sistem persamaan (2)

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN - qNP \\ \frac{dP}{dt} &= sNP - dP\end{aligned}$$

Model ini juga dikenal sebagai model Lotka Volterra (Powell, 2000). Kita mulai analisis pada model ini dengan menentukan titik ekuilibrium model, yaitu solusi ketika $\frac{dN}{dt} = 0$ dan $\frac{dP}{dt} = 0$, atau bisa dituliskan $\dot{N} = 0$ dan $\dot{P} = 0$. Solusi pertama yaitu $(N_0, P_0) = (0,0)$ dan $(N_e, P_e) = \left(\frac{d}{s}, \frac{r}{q}\right)$. Untuk melihat kestabilan dua titik ekuilibrium dengan menggunakan Matriks Jacobian J . Misalkan $\frac{dN}{dt} = f(N, P)$ dan $\frac{dP}{dt} = g(N, P)$, maka matriks Jacobian dari sistem (2) terbentuk dari turunan parsial dari f dan g . Sistem (2) merupakan sistem dengan dua persamaan dan dua variabel, maka matriks Jacobian merupakan matriks ukuran 2×2 .

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial N} & \frac{\partial f}{\partial P} \\ \frac{\partial g}{\partial N} & \frac{\partial g}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - qP & -qN \\ sP & sN - d \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, dari matriks Jacobian ini kemudian akan ditentukan kestabilan titik ekuilibrium dengan nilai eigen λ dengan ketentuan sebagai berikut. Sistem merupakan sistem dengan 2 persamaan, maka nilai eigen dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|\lambda I - J| = 0$. Untuk analisis kestabilan dengan nilai eigen dengan menggunakan ketentuan

1. $\lambda_i < 0$ untuk setiap i , sistem stabil asimtotik
2. $\lambda_i \leq 0$ untuk setiap i , sistem stabil
3. $\lambda_i > 0$ untuk setiap i , sistem tidak stabil
4. $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$, sistem tidak stabil, disebut titik sadel.

Pada Jacobian J di persamaan (3), kita substitusikan masing-masing titik ekuilibrium pada matriks Jacobian J .

$$J|_{(N_0, P_0)=(0,0)} = J_0 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

$$J|_{(N_e, P_e)=(\frac{d}{s}, \frac{r}{q})} = J_e = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{qd}{s} \\ \frac{sr}{q} & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan persamaan $|\lambda I - J_0| = 0$ dan $|\lambda I - J_e| = 0$, diperoleh

- Untuk titik ekuilibrium $(N_0, P_0) = (0,0)$, persamaan karakteristiknya adalah $(\lambda - r)(\lambda + d) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = r, \lambda_2 = -d$. Karena nilai $r, d > 0$ (laju), maka titik ekuilibrium tidak stabil, lebih lanjut, adalah titik sadel.
- Untuk titik ekuilibrium $(N_e, P_e) = (\frac{d}{s}, \frac{r}{q})$, persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 + rd = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -rd$. perhatikan bahwa titik ekuilibrium ini memiliki nilai real nol dan sisanya adalah imajiner, maka stabil. Lebih lanjut, merupakan kestabilan lokal didekat titik kesetimbangan. Artinya perilaku kita memprediksi bahwa dua populasi ini akan terus-menerus berputar. Dengan rendahnya predasi, kepadatan mangsa meningkat; ini menghasilkan lebih banyak makanan untuk predator, dan akibatnya jumlah predator mulai meningkat; hal ini pada gilirannya mulai menekan jumlah mangsa kembali turun; akhirnya, dengan menurunnya pasokan makanan mereka, jumlah predator juga turun.

Hasil seperti ini awalnya tampak menarik, yaitu perilaku fluktuatif ini secara intuitif masuk akal dan tampaknya sesuai dengan beberapa data dari sistem nyata. Namun, sebagai titik pusat, siklus ini tidak stabil secara struktural. Faktanya, jika kita

mengubah nilai awal, kita akan berakhir pada siklus yang sedikit berbeda, yang tentu tidak memuaskan secara matematis dan juga dipertanyakan secara biologis. Oleh karena itu, diperlukan model yang lebih terbaru dan memiliki karakteristik yang lebih kuat dapat dilihat di beberapa penelitian terkait (Mortoja dkk., 2018).

Selanjutnya adalah salah satu model matematika yang kerap digunakan dalam pemodelan kedokteran, yaitu pemodelan penyakit menular. Setelah adanya Covid-19, banyak ilmuwan yang memprediksikan kapan lonjakan dan akhir dari pandemi. Berikut ini akan dibahas mengenai model yang sering digunakan untuk menangkap fenomena penyakit menular dalam populasi secara umum.

4.6 Model Epidemik SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*)

Pada model penyebaran penyakit menular ini, populasi dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu populasi rentan S (*susceptible*) yang merupakan populasi individu yang belum terjangkit namun memiliki kemungkinan untuk terjangkit, populasi terinfeksi I (*infected*) merupakan populasi individu yang telah terjangkit dan berpotensi menyebarkan penyakit, dan populasi individu yang telah sembuh dari penyakit R (*recovered*). Asumsi yang digunakan yaitu populasi rentan akan bertambah karena kelahiran dengan laju μ dan berkurang karena adanya kematian. Biasanya dalam model ini, parameter $\frac{1}{\mu}$ adalah rata-rata jangka hidup suatu populasi. Laju infeksi atau penularan akibat interaksi populasi rentan dan populasi terinfeksi dalam populasi dimisalkan β . Laju kesembuhan populasi terinfeksi dari penyakit dinotasikan oleh η . Pada umumnya, $1/\eta$ adalah masa terinfeksi. Masing-masing kompartemen populasi diasumsikan akan berkurang karena kematian alami. Selanjutnya N adalah total kepadatan populasi.

Jumlah populasi tertutup dan tetap, artinya $S + I + R = N$ dan $\dot{N} = 0$. Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, dapat kita tuliskan model epidemik SIR sebagai berikut

$$\dot{S} = \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S$$

$$\dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - \eta I - \mu I$$

$$\dot{R} = \eta I - \mu R$$

Untuk menyederhanakan perhitungan, kita akan gunakan metode nondimensionalisasi. Misalkan $s = S/N$, $i = I/N$, $r = R/N$, dan $s + i + r = 1$, maka sistem menjadi

$$\dot{s} = \frac{\dot{S}N - S\dot{N}}{N^2} = \frac{\left(\mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S\right)N - 0}{N^2} = \mu - \beta si - \mu s$$

$$\dot{i} = \frac{\dot{I}N - I\dot{N}}{N^2} = \frac{\left(\frac{\beta SI}{N} - \eta I - \mu I\right)N}{N^2} = \beta si - (\eta + \mu)i$$

$$\dot{r} = \frac{\dot{R}N - R\dot{N}}{N^2} = \frac{(\eta I - \mu R)N}{N^2} = \eta i - \mu r$$

diperoleh sistem nondimensionalisasi

$$\dot{s} = \mu - \beta si - \mu s$$

$$\dot{i} = \beta si - (\eta + \mu)i$$

$$\dot{r} = \eta i - \mu r$$

Kemudian, kita cari titik ekuilibrium dari sistem (4) di atas, yaitu ketika $\dot{s} = 0$, $\dot{i} = 0$, dan $\dot{r} = 0$, diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu $E_0 = \{s^*, i^*, r^*\} = \{1, 0, 0\}$ yang disebut ekuilibrium *disease free* atau titik ekuilibrium ketika populasi infeksi sama dengan nol $i = 0$ dan titik ekuilibrium endemik ketika $i > 0$ yaitu $E_1 = \{s^*, i^*, r^*\} = \left\{ \frac{\eta + \mu}{\beta}, \frac{1 - \frac{\eta + \mu}{\beta}}{1 + \frac{\eta}{\mu}}, \frac{\eta}{\mu} i^* \right\}$.

Pada model epidemik ini akan diperkenalkan istilah *basic reproduction number* r_0 adalah metrik penting dalam epidemiologi yang digunakan untuk menentukan potensi penularan penyakit menular dalam suatu populasi. Nilai r_0 menunjukkan jumlah rata-rata orang yang dapat tertular dari satu orang yang terinfeksi selama masa infeksi mereka, dalam populasi yang seluruhnya rentan (*susceptible*). Secara umum, nilai r_0 diperoleh dari laju infeksi dibagi dengan total laju kesembuhan atau hilangnya penyakit. Dalam model 5, *basic reproduction number* r_0 adalah

$$r_0 = \frac{\beta}{\mu + \eta}$$

Kita dapat melihat kestabilan sistem atau titik ekuilibrium dengan *basic reproduction number*. Jika $r_0 < 1$, titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease-free equilibrium*) stabil dan titik ekuilibrium endemik tidak stabil atau keadaan penyakit endemik tidak akan terjadi. Ini berarti penyakit tidak akan menyebar, karena setiap individu yang terinfeksi rata-rata menginfeksi kurang dari satu orang. Dalam kondisi ini, populasi akan mencapai keadaan bebas penyakit, di mana tidak ada individu yang terinfeksi, dan penyakit akan punah dari populasi. Jika $r_0 > 1$ Titik kesetimbangan endemik stabil dan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil. Penyakit akan menyebar dalam populasi karena setiap individu yang terinfeksi menularkan penyakit ke lebih dari satu orang, sehingga infeksi

menyebarkan penyakit tidak dapat dikendalikan. Untuk menentukan nilai *basic reproduction number* pada sistem yang lebih rumit dapat menggunakan metode Next Generation Matrix.

Mari kita cek menggunakan matriks Jacobian Je dengan mengintegrasikan secara parsial sistem 3x3 sebagai berikut

$$Je = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} & \frac{\partial \dot{s}}{\partial i} & \frac{\partial \dot{s}}{\partial r} \\ \frac{\partial \dot{i}}{\partial s} & \frac{\partial \dot{i}}{\partial i} & \frac{\partial \dot{i}}{\partial r} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial s} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial i} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - (\mu + \eta) & 0 \\ 0 & \eta & -\mu \end{pmatrix}$$

Substitusikan titik kesetimbangan $E_0 = \{1,0,0\}$ dan $E_1 = \left\{ \frac{\eta + \mu}{\beta}, \frac{1 - \frac{\eta + \mu}{\beta}}{1 + \frac{\eta}{\mu}}, \frac{\eta}{\mu} \right\}$ ke matriks Jacobian Je pada persamaan (6) menjadi

$$J|_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - (\mu + \eta) & 0 \\ 0 & \eta & -\mu \end{pmatrix}$$

$$J|_{E_1} = \begin{pmatrix} -\beta \left(\frac{1 - \frac{\eta + \mu}{\beta}}{1 + \frac{\eta}{\mu}} \right) - \mu & -(\eta + \mu) & 0 \\ \beta \left(\frac{1 - \frac{\eta + \mu}{\beta}}{1 + \frac{\eta}{\mu}} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -\mu \end{pmatrix}$$

$$J|_{E_1} = \begin{pmatrix} \frac{-\beta}{\eta + \mu} & -(\eta + \mu) & 0 \\ \frac{\beta}{\eta + \mu} - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -\mu \end{pmatrix}$$

Lebih lanjut dengan menyelesaikan persamaan $|\lambda I - J|_{E_0}| = 0$ dan $|\lambda I - J|_{E_1}| = 0$, diperoleh

- Untuk titik ekuilibrium $E_0 = \{1, 0, 0\}$, persamaan karakteristiknya adalah $(\lambda + \mu)(\lambda - (\beta - (\mu + \eta)))(\lambda + \mu) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\mu, \lambda_3 = \beta - (\mu + \eta)$

Perhatikan bahwa titik steimbang *disease free* ini akan stabil ketika $\beta - (\mu + \eta) < 0$ atau ketika $\beta < (\mu + \eta)$ yaitu saat $r_0 < 1$.

- Untuk titik ekuilibrium $E_1 = \left\{ \frac{\eta + \mu}{\beta}, \frac{1 - \frac{\eta + \mu}{\beta}}{1 + \frac{\eta}{\mu}}, \frac{\eta}{\mu} i^* \right\}$, persamaan karakteristiknya adalah $\left(\lambda + \frac{\beta}{\eta + \mu} \right) (\lambda) (\lambda + \mu) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\beta}{\eta + \mu} - \mu \right) (\eta + \mu) = 0$. Perhatikan bahwa titik ekuilibrium ini memiliki akan stabil jika $\beta > \mu + \eta$ yaitu saat $r_0 > 1$.

Untuk penerapan model epidemik ini sangata beragam, mulai dari pemberian vaksin, tersistem umur, ada populasi terpapar dan model-model kompleks lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Bose, S. K. (2019). Ordinary Differential Equations. Dalam *Forum for Interdisciplinary Mathematics* (Vol. PartF2, hlm. 261–308). https://doi.org/10.1007/978-981-13-7114-1_6
- Elango, P. (2014). The Role of Mathematics in Biology. *Indian Streams Research Journal*, 215–222.
- Fischer, H. P. (2008). Mathematical modeling of complex biological systems: From parts lists to understanding systems behavior. *Alcohol Research and Health*, 31(1), 49–59.
- Hofmeyr, J. H. S. (2017). Mathematics and biology. *South African Journal of Science*, 113(3–4). <https://doi.org/10.17159/sajs.2017/a0203>
- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K. (2018). Dynamics of a predator-prey model with stage-structure on both species and anti-predator behavior. *Informatics in Medicine Unlocked*, 10, 50–57. <https://doi.org/10.1016/j.imu.2017.12.004>
- Powell, R. (2000). Animal Home Ranges and Territories and Home Range Estimators. Dalam *Research techniques in animal ecology: Controversies and consequences* (hlm. 64–110).

BAB 5

MATEMATIKA DALAM EKONOMI DAN KEUANGAN

Oleh Aprizal Resky

5.1 Pengantar Matematika Ekonomi dan Keuangan

Matematika ekonomi dan keuangan merupakan cabang ilmu yang menggunakan metode dan teknik matematika untuk menganalisis dan memecahkan masalah dalam bidang ekonomi dan keuangan. Disiplin ini berfokus pada penerapan model-model matematis untuk menjelaskan fenomena ekonomi, mengembangkan solusi, dan membuat prediksi berdasarkan data numerik. Matematika ekonomi dan keuangan tidak hanya terbatas pada teori, tetapi juga memiliki aplikasi luas dalam berbagai aspek kehidupan sehari-hari, termasuk pengambilan keputusan bisnis, kebijakan pemerintah, hingga investasi individu (Chiang, A.C., & Wainwright, K. 2005).

Peran matematika dalam ekonomi dan keuangan sangat penting karena memberikan dasar untuk analisis kuantitatif yang dibutuhkan untuk memahami berbagai konsep seperti penawaran dan permintaan, tingkat bunga, investasi, serta pertumbuhan ekonomi. Dalam bidang keuangan, matematika digunakan untuk menghitung bunga, menganalisis risiko, menentukan valuasi aset, dan menyusun portofolio yang

optimal. Penggunaan metode kuantitatif memungkinkan pelaku ekonomi dan profesional keuangan membuat keputusan yang lebih baik, mendasarkan pilihan mereka pada data yang terukur dan logis, serta memaksimalkan efisiensi sumber daya yang tersedia.

Dalam teori ekonomi, matematika diterapkan untuk berbagai konsep. Contohnya, fungsi permintaan dan penawaran digunakan untuk menggambarkan hubungan antara harga dan jumlah barang yang diminta atau ditawarkan. Fungsi produksi mengukur efisiensi dalam penggunaan faktor-faktor produksi, sementara kalkulus digunakan untuk mencari titik maksimum atau minimum dalam fungsi keuntungan atau biaya. Teori konsumsi juga menggunakan matematika untuk menganalisis perilaku konsumen, terutama melalui konsep utilitas dan kurva anggaran.

Di bidang keuangan, matematika memainkan peran sentral dalam menghitung nilai waktu uang, yakni menghitung nilai sekarang dan nilai masa depan dari uang yang dimiliki. Selain itu, teori portofolio menggunakan model matematika untuk menciptakan portofolio investasi yang optimal dengan mempertimbangkan minimisasi risiko. Penghitungan risiko investasi dapat dilakukan dengan metode seperti *Value at Risk* (VaR) atau simulasi Monte Carlo. Dalam valuasi derivatif, model *Black-Scholes* adalah contoh alat matematika yang digunakan untuk menghitung nilai opsi dan instrumen keuangan lainnya.

Matematika juga sangat membantu dalam pengambilan keputusan ekonomi, karena memberikan alat kuantitatif yang memungkinkan ekonom dan profesional keuangan untuk menganalisis data, memprediksi tren, dan membuat keputusan yang lebih rasional dan efisien. Model matematis juga memungkinkan simulasi skenario "*what-if*," yang berguna untuk

mengevaluasi berbagai alternatif kebijakan atau strategi bisnis berdasarkan hasil kuantitatif yang dapat diukur.

Sejarah penerapan matematika dalam ekonomi dimulai dari pemikiran para ekonom klasik seperti Adam Smith dan David Ricardo, yang mengembangkan model ekonomi dasar meski tanpa formalitas matematika yang ketat. Perkembangan pesat penerapan matematika dalam ekonomi terjadi pada abad ke-20, dipengaruhi oleh teori Keynesian dan penggunaan teknik optimasi dalam mikroekonomi dan makroekonomi. Di bidang keuangan, penerapan matematika mengalami akselerasi pada pertengahan abad ke-20 dengan munculnya teori portofolio modern oleh Harry Markowitz dan model Black-Scholes untuk valuasi opsi.

5.2 Aljabar dan Fungsi dalam Ekonomi

5.2.1 Fungsi Linear dalam Analisis Ekonomi

Fungsi linear adalah salah satu model matematika dasar yang digunakan dalam berbagai aplikasi ekonomi. Fungsi ini menggambarkan hubungan langsung antara dua variabel, sering kali di antara variabel independen dan variabel dependen. Fungsi linear dalam bentuk umum ditulis sebagai (Strang, G., 2006):

$$y = a + bx$$

dimana:

- y adalah variabel dependen (misalkan jumlah barang);
- x adalah variabel independen (misalkan harga barang);
- a adalah intercept;
- b adalah kemiringan (*slope*) garis;

Dalam ekonomi, fungsi linear sering digunakan untuk menggambarkan hubungan antara harga dan jumlah barang yang diminta (fungsi permintaan), atau antara harga dan jumlah barang yang ditawarkan (fungsi penawaran). Misalnya, fungsi permintaan dapat dinyatakan sebagai:

$$Q_d = a - bP$$

Di mana Q_d adalah jumlah barang yang diminta, P adalah harga, a adalah jumlah yang diminta pada saat harga nol, dan b adalah sensitivitas permintaan terhadap perubahan harga. Hubungan ini menunjukkan bahwa ketika harga meningkat, permintaan barang akan menurun (karena nilai b biasanya positif).

Contoh Aplikasi:

Jika $Q_d = 100 - 5P$, ini berarti bahwa setiap kenaikan harga sebesar 1 satuan akan mengurangi jumlah barang yang diminta sebesar 5 unit. Jika harga P adalah 10, maka:

$$Q_d = 100 - 5(10) = 100 - 50 = 50$$

Dengan demikian, jumlah barang yang diminta pada harga 10 adalah 50 unit.

5.2.2 Persamaan dan Sistem Persamaan

Sistem persamaan adalah kumpulan dua atau lebih persamaan yang memiliki satu atau lebih variabel bersama. Dalam ekonomi, sistem persamaan sering digunakan untuk memodelkan interaksi berbagai variabel ekonomi. Contohnya, persamaan permintaan dan penawaran dapat digunakan untuk menemukan keseimbangan pasar.

Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear melibatkan beberapa persamaan linear yang dapat diselesaikan secara simultan.

Misalnya, jika kita memiliki persamaan permintaan dan penawaran:

$$Q_d = 100 - 5P; Q_s = 20 + 3P$$

Untuk menemukan titik keseimbangan di mana jumlah yang diminta sama dengan jumlah yang ditawarkan ($Q_d = Q_s$), kita dapat menyelesaikan sistem persamaan ini:

$$100 - 5P = 20 + 3P$$

$$80 = 8P$$

$$10P = 10$$

$$P = 10$$

Dengan demikian, harga keseimbangan adalah 10. Dengan substitusi nilai P ke dalam salah satu persamaan, kita dapat menemukan jumlah keseimbangan:

$$Q_d = 100 - 5(10) = 50$$

Jadi, jumlah keseimbangan adalah 50 unit.

Sistem Persamaan Non-Linear

Dalam beberapa kasus, persamaan yang digunakan tidak selalu linear. Misalnya, fungsi biaya atau utilitas dalam ekonomi sering kali bersifat non-linear, dan sistem persamaan tersebut memerlukan metode yang lebih kompleks untuk diselesaikan, seperti metode iteratif atau kalkulus.

5.2.3 Fungsi Non-Linear : Kuadrat, Ekponensial, dan Logaritma

Selain fungsi linear, ekonomi juga sering menggunakan fungsi non-linear untuk menggambarkan hubungan yang lebih kompleks antara variabel. Fungsi non-linear mencakup fungsi kuadrat, eksponensial, dan logaritma.

Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Dalam ekonomi, fungsi kuadrat dapat digunakan untuk memodelkan hubungan seperti biaya total atau pendapatan marjinal. Misalnya, biaya total produksi sering kali merupakan fungsi kuadrat dari jumlah output yang diproduksi.

Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial menggambarkan pertumbuhan yang cepat, misalnya, pertumbuhan populasi atau pertumbuhan investasi. Fungsi eksponensial ditulis sebagai:

$$y = Ae^{kx}$$

Di mana e adalah basis dari logaritma alami (sekitar 2.718), A adalah konstanta, dan k menunjukkan tingkat pertumbuhan.

Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma adalah kebalikan dari fungsi eksponensial. Dalam ekonomi, logaritma sering digunakan untuk menganalisis elastisitas permintaan atau penawaran, serta untuk mereduksi skala data dalam kasus pertumbuhan yang eksponensial.

$$y = \ln(x)$$

5.3 Optimasi dalam Ekonomi

Optimasi merupakan salah satu konsep dasar dalam ekonomi yang berhubungan dengan pengambilan keputusan yang terbaik di bawah kondisi tertentu. Dalam ekonomi, tujuan utama optimasi adalah memaksimalkan atau meminimalkan suatu fungsi objektif, seperti keuntungan, utilitas, atau biaya, dengan mempertimbangkan kendala atau batasan yang ada. Optimasi dapat dilakukan baik dalam situasi tanpa kendala (*unconstrained optimization*) maupun dalam situasi dengan kendala (*constrained optimization*).

5.3.1 Teori Maksimum dan Minimum

Dalam konteks optimasi, kita sering ingin menemukan titik-titik maksimum atau minimum dari suatu fungsi. Titik maksimum adalah titik di mana fungsi mencapai nilai tertinggi, sementara titik minimum adalah tempat fungsi mencapai nilai terendahnya.

Secara matematis, kita menggunakan **turunan pertama** untuk menemukan titik kritis, yaitu titik di mana kemiringan fungsi (derivatif) sama dengan nol:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Titik kritis ini bisa berupa titik maksimum, titik minimum, atau titik belok (infleksi). Untuk menentukan apakah titik tersebut merupakan maksimum atau minimum, kita perlu memeriksa **turunan kedua** dari fungsi tersebut:

- Jika $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, maka titik tersebut adalah minimum.

- Jika $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, maka titik tersebut adalah maksimum.

Contoh Aplikasi dalam Ekonomi:

Misalkan fungsi keuntungan $\pi(Q)$ dari suatu perusahaan diberikan oleh:

$$\pi(Q) = 100Q - 2Q^2$$

Untuk menemukan kuantitas Q yang memaksimalkan keuntungan, kita dapat mencari turunan pertama dari fungsi keuntungan:

$$\frac{d\pi}{dQ} = 100 - 4Q$$

Setelah itu, kita setarakan turunan ini dengan nol untuk menemukan titik kritis:

$$100 - 4Q = 0$$

$$Q = 25$$

Untuk memastikan bahwa ini adalah titik maksimum, kita memeriksa turunan kedua:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -4$$

Karena $\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$, titik ini merupakan maksimum. Jadi, perusahaan akan memaksimalkan keuntungan ketika menghasilkan 25 unit barang.

5.3.2 Aplikasi Derivatif dalam Pengambilan Keputusan Ekonomi

Turunan (derivatif) memainkan peran penting dalam analisis ekonomi, terutama untuk menganalisis perubahan

marjinal. Beberapa aplikasi utama dari derivatif dalam ekonomi meliputi:

1. Pendapatan Marjinal (*Marginal Revenue*, MR):

- Pendapatan marjinal adalah tambahan pendapatan yang diperoleh dari penjualan satu unit tambahan barang. Pendapatan marjinal dapat dihitung sebagai turunan dari fungsi total pendapatan (*Total Revenue*, TR) terhadap kuantitas barang yang dijual:

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

2. Biaya Marjinal (*Marginal Cost*, MC):

- Biaya marjinal adalah tambahan biaya yang dikeluarkan untuk memproduksi satu unit tambahan barang. Biaya marjinal adalah turunan dari fungsi total biaya (*Total Cost*, TC) terhadap kuantitas output:

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

3. Utilitas Marjinal (*Marginal Utility*, MU):

- Utilitas marjinal adalah tambahan utilitas (kepuasan) yang diperoleh dari mengonsumsi satu unit tambahan barang atau jasa. Dalam teori konsumen, utilitas marjinal memainkan peran penting dalam menentukan pilihan konsumen.

5.3.3 Fungsi Lagrange dan Kendala dalam Optimasi

Optimasi dalam ekonomi tidak selalu terjadi tanpa batasan. Dalam banyak kasus, keputusan yang diambil harus mempertimbangkan sejumlah kendala. Contoh umum adalah perusahaan yang ingin memaksimalkan keuntungan

dengan kendala anggaran atau produksi, atau konsumen yang ingin memaksimalkan utilitas dengan kendala anggaran.

Untuk menyelesaikan masalah optimasi dengan kendala, kita menggunakan metode **Lagrange**. Metode ini memungkinkan kita untuk menemukan titik maksimum atau minimum dari suatu fungsi objektif yang dipengaruhi oleh kendala.

Secara umum, masalah optimasi dengan kendala dapat dirumuskan sebagai berikut:

Maximalkan fungsi $f(x, y)$, dengan kendala $g(x, y) = 0$

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah dengan membentuk **fungsi Lagrange** sebagai:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y))$$

dimana λ adalah multiplier Lagrange. Selanjutnya, kita mencari turunan parsial dari fungsi Lagrange terhadap x, y , dan λ , dan kemudian menyelesaikan sistem persamaan yang dihasilkan.

Contoh Aplikasi :

Misalkan seorang konsumen ingin memaksimalkan utilitas $U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$ dengan kendala anggaran $10x + 20y = 100$. Fungsi *Lagrangeny*a adalah:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^{0.5}y^{0.5} + \lambda(100 - 10x - 20y)$$

Langkah selanjutnya adalah mencari turunan parsial dari $\mathcal{L}$ terhadap x, y , dan λ , kemudian menyelesaikan sistem persamaan yang dihasilkan untuk menemukan nilai optimal x dan y .

5.3.4 Penggunaan Metode Optimasi dalam Keuangan

Metode optimasi juga digunakan secara luas dalam bidang keuangan, terutama dalam masalah yang berkaitan dengan pengelolaan portofolio, manajemen risiko, dan investasi.

Teori Portofolio Modern

Teori portofolio modern yang dikembangkan oleh Harry Markowitz menggunakan optimasi untuk menentukan alokasi aset yang optimal. Tujuannya adalah untuk memaksimalkan pengembalian yang diharapkan dari portofolio sambil meminimalkan risiko. Fungsi objektif dalam teori ini adalah minimisasi varian (risiko), dan kendala adalah total alokasi aset harus sama dengan 100%.

Model *Capital Asset Pricing* (CAPM)

Model CAPM digunakan untuk mengoptimalkan risiko dan pengembalian suatu aset dalam portofolio. Optimasi dilakukan dengan menghitung harga aset yang efisien berdasarkan pengembalian yang diharapkan dan risiko yang melekat.

Aplikasi Lain dalam Keuangan:

- **Optimasi Risiko dengan *Value at Risk* (VaR):** Metode optimasi digunakan untuk menghitung batas risiko yang dapat diterima dalam portofolio.
- **Pengelolaan Derivatif:** Penentuan harga opsi dengan model *Black-Scholes* melibatkan proses optimasi untuk menemukan nilai wajar dari opsi tersebut.

5.4 Teori Matriks dan Aplikasinya dalam Ekonomi

Matriks adalah alat matematis yang sangat berguna untuk memecahkan berbagai masalah ekonomi, terutama yang melibatkan sistem persamaan linear, analisis input-output, dan model optimasi. Teori matriks memberikan cara yang efisien untuk menangani data yang kompleks dan membantu memecahkan masalah ekonomi yang melibatkan banyak variabel. Pada bab ini, kita akan mempelajari dasar-dasar teori matriks serta aplikasinya dalam konteks ekonomi (Danial, D., 2019).

5.4.1 Pengantar Matriks dan Determinan

➤ Defenisi Matriks

Matriks adalah susunan angka-angka dalam bentuk persegi panjang yang diatur dalam baris dan kolom. Matriks biasanya dinotasikan dengan huruf kapital, misalnya A , dan memiliki ukuran (dimensi) yang dinyatakan dalam bentuk $m \times n$, di mana m adalah jumlah baris dan n adalah jumlah kolom.

Sebagai contoh, matriks A dengan ukuran 2×3 ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

➤ Operasi Dasar Matriks

Beberapa operasi dasar pada matriks yang sering digunakan dalam analisis ekonomi antara lain:

- **Penjumlahan Matriks:** Dua matriks dengan ukuran yang sama dapat dijumlahkan dengan menjumlahkan

elemen yang bersesuaian. Misalnya, jika A dan B adalah dua matriks berukuran 2×2 , maka:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

- **Perkalian Skalar dengan Matriks:** Setiap elemen matriks dapat dikalikan dengan suatu bilangan skalar. Misalnya, jika c adalah skalar dan A adalah matriks, maka cA adalah:

$$cA = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

- **Perkalian Matriks:** Dua matriks A dan B dapat dikalikan jika jumlah kolom di matriks pertama sama dengan jumlah baris di matriks kedua. Hasil kali $A \times B$ akan memiliki elemen:

$$C = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

di mana C adalah elemen di baris i dan kolom j .

➤ **Determinan**

Determinant adalah nilai skalar yang dapat dihitung dari suatu matriks persegi (matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama). Determinan matriks A dinotasikan sebagai $|A|$. Untuk matriks 2×2 , determinan dihitung sebagai:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinan matriks digunakan dalam berbagai analisis ekonomi, terutama untuk menentukan apakah suatu sistem persamaan memiliki solusi unik.

5.4.2 Sistem Persamaan Linear dan Matriks

Dalam banyak masalah ekonomi, kita sering dihadapkan pada sistem persamaan linear. Misalnya, dalam konteks permintaan dan penawaran di pasar, kita mungkin harus memecahkan sistem persamaan untuk menemukan titik keseimbangan. Matriks menawarkan cara yang efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang kompleks.

➤ Bentuk Matriks dari Sistem Persamaan Linear

Suatu sistem persamaan linear dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Misalnya, sistem persamaan berikut:

$$2x + 3y = 5$$

$$4x + y = 6$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dalam notasi matriks, kita dapat menulis sistem tersebut sebagai $AX = B$, di mana A adalah matriks koefisien, X adalah vektor variabel, dan B adalah vektor konstanta. Untuk menyelesaikan sistem ini, kita mencari X dengan metode invers matriks atau eliminasi Gauss.

➤ Invers Matriks

Invers dari matriks A , dinotasikan sebagai A^{-1} , adalah matriks yang memenuhi persamaan $AA^{-1} = I$, di mana I adalah matriks identitas. Jika invers dari matriks A ada, maka kita dapat menyelesaikan sistem persamaan linear $AX = B$ dengan cara:

$$X = A^{-1}B$$

Namun, tidak semua matriks memiliki invers. Matriks yang tidak memiliki invers disebut matriks singular, yang berarti sistem persamaan tersebut tidak memiliki solusi unik.

5.4.3 Aplikasi Matriks dalam Model Ekonomi *Input-Output*

Salah satu aplikasi penting dari teori matriks dalam ekonomi adalah analisis *input-output*, yang dikembangkan oleh ekonom Wassily Leontief. Model *input-output* digunakan untuk menganalisis aliran barang dan jasa antar sektor dalam perekonomian. Matriks *input-output* menggambarkan bagaimana output dari suatu sektor digunakan sebagai input dalam sektor lain.

➤ **Matriks Input-Output**

Matriks *input-output* terdiri dari matriks koefisien teknis yang menunjukkan proporsi input yang dibutuhkan oleh setiap sektor untuk menghasilkan *output* tertentu. Misalkan A adalah matriks koefisien teknis, X adalah vektor output sektor, dan D adalah vektor permintaan akhir. Model *input-output* dapat dinyatakan sebagai:

$$X = AX + D$$

atau dapat disederhanakan menjadi:

$$X = (I - A)^{-1}D$$

di mana I adalah matriks identitas. Persamaan ini memungkinkan kita untuk menghitung total output X yang dibutuhkan untuk memenuhi permintaan akhir D .

➤ Aplikasi dalam Kebijakan Ekonomi

Model *input-output* sering digunakan oleh pembuat kebijakan ekonomi untuk meramalkan dampak dari perubahan dalam permintaan sektor tertentu terhadap keseluruhan perekonomian. Misalnya, jika permintaan barang dari sektor konstruksi meningkat, model *input-output* dapat digunakan untuk memprediksi dampak dari peningkatan tersebut pada sektor lain, seperti manufaktur dan jasa.

5.5 Model Linear *Programming* dalam Ekonomi

Linear *Programming* (Pemrograman Linear) adalah metode optimasi matematika yang digunakan untuk mencari solusi terbaik dari suatu masalah yang memiliki kendala linear. Dalam ekonomi, linear *programming* sering digunakan untuk memaksimalkan atau meminimalkan fungsi objektif, seperti keuntungan atau biaya, dengan mempertimbangkan keterbatasan sumber daya. Model linear programming membantu menyelesaikan masalah alokasi sumber daya secara efisien, seperti dalam perencanaan produksi, distribusi, pengelolaan portofolio, dan banyak lagi (Bazaraa, M. S., dkk, 2011).

5.5.1 Pengantar Program Linear

➤ Definisi Linear *Programming*

Linear *Programming* (LP) adalah teknik optimasi yang bertujuan untuk menemukan nilai terbaik dari suatu fungsi objektif (*maximization* atau *minimization*) di bawah sekumpulan kendala (*constraints*). Model LP memerlukan fungsi objektif dan kendala yang semuanya harus berbentuk linear. Persamaan-

persamaan ini dapat dipecahkan dengan metode matematis tertentu seperti metode Simpleks atau metode Grafik (untuk masalah dua variabel).

Secara umum, masalah LP dapat dinyatakan sebagai berikut:

Maksimalkan atau **Minimalkan**:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Kendala:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 :$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

dimana:

- Z adalah fungsi objektif yang ingin dimaksimalkan atau diminimalkan.
- $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah koefisien variabel keputusan $x_1, x_2, \dots, x_n$ dalam fungsi objektif.
- a_{ij} adalah koefisien dari variabel x_j pada kendala ke- i .
- $b_1, b_2, \dots, b_m$ adalah batasan-batasan yang harus dipenuhi.

➤ **Asumsi Dasar Linear Programming**

Model linear *programming* berdasarkan beberapa asumsi utama, yaitu:

- **Proporsionalitas:** Setiap variabel dalam fungsi objektif dan kendala berbanding lurus.

- **Aditivitas:** Fungsi objektif dan kendala merupakan penjumlahan linier dari variabel-variabel.
- **Pembagian (*Divisibility*):** Variabel keputusan dapat berupa bilangan real atau fraksional.
- **Deterministik:** Nilai dari semua parameter (koefisien dan batasan) sudah diketahui dan pasti.

5.5.2 Metode Simpleks

Metode Simpleks adalah salah satu metode yang paling banyak digunakan dalam pemrograman linear. Metode ini adalah algoritma iteratif yang dimulai dari satu titik sudut solusi dan bergerak sepanjang sisi poligon hingga mencapai titik optimum. (Taha, H. A., 2017)

➤ Langkah-langkah Metode Simpleks

Metode Simpleks melibatkan langkah-langkah berikut:

1. **Formulasi Model:** Tentukan fungsi objektif dan kendala dalam bentuk linear.
2. **Tabel Simpleks Awal:** Buat tabel awal dengan memasukkan semua variabel dasar dan non-dasar.
3. **Identifikasi Variabel Pivotal:** Pilih variabel yang akan memasuki basis dengan mengidentifikasi kolom pivot (variabel yang dapat meningkatkan nilai fungsi objektif).
4. **Operasi Pivot:** Lakukan operasi pivot untuk memperbarui tabel Simpleks hingga mencapai solusi optimal.

5. **Cek Optimalitas:** Jika tidak ada lagi variabel yang dapat meningkatkan nilai fungsi objektif, maka solusi optimal telah ditemukan.

➤ **Kelebihan dan Keterbatasan Metode Simpleks**

- **Kelebihan:** Metode Simpleks sangat efisien untuk menyelesaikan masalah LP skala besar, terutama yang melibatkan banyak variabel dan kendala. Algoritma ini dijamin akan menemukan solusi optimal jika solusi tersebut ada.
- **Keterbatasan:** Metode ini membutuhkan sumber daya komputasi yang lebih besar jika diterapkan pada masalah yang sangat kompleks atau pada model yang melibatkan banyak kendala dan variabel.

5.5.3 Aplikasi Linear *Programming* dalam Ekonomi dan Keuangan

Linear *programming* sangat berguna dalam berbagai aplikasi di bidang ekonomi dan keuangan. Berikut adalah beberapa contoh aplikasinya (Winston, W. L., 2004):

➤ **Perencanaan Produksi**

Linear programming banyak digunakan dalam perencanaan produksi untuk memaksimalkan keuntungan atau meminimalkan biaya dengan kendala sumber daya, seperti bahan baku, tenaga kerja, dan kapasitas produksi.

Contoh: Misalkan suatu pabrik menghasilkan dua produk P_1 dan P_2 . Pabrik ingin memaksimalkan keuntungan, di mana keuntungan dari P_1 adalah Rp100

per unit dan dari P_2 adalah Rp150 per unit. Pabrik memiliki keterbatasan bahan baku dan waktu produksi. Masalah ini dapat dimodelkan dengan linear *programming* untuk menentukan kombinasi jumlah produk yang optimal.

➤ **Distribusi dan Logistik**

Linear *programming* juga digunakan dalam masalah distribusi dan logistik, misalnya untuk meminimalkan biaya pengiriman barang dari beberapa pusat distribusi ke berbagai tujuan. Dalam konteks ini, linear *programming* dapat membantu perusahaan memilih rute pengiriman dan alokasi kendaraan yang paling efisien.

Contoh: Misalkan ada beberapa gudang dengan produk yang harus dikirim ke beberapa toko dengan biaya tertentu. Tujuan dari linear *programming* dalam kasus ini adalah meminimalkan total biaya pengiriman dengan tetap memenuhi permintaan dari setiap toko.

➤ **Pengelolaan Portofolio**

Dalam manajemen keuangan, linear *programming* dapat digunakan untuk memaksimalkan pengembalian portofolio investasi atau meminimalkan risiko dengan kendala tertentu seperti alokasi aset atau batasan risiko.

Contoh: Seorang manajer investasi dapat menggunakan linear *programming* untuk menentukan alokasi optimal dari beberapa aset investasi sehingga portofolio yang dihasilkan memiliki pengembalian yang maksimal dengan tingkat risiko yang dapat diterima.

➤ **Penjadwalan Tenaga Kerja**

Linear *programming* juga digunakan dalam penjadwalan tenaga kerja, di mana perusahaan berusaha untuk meminimalkan biaya tenaga kerja sambil memastikan bahwa kebutuhan tenaga kerja terpenuhi selama periode waktu tertentu.

5.6 Teori Permainan dan Strategi dalam Ekonomi

5.6.1 Pengenalan Teori Permainan

Teori permainan (*game theory*) adalah cabang matematika terapan yang mempelajari interaksi strategis antara individu atau entitas yang rasional dan saling mempengaruhi. Dalam konteks ekonomi, teori permainan digunakan untuk menganalisis keputusan yang melibatkan konflik, kolaborasi, atau kompetisi antara berbagai pemain ekonomi seperti perusahaan, konsumen, pemerintah, dan investor (Varian, H. R., 2014).

Elemen dasar teori permainan:

- **Pemain (*players*):** Individu atau entitas yang terlibat dalam permainan dan membuat keputusan.
- **Strategi (*strategies*):** Tindakan yang dapat diambil oleh pemain untuk mencapai tujuan mereka.
- **Pembayaran (*payoff*):** Hasil yang diterima pemain berdasarkan kombinasi strategi yang dipilih oleh semua pemain.
- **Aturan permainan (*rules of the game*):** Kesepakatan atau batasan yang menentukan interaksi antara pemain.

5.6.2 Strategi Dominan dan Ekuilibrium Nash

Salah satu konsep utama dalam teori permainan adalah *strategi dominan*, di mana satu strategi selalu memberikan hasil yang lebih baik atau sama baiknya dibandingkan strategi lain, tidak peduli apa yang dilakukan pemain lain. Jika semua pemain memilih strategi dominan, permainan mencapai hasil yang dikenal sebagai *Ekuilibrium Nash*.

Ekuilibrium Nash adalah kondisi di mana setiap pemain dalam permainan memilih strategi terbaik mereka, dengan asumsi bahwa strategi pemain lain tidak berubah. Tidak ada pemain yang dapat meningkatkan hasilnya dengan mengubah strateginya secara sepihak.

Contoh: Dalam permainan dilema narapidana, masing-masing pemain memiliki pilihan untuk bekerja sama atau mengkhianati. Jika kedua pemain mengkhianati, mereka mencapai ekuilibrium Nash, meskipun hasilnya tidak optimal bagi keduanya.

5.6.3 Penerapan Teori Permainan dalam Kompetensi Ekonomi

Teori permainan sering digunakan untuk menganalisis situasi persaingan antara perusahaan dalam ekonomi. Ini dapat mencakup:

- **Perang harga:** Ketika dua atau lebih perusahaan bersaing dengan menurunkan harga produk mereka. Setiap perusahaan mencoba untuk memaksimalkan pangsa pasar, namun jika semua perusahaan menurunkan harga secara simultan, keuntungan secara keseluruhan berkurang.
- **Persaingan di pasar oligopoli:** Di mana beberapa perusahaan besar mendominasi pasar, dan keputusan

harga atau output dari satu perusahaan mempengaruhi perusahaan lainnya. Model permainan seperti model Cournot dan model Bertrand digunakan untuk menggambarkan perilaku perusahaan dalam pasar oligopoli.

Model Cournot: Dalam model ini, perusahaan bersaing dengan menetapkan kuantitas output, dengan asumsi bahwa output perusahaan lain tetap. **Model Bertrand:** Dalam model ini, perusahaan bersaing dengan menetapkan harga produk, dengan asumsi bahwa harga perusahaan lain tetap.

5.6.4 Strategi Optimal dalam Negosiasi dan *Bidding*

Teori permainan juga digunakan dalam negosiasi dan situasi *bidding* (lelang). Dalam lelang, pemain bersaing untuk memperoleh barang atau aset dengan mengajukan tawaran (*bid*), dan strategi optimal melibatkan mengantisipasi tawaran yang diajukan oleh lawan.

Jenis-jenis lelang dalam teori permainan:

- **Lelang harga tertutup** (*sealed-bid auction*) di mana semua penawaran tidak diketahui oleh peserta lain. Pemenang adalah penawar tertinggi, tetapi harga yang dibayar tergantung pada jenis lelang (misalnya, *first-price* atau *second-price*).
- **Lelang harga terbuka** di mana semua penawaran dapat dilihat oleh peserta lainnya. Contohnya termasuk lelang Inggris, di mana harga meningkat sampai hanya satu penawar yang tersisa.

Strategi dalam negosiasi juga dapat dianalisis melalui teori permainan. Dalam negosiasi bilateral, setiap pihak mencoba memaksimalkan keuntungan mereka, dan strategi

optimal biasanya melibatkan mencari keseimbangan antara keuntungan maksimum dan konsesi minimal.

5.6.5 Permainan Berulang dan Dinamis dalam Pasar Keuangan

Permainan berulang adalah permainan yang dimainkan lebih dari satu kali, di mana keputusan yang diambil di masa lalu dapat mempengaruhi hasil di masa depan. Dalam konteks pasar keuangan, permainan berulang sering digunakan untuk menganalisis keputusan investasi, strategi perdagangan, dan kebijakan perusahaan.

Permainan dinamis memperhitungkan waktu dalam pengambilan keputusan. Dalam permainan dinamis, pemain membuat keputusan secara bertahap, dan keputusan di setiap tahap mempengaruhi keputusan di tahap berikutnya.

Contoh dalam pasar keuangan:

- **Strategi perdagangan berulang:** Pedagang dapat menggunakan strategi untuk memaksimalkan keuntungan dari transaksi berulang, seperti menggunakan model *tit-for-tat* dalam kompetisi pasar saham atau pasar komoditas.
- **Permainan berantai dalam merger dan akuisisi:** Perusahaan dapat menggunakan permainan dinamis untuk mengantisipasi langkah perusahaan lain dalam mengajukan penawaran untuk akuisisi atau merger.

DAFTAR PUSTAKA

- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2011). *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons.
- Chiang, A.C., & Wainwright, K. 2005. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw-Hill.
- Danial, D., Nurjannah, N., & Mirna, M. 2019. *Evaluation of The Learning*.
- Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications*. Cengage Learning.
- Sydsaeter, K., & Hammond, P. 2012. *Essential Mathematics for Economic Analysis*. Pearson.
- Taha, H. A. (2017). *Operations Research: An Introduction*. Pearson.
- Varian, H. R. (2014). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. W.W. Norton & Company.
- Winston, W. L. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms*. Cengage Learning

BIODATA PENULIS



Lulut Alfaris, S.T., M.T.

Dosen Program Studi Teknologi Kelautan
Politeknik Kelautan dan Perikanan Pangandaran

Pendidikan menengah penulis diselesaikan di SMAN 1 Genteng Banyuwangi, selanjutnya S1 dan S2 pada Jurusan Teknik Kelautan, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya . Saat ini menjadi dosen tetap di Program Studi Teknologi Kelautan, Politeknik Kelautan dan Perikanan Pangandaran. Penulis dipercaya untuk mengajar di mata kuliah Matematika Teknik, Statistika dan Oseanografi. Beberapa buku yang telah ditulis diantaranya Konsep Dasar Matematika; Matematika untuk Perguruan Tinggi, Riset Operasi; Matriks dan Ruang Vektor; serta Filsafat Pendidikan Matematika,

BIODATA PENULIS



Rianto Wibowo, S.T., M.Eng.

Dosen Program Studi Teknik Mesin
Fakultas Teknik Universitas Muria Kudus

Penulis lahir di Demak tanggal 30 Maret 1973. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Muria Kudus. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Teknik Mesin, Universitas Indonesia, Jakarta dan melanjutkan S2 pada Jurusan Teknik Mesin, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta. Penulis mengajar matakuliah Fisika Teknik I, Fisika Teknik II dan Praktikum Fisika Teknik di Program Studi Teknik Mesin Universitas Muria Kudus, Jawa Tengah. Penulis menekuni bidang Menulis. Email penulis: rianto.wibowo@umk.ac.id

BIODATA PENULIS



Zaitun, S.Si., M.Mat.

Dosen Program Studi Sains Data

Jurusan Sains Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir di Raha tanggal 22 Juni 1999. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sains Data Jurusan Sains, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie Kota Parepare. Menyelesaikan pendidikan S1 pada bidang Matematika dan melanjutkan S2 dengan bidang Matematika pada konsentrasi Matematika Pemodelan. Penulis memiliki bidang konsentrasi keilmuan di bidang matematika komputasi dan matematika keteknikan.

BIODATA PENULIS



Hanna Hilyati Aulia, M.Si.
Dosen Program Studi Ekonomi Syari'ah
Fakultas Ekonomi dan Bisnis Islam

Penulis lahir di Metro Lampung pada 18 Desember 1995. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Ekonomi Syari'ah, IAIN Metro Lampung. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan MIPA Matematika Universitas Jenderal Soedirman dan melanjutkan S2 pada Jurusan FMIPA Matematika Institut Teknologi Bandung peminatan Matematika Industri dan Keuangan. Penulis menekuni pemodelan matematika dalam bidang epidemi dan ekonomi. Penulis menggemari kegiatan pengajaran dan seni sejak bangku sekolah dengan membuat Komik Matematika selama SMA hingga Kuliah.

BIODATA PENULIS



Aprizal Resky, S.Si., M.Si.

Dosen Program Studi Sains Data

Jurusan Sains, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir di Parepare pada 24 April 1998. Saat ini, berkarier sebagai dosen tetap di Program Studi Sains Data, Jurusan Sains, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie Parepare. Dengan latar belakang pendidikan sains, penulis berhasil menyelesaikan gelar Sarjana dan Magister Matematika dari Universitas Hasanuddin.

Selama masa studi, penulis tidak hanya fokus pada akademik, tetapi juga aktif dalam berbagai organisasi kemahasiswaan. Penulis aktif menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Matematika (Himatika) dan terlibat aktif dalam Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unhas saat masih menjadi seorang mahasiswa. Pengalaman ini mengasah kemampuan kepemimpinan serta memperluas jejaring dan wawasan di bidang sains dan pendidikan.