

MATEMATIKA SEKOLAH:

KONSEP-KONSEP MATEMATIKA SMP/MTS DAN MATEMATIKA SMA/MA

Joni Wilson Sitopu, Nazariah, Mundzir, Azmidar,
Lita Lovia, Mirna Riazil Jannah, Ardiana Fatma Dewi,
Hartina Husain, Aprizal Resky, Muhammad Rifki Nisardi,
Putri Anugrah Cahya Dewi

MATEMATIKA SEKOLAH:

**Konsep-Konsep Matematika SMP/MTS
dan Matematika SMA/MA**

Joni Wilson Sitopu

Nazariah

Mundzir

Azmidar

Lita Lovia

Mirna Riazil Jannah

Ardiana Fatma Dewi

Hartina Husain

Aprizal Resky

Muhammad Rifki Nisardi

Putri Anugrah Cahya Dewi



GETPRESS INDONESIA

**MATEMATIKA SEKOLAH:
Konsep-Konsep Matematika SMP/MTS
dan Matematika SMA/MA**

Penulis :

Joni Wilson Sitopu
Nazariah
Mundzir
Azmidar
Lita Lovia
Mirna Riazil Jannah
Ardiana Fatma Dewi
Hartina Husain
Aprizal Resky
Muhammad Rifki Nisardi
Putri Anugrah Cahya Dewi

ISBN :

Editor : Ari Yanto, M.Pd.

Penyunting: Yuliatrini Novita, M.Hum.

Desain Sampul dan Tata Letak : Tri Putri Wahyuni, S.Pd.

Penerbit: CVGETPRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi:

Jl. Palarik RT 01 RW 06, Kelurahan Air Pacah
Kecamatan Koto Tengah, Padang, Sumatera Barat

website: www.getpress.co.id
email: adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, November 2023

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan puji syukur kehadiran Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayahNya, maka Penulisan Buku dengan judul **MATEMATIKA SEKOLAH: Konsep-Konsep Matematika SMP/MTS dan Matematika SMA/MA** dapat diselesaikan dengan kerjasama tim penulis. Konsep-konsep Matematika SMP/ MTS dan Matematika SMA/ MA merupakan buku ini berisikan bahasan mengenai bilangan bulat, bilangan berpangkat, akar suatu bilangan, barisan dan deret, pecahan, persen, rasio, perbandingan dan miskonsepsi, logika dan himpunan, persamaan dan pertidaksamaan linear dan kuadrat, matriks dan vektor, bangun ruang sisi lengkung, trigonometri, logaritma, program linear, limit fungsi, diferensial & integral, dan statistika dan peluang.

Buku ini masih banyak kekurangan dalam penyusunannya. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan dan kesempurnaan buku ini selanjutnya. Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam proses penyelesaian Buku ini. Semoga Buku ini dapat menjadi sumber referensi dan literatur yang mudah dipahami.

Padang, November 2023
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR TABEL	viii
BAB 1 BILANGAN BULAT, BILANGAN BERPANGKAT, AKAR SUATU BILANGAN, BARISAN DAN DERET	1
1.1 Bilangan Bulat	1
1.2 Bilangan Berpangkat (Eksponen)	4
1.2.1 Bilangan Berpangkat Negatif	5
1.2.2 Sifat Bilangan Berpangkat	5
1.3 Akar Suatu Bilangan	6
1.3.1 Bilangan Rasional	6
1.3.2 Bilangan Bentuk Akar	6
1.4 Barisan	8
1.4.1 Barisan Bilangan	8
1.4.2 Barisan Aritmetika	9
1.4.3 Barisan Geometri	9
1.5 Deret	10
1.5.1 Deret Berhingga dan Tak Hingga	10
1.5.2 Deret Aritmetika	11
1.5.3 Deret Geometri	12
DAFTAR PUSTAKA	14
BAB 2 PECAHAN, PERSEN, RASIO, PERBANDINGAN DAN MISKONSEPSI	15
2.1 Pecahan	15
2.2 Bentuk-Bentuk Pecahan	17
2.3 Persen	21
2.4 Rasio	23
2.5 Perbandingan dan Skala	25
2.6 Miskonsepsi	27
DAFTAR PUSTAKA	29
BAB 3 LOGIKA DAN HIMPUNAN	31
3.1 Logika	31
3.1.1 Negasi	32
3.1.2 Konjungsi	33
3.1.3 Disjungsi	34
3.1.4 Implikasi	36
3.1.5 Biimplikasi	37
3.2 Himpunan	39
3.2.1 Jenis-jenis Himpunan	39
3.2.2 Operasi Himpunan	42
3.2.3 Diagram Venn	45
DAFTAR PUSTAKA	49

BAB 4 PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR DAN KUADRAT.....	51
4.1 Persamaan Linear Satu Variabel.....	51
4.1.1 Solusi Persamaan Linear Satu Variabel	52
4.2 Pertidaksamaan Linear Satu Variabel	54
4.2.1 Solusi Pertidaksamaan Linear Satu Variabel.....	54
4.3 Persamaan Linear Dua Variabel.....	57
4.3.1 Solusi Persamaan Linear Dua Variabel	58
4.3.2 Sistem Persamaan Linear Dua Variabel.....	59
4.3.3 Solusi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel	59
4.4 Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	61
4.4.1 Solusi Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	62
4.5 Persamaan Kuadrat	64
4.5.1 Menentukan Akar Persamaan Kuadrat.....	64
DAFTAR PUSTAKA.....	70
BAB 5 MATRIKS DAN VEKTOR.....	71
5.1 Pendahuluan	71
5.2 Matriks.....	71
5.2.1 Definisi dan Bentuk Umum Matriks	71
5.2.2 Jenis-jenis Matriks	73
5.2.3 Operasi Matriks	76
5.2.4 Determinan Matriks	78
5.2.5 Invers Matriks	79
5.3 Vektor.....	81
5.3.1 Vektor di $\mathbf{R}^2$	81
5.3.2 Vektor di $\mathbf{R}^3$	82
5.3.3 Vektor Posisi	83
5.3.4 Vektor Satuan	84
5.3.5 Penjumlahan Vektor.....	85
5.3.6 Pengurangan Vektor.....	86
5.3.7 Perkalian Bilangan dengan Vektor.....	86
5.3.8 Panjang Vektor.....	87
5.3.9 Jarak Dua Titik	88
5.3.10 Vektor Satuan	88
5.3.11 Perkalian Skalar Dua Vektor	89
5.3.12 Proyeksi Vektor.....	90
DAFTAR PUSTAKA.....	91
BAB 6 BANGUN RUANG SISI LENGKUNG	93
6.1 Pendahuluan	93
6.2 Tabung.....	93
6.4 Sifat-sifat Tabung.....	95
6.5 Jaring-jaring Tabung.....	95
6.6 Kerucut.....	97

6.7 Unsur-Unsur Kerucut.....	98
6.8 Jaring-jaring Kerucut.....	99
6.9 Sifat-sifat Kerucut.....	99
6.10 Bola.....	100
6.11 Unsur-Unsur Bola	100
6.12 Sifat-Sifat Bola	101
6.13 Luas Permukaan Bola.....	101
DAFTAR PUSTAKA.....	112
BAB 7 TRIGONOMETRI	113
7.1 Pengertian Sudut.....	113
7.2 Pengukuran Sudut.....	115
7.2.1 Ukuran dalam Derajat.....	115
7.2.2 Ukuran dalam Radian	115
7.3 Fungsi Trigonometri.....	117
7.4 Nilai Fungsi Trigonometri Sudut yang Saling Behubungan (Berelasi)	120
7.4.1 Nilai Sudut Negatif	120
7.4.2 Fungsi Trigonometri untuk Sudut θ^0 dan $(90 - \theta)^0$	121
7.4.3 Fungsi Trigonometri untuk Sudut $(90 + \theta)^0$ dan $(180 - \theta)^0$	121
7.4.4 Fungsi Trigonometri untuk Sudut $(180 + \theta)^0$ dan $(270 - \theta)^0$..	122
7.4.5 Fungsi Trigonometri untuk Sudut $(270 + \theta)^0$ dan $(360 - \theta)^0$	123
7.4.6 Fungsi Trigonometri untuk Sudut $(k.360 + \theta)^0$	124
7.5 Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut.....	125
7.5.1 Rumus $\text{Cos}(\alpha \pm \beta)$	125
7.5.2 Rumus $\text{Sin}(\alpha \pm \beta)$	126
7.5.3 Rumus $\text{Tan}(\alpha \pm \beta)$	127
7.6 Rumus Sudut Rangkap dan Pertengahan.....	127
7.6.1 Rumus Sudut Rangkap Sin, Cos, Tan	127
7.6.2 Rumus Sudut Pertengahan Sin, Cos, Tan	129
7.7 Rumus Sudut Lipat dan Rumus Pangkat	130
7.7.1 Rumus Sudut Lipat.....	130
7.7.2 Rumus Sudut Pangkat.....	132
DAFTAR PUSTAKA.....	134
BAB 8 TRIGONOMETRI	135
8.1 Definisi Logaritma	135
8.2 Sifat-Sifat Logaritma	137
8.2.1 Sifat 1.....	137
8.2.2 Sifat 2.....	138
8.2.3 Sifat 3.....	139

8.2.4 Sifat 4.....	139
8.2.5 Sifat 5.....	140
8.2.6 Sifat 6.....	141
8.2.7 Sifat 7.....	141
8.3 Fungsi Logaritma	145
8.3.1 Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $a > 1$	145
8.3.2 Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $0 < a < 1$	146
DAFTAR PUSTAKA.....	149
BAB 9 PROGRAM LINEAR.....	151
9.1 Pendahuluan	151
9.2 Persamaan Linear.....	152
9.2.1 Persamaan Linear Dua Variabel.....	153
9.2.2 Persamaan Linear Tiga Variabel.....	154
9.3 Pertidaksamaan Linear	154
9.4 Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear	156
9.5 Program Linear dan Model Matematika.....	157
9.5.1 Model Matematika.....	157
9.5.2 Nilai Optimum Fungsi Tujuan	159
9.5.3 Menyelesaikan Permasalahan Program Linear.....	160
9.6 Latihan Soal.....	164
DAFTAR PUSTAKA.....	165
BAB 10 LIMIT FUNGSI, DIFERENSIAL & INTEGRAL	167
10.1 Limit Fungsi.....	167
10.1.1 Aturan Dasar Pengerjaan Limit	167
10.1.2 Limit Fungsi Aljabar.....	168
10.1.3 Limit Fungsi Trigonometri.....	170
10.2 Diferensial	172
10.2.1 Sifat-sifat Turunan.....	172
10.2.2 Turunan Fungsi Trigonometri	173
10.3 Integral	176
10.3.1 Sifat Umum Integral.....	177
10.3.2 Rumus Integral Fungsi.....	177
10.3.3 Integral Parsial.....	179
DAFTAR PUSTAKA.....	182
BAB 11 STATISTIKA DAN PELUANG.....	183
11.1 Pendahuluan	183
11.2 Pengertian Statistika dan Data.....	184
11.2.1 Data	184
11.2.2 Pengumpulan Data	185
11.2.3 Penyajian Data.....	187
11.2.4 Ukuran Pemusatan Data	190
11.3 Peluang	196
11.3.1 Menentukan Ruang Sampel.....	196
11.3.2 Peluang Suatu Kejadian.....	198

DAFTAR PUSTAKA.....201
BIODATA PENULIS.....203

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Contoh 1	16
Gambar 2.2 Contoh 2.....	16
Gambar 3.1 Karakteristik Diagram Venn	46
Gambar 5.1 Ilustrasi Vektor di	81
Gambar 5.2 Ilustrasi Vektor di	82
Gambar 5.3 Ilustrasi Vektor Posisi	84
Gambar 6.1 Tabung	93
Gambar 6.2 Gambar Contoh Tabung.....	93
Gambar 6.3 Gambar Tabung.....	93
Gambar 6.4 Jaring-jaring Tabung	94
Gambar 6.5 Jaring-jaring Tabung	95
Gambar 6.6 Kerucut	96
Gambar 6.7 Contoh Kerucut	97
Gambar 6.8 Kerucut	97
Gambar 6.9 Jaring-jaring Kerucut.....	98
Gambar 6.10 Bola	99
Gambar 6.11 Bola Sebelum dan Setelah Diputar	99
Gambar 6.12 Contoh Bola	100
Gambar 6.13 Percobaan Archimedes.....	100
Gambar 7.1 Garis, Ruas, dan Sinar AB	113
Gambar 7.2 Sudut A	114
Gambar 7.3 Sudut Positif dan Negatif	114
Gambar 7.4 Ilustrasi Radian	115
Gambar 7.5 Ilustrasi Proyektor dan Proyeksi	117
Gambar 7.6 Ilustrasi Sudut Negatif	120
Gambar 7.7 Ilustrasi Sudut Kwadran I	124
Gambar 7.8 Ilustrasi Sudut Lebih dari 3600	125
Gambar 8.1 Grafik Fungsi	146

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Operasi Logika Matematika	31
Tabel 3.2 Operasi Negasi.....	32
Tabel 3.4 Operasi Disjungsi.....	33
Tabel 3.4 Operasi Implikasi.....	36
Tabel 3.5 Operasi Bimplikasi.....	38
Tabel 10.1 Cara menguraikan Fungsi	168
Tabel 10.2 Bentuk dasar Fungsi Trigonometri.....	171
Tabel 10.3 Bentuk dasar Fungsi Trigonometri.....	173
Tabel 10.4 Bentuk turunan dasar Fungsi Trigonometri	174

BAB 1

BILANGAN BULAT, BILANGAN BERPANGKAT, AKAR SUATU BILANGAN, BARISAN DAN DERET

Oleh Joni Wilson Sitopu

1.1 Bilangan Bulat

Himpunan bilangan bulat meliputi bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif. Bilangan bulat dilambangkan Z , yaitu ;

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Bilangan bulat memiliki sifat sebagai berikut ;

a) Sifat Penjumlahan Bilangan Bulat

1. Tertutup :

$$a + b \in Z, (a, b) \in Z$$

$$\text{Contoh : } -2 + (+1) = -1, (+5 + (-3)) = 2 \in Z$$

2. Komutatif :

$$a + b = b + a, \text{ dimana } (a, b) \in Z$$

$$\text{Contoh : } 2 + (-5) = (-5) + 2$$

3. Asosiatif :

$$(a + b) + c = a + (b + c), \text{ dimana } (a, b, c) \in Z$$

$$\text{Contoh : } (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5) = 10$$

4. Identitas:

$a + 0 = 0 + a = a$, dimana $a \in \mathbb{Z}$, dan 0 elemen identitas penjumlahan.

Contoh : $2 + 0 = 0 + 2 = 2$

5. Invers:

$a + (-a) = (-a) + a = 0$, dimana $(a, -a) \in \mathbb{Z}$

$(-a)$ disebut invers penjumlahan dari a untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

Contoh : $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$

b) Sifat Pengurangan Bilangan Bulat

1. Tertutup :

$a - b \in \mathbb{Z}$. dimana $(a, b) \in \mathbb{Z}$, dan $a - b$ adalah selisih bilangan bulat, maka hasilnya juga bilangan bulat.

contoh : $2 - 3 = -1 \in \mathbb{Z}$

2. Komutatif :

$a - b \neq b - a$, dimana $(a, b) \in \mathbb{Z}$

Misalnya : $1 - (-3) \neq (-3) - 1 \therefore 4 \neq -4$

3. Asosiatif :

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$, dimana $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$

Misalnya : $(3 - (-6)) - 2 \neq 3 - ((-6) - 2) \therefore 7 \neq 11$

c) Sifat Perkalian Bilangan Bulat

1. Tertutup :

$a \times b \in \mathbb{Z}$, dimana $(a, b) \in \mathbb{Z}$

Misalnya : $(-2) \times (1) = -2$, $(5) \times (-3) = -15$

2. Komutatif :

$$a \times b = b \times a, \text{ dimana } (a,b) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Contoh : } (1) \times (-3) = (-3) \times (1)$$

3. Asosiatif :

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \text{ dimana } (a, b, c) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Contoh : } (3 \times (-6)) \times 2 = 3 \times ((-6) \times 2) = -36$$

4. Distributif :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \text{ dimana } (a, b, c) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Misalnya : } 3 \times ((-6) + 2) = (3 \times (-6)) + (3 \times 2) = -12$$

5. Identitas:

$$a \times 1 = 1 \times a = a, a \in \mathbb{Z}, 1 \text{ adalah identitas perkalian}$$

$$\text{Contoh : } 2 \times 1 = 1 \times 2 = 2$$

6. Sifat nol:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0, \text{ dimana } a \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Contoh : } 2 \times 0 = 0 \times 2 = 0$$

d) Sifat Pembagian Bilangan Bulat

1. **Tertutup :**

$$a \div b \notin \mathbb{Z}, \text{ dimana } (a,b) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Contoh : } (-5) / (-20) = 1/4, \text{ yang bukan merupakan bilangan bulat}$$

2. **Komutatif :**

$$a \div b \neq b \div a, \text{ dimana } (a,b) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Contoh : } 1 / (-3) \neq (-3) / 1$$

3. **Assosiatif :**

$$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$$

Misalnya : $(3 \div (-6)) \div 2 \neq 3 \div ((-6) \div 2)$.

4. **Pembagian bilangan bulat dengan dirinya sendiri:**

$a \div a = 1$, dimana $a \in \mathbb{Z}$ a sembarang

Contoh : $(-2) \div (-2) = 1$

5. **Sifat nol:**

$a, 0 \div a = 0$, dimana $a \in \mathbb{Z}$ a sembarang

Contoh : $0 \div (2) = 0$

6. **Pembagian bilangan bulat dengan invers penjumlahannya dan -1:**

$a \div (-a) = -1$, $(-a) \div a = -1$, $a \div (-1) = -a$, dimana $a \in \mathbb{Z}$ dan $a \neq 0$

Contoh : $4 \div (-4) = -1$, $-3 \div (-1) = 3$

1.2 Bilangan Berpangkat (Eksponen)

Bilangan berpangkat disebut juga bilangan eksponen. Bentuk umum bilangan perpangkat ; $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n$,

Sebanyak n.

Dimana :

a = bilangan pokok atau basis

n = bilangan bulat positif.

Contoh:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$

5 = bilangan pokok, 3 = pangkat (eksponen)

1.2.1 Bilangan Berpangkat Negatif

Jika a^{-n} , $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$ dan $n \in \mathbf{Z}$, maka $\forall a \in \mathbf{R}$ (rirel), $a \neq 0$ dan $n \in \mathbf{Z}$, berlaku:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ atau } a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \text{ dimana } a \in \mathbf{R}, a \neq 0 \text{ dan } n \in \mathbf{Z}.$$

Contoh ;

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

Contoh

$$2^{-2} + 3^{-3} + 1^{-4} = \dots$$

Penyelesaian :

$$2^{-2} + 3^{-3} + 1^{-4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{1^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + 1$$

Contoh

$$3^{9-3x} = 27, \text{ tentukan nilai } x \text{ yang memenuhi.}$$

Penyelesaian :

$$3^{9-3x} = 27, \text{ maka } 3^{9-3x} = 3^3$$

$$\text{Sehingga } 9-3x = 3$$

$$-3x = -6$$

$$x = 2$$

1.2.2 Sifat Bilangan Berpangkat

1. Sifat perkalian

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m b^m$$

misalnya :

$$3^2 \times 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$$

2. Hasil bagi

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Contoh :

$$\frac{5^8}{5^3} = 5^{8-3} = 5^5$$

3. Pangkat nol

$a^0 = 1$, dimana $a \in \mathbb{R}$ (real) dan $a \neq 0$

Contoh : $5^0 = 1$

1.3 Akar Suatu Bilangan

1.3.1 Bilangan Rasional

Bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$, $(a, b) \in \mathbb{Z}$ dan $b \neq 0$. dengan selang $(-\infty, \infty)$ disebut bilangan rasional. Bilangan berpangkat rasional adalah bilangan dengan pangkat berbentuk $\frac{a}{b}$ atau bilangan bentuk pecahan. Pangkat rasional = bentuk akar, yaitu:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Contoh 1:

$$2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$$

1.3.2 Bilangan Bentuk Akar

Bentuk umum:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Dimana $(m,n) \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ dan $a \neq 0$

Contoh:

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[3]{3^5} = 3^{\frac{5}{3}}$$

Bilangan Bentuk Akar mempunyai sifat sebagai berikut ;

1) Jika $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^+$, maka ;

$$b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b + c)\sqrt{a}$$

$$b\sqrt{a} - c\sqrt{a} = (b - c)\sqrt{a}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$a\sqrt{a} c\sqrt{b} = (ac)\sqrt{ab}$$

Contoh :

$$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (3+4)\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

$$12\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = (12-5)\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$$

2) Jika $(a,b) \in \mathbb{Z}^+$ dan $b \neq 0$, maka ;

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Contoh:

$$\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$$

3) Pecahan eksponen

Pecahan eksponen dapat dirasionalkan dengan mengalikan pecahan

Contoh ;

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{1\sqrt{5}}{5}$$

1.4 Barisan

1.4.1 Barisan Bilangan

Himpunan bilangan yang disusun secara berurutan menurut suatu aturan tetap disebut sebagai barisan.

Contoh ;

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

1, 3, 5, 7, 9, ...

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Misalnya barisan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Dimana :

a_1 = suku pertama,

a_2 = suku kedua,

a_3 = suku ketiga, ... ,

a_n = suku ke-n.

Ditulis : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

Suatu barisan disebut barisan berhingga jika mempunyai suku-suku berhingga, misalnya 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16. Suatu barisan disebut barisan tak hingga jika mempunyai suku-suku tak terhingga, misalnya : 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

1.4.2 Barisan Aritmetika

Barisan yang setiap sukunya setelah suku pertama diperoleh suku sebelumnya dengan menjumlahkan suatu bilangan tetap disebut barisan aritmatika. Selisih yang tetap disebut beda.

contoh ;

(i) $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ maka $b = 2$

(ii) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ maka $b = 2$

1.4.3 Barisan Geometri

Barisan geometri mempunyai bentuk $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ di mana a =suku pertama dan r = rasio.

Contoh ;

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$, Barisan geometri dimana $a = 1$ dan rasio $r = 2$,

$3, -6, 12, -24, 48, -96, \dots$, Barisan geometri $a = 3$ dan rasio $r = -2$.

Sehingga rumus suku ke- n suatu barisan geometri adalah $a_n = ar^{n-1}$ dimana ; a_n = suku ke- n , a = suku pertama, r = rasio, n = banyaknya suku

Contoh ;

Tentukan rumus suku ke- n barisan geometri berikut ini,

a) $2, 6, 18, \dots$

b) $486, 162, 54, \dots$

Penyelesaian :

a) Di sini $a = 2$ dan $r = 3$, jadi $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

b) Di sini $a = 486$ dan $r = 1/3$, jadi $a_n = 486 \times (1/3)^{n-1}$

Jumlah barisan geometri (S_n) adalah :

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ jika } r > 1$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ jika } r < 1$$

Dimana: S_n = suku ke- n , a = suku pertama, r = rasio, n = banyaknya suku.

1.5 Deret

1.5.1 Deret Berhingga dan Tak Hingga

a) Deret berhingga

Jumlah suku-suku suatu barisan berhingga disebut deret berhingga. Andaikan ; $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah barisan yang terdiri dari n suku, maka barisan yang bersesuaian adalah $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Bilangan a_k disebut suku ke- k deret tersebut. Kita dapat menggunakan notasi sigma untuk deret, berikut ini, $2+4+6+\dots+100$ dimana suku ke- k diberikan oleh $2k$, maka deret ini dapat ditulis

sebagai $\sum_{k=2}^{50} 2k$. Perhatikan bahwa variabel k di sini adalah variabel dummy. Artinya kita juga bisa menulis deret sebagai $\sum_{i=2}^{50} 2i$ atau $\sum_{j=2}^{50} 2j$.

Soal ;

Dengan menuliskan suku-sukunya, temukan jumlahnya

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

b) Deret tak hingga

Jumlah formal suku-suku barisan tak hingga disebut deret tak hingga, dapat ditulis, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$ Misalnya, barisan bilangan ganjil menghasilkan deret tak terhingga $1+3+5+7+\dots$. Kita dapat menjumlahkan suatu deret tak terhingga menjadi sejumlah suku berhingga. Jumlah n suku pertama suatu deret tak hingga sering ditulis sebagai, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Hal ini dapat disebut jumlah parsial ke- n dari deret tak hingga. Jika diketahui rumus jumlah n suku pertama suatu deret, maka kita dapat memperoleh rumus suku ke- n dengan melakukan pengurangan sederhana, sebagai berikut,

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

dengan mengurangkan kita memperoleh

$$S_n - S_{n-1} = a_n.$$

1.5.2 Deret Aritmetika

Deret yang suku-sukunya membentuk barisan aritmatika disebut deret aritmatika. Misalkan ; Deret, $1+2+3+\dots +n$, adalah deret aritmatika dengan selisih persekutuan 1.

Bukti ; Dari rumus diperoleh :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1. +$$

$$2S_n = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \dots + (n-1+2) + (n+1).$$

Masing-masing n suku di ruas kanan disederhanakan menjadi $n + 1$.

Maka, $2S_n = n(n + 1)$, dan terbukti bahwa, $1+2+3+\dots +n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Soal latihan ;

1. $1+2+3+\dots+100 = 1/2 \times 100 \times 101 = 5050$, tentukan jumlah S_n deret aritmatika.
2. $a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (l - d) + l$, tentukan jumlah S_n deret aritmatika
3. Tentukan rumus jumlah n suku pertama barisan aritmatika
 - a) 2, 5, 8, ...
 - b) 107, 98, 89,

1.5.3 Deret Geometri

Deret yang suku-sukunya membentuk barisan geometri disebut deret geometri. Misalnya, $2+8+32+128+\dots$ adalah deret geometri yang suku pertamanya 2 dan perbandingannya 4. Suku ke- n adalah

$$a_n = 2 \times 4^{n-1}$$

Kita dapat mencari rumus jumlah n suku pertama deret ini, Kita mengalikan deret tersebut dengan rasio 4 dan mengurangkan deret aslinya, sebagai berikut.

$$S_n = 2+8+32+128+\dots+2 \times 4^{n-1}$$

$$4S_n = 8+32+128+\dots+2 \times 4^{n-1} + 2 \times 4^n, \quad -$$

kita kurangi untuk mendapatkan

$$4S_n - S_n = 2 \times 4^n - 2,$$

Dan juga

$$S_n = 1/3 (2 \times 4^n - 2) = 2(4^n - 1)/3$$

Sehingga diperoleh rumus jumlah S_n

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ untuk } r \neq 1$$

Atau juga dapat ditulis,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ untuk } r \neq 1$$

Rumus kedua seringkali lebih mudah digunakan jika r terletak di antara -1 dan 1 . Jika $r = 1$, jumlah deretnya jelas na , karena semua sukunya identik.

DAFTAR PUSTAKA

- Muhammad Arif Tiro, dkk., (2008). *Pengenalan Teori Bilangan*. Andira Publisher Makassar.
- Nasruddin, Lulut Alfaris, Agung Prasetyo, Ichsan, Nurul Ainun Fajriah, Joni Wilson Sitopu, Elfira Rahmadani, Syahrani Sirait, La Ode Asmin, Agustin Fatmawati, Anim, Ely Syafitri., (2022). *Matematika Untuk Perguruan Tinggi*. PT Global Eksekutif Teknologi. Padang Sumatera Barat.
- Nazariah, Nur Hasanah, Yunita Oktavia Wulandari, Joni Wilson Sitopu, Cynthia Tri Octavianti, Rifka Agustianti, Abd. Haris, Lulut Alfaris, Mesak Ratuanik, Jan Setiawan, Nuryami, Rintis Rizkia Pangestika, Ima Mulyawati., (2022). *Konsep Dasar Matematika*. PT Global Eksekutif Teknologi. Padang Sumatera Barat.
- Peter Brown, (2013). *Sequences and series*. Education Services Australia. University of NSW.
- Peter Brown, Michael Evans, David Hunt, Janine McIntosh, Bill Pender, Jacqui Ramagge., (2011). *The Integers*. The Improving Mathematics Education in Schools (TIMES) Project. Australia. A guide for teachers. Cambridge university press.
- Subchan, Winarni, Muhammad Syifa'ul Mufid, Kistosil Fahim, dan Wawan Hafid Syaifudin., (2018). *Buku Guru Matematika*. Jakarta. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Yasri., dkk, (2020). *Bilangan Berpangkat dan Bentuk Akar*. Direktorat Guru dan Tenaga Kependidikan Madrasah.

BAB 2

PECAHAN, PERSEN, RASIO, PERBANDINGAN DAN MISKONSEPSI

Oleh Nazariah

2.1 Pecahan

Pecahan adalah metode penulisan angka yang menunjukkan bahwa suatu bilangan merupakan sebagian dari bilangan utuh. Istilah "pecahan" berasal dari kata Latin "fractio," yang berarti memecah menjadi bagian yang lebih kecil.

Bilangan Pecahan adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan **a** dan **b** bilangan bulat dan **b** $\neq$ 0. Bilangan **a** disebut pembilang dan bilangan **b** disebut penyebut. Bilangan $\frac{3}{4}$ dinamakan dengan pecahan di mana $\frac{3 \rightarrow \text{pembilang}}{4 \rightarrow \text{penyebut}}$. Pecahan yang pembilangnya lebih kecil dari pada penyebutnya adalah pecahan biasa. $\frac{a}{b}$ disebut pecahan biasa jika **a** < **b**. Pecahan yang pembilangnya lebih besar dari pada penyebutnya adalah pecahan campuran. $\frac{a}{b}$ disebut pecahan campuran jika **a** > **b**.



Gambar 2.1 Contoh 1

Sebagai contoh, jika kita membagi sebuah kue menjadi 8 bagian yang sama, dan Susi memakan satu dari bagian tersebut, maka

bentuk $\frac{1}{8}$ adalah representasi pecahan yang menunjukkan bagian kue yang dimakan oleh Susi. Saat membaca pecahan, kita menyebutkan angka di atas terlebih dahulu, kemudian angka di

bawahnya. Contoh, pecahan $\frac{1}{8}$ dibaca sebagai "satu per delapan." Angka di atas disebut "pembilang," yang menunjukkan berapa banyak bagian yang sama dari bilangan utuh yang dipertimbangkan. Angka di bawah disebut "penyebut."



Gambar 2.2 Contoh 2

Contoh lainnya, jika kamu makan satu potong pizza dari 6 potong pizza yang ada, itu dapat direpresentasikan dengan pecahan sebagai "seperenam ($\frac{1}{6}$) pizza." Penyebut akan menunjukkan berapa banyak bagian yang membentuk keseluruhan. Jika penyebutnya 4, keseluruhan dibagi menjadi empat bagian yang sama. Jika penyebutnya 3, keseluruhan dibagi menjadi tiga bagian yang sama. Pembilang mewakili jumlah bagian yang digunakan.

2.2 Bentuk-bentuk Pecahan

1. Pecahan Biasa

Pecahan biasa adalah pecahan yang terdiri dari pembilang dan penyebut, yang mana pembilangnya lebih kecil dari pada penyebutnya. Perhatikan contoh berikut ini.

- Pecahan $\frac{1}{2}$, karena $1 < 2$ maka disebut sebagai pecahan biasa.
- Pecahan $\frac{3}{4}$, karena $3 < 4$ maka disebut sebagai pecahan biasa.
- Pecahan $\frac{7}{9}$, karena $7 < 9$ maka disebut sebagai pecahan biasa.

Bentuk umum pecahan biasa adalah:

$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} a = \text{Pembilang} \\ b = \text{Penyebut} \end{array} \quad \text{contoh} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$$

2. Pecahan Campuran

Pecahan campuran merupakan pecahan yang pembilangnya lebih besar dari pada penyebutnya. Perhatikan contoh pecahan campuran berikut ini :

- Pecahan $\frac{7}{2}$, karena $7 > 2$ maka disebut sebagai pecahan campuran.
- Pecahan $\frac{11}{4}$, karena $11 > 4$ maka disebut sebagai pecahan campuran.

- Pecahan $\frac{16}{7}$, karena $16 > 7$ maka disebut sebagai pecahan campuran.

Bentuk umum pecahan campuran adalah :

$$a \frac{b}{c} \quad \begin{array}{l} a = \text{bilangan bulat} \\ b = \text{pembilang} \\ c = \text{penyebut} \end{array} \quad \text{contoh} \quad \frac{7}{5} = 1 \frac{2}{5}$$

Mengubah pecahan biasa menjadi pecahan campuran seperti contoh

$\frac{7}{5} = 1 \frac{2}{5}$ kita dapat menggunakan cara sebagai berikut.

$\frac{7}{5}$ artinya $7 : 5$ sehingga $\text{penyebut} \leftarrow 5 \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{7}} \rightarrow \text{bilangan asli} \\ \frac{5}{2} \rightarrow \text{Sisa (letakkan sebagai pembilang)} \end{array}$

Jadi $\frac{7}{5} = 1 \frac{2}{5}$

3. Pecahan Desimal

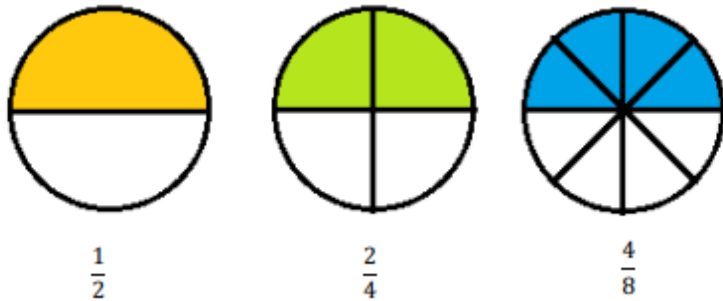
Pecahan desimal adalah pecahan yang diperoleh dari hasil pembagian suatu bilangan dengan sepuluh dan pangkatnya, seperti 10, 100, 1000, dan seterusnya. Untuk menulis pecahan desimal, kita menggunakan tanda koma (.). Angka di sebelah kiri koma menunjukkan bilangan bulat, sementara angka di sebelah kanan koma menunjukkan nilai bagiannya. Jika ada satu angka di sebelah kanan koma, itu berarti persepuluh, dua angka berarti perseratus, tiga angka berarti perseribu, dan seterusnya. Contohnya: 0,5; 0,25; 0,125; ...

0,5

$\left. \begin{array}{l} \text{└─> Bilangan bulat} \\ \text{└─> Penyebut = 10; persepuluh} \end{array} \right\} \text{ Jadi } 0,5 = \frac{5}{10}$

4. Pecahan Senilai

Pecahan senilai dapat didefinisikan sebagai bilangan pecahan yang apabila pembilang dan penyebutnya diganti, nilai pecahan tersebut tidak akan berubah. Walaupun dibagi atau dikali dengan bilangan yang sama. Semua bilangan berlaku, kecuali 0. Perhatikan gambar dibawah ini :



Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa luas daerah yang berwarna pada ketiga lingkaran itu sama, jadi $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$. Bentuk ketiga pecahan diatas disebut pecahan senilai. Untuk menentukan pecahan yang senilai dengan $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, dapat digunakan hubungan berikut:

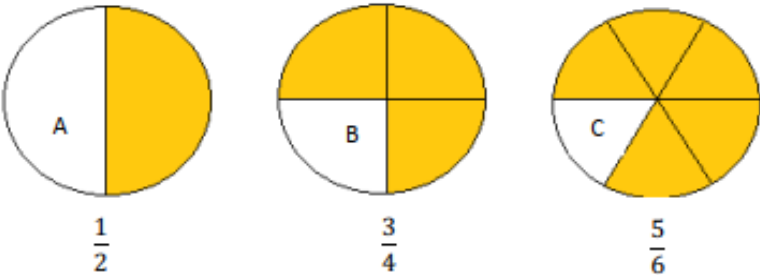
$$\frac{a}{b} = \frac{a \times p}{b \times p} \text{ atau } \frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n} \text{ (untuk } p \text{ dan } n \text{ adalah bilangan asli)}$$

5. Mengurutkan Pecahan

Dalam perlombaan balap sepeda antara Brayen, Fadlan, dan Naufal, Brayen mencapai garis finis terlebih dahulu dengan waktu ($\frac{3}{4}$) jam, sementara Fadlan dan Naufal mencapai waktu ($\frac{1}{2}$) jam dan ($\frac{5}{6}$) jam. Diantara mereka bertiga siapakah yang terlebih dahulu mencapai garis finis?



Sebelum menyelesaikan masalah tersebut, kalian harus memahami terlebih dahulu nilai pecahan pada gambar dibawah ini.

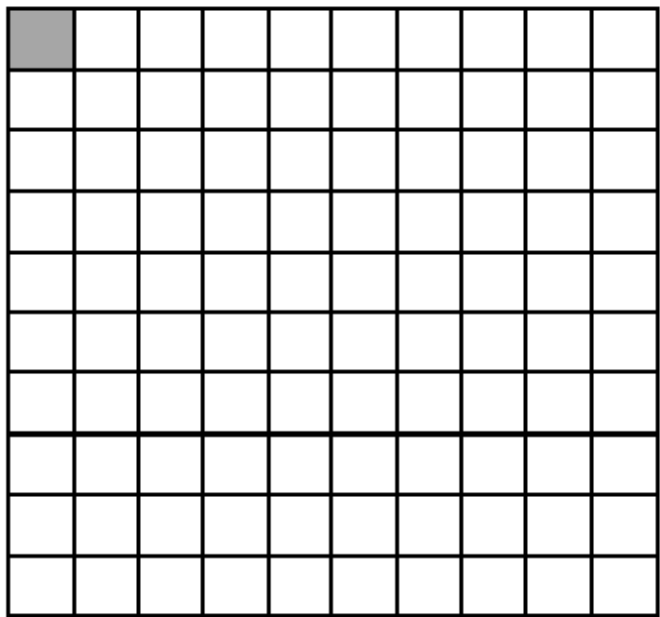


Pada lingkaran **A** nilai pecahan $\frac{1}{2}$ yang di lukiskan dengan warna orange < dari pada lingkaran **B** dengan nilai pecahan $\frac{3}{4}$ < dari pada lingkaran **C** dengan nilai pecahan $\frac{5}{6}$. Terlihat jelas bahwa pecahan $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ yang artinya pecahan yang memiliki nilai lebih kecil yaitu $\frac{1}{2}$ berarti memiliki waktu yang lebih cepat dibanding dengan nilai pecahan $\frac{3}{4}$ dan $\frac{5}{6}$. Jadi, diantara Brayen, Fadlan dan Naufal yang terlebih dahulu mencapai garis finish adalah Fadlan. Dari cara penyelesaian tersebut masih ada beberapa cara yang bisa kita jadikan pilihan untuk menyelesaikan masalah ini. Pertama kita harus mengurutkan pecahan $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ mulai dari yang terkecil. Pecahan $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ merupakan pecahan yang berbeda penyebut. Untuk

mengurutkannya, kita harus mengubah pecahan tersebut menjadi pecahan dengan penyebut yang sama, dan untuk menyamakan semua penyebutnya kita dapat mengkalikan semua penyebutnya atau dengan mencari semua KPK dari penyebutnya terlebih dahulu.

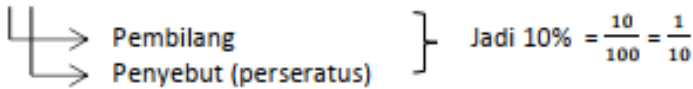
2.3 Persen

Untuk menjelaskan konsep persen, dapat dibantu dengan gambar persegipersegi satuan berikut ini:



Persentase adalah representasi dari perseratus atau (%) yang digunakan untuk mengukur proporsi. Satu persegi satuan yang diarsir mewakili 1 persen. Jika ada 5 persegi satuan yang diarsir, itu mewakili 5 persen. Jika ada 31 persegi satuan yang diarsir, itu mewakili 31 persen. Jika terdapat 3 persegi satuan besar dengan total 213 persegi satuan kecil yang diarsir, maka itu akan mewakili 213 persen. Persentase sebenarnya adalah bentuk pecahan, dengan penyebut selalu 100, sehingga disebut persen. Simbol persen atau perseratus adalah (%). Misalnya, 10% dibaca sebagai "sepuluh persen," 35%, 45%, dan seterusnya.

10%



Berikut cara mengubah pecahan ke bentuk persen, contoh pecahan $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times 100\% = \frac{200}{5}\% = 40\%$. Di dalam pengerjaan hitungan, seringkali kita diminta untuk mengubah persen menjadi desimal. Hal ini dapat dikerjakan dengan menulis persen sebagai suatu bilangan pecahan dan kemudian mengubah pecahan itu menjadi bilangan desimal.

Contoh:

- a. $5\% = 5 / 100 = 0,005$
- b. $250\% = 250 / 100 = 2,5$
- c. $1/3\% = 1/3 / 100 = 0,3 / 100 = 0,003$

Pendekatan lain untuk penulisan persen sebagai desimal adalah pertama mengubah 1% ke sebuah decimal. Karena $1\% = 1 / 100 = 0,01$. Masalah-masalah terapan berkaitan dengan persen biasanya mengambil satu dari bentuk-bentuk berikut:

- a. Menentukan persen dari suatu bilangan.
- b. Menentukan persen suatu bilangan disbanding suatu bilangan lain.
- c. Menentukan suatu bilangan jika persen dari suatu bilangan diketahui.

Contoh :

- Anton membeli mobil seharga Rp. 80.000.000,- dengan memeberi uang muka 20%. Berapa rupiah besar uang muka tersebut?

Jawab:

Uang muka 20% dari Rp. 80.000.000 = $20 / 100 \times 80.000.000 = 0,20 \times 80.000.00 = 16.000.000$

Jadi, besar uang muka itu adalah Rp. 16.000.000

- Jika jika mempunyai 45 jawaban benar dari 80 soal tes. Berapa persen jawaban jika yang benar?

Jawab: $45 / 80 \times 100 = 56,25 \%$

- 42% orang tua suatu sekolah dasar adalah bekerja sebagai buruh tani. Jika banyaknya orang tua yang bekerja sebagai buruh tani tersebut adalah 168 orang. Berapa banyaknya orang tua siswa di sekolah tersebut?

Jawab: 42% dari $n = 168$

$$42/100 \times n = 168$$

$$0,42 \times n = 168$$

$$n = 168 / 0,42$$

$$n = 400$$

Jadi, orang tua siswa di sekolah tersebut 400 orang

2.4 Rasio

Rasio adalah perbandingan antara 2 besaran atau lebih. Dalam menghitung rasio harus menggunakan satuan yang sama, apabila terdapat perbedaan maka harus dilakukan penyamaan satuan terlebih dahulu. Secara umum rasio dilambangkan dengan a/b atau $a : b$, dimana $b \neq 0$.

Contoh: 1

Rasio 15 terhadap 105 adalah $15/105 = 1/7 = 1 : 7$

Contoh :2

Di kelas 5 SD Sukamaju ada 15 siswa laki-laki dan 20 siswa perempuan. Sedangkan di kelas 6 SD tersebut ada 12 siswa laki-laki dan 16 siswa perempuan.

- Nyatakan banyaknya siswa laki-laki dan perempuan di kelas 5 SD tersebut sebagai sebuah rasio.
- Nyatakan banyaknya siswa laki-laki dan perempuan di kelas 6 SD tersebut sebagai sebuah rasio.

Jawab:

a. Rasionya adalah $15/20$

b. Rasionya adalah $12/16$

Berikut ini contoh-contoh soal yang menggunakan rasio dan proporsi

1. Jika terdapat 3 buah kalkulator untuk setiap 4 orang siswa di sebuah sekolah dasar. Berapa banyak kalkulator yang dibutuhkan untuk 44 orang siswa?

Jawab: $\frac{\text{banyaknya kalkulator}}{\text{Banyaknya siswa}} = \frac{3}{4} = \frac{n}{44}$

$$= 3 \times 44 = n \times 4$$

$$= 132 = 4n$$

$$= n = 132 / 4$$

$$= n = 33$$

2. Jika seekor kura-kura berjalan 5 cm tiap detik, berapa m kura-kura itu berjalan selama 50 detik?

Jawab: $5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$

$$\frac{0,05 \text{ m}}{10 \text{ detik}} = \frac{n}{50 \text{ detik}}$$

$$0,05 \text{ m} \times 50 \text{ detik} = n \times 10 \text{ detik}$$

$$2,5 \text{ m} / \text{detik} = 10n \text{ detik}$$

$$n = 2,5 \text{ m} / \text{detik} / 10 \text{ detik}$$

$$n = 0,25 \text{ m}$$

3. Pak Amin, pak Badrun, dan pak Candra memperoleh uang Rp. 2.520.000,- untuk pengerjaan pengecatan sebuah rumah. Pak Amin bekerja selama 30 jam, pak Badrun bekerja selama 50 jam dan pak Candra bekerja selama 60 jam. Mereka membagi uang itu sesuai dengan proporsi jam kerja mereka. Berapa besar uang yang mereka terima masing-masing?

Jawab: rasio jam bekerja mereka adalah 30 : 50 : 60

$$30n + 50n + 60n = 2520000$$

$$140n = 2520000$$

$$n = 2520000 / 140$$

$$n = 18000$$

Dengan demikian,

pak amin menerima $= 30n = 30 \times 18000 = \text{Rp. } 540.000,-$
 pak badrun menerima $= 50n = 50 \times 18000 = \text{Rp. } 900.000,-$

pak candra menerima = $60 \times 18000 = \text{Rp. } 1.080.000,-$
untuk memeriksa kebenaran jawaban ini, kita menemukan
bahwa $540000 + 900000 + 1080000 = 2520000$.

2.5 Perbandingan dan Skala

Perbandingan adalah istilah matematika yang digunakan untuk membandingkan dua objek atau lebih. Ini merupakan konsep penting dalam matematika dan juga dalam kehidupan sehari-hari kita. Contohnya, Raka adalah siswa tertinggi di kelasnya, artinya tingginya dibandingkan dengan teman-temannya. Untuk menjelaskan perbandingan kepada siswa SD, kita bisa menggunakan media pembelajaran seperti benang atau manik-manik.

Perbandingan sering muncul dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya, Raka adalah salah satu siswa yang paling tinggi di kelasnya. Artinya, Raka adalah siswa yang paling tinggi dibandingkan dengan teman-temannya di kelas. Untuk menjelaskan perbandingan kepada siswa SD, kita dapat menggunakan media pembelajaran atau alat peraga seperti benang atau manik-manik.

Dalam sebuah kelas, ada 25 peserta laki-laki dan 20 peserta perempuan. Perbandingan antara peserta laki-laki dan perempuan adalah $25:20 = 5:4$. Perbandingan peserta laki-laki dengan total peserta adalah $25:45 = 5:9$. Sedangkan perbandingan peserta perempuan dengan total peserta adalah $20:45 = 4:9$. Dua perbandingan yang ekuivalen dapat membentuk sebuah proporsi.

Jenis-jenis perbandingan:

1. Perbandingan Senilai
2. Perbandingan senilai adalah jenis perbandingan di mana besaran perbandingan akan bertambah jika salah satu dari mereka bertambah. Contohnya adalah perbandingan antara jumlah pensil yang dibeli dengan uang yang harus dibayar. Semakin banyak pensil yang dibeli, semakin banyak uang yang harus dibayar

Perhatikan beberapa contoh kasus berikut ini:

Misalkan harga 1 kg manga adalah Rp12.500,00. Maka harga 2 kg mangga adalah Rp25.000,00. Supaya Anda lebih memahami materi ini, perhatikan contoh berikut! Jika harga 5 kg rambutan adalah Rp75.000,00, berapakah harga 7 kg rambutan?

Jawab:

Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah mencari harga 1 kg rambutan, yaitu $\text{Rp}75.000 / 5 = \text{Rp}15.000$. Jadi harga 7 kg rambutan adalah $\text{Rp}15.000,00 \times 7 = \text{Rp}105.000,00$. Jika dihubungkan dengan proporsi maka: $m = 105.000$
Jadi, harga 7 kg rambutan adalah Rp105.000,00.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut apabila diperhatikan, apabila nilai salah satu aspek bertambah, maka nilai aspek yang lain juga akan bertambah. Kondisi seperti ini yang dinamakan perbandingan senilai. **Perbandingan senilai** adalah suatu perbandingan yang apabila suatu nilai ditambah maka jumlah pembandingnya juga bertambah.

3. Perbandingan Berbalik Nilai: Apabila terdapat korespondensi satu-satu antara dua kelompok data dengan sifat nilai perbandingan 2 elemen yang bersesuaian di kelompok kedua berbalik nilainya dengan nilai perbandingan di kelompok pertama maka perbandingan antara kelompok pertama dengan kelompok kedua disebut perbandingan berbalik nilai dengan kata lain Perbandingan berbalik nilai adalah sebuah perbandingan yang memiliki sifat besaran apabila salah satu bertambah maka yang lainnya akan berkurang. Contohnya adalah banyaknya pekerja bangunan dengan lama pengerjaan sebuah gedung. Apabila jumlah pekerjanya lebih banyak, maka pembangunan gedung tersebut akan lebih cepat.

Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Misal, untuk merenovasi sebuah rumah, diperlukan 12 orang pekerja dalam waktu 3 hari. Berapa lamakah rumah tersebut dapat selesai direnovasi jika pekerja ada 36 orang?

Untuk menjawab soal tersebut maka kita harus menuliskan terlebih dahulu hal-hal yang diketahui dalam soal sebagai berikut:

12 orang = 3 hari .

36 orang = ... h

Waktu yang dibutuhkan untuk merenovasi rumah jika pekerjanya ada 36 orang kita misalkan dengan n.

Maka:

36 orang x = 12 orang x 3 h

36 x = 36

= 36 36

= 1

Jadi waktu yang diperlukan untuk merenovasi rumah adalah 1 hari. Artinya, semakin banyak pekerja maka semakin sedikit waktu yang diperlukan untuk merenovasi rumah.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut, apabila nilai dari suatu aspek bertambah, maka nilai dari aspek yang lain akan berkurang. Kondisi seperti ini yang dinamakan dengan perbandingan berbalik nilai. **Perbandingan berbalik nilai** adalah perbandingan yang apabila nilainya ditambah maka nilai pembandingnya berkurang.

2.6 Miskonsepsi

Miskonsepsi adalah pertentangan atau ketidaksesuaian antara konsep yang dipahami seseorang dengan konsep yang digunakan oleh ahli ilmu pengetahuan terkait. Secara filosofis munculnya miskonsepsi pada siswa dapat dijelaskan dengan filosofi konstruktivisme. Filsafat konstruktivisme secara ringkas menyatakan bahwa pengetahuan itu dibentuk (dikonstruksi) oleh pembelajar sendiri dalam kontak dengan lingkungan, tantangan, dan materi yang dipelajari. Karena pengetahuan itu adalah konstruksi siswa sendiri (dengan bantuan guru), maka dapat terjadi meskipun menerima materi atau pelajaran yang sama, siswa dapat

membangun dan mengembangkan pengetahuan yang berbeda dengan yang diinginkan guru.

Mengidentifikasi miskonsepsi salah satu usaha yang telah banyak dilakukan, namun sampai saat ini masih terdapat kesulitan dalam membedakan antara siswa yang mengalami miskonsepsi dengan yang tidak paham konsep. Kesalahan pengidentifikasian miskonsepsi akan mengakibatkan kesalahan dalam penanggulangannya. Sebab penanggulangan siswa yang mengalami miskonsepsi akan berbeda penanggulangan dengan siswa yang tidak memahami konsep.

DAFTAR PUSTAKA

- Fadillah, S. (2016). Analisis miskonsepsi siswa SMP dalam materi perbandingan dengan menggunakan certainty of response index (CRI). *Jurnal pendidikan informatika dan sains*, 5(2), 247-259.
- Suparno, P. 2013. *Miskonsepsi dan Perubahan Konsep dalam Pendidikan Fisika*. Yogyakarta: Gramedia Widiasarana Indonesia.

BAB 3

LOGIKA DAN HIMPUNAN

Oleh Mundzir

3.1 Logika

Logika matematika adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari dan menganalisis struktur, prinsip, dan metode penalaran yang digunakan untuk memahami dan memanipulasi pernyataan matematika.

Operasi logika matematika adalah operasi yang digunakan untuk memanipulasi pernyataan logika berdasarkan prinsip-prinsip logika. Operasi ini penting dalam logika matematika dan diterapkan untuk membentuk, memodifikasi, dan mengevaluasi pernyataan logika. Berikut adalah beberapa operasi logika matematika yang umum digunakan antara lain :

Tabel 3.1 Operasi Logika Matematika

Operasi Logika	Simbol
Negasi	$\sim$
Konjungsi	$\wedge$
Disjungsi	$\vee$
Implikasi	$\rightarrow$ atau $\Rightarrow$
Biimplikasi	$\leftrightarrow$ atau $\Leftrightarrow$

3.1.1 Negasi

Negasi adalah operasi logika yang menghasilkan kebalikan dari suatu pernyataan. Dalam konteks logika matematika, negasi adalah mengambil pernyataan atau proposisi yang diberikan dan membalikkannya, yaitu mengubah pernyataan benar menjadi salah, dan sebaliknya. Simbol yang digunakan untuk negasi adalah $\sim$. Misalnya, jika kita memiliki pernyataan P, maka negasi dari P adalah $\sim P$, yang diucapkan sebagai "bukan P".

Tabel 3.2 Operasi Negasi

P	$\sim P$
Benar	Salah
Salah	Benar

Berikut adalah contoh penggunaan negasi :

Contoh 1 :

Pernyataan asli (P) : Hari ini adalah Senin.

Negasi ($\sim P$) : Hari ini bukan Senin.

Contoh 2 :

Pernyataan asli (P) : Saya suka pelajaran matematika.

Negasi ($\sim P$) : Saya tidak suka pelajaran matematika.

Contoh 3 :

Pernyataan asli (P) : Semua anak senang bermain air.

Negasi ($\sim P$) : - **Tidak** Semua anak senang bermain air.

- **Ada** anak yang **tidak** senang bermain air.

3.1.2 Konjungsi

Konjungsi adalah salah satu operasi logika dalam matematika yang menghubungkan dua pernyataan atau proposisi untuk membentuk pernyataan baru. Konjungsi dinyatakan sebagai "**DAN**" dan hanya menghasilkan nilai **BENAR** (*true*) jika kedua pernyataan yang dihubungkan juga **BENAR** (*true*). Jika salah satu atau kedua pernyataan **SALAH** (*false*), maka konjungsi akan menghasilkan nilai **SALAH** (*false*). Simbol yang digunakan untuk konjungsi adalah $\wedge$ (simbol "**DAN**"). Misalnya, jika P adalah pernyataan pertama dan Q adalah pernyataan kedua, maka konjungsi P dan Q dinyatakan sebagai $P \wedge Q$, yang artinya "**P dan Q**".

Tabel 3.3 Operasi Konjungsi

P	Q	$P \wedge Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Keterangan : B = Benar dan S = Salah

Contoh 1 :

- P : Siswa mengikuti semua pelajaran.
- Q : Siswa menyelesaikan semua tugas.
- $P \wedge Q$:Siswa mengikuti semua pelajaran **dan** siswa menyelesaikan semua tugas.

Contoh 2 :

P : Angka 7 adalah bilangan genap. (pernyataan ini bernilai **SALAH**)

Q : Angka 7 adalah bilangan prima. (pernyataan ini bernilai **BENAR**)

$P \wedge Q$: Angka 7 adalah bilangan genap **dan** bilangan prima. (pernyataan ini bernilai **SALAH**)

Contoh 3 :

P : y adalah bilangan bulat. (pernyataan ini bernilai **BENAR**)

Q : y adalah bilangan positif. (pernyataan ini bernilai **BENAR**)

$P \wedge Q$: y adalah bilangan bulat dan bilangan positif. (pernyataan ini bernilai **BENAR**)

Konjungsi penting dalam pemodelan logika karena banyak argumen dan pernyataan membutuhkan kombinasi kondisi yang harus terpenuhi secara bersamaan.

3.1.3 Disjungsi

Disjungsi dinyatakan sebagai "**ATAU**" dan menghasilkan nilai **BENAR (true)** jika salah satu atau kedua pernyataan yang dihubungkan adalah **benar**. Hanya jika kedua pernyataan salah (*false*), maka disjungsi akan menghasilkan nilai **SALAH (false)**. Simbol yang digunakan untuk disjungsi adalah $\vee$ (simbol "**ATAU**"). Misalnya, jika P adalah pernyataan pertama dan Q adalah pernyataan kedua, maka disjungsi P dan Q dinyatakan sebagai $P \vee Q$, yang artinya "**P atau Q.**"

Berikut adalah tabel kebenaran (*truth table*) untuk disjungsi:

Tabel 3.4 Operasi Disjungsi

P	Q	$P \vee Q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Keterangan : B = Benar, S = Salah

Contoh 1 :

P : Hari ini cerah.

Q : Hari ini hujan.

$P \vee Q$: Hari ini cerah atau hari ini hujan.

Contoh 2 :

P : y adalah bilangan negatif.

Q : y adalah bilangan positif.

$P \vee Q$: y adalah bilangan negatif **atau** y adalah bilangan positif.

Contoh 3 :

P : x adalah bilangan ganjil.

Q : x adalah bilangan genap.

$P \vee Q$: x adalah bilangan ganjil **atau** x adalah bilangan genap.

Dalam tabel kebenaran di atas, P dan Q adalah pernyataan yang dihubungkan dengan disjungsi ($\vee$), dan $P \vee Q$ adalah hasil dari operasi disjungsi tergantung pada nilai kebenaran dari P dan Q. **Disjungsi** adalah operasi logika yang penting dalam

membentuk argumen dan pernyataan yang menggambarkan pilihan atau kemungkinan yang bisa terjadi.

3.1.4 Implikasi

Operasi implikasi menghasilkan nilai benar (*true*) kecuali jika pernyataan pertama benar (*true*) dan pernyataan kedua salah (*false*). Jika pernyataan pertama salah (*false*), maka implikasi akan menghasilkan nilai benar (*true*), terlepas dari nilai kebenaran pernyataan kedua. Implikasi direpresentasikan dengan simbol " $\Rightarrow$ " atau "**jika.....maka**" dalam bahasa sehari-hari. Misalnya, jika P adalah pernyataan pertama dan Q adalah pernyataan kedua, maka implikasi $P \rightarrow Q$ dapat dibaca sebagai "**jika P, maka Q**". Berikut adalah tabel kebenaran (*truth table*) untuk implikasi :

Tabel 3.4 Operasi Implikasi

P	Q	$P \Rightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Keterangan : B = Benar dan S = Salah

Contoh 1 :

P : y adalah bilangan genap.

Q : y dapat dibagi 2.

$P \leftrightarrow Q$: **Jika** y adalah bilangan genap, **maka** y dapat dibagi 2.

Contoh 2 :

P : Hari ini hujan.

Q : Saya membawa payung.

$P \rightarrow Q$: **Jika** hari ini hujan, **maka** saya membawa payung.

Contoh 3 :

P : Suhu mencapai 100 derajat Celsius.

Q : Air mendidih.

$P \leftrightarrow Q$: **Jika** suhu mencapai 100 derajat Celcius, **maka** air mendidih.

Implikasi adalah operasi logika yang penting dalam penalaran dan membentuk dasar bagi banyak argumen dan teorema dalam matematika dan ilmu komputer.

3.1.5 Biimplikasi

Biimplikasi, juga dikenal sebagai "**jika dan hanya jika**" adalah operasi logika yang menghubungkan dua pernyataan atau proposisi untuk membentuk pernyataan baru. Operasi biimplikasi menghasilkan nilai benar (*true*) jika kedua pernyataan yang dihubungkan memiliki nilai kebenaran yang sama, dan menghasilkan nilai salah (*false*) jika kedua pernyataan memiliki nilai kebenaran yang berbeda. Simbol yang digunakan untuk biimplikasi adalah $\Leftrightarrow$ (panah ganda ke kanan dan kiri) atau "**jika dan hanya jika**". Misalnya, jika P adalah pernyataan pertama dan Q adalah pernyataan kedua, maka biimplikasi $P \Leftrightarrow Q$ dapat dibaca sebagai "**P jika dan hanya jika Q**". Berikut adalah tabel kebenaran (*truth table*) untuk operasi biimplikasi :

Tabel 3.5 Operasi Biimplikasi

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Keterangan : B = Benar dan S = Salah

Contoh 1 :

P : y adalah bilangan genap.

Q : y dapat dibagi oleh 2.

$P \Leftrightarrow Q$: y adalah bilangan genap **jika dan hanya jika** y dapat dibagi oleh 2.

Contoh 2 :

P : Hari ini adalah hari libur.

Q : Saya akan pergi piknik.

$P \Leftrightarrow Q$: Hari ini adalah hari libur **jika dan hanya jika** saya akan pergi piknik.

Contoh 3 :

P : Suhu mencapai 0 derajat Celsius.

Q : Air berubah menjadi es.

$P \Leftrightarrow Q$: Air berubah menjadi es **jika dan hanya jika** suhu mencapai 0 derajat Celsius.

3.2 Himpunan

Himpunan dalam matematika adalah kumpulan angka, elemen, atau objek yang memiliki sifat atau karakteristik tertentu, dan objek-objek ini dianggap sebagai satu kesatuan. Himpunan dapat berisi objek apa pun, seperti bilangan, huruf, warna, atau bahkan objek fisik seperti buah-buahan, alat tulis, dan lain sebagainya. Himpunan direpresentasikan dengan menggunakan tanda kurung kurawal $\{ \}$.

Unsur-unsur atau elemen adalah objek atau anggota yang termasuk dalam himpunan. Unsur-unsur ini membentuk isi atau anggota dari himpunan tersebut. Unsur-unsur ditempatkan di dalam tanda kurung kurawal ($\{ \}$) dan dipisahkan dengan tanda koma (,). Sebagai contoh, himpunan A yang berisi beberapa angka :

$$A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$$

Di sini, A adalah himpunan yang berisi lima anggota. Jadi, 2, 3, 5, 7, dan 9 adalah unsur-unsur atau elemen dari himpunan A. Dalam notasi matematika, jika x adalah unsur-unsur dari himpunan A, kita tulis $x \in A$ yang berarti x adalah anggota dari himpunan A. Jika x bukan anggota dari himpunan A, ditulis $x \notin A$. Misalnya, jika $x=6$, maka $6 \notin A$.

3.2.1 Jenis-jenis Himpunan

Terdapat beberapa jenis himpunan dalam matematika, yang masing-masing memiliki sifat dan karakteristiknya sendiri. Berikut adalah beberapa jenis himpunan yang umum yaitu :

1. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki elemen atau anggota sama sekali. Himpunan kosong direpresentasikan dengan simbol $\emptyset$ atau $\{ \}$.

Contoh : Misalkan B sebagai himpunan bilangan ganjil yang habis dibagi dua. Namun, perlu diingat bahwa tidak ada bilangan ganjil yang habis dibagi dua, sehingga B tidak memiliki anggota sama sekali. Oleh karena itu, B dapat direpresentasikan sebagai $B=\{ \}$ atau $B=\emptyset$.

2. Himpunan Semesta

Himpunan semesta adalah himpunan yang terdiri dari seluruh objek, anggota, atau elemen yang sedang dipertimbangkan dalam suatu konteks atau pembahasan tertentu. Himpunan semesta juga dikenal sebagai himpunan universal.

Contoh: Misalkan kita mempertimbangkan himpunan $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, maka himpunan semesta S yang mungkin adalah $S = \{\text{bilangan asli}\}$ atau $S = \{\text{bilangan cacah}\}$ atau $S = \{\text{bilangan genap}\}$.

3. Himpunan Bagian ($\subset$)

Himpunan bagian adalah himpunan yang seluruh anggotanya juga berada di himpunan lain. Misalnya, setiap anggota himpunan A adalah juga anggota himpunan B , maka himpunan A disebut sebagai **himpunan bagian** dari himpunan B , dan ditulis $A \subset B$ atau $B \supset A$. Jika A **bukan** himpunan bagian dari B , maka hubungan tersebut dapat ditulis $A \not\subset B$.

Contoh 1 :

$A = \{2, 3, 5\}$	maka $A \subset B$ atau $B \supset A$
$B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$	

Contoh 2 :

$P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	maka $Q \not\subset P$
$Q = \{7, 9, 11\}$	

4. Himpunan Berhingga

Himpunan berhingga adalah himpunan yang memiliki jumlah elemen yang terbatas atau dapat dihitung. Artinya, himpunan ini memiliki jumlah elemen yang jelas dan terbatas.

Contoh 1: Misal A yaitu himpunan bilangan bulat positif kurang dari 10 :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Himpunan A adalah contoh himpunan berhingga karena jumlah elemennya adalah 9, dan elemennya adalah bilangan bulat positif dari 1 hingga 9.

Contoh 2 : Misalkan B adalah himpunan huruf alfabet :

$$B = \{a, b, c, \dots, z\}$$

Himpunan B adalah berhingga karena jumlah elemennya adalah 26, yaitu jumlah huruf dalam alfabet.

5. Himpunan Tak Berhingga

Himpunan tak berhingga adalah himpunan yang memiliki jumlah elemen yang tidak terbatas atau tidak dapat dihitung. Artinya, himpunan ini memiliki jumlah elemen yang tidak terbatas atau tak terhingga.

Contoh 1 : Himpunan bilangan bulat positif adalah contoh himpunan tak berhingga. Himpunan ini berisi semua bilangan bulat positif, yaitu $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Jumlah elemen himpunan ini tak terbatas karena kita dapat terus menambahkan bilangan bulat positif baru.

Contoh 2 :

Himpunan bilangan bulat adalah contoh himpunan tak berhingga. Himpunan ini berisi semua bilangan bulat, baik positif, nol, maupun negatif, yaitu $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

3.2.2 Operasi Himpunan

Operasi pada himpunan adalah tindakan atau prosedur matematika yang dapat diterapkan pada himpunan untuk membentuk himpunan baru atau melakukan manipulasi terhadap himpunan yang ada. Berikut adalah operasi-operasi dasar pada himpunan :

1. Gabungan ($\cup$)

Operasi **gabungan** yang dilambangkan dengan " $\cup$ " adalah himpunan yang menghasilkan himpunan baru berisi semua anggota/elemen yang ada di salah satu atau kedua himpunan yang terlibat.

Contoh 1 :

$A = \{1, 3, 5\}$		maka $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{5, 7, 9\}$		

Operasi gabungan dari A dan B, dilambangkan dengan $A \cup B$, adalah himpunan berisi semua anggota yang ada di A atau B, atau keduanya, tanpa ada duplikasi elemen.

Contoh 2 :

$C = \{a, b, c\}$ $D = \{c, d, e\}$	maka $C \cup D = \{a, b, c, d, e\}$
--	-------------------------------------

2. Irisan ($\cap$)

Operasi **irisan** yang dilambangkan dengan " $\cap$ " adalah operasi himpunan yang menghasilkan himpunan baru berisi anggota/elemen yang dimiliki oleh dua himpunan yang terlibat.

Contoh 1 :

$A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{5, 7, 9\}$	maka $A \cap B = \{5\}$
--	-------------------------

Operasi irisan dari A dan B, dilambangkan dengan $A \cap B$, adalah himpunan berisi anggota/elemen yang dimiliki oleh A dan juga oleh B, yaitu elemen 5 :

$$A \cap B = \{5\}$$

Jadi, $A \cap B$ adalah himpunan berisi anggota yang dimiliki oleh kedua A dan B.

Contoh 2 :

$C = \{a, b, c\}$ $D = \{b, c, d\}$	maka $C \cap D = \{b, c\}$
--	----------------------------

3. Selisih

Operasi **selisih** yang dilambangkan dengan “-” adalah operasi yang menghasilkan himpunan baru berisi anggota/elemen yang hanya dimiliki oleh salah satu himpunan dan tidak dimiliki oleh himpunan lain.

Contoh 1 :

$A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{5, 7, 9\}$	maka : $A - B = \{1, 3\}$ $B - A = \{7, 9\}$
--	--

Operasi selisih dari $A - B$ adalah himpunan yang berisi anggota yang dimiliki oleh A tetapi tidak dimiliki oleh B :

$$A - B = \{1, 3\}$$

Sedangkan, **operasi selisih** dari $B - A$ adalah himpunan berisi anggota/elemen yang dimiliki oleh B tetapi tidak dimiliki oleh A :

$$B - A = \{7, 9\}$$

Contoh 2 :

$C = \{p, q, r\}$ $D = \{q, r, s\}$	maka $C - D = \{p\}$
--	----------------------

4. Komplemen

Operasi **komplemen** yang dilambangkan dengan (' atau c) adalah operasi yang menghasilkan himpunan baru yang berisi elemen yang tidak ada di himpunan asal, namun ada di himpunan semesta.

Contoh 1 :

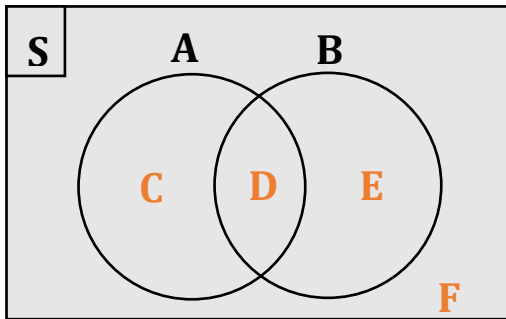
$A = \{1, 2, 3\}$ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$	maka $A^c = \{4, 5, \dots\}$
---	------------------------------

Contoh 2 :

$B = \{a, b\}$ $S = \{a, b, c, \dots, z\}$	maka $B^c = \{c, d, e, \dots, z\}$

3.2.3 Diagram Venn

Diagram Venn adalah representasi grafis dari himpunan menggunakan bentuk-bentuk geometris, seperti lingkaran, untuk memvisualisasikan hubungan antara himpunan. Diagram Venn dapat membantu memahami irisan, gabungan, dan perbedaan antara himpunan.



Gambar 3.1 Karakteristik Diagram Venn

(Sumber : ruangguru.com)

Keterangan :

S : Himpunan semesta.

C : Banyaknya anggota himpunan A saja (tanpa B).

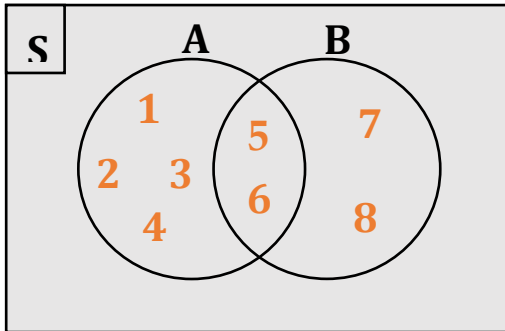
D : Daerah milik himpunan A dan B ($A \cap B$).

E : Banyaknya anggota himpunan B saja (tanpa A).

F : Banyaknya anggota semesta, tapi bukan anggota himpunan A maupun himpunan B.

Macam-macam bentuk Diagram Venn yaitu :

1. Himpunan yang Berpotongan

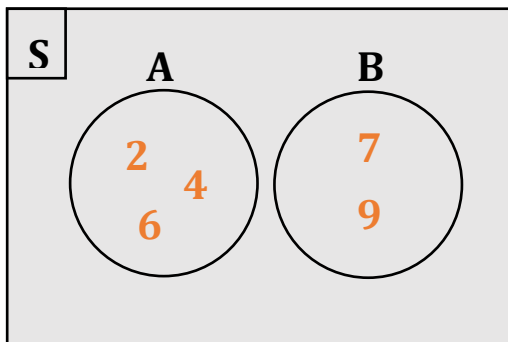


$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{5, 6, 7, 8\}$$

Jadi, irisan $A \cap B = \{5, 6\}$

2. Himpunan yang Saling Lepas

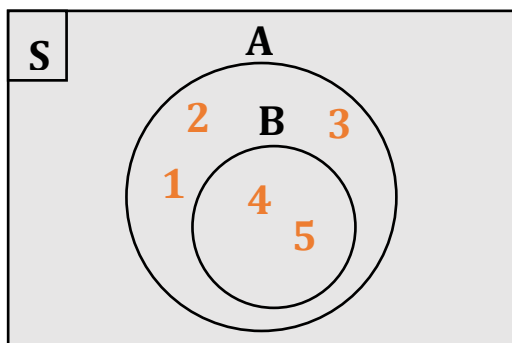


$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{7, 9\}$$

Jadi tidak ada anggota himpunan yang sama.

3. Himpunan Bagian

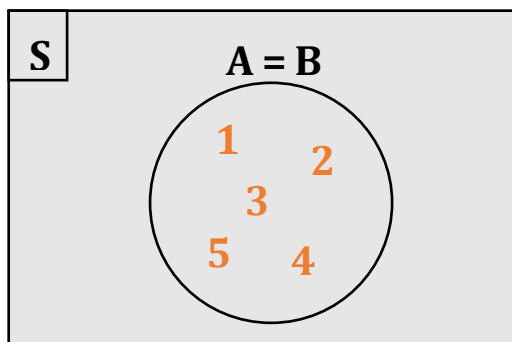


$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

Dikarenakan seluruh anggota himpunan B masuk ke dalam himpunan A, maka diagram venn ini disebut himpunan bagian.

4. Himpunan yang Sama



Himpunan A dan himpunan B memiliki anggota yang sama, maka diagram ini disebut himpunan yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

- Amir, M. (2021). *Himpunan (Teori dan Contoh Soal)*. Doctoral dissertation, UIN Raden Intan Lampung.
- Athirah Muthi Zahrani. (2023). *4 Macam Himpunan dalam Diagram Venn*. Diakses dari <https://www.zenius.net/blog/4-macam-himpunan-dalam-diagram-venn>.
- Bella Octavia. (2022). *3 Cara Menyatakan Himpunan Matematika – Jenis, Operasi, dan Contoh Soal*. Diakses dari <https://www.zenius.net/blog/pengertian-himpunan-beserta-cara-menyatakan-dan-jenis-jenisnya>.
- CNN Indonesia. (2023). *Pengertian, Jenis-Jenis, dan Operasi Himpunan*. Diakses dari <https://www.cnnindonesia.com/edukasi/20230731144754-569-979997/pengertian-jenis-jenis-dan-operasi-himpunan>.
- Kresnoadi. (2023). *Logika Matematika: Ingkaran, Konjungsi, Disjungsi, Implikasi & Biimplikasi | Matematika Kelas 11*. Diakses dari <https://www.ruangguru.com/blog/logika-matematika>.
- Mahmud, A., & Putra, R. W. Y. (2020). *Himpunan Teori Dan Contoh Soal*. Ahlimedia Book.
- Nugraha, A. *PAUD 4305/Modul 1 Himpunan*. Dasar-dasar Matematika dan Sains.
- Silmi Nurul Utami. (2023). *Logika Matematika: Pengertian dan Jenis-jenisnya*. Diakses dari <https://www.kompas.com/skola/read/2022/03/24/113458169/logika-matematika-pengertian-dan-jenis-jenisnya>.
- Widayat, D. W. (2022). *Himpunan dan Sistem Bilangan*. Himpunan Dan Sistem Bilangan.
- Yuliani, A. M., & Irham, M. (2019). *Analisis Kesalahan Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Soal Logika Matematika*. *JURNAL KEPENDIDIKAN*.

Zara Larasati. (2023). *Diagram Venn: Karakteristik, Bentuk & Cara Pengoperasian / Matematika Kelas 7*. Diakses dari <https://www.ruangguru.com/blog/diagram-venn>.

BAB 4

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR DAN KUADRAT

Oleh Azmidar

4.1 Persamaan Linear Satu Variabel

Persamaan linear satu variabel merupakan sebuah persamaan dengan satu variabel dan berpangkat satu. Bentuk umum persamaan ini adalah $ax + b = c$, dimana $a \neq 0$ dan x sebagai peubah atau variabel (Anton, 11998).

Contoh:

Dari persamaan berikut, manakah yang termasuk persamaan linear satu variabel?

1. $3p + 2 = 18$
2. $p - 4q = 16$
3. $18r - 3 = 3x + 2$

Jawab:

1. $3p + 2 = 18$ merupakan persamaan linear satu variabel karena variabelnya hanya satu yakni variabel p dan berpangkat satu
2. $p - 4q = 16$ bukan persamaan linear satu variabel karena memiliki 2 variabel, yaitu variabel p dan q .

3. $18r - 3 = 3r + 2$ merupakan persamaan linear satu variabel karena persamaan tersebut hanya memiliki satu variabel (r) dan dapat disederhanakan menjadi

$$18r - 3 = 3r + 2$$

$$18r - 3r = 2 + 3$$

$$15r = 5$$

4.1.1 Solusi Persamaan Linear Satu Variabel

Terdapat tiga metode penyelesaian persamaan linear satu variabel, yaitu:

1. Mengganti atau substitusi variabel dengan suatu bilangan

Sebuah persamaan linear satu variabel dapat ditentukan solusinya melalui penggantian variabel dengan suatu bilangan tertentu sehingga persamaan tersebut bernilai benar. Bilangan pengganti tersebut merupakan solusi dari persamaan linear satu variabel yang diberikan.

Contoh:

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan $x + 2 = 4$, dengan x adalah bilangan asli!

Jawab:

- ✓ Untuk $x = 1$, maka $1 + 2 = 3$ adalah kalimat yang salah karena $3 \neq 4$
- ✓ Untuk $x = 2$, maka $2 + 2 = 4$ adalah kalimat yang salah karena $3 = 4$

Jadi, nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah 2.

2. Mengurangi atau menambah kedua ruas dengan bilangan sama

Contoh:

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan $x - 5 = 12$,
dengan x adalah anggota bilangan asli!

Jawab:

$$x - 5 = 12$$

$$x - 5 + 5 = 12 + 5$$

$$x + 0 = 12 + 5$$

$$x = 17$$

Jadi, nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah 17

3. Mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan yang sama

Contoh:

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan $\frac{1}{4}x = 20$,
dengan x adalah anggota bilangan asli!

Jawab:

$$\frac{1}{4}x = 20 \text{ (kedua ruas dikali 4)}$$

$$4\left(\frac{1}{4}x\right) = 4(20)$$

$$x = 80$$

Jadi, nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah 80.

4.2 Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Dalam aktivitas sehari-hari, tak jarang kita mendengar beberapa aturan sebagai berikut:

1. Kecepatan minimum kendaraan saat memasuki jalan tol adalah 40 km/jam
2. peserta didik yang mendapatkan nilai ulangan mata pelajaran Fisika kurang dari 75 harus remedial
3. Pengunjung yang berusia kurang dari 10 tahun diharuskan memakai pelampung saat berenang

Beberapa aturan diatas menggunakan konsep pertidaksamaan linear satu variabel. Persamaan linear satu variabel adalah pertidaksamaan yang tepat memiliki satu variabel dengan pangkat tertinggiya yaitu satu. Pertidaksamaan ini dipisah oleh tanda pertidaksamaan yang meliputi $<$, $>$, $\leq$, atau $\geq$ (Abdur Rahman, 2016)

simbol	Makna
$<$	Kurang dari
$>$	Lebih dari
$\leq$	Kurang dari atau sama dengan
$\geq$	Lebih dari atau sama dengan

4.2.1 Solusi Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Pertidaksamaan linear satu variabel juga dapat diselesaikan dengan tiga metode, yakni:

1. Mengurangi atau menambah kedua ruas dengan bilangan yang sama

Apabila kedua ruas dikurangi atau ditambah dengan bilangan yang sama, maka tanda pertidaksamaan tidak mengalami perubahan.

Contoh:

- a. Tentukan himpunan penyelesaian atas pertidaksamaan
 $x - 5 < 12$

Jawab:

$$x - 5 < 12$$

$x - 5 + 5 < 12 + 5$ (kedua ruasnya ditambah 5, tanda pertidaksamaan tidak mengalami perubahan)
 $x < 17$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x < 17$

- b. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x + 2 \geq 8$

Jawab:

$$x + 2 \geq 8$$

$x + 2 - 2 \geq 8 - 2$ (kedua ruas dikurang 2, tanda pertidaksamaan tidak mengalami perubahan)

$$x \geq 6$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x \geq 6$

2. Membagi atau mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif

Apabila pertidaksamaan dibagi atau dikalikan dengan suatu bilangan positif yang sama pada kedua ruasnya, maka tanda pertidaksamaan tidak mengalami perubahan.

Contoh:

- a. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{1}{7}x \geq 42$

Jawab:

$$\frac{1}{7}x \geq 42$$

$7 \times \left(\frac{1}{7}x\right) \geq 42 \times 7$ (kedua ruas dikali 7, tanda pertidaksamaan tetap)

$$x \geq 294$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x \geq 294$

b. Tentukan himpunan penyelesaian dari $4x < 24$

Jawab:

$$4x < 24$$

$\frac{4x}{4} < \frac{24}{4}$ (kedua ruas dibagi 4, tanda pertidaksamaan tetap)

$$x < 6$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x < 6$

3. Membagi atau mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif

Suatu pertidaksamaan linear jika dibagi atau dikalikan dengan bilangan negatif yang sama pada kedua ruas, maka tanda pertidaksamaan akan mengalami perubahan.

Contoh:

a. Tentukan himpunan penyelesaian dari $-\frac{1}{8}x \leq 4$

Jawab:

$$-\frac{1}{8}x \leq 4$$

$-8 \times \left(-\frac{1}{8}x\right) \geq 4 \times (-8)$ (kedua ruas dikali -8, tanda pertidaksamaan dibalik)

$$x \geq -32$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x \geq -32$

b. Tentukan himpunan penyelesaian dari $-6x \geq 12$

Jawab:

$$-6x \geq 12$$

$$\frac{-6x}{-6} \leq \frac{12}{-6} \text{ (kedua ruas dibagi -6, tanda dibalik)}$$

$$x \leq -2$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x \leq -2$

4.3 Persamaan Linear Dua Variabel

Definisi: Persamaan linear dua variabel (PLDV) adalah persamaan yang memiliki tepat dua buah variabel (peubah) dan pangkat tertingginya satu. Bentuk umum dari PLDV :

$$ax + by = c$$

Dimana: a, b, c adalah suatu konstanta dengan $a \neq 0, b \neq 0$ dan x, y sebagai variabel.

Perhatikan beberapa bentuk persamaan berikut:

- | | | |
|----|--------------------|---|
| a. | $2x + 4 = 12$ | bukan PLDV sebab hanya memiliki satu variabel |
| b. | $8p - 6 = 10$ | bukan PLDV sebab hanya memiliki satu variabel |
| c. | $6k + 5l = 25$ | PLDV |
| d. | $2p - 2q + 14 = 2$ | PLDV |

4.3.1 Solusi Persamaan Linear Dua Variabel

Solusi dari PLDV $ax + by = c$ merupakan suatu bilangan terurut (x_1, y_1) sedemikian sehingga jika disubstitusikan x_1 untuk x dan y_1 untuk y menyebabkan persamaan bernilai benar.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari PLDV $3q + r = 18$, untuk q dan r adalah elemen bilangan asli!

Jawab:

$$3q + r = 18$$

$$\text{Jika } q = 1, \text{ maka } r = 15$$

$$\text{Jika } q = 2, \text{ maka } r = 12$$

$$\text{Jika } q = 3, \text{ maka } r = 9$$

$$\text{Jika } q = 4, \text{ maka } r = 6$$

$$\text{Jika } q = 5, \text{ maka } r = 3$$

$$\text{Jika } q = 6, \text{ maka } r = 0 \text{ (tidak memenuhi)}$$

Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh pasangan q dan r yang merupakan himpunan penyelesaian dari $3q + r = 18$ adalah $(1,15)$, $(2, 12)$, $(3, 9)$, $(4,6)$, $(5,3)$. Adapun $(6,0)$ bukanlah penyelesaian dari persamaan tersebut karena $r = 0$ bukan elemen bilangan asli yang merupakan syarat dari soal.

4.3.2 Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) merupakan suatu sistem persamaan linear yang dibangun dari dua buah persamaan linear serta memiliki dua buah variabel yang sejenis dengan tiap-tiap pangkat yang mengikuti variabel tersebut berupa pangkat satu. Adapun bentuk umum dari SPLDV adalah sebagai berikut:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

4.3.3 Solusi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Terdapat beberapa cara yang dapat diterapkan untuk menemukan solusi dari system persamaan linear dua variabel (SPLDV), yaitu:

1. Metode Substitusi

Pada metode ini, penyelesaian SPLDV dilakukan dengan cara menggantikan variabel yang satu dengan variabel dari persamaan yang lain.

Contoh:

Tentukan solusi dari SPLDV $2x - y = 7$ dan $x + 3y = 14$!

Jawab:

$$2x - y = 7$$

$$-y = 7 - 2x$$

$$y = -7 + 2x \dots (1)$$

$$x + 3y = 14 \dots (2)$$

$$x + 3y = 14$$

$$x + 3(-7 + 2x) = 14$$

$$x - 21 + 6x = 14$$

$$x + 6x = 14 + 21$$

$$7x = 35$$

$$x = 5$$

Substitusikan nilai $x = 5$ ke persamaan (1), diperoleh:

$$y = -7 + 2x$$

$$y = -7 + 2(5)$$

$$y = (-7) + 10 = 3$$

Jadi, solusi untuk SPLDV $2x - y = 7$ dan $x + 3y = 14$ adalah $x = 5$ dan $y = 3$

2. Metode Eliminasi

Metode eliminasi merupakan cara menyelesaikan SPLDV dengan menghilangkan variabel yang memiliki koefisien yang identik.

Contoh:

Tentukan nilai m yang memenuhi persamaan $4m - 4n = 16$ dan $8m + n = 12$!

Jawab:

$$\begin{array}{rcl} 4m - 4n = 16 & | \times 2 | & 8m - 8n = 32 \\ 8m + 2n = 22 & | \times 4 | & 32m + 8n = 88 \\ \hline & & 40m = 120 \\ & & m = 3 \end{array} +$$

Jadi, nilai m yang memenuhi adalah 3

3. Metode Campuran

Metode campuran merupakan hasil penggabungan antara metode substitusi dan metode eliminasi.

Contoh:

Tentukan nilai s dan t yang memenuhi persamaan $5s + 2t = -3$ dan $3s - t = 7$!

Jawab:

Diketahui SPLDV:

$$5s + 2t = -3 \dots (1)$$

$$3s - t = 7 \dots (2)$$

Langkah 1: samakan koefisien variabel s , kemudian eliminasi nilai s dari kedua persamaan untuk mendapatkan nilai t

$$\begin{array}{rcl} 5s + 2t = -3 & | \times 3 | & 15s + 6t = -9 \\ 3s - t = 7 & | \times 5 | & 15s - 5t = 35 \\ \hline & & 11t = -44 \\ & & t = -4 \end{array} +$$

Langkah 2: substitute nilai $t = -4$ ke persamaan (2) untuk memperoleh nilai s

$$3s - t = 7$$

$$3s - (-4) = 7$$

$$3s + 4 = 7$$

$$3s = 3$$

$$s = 1$$

Sehingga solusi untuk SPLDV tersebut adalah $s = 1$ dan $t = -4$

4.4 Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Pertidaksamaan linear dua variabel merupakan kalimat terbuka yang memuat dua variabel dengan derajat tertinggi satu, serta dilambangkan dengan tanda ketidaksamaan seperti $<$, $>$, atau $\geq$.

$$\begin{array}{l} \text{Bentuk umum :} \\ ax + by \neq c \\ ax + by < c \\ ax + by > c \\ ax + by \leq c \\ ax + by \geq c \end{array}$$

dengan:

x, y : variabel

a, b : koefisien

c : konstanta

4.4.1 Solusi Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Solusi dari pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu pasangan terurut dari x dan y yang memenuhi pertidaksamaan linear dua variabel yang diberikan. Solusi dari pertidaksamaan linear dua variabel disebut daerah penyelesaian, yang dapat berupa daerah yang di arsir atau daerah yang bersih. Berikut ini tahapan dalam menentukan solusi pertidaksamaan linear dua variabel:

1. Pastikan koefisien variabel x berupa bilangan positif
2. Apabila koefisien variabel x bernilai negatif, maka terlebih dahulu pertidaksamaan harus dikalikan dengan -1 sehingga tanda pertidaksamaan berubah, dari $<$ menjadi $>$, atau dari $\leq$ menjadi $\geq$, demikian juga sebaliknya.
3. Ubah tanda ketidaksamaan menjadi samadengan, sehingga persamaan berubah menjadi persamaan linear dua variabel
4. Tentukan titik potong terhadap sumbu y ($x = 0$) dan sumbu x ($y = 0$) dari PLDV (pada tahap ke-3)
5. Gambarlah grafik atau garis dari pertidaksamaan linear dua variabel yang membagi dua daerah kartesius
 - Apabila tandanya berupa $\leq$ dan $\geq$ maka garis yang digambarkan berupa garis tegas
 - Apabila tandanya berupa $<$ dan $>$ maka garis yang digambarkan berupa garis putus-putus
6. Ujilah titik yang tidak dilewati oleh garis
 - Apabila tandanya berupa $<$ dan $\leq$ maka daerah penyelesaiannya terletak di sebelah kiri dari pertidaksamaan

- Apabila tandanya berupa $>$ dan $\geq$ maka daerah penyelesaiannya terletak di sebelah kanan dari pertidaksamaan

Contoh:

Gambarlah grafik penyelesaian dari $-3x + 4y < 12$!

Jawab:

$$-3x + 4y < 12$$

$$-3x + 4y < 12 \quad (-1)$$

$$3x - 4y > -12$$

$$3x - 4y = -12$$

a. Titik potong terhadap sumbu x ($y = 0$)

$$3x - 4y = -12 \quad \text{jika } y = 0 \text{ maka } 3x - 4(0) = -12$$

$$3x = -12$$

$$x = -4$$

Titik potong terhadap sumbu $x = (-4, 0)$

b. Titik potong terhadap sumbu y ($x = 0$)

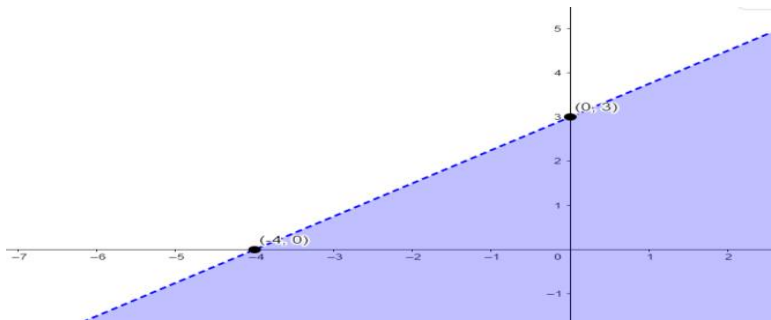
$$3x - 4y = -12 \quad \text{jika } x = 0 \text{ maka } 3(0) - 4y = -12$$

$$-4y = -12$$

$$y = 3$$

Titik potong terhadap sumbu $y = (0, 3)$

c. Grafik pertidaksamaan $-3x + 4y < 12$ melalui titik potong $(-4, 0)$ dan $(0, 3)$



4.5 Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat memiliki bentuk umum:
 $ax^2 + bx + c = 0$, dimana a, b, dan c adalah bilangan real dan $a \neq 0$

Contoh:

Tulislah bentuk sederhana dari persamaan kuadrat dari
 $8x^2 - 2x + 5 = 2x^2 + 4x - 12$

Jawab:

$$8x^2 - 2x + 5 = 2x^2 + 4x - 12$$

Daerah penyelesaian

$$8x^2 - 2x^2 - 2x - 4x + 5 + 12 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 17 = 0$$

Jadi, bentuk sederhana dari persamaan kuadrat
 $8x^2 - 2x + 5 = 2x^2 + 4x - 12$ adalah $6x^2 - 6x + 17 = 0$

4.5.1 Menentukan Akar Persamaan Kuadrat

Solusi dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah nilai x yang memenuhi persamaan yang diberikan. Untuk mencari solusi dari persamaan kuadrat, ada beberapa metode yang dapat digunakan seperti yang tertera di bawah ini:

1. Memfaktorkan

Penentuan akar persamaan kuadrat dengan cara pemfaktoran harus memperhatikan prinsip perkalian dengan nol, artinya jika perkalian dua bilangan hasilnya nol, maka salah satu atau kedua faktornya haruslah nol (jika $m \times n = 0$, maka $m = 0$ atau $n = 0$ atau keduanya).

a) Bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a = 1$

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dan m, n bilangan bulat, pemfaktorrannya adalah $(x + m)(x + n)$, jika dikaliakan akan diperoleh:

$$\begin{aligned}(x + m)(x + n) &= x^2 + xn + xm + mn \\ &= x^2 + (m + n)x + mn\end{aligned}$$

Sehingga, persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ setara dengan persamaan kuadrat $x^2 + (m + n)x + mn$. Jadi, $m + n = b$ dan $m \cdot n = c$

Contoh:

Tentukan akar-akar penyelesaian dari $x^2 + 14x - 15 = 0$

Jawab:

Carilah bilangan yang merupakan faktor dari -15 dan apabila dijumlahkan menghasilkan 14. Andaikan dua bilangan tersebut berturut-turut adalah m dan n

	n	$m + n$	$m \cdot n$
1	15	16	15
-1	15	14	-15
1	-15	-14	-15

Berdasarkan tabel, diperoleh bilangan yang memenuhi kriteria adalah $m = -1$ dan $n = 15$. Oleh karena itu, bentuk $x^2 + 14x - 15 = 0$ bisa difaktorkan menjadi:

$$x^2 + 14x - 15 = 0$$

$$(x - 1)(x + 15) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{atau} \quad x + 15 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \text{atau} \quad x_2 = -15$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{1, -15\}$

b) Bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 1$

Untuk memahami cara menentukan akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 1$, amati contoh berikut:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

Pertama, perhatikan bilangan yang ada di tengah, yakni $5x$. bilangan tersebut akan diuraikan agar memudahkan dalam proses pemfaktoran. Selanjutnya, kalikan nilai a dan c , yakni 3 dan -2 sehingga diperoleh angka -6 . Berikutnya, tentukan dua buah bilangan lain apabila dikalikan akan diperoleh -6 dan jika dijumlahkan akan didapat nilai b , yaitu 5.

Andaikan dua bilangan tersebut adalah m dan n

	n	$m + n$	$m.n$
-1	-6	-7	6
-1	6	5	-6

Dari tabel, diketahui bahwa nilai yang memenuhi adalah -1 dan 6, maka nilai koefisien untuk x , yakni b dapat diuraikan sebagai berikut:

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + \dots - 2$$

$$3x^2 - x + 6x - 2$$

Jabarkan $5x$ menjadi penjumlahan $-x + 6x$

$$(3x^2 - x) + (6x - 2)$$

Berikan tanda kurung

$$(3x - 1) + 2(3x - 1)$$

Faktorkan

$$(x + 2)(3x - 1)$$

Gunakan sifat distributif

Sehingga penentuan akar-akar dari $3x^2 + 5x - 2 = 0$ dapat diselesaikan dengan mudah.

$$\begin{aligned}
3x^2 + 5x - 2 &= 0 \\
(x + 2)(3x - 1) &= 0 \\
x + 2 = 0 \text{ atau } 3x - 1 &= 0 \\
x = -2 \text{ atau } 3x &= 1 \\
x = -2 \text{ atau } x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-2, \frac{1}{3}\}$

2. Melengkapi kuadrat sempurna

Kuadrat sempurna merupakan salah satu cara menentukan akar persamaan kuadrat, yakni dengan melengkapi kuadratnya agar menjadi sempurna. Bentuk persamaan kuadrat sempurna akan menghasilkan bilangan rasional (Subchan, 2018). Sebelum membahas lebih lanjut,

terlebih dahulu perlu mengenal sifat akar, yaitu jika $x^2 = r$,
dimana r sebarang bilangan real maka $x = \sqrt{r}$ atau
 $x = -\sqrt{r}$

Contoh: akar persamaan kuadrat $x^2 = 36$ ekuivalen dari
persamaan kuadrat $x^2 = 36$ adalah $x = \sqrt{36}$ atau
 $x = -\sqrt{36}$ dapat disederhanakan menjadi $x = 6$ atau
 $x = -6$

Berikut beberapa contoh penentuan akar persamaan kuadrat menggunakan metode melengkapi kuadrat sempurna.

bentuk $x^2 - b^2 = 0$	bentuk $ax^2 + bx + c = 0$
$x^2 - 49 = 0$ $x = \sqrt{49}$ $x = \pm 7$ $x_1 = 7 \text{ atau } x_2 = -7$ Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{7, -7\}$	$x^2 + 12x + 36 = 0$ $x^2 + 12x = -36$ $x^2 + 12x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = -36 + \frac{144}{4}$ $(x + 6)^2 = 0$ $x + 6 = \pm \sqrt{0}$ $x = -6$ $x_1 = x_2 = -6$ Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-6, -6\}$

3. Menggunakan rumus Kuadratik $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Contoh:

Carilah akar-akar penyelesaian dari $-3x^2 - 5x + 2 = 0$

Jawab:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-3)(2)}}{2(-3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-6}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{-6}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{-6}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{-6} = -\frac{12}{6} = -2$$

$$x_2 = \frac{5-7}{-6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Jadi, } x_1 = -2 \text{ dan } x_2 = -\frac{1}{3}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Abdur Rahman, A. (2016) *Matematika SMP/MI Kelas VII Semester 1*. Jakarta: Kemdikbud.
- Anton, H. (1998) *Dasar-dasar Aljabar Linear dan Penerapannya*, terj. Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.
- Subchan (2018) *Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX K13*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

BAB 5

MATRIKS DAN VEKTOR

Oleh Lita Lovia

5.1 Pendahuluan

Pada bagian Bab ini akan disajikan tentang matriks dan vektor. Matriks dan vektor merupakan cabang matematika yang disebut dengan aljabar linier.

5.2 Matriks

Pada bagian matriks akan dibahas tentang definisi dasar yang berkaitan dengan matriks, Bentuk umum matriks, beberapa jenis matriks, operasi matriks, determinan matriks dan invers matriks.

5.2.1 Definisi dan Bentuk Umum Matriks

Matriks dapat diartikan sebagai susunan bilangan-bilangan yang berbentuk segi empat, dimana susunannya terdiri dari baris dan kolom dan dibatasi oleh kurung siku atau kurung biasa (Amir and Prasajo, 2016). Penulisan matriks biasanya menggunakan huruf kapital. Bilangan-bilangan yang terdapat pada susunan-susunan tersebut dikatakan sebagai entri atau elemen dalam matriks.

Misalkan P adalah suatu matriks yang terdiri dari m baris dan n kolom, maka bentuk matriks P secara umum adalah

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}$$

Keterangan

p_{11} dibaca p satu-satu, artinya p_{11} adalah elemen yang berada baris ke-1 kolom ke-1. p_{24} adalah elemen yang berada pada baris ke-2 kolom ke-4. p_{mn} adalah elemen yang berada pada baris ke- m kolom ke- n atau dengan notasi $P = (p_{ij})_{m \times n}$, dimana $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$, p_{ij} adalah elemen matriks P yang berada pada baris ke- i dan kolom ke- j (Direktorat Pembinaan SMA Kemendikbud, 2013). Ukuran (dimensi/ordo) matriks P di atas adalah $m \times n$, dimana m menunjukkan jumlah baris dan n menunjukkan jumlah kolom atau dapat ditulis dengan lambang $P_{m \times n}$.

Ukuran Matriks menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang ada dalam matriks tersebut.

Contoh 1.1 : Perhatikan matriks- matriks berikut.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh 1.1, tampak bahwa ukuran matriks-matriks berbeda-beda. Matriks R memiliki 2 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya 2 kali 2 (2×2). Selanjutnya ukuran matriks S, T , dan U adalah $3 \times 3, 3 \times 1$ dan 2×3 . Dua buah matriks mempunyai kesamaan jika memiliki dimensi yang sama dan elemen-elemen bersesuaianpun sama.

Contoh 1.2 : Misalkan diberikan matriks sebagai berikut.

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Di sini Matriks X tidak sama dengan matriks Z karena X dan Z tidak memiliki ukuran yang sama, dan $X \neq Y$ karena terdapat elemen yang bersesuaian tidak sama.

5.2.2 Jenis-jenis Matriks

1. Matriks baris merupakan matriks yang hanya terdiri dari satu baris.

Contoh 1.3

$$A = [-4 \quad 5], \quad B = [1 \quad 3 \quad -6]$$

2. Matriks Kolom merupakan matriks yang hanya terdiri dari satu kolom.

Contoh 1.4

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

3. Matriks bujur sangkar merupakan matriks berukuran $n \times n$ dengan kata lain memiliki jumlah baris dan kolom yang sama (Lipschuttz and Lipson, 2002). Matriks bujur sangkar A memiliki elemen diagonal a_{ii} , dan elemen-elemen lain merupakan elemen diluar diagonal A .

Contoh 1.5

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

maka $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ disebut sebagai elemen diagonal dan disebut juga dengan diagonal utama, sedangkan elemen-elemen lainnya sebagai elemen diluar diagonal.

Contoh 1.6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Bila matriks A merupakan matriks bujur sangkar maka jumlah elemen-elemen diagonal utama matriks A disebut Trace A (ditulis $\text{tr}(A)$). Jika matriks A bukan matriks bujur sangkar maka Trace A tidak terdefinisi.

$$\text{trace } A_{n \times n} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \dots + \alpha_{nn}$$

4. Matriks Diagonal merupakan matriks bujur sangkar dan elemen diluar diagonalnya bernilai 0.

Contoh 1.7

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Skalar adalah matriks diagonal yang memiliki unsur bilangan yang sama pada diagonalnya.

Contoh 1.8

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

6. Matriks identitas merupakan matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dengan elemen 1 pada diagonalnya dan elemen 0 diluar diagonalnya. Matriks identitas ditulis I_n atau hanya I .

Contoh 1.9

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Matriks Null merupakan matriks dimana semua elemennya bernilai 0 maka matriks tersebut sering dituliskan dengan matriks O .

Contoh 1.10

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Matriks Segitiga Bawah adalah matriks bujur sangkar dimana semua elemen di atas diagonal utama adalah nol.

Contoh 1.11

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Matriks Segitiga Atas merupakan matriks bujur sangkar yang memiliki elemen dibawah diagonal utama adalah nol.

Contoh 1.12

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

5.2.3 Operasi Matriks

1. Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks A dengan matriks B yang masing-masing matriks berordo $m \times n$ dapat diperoleh dengan menambahkan elemen yang bersesuaian dalam kedua matriks secara bersama-sama. Matriks-matriks dengan ordo atau ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan.

Contoh 1.14

Misalkan diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\text{Maka } A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Pengurangan Matriks

Diketahui A dan B adalah matriks berukuran $m \times n$ maka pengurangan matriks A dengan Matriks B diperoleh dengan menjumlahkan matriks A dengan negatif matriks B yang dinyatakan dalam bentuk $A - B = A + (-B)$.

Contoh 1.15

Misalkan diketahui matriks seperti pada contoh 1.14

maka

$$-B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Selanjutnya } A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian skalar dengan Matriks

Misalkan Q adalah matriks berukuran $m \times n$, α adalah suatu skalar maka αQ adalah matriks yang dibentuk dari perkalian setiap elemen Q dengan α .

Contoh 1.16

Misalkan A adalah Matriks

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

maka

$$2Q = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Perkalian Matriks

Misalkan C adalah matriks hasil perkalian dua matriks A berukuran $m \times r$ dan Matriks B berukuran $r \times n$, dimana C matriks berukuran $m \times n$, atau ditulis $A \cdot B = C$

Contoh 1.17

Misalkan Matriks-matriks

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \\ A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

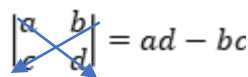
5.2.4 Determinan Matriks

Determinan matriks di diperoleh berdasarkan perkalian dari elemen-elemen matriks secara diagonal. Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real. Notasi $\det(A)$ atau $|A|$ merupakan notasi dari determinan matriks A .

1. Determinan matriks berukuran 2×2

Determinan matriks dengan ukuran 2×2 perkalian dengan mengurangkan hasil perkalian elemen-elemen pada diaogonal utama dengan hasil perkalian elemen-elemen sekunder.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka determinan Matriks A atau ditulis $\det(A) =$

 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

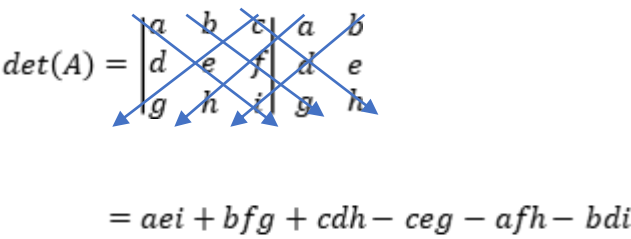
Contoh

Determinan matrik $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ adalah $\det(A) = -2 \times (-3) - 5 \times 1 = 1$

2. Determinan matriks berukuran 3×3

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

Maka determinan matriks A sebagai berikut

 $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

5.2.5 Invers Matriks

Invers matriks merupakan kebalikan matriks menjadi matriks baru. Misalkan A dan B matriks persegi yang punya ukuran sama. Jika matriks A dan matriks B memenuhi hubungan $A \times B = B \times A = I$, matriks A dan matriks B dikatakan dua matriks saling invers. B disebut juga invers dari A, atau ditulis A^{-1} . Matriks non singular merupakan matriks yang mempunyai invers, Matriks singular merupakan matriks tidak punya invers. Untuk menentukan invers matriks digunakan rumus,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{adj}(A)$$

Dimana $\det(A)$ merupakan determinan matriks A dan $\text{adj}(A)$ merupakan adjoin matriks A.

1. Invers matriks berukuran 2×2

Misalkan A adalah matriks dengan ukuran 2×2 dan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ maka } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh

Tentukan invers matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ maka

$$\det(A) = 2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ diperoleh}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

2. Invers matriks berukuran 3×3

Misalkan A adalah matriks dengan ukuran 3×3 dinyatakan sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{adj}(A)$,
dengan $\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

dan

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

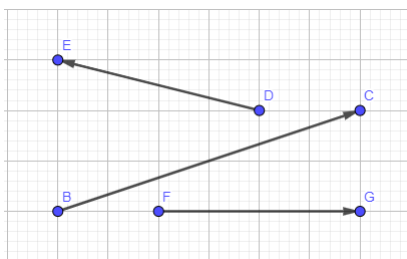
5.3 Vektor

Suatu besaran yang digambarkan oleh ruas garis berarah dan mempunyai besar (nilai) dan arah disebut vektor. Panjang ruas garis menyatakan besar vektor dan arah vektor dinyatakan arah ruas garis (arah anak panah). Contoh besaran vektor adalah jarak, kecepatan, percepatan dan lain-lain.

Vektor ditulis dengan notasi khusus, ada dua cara penulisan notasi vektor, yaitu dengan memberi tanda panah di atas hurufnya atau hurufnya ditebalkan. Tanda panah di atas merupakan simbol bahwa garis tersebut memiliki arah. Contoh vektor $\overrightarrow{AB}$ atau **AB** dan vektor $\vec{u}$ atau **u** ('Modul Matematika Peminatan Kelas X KD 3.2', 2020)

5.3.1 Vektor di R^2

Vektor di R^2 adalah vektor-vektor yang berada pada bidang datar (ruang dimensi dua) yang memiliki dua sumbu yaitu sumbu- x dan sumbu- y memiliki dua faktor penentu arah yaitu sumbu- x dan sumbu- y .



Gambar 5.1 Ilustrasi Vektor di R^2

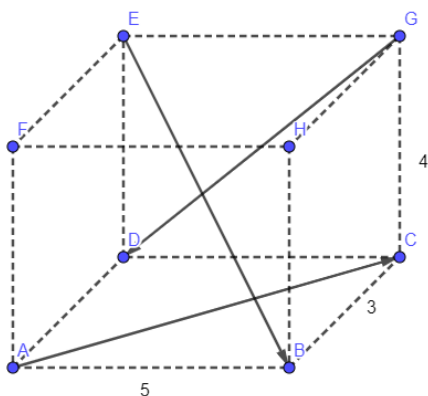
Ke kanan 6 satuan dari titik B dan 2 satuan ke atas sampai titik C, maka $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ atau $\overrightarrow{BC} = (6,2)$.

Ke kiri 4 satuan dari titik D dan 1 satuan ke atas sampai titik E, maka $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ atau $\overrightarrow{DE} = (-4,1)$.

Dari titik F ke kanan 4 satuan sampai titik G, maka $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ atau $\overrightarrow{FG} = (4,0)$.

5.3.2 Vektor di R^3

Vektor di R^3 adalah vektor-vektor yang berada di ruang dimensi tiga. Tiga faktor penentu arah, yaitu sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z menentukan arah vektor pada ruang dimensi tiga. Bilangan real yang disusun dengan urutan pertama merupakan arah untuk sumbu- x , urutan ke dua untuk arah untuk sumbu- y , dan urutan ke tiga untuk arah sumbu- z .



Gambar 5.2 Ilustrasi Vektor di R^3

Perhatikan $\overrightarrow{EB}$. Dari titik E ke depan 3 satuan, ke kanan 5 satuan dan ke bawah 4 satuan sampai titik B, maka

$$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ atau } \overrightarrow{EB} = (3, 5, -4).$$

Perhatikan $\overrightarrow{GD}$. Dari titik G ke kiri 5 satuan dan ke bawah 4 satuan sampai titik D, maka

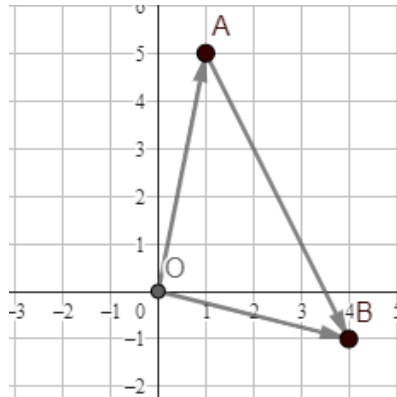
$$\overrightarrow{GD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ atau } \overrightarrow{GD} = (0, -5, -4).$$

Perhatikan $\overrightarrow{AC}$. Dari titik A ke belakang 3 satuan, ke kanan 5 satuan sampai titik C, maka

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ atau } \overrightarrow{AC} = (-3, 5, 0).$$

5.3.3 Vektor Posisi

Vektor posisi merupakan vektor yang menyatakan posisi satu titik (titik pangkal koordinat) ke titik yang lain (titik ujung) (Raharjo, 2009). Vektor posisi suatu titik dapat dilambangkan dengan nama titik ujungnya. Vektor posisi A adalah vektor berpangkal pada titik O yaitu titik pusat koordinat dan berujung pada titik A, sehingga vektor $\overrightarrow{OA}$ disebut vektor posisi dari titik A. Vektor $\overrightarrow{OA}$ dapat dinyatakan sebagai $\vec{a}$.



Gambar 5.3 Ilustrasi Vektor Posisi

Vektor posisi titik A(1,5) adalah $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vektor posisi titik B(4,-1) adalah $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

5.3.4 Vektor Satuan

Vektor satuan merupakan vektor yang panjangnya satu satuan.

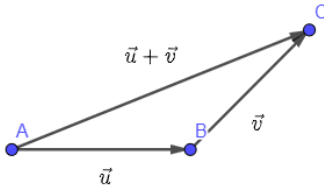
Vektor satuan yang arah arah sumbu- x , dilambangkan dengan $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektor satuan dengan arah sumbu- y , dilambangkan dengan $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Sutisna, 2020)

5.3.5 Penjumlahan Vektor

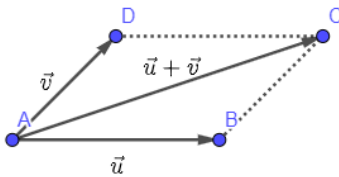
a. Cara Geometrik

1. Aturan Segitiga



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

2. Aturan Jajargenjang



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

b. Cara Aljabar

Untuk $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dimensi dua ($\mathbf{R}^2$)

Jika $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ maka $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$

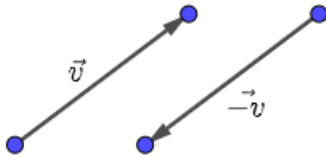
Untuk $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dimensi dimensi ($\mathbf{R}^3$)

Jika $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

maka $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d \\ b + e \\ c + f \end{pmatrix}$

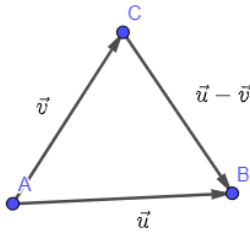
5.3.6 Pengurangan Vektor

Misalkan vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$. Vektor $-\vec{v}$ merupakan lawan dari vektor $\vec{v}$. vektor $-\vec{v}$ merupakan vektor yang panjangnya sama dengan vektor $\vec{v}$.

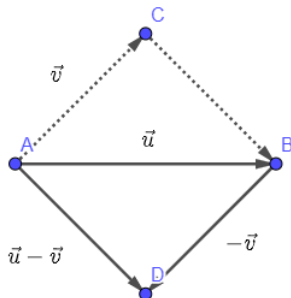


a. Cara Geometrik

1. Aturan Segitiga



2. Aturan Jajargenjang



b. Cara Aljabar

Untuk $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dimensi dua ($\mathbf{R}^2$)

Jika $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

maka $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}$

Untuk $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dimensi dimensi ($\mathbf{R}^3$)

Jika $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

maka $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - d \\ b - e \\ c - f \end{pmatrix}$

5.3.7 Perkalian Bilangan dengan Vektor

Misalkan k suatu bilangan dan $\vec{u}$ adalah vektor dimensi dua ($\mathbf{R}^2$)

Jika $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka $k\vec{u} = k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$

Misalkan k suatu bilangan dan $\vec{u}$ adalah vektor dimensi dua ($\mathbf{R}^3$)

Jika $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, maka $k\vec{u} = k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}$

5.3.8 Panjang Vektor

Misalkan titik $P(a, b)$ dan $O = (0, 0)$ di $\mathbf{R}^2$, maka Panjang vektor $\vec{OP} = |\vec{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Misalkan titik $P(a, b, c)$ dan $O = (0, 0, 0)$ di $\mathbf{R}^3$, maka Panjang vektor $\vec{OP} = |\vec{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

5.3.9 Jarak Dua Titik

Misalkan $P(a_1, b_1)$, $Q(a_2, b_2)$ dan $O = (0,0)$ di $\mathbf{R}^2$. Selanjutnya

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

Maka Panjang vektor $\overrightarrow{PQ}$:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

Misalkan $P(a_1, b_1, c_1)$, $Q(a_2, b_2, c_2)$ dan $O = (0,0,0)$ di $\mathbf{R}^3$. Selanjutnya

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \\ c_2 - c_1 \end{pmatrix}$$

Maka Panjang vektor $\overrightarrow{PQ}$:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

5.3.10 Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya satu satuan.

Misalkan vektor dari $\vec{u}$ merupakan vektor $\vec{u}$ dibagi dengan Panjang vektor $\vec{u}$.

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Misalkan $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka $\hat{u} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Misalkan $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, maka $\hat{u} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

5.3.11 Perkalian Skalar Dua Vektor

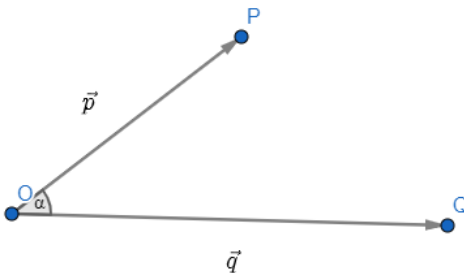
Perkalian skalar dua vektor matematika (dot product) atau sering juga disebut dengan perkalian titik merupakan sebuah bentuk perkalian vektor yang akan menghasilkan besaran skalar atau berbentuk bilangan.

Misalkan terdapat dua vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$. Perkalian skalar dari dari vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$ dinyatakan dengan $\vec{p} \cdot \vec{q}$

Misalkan vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$, maka hasil kali scalar atau perkalian titik vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ sebagai berikut:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$$

Jika α adalah besar sudut antara vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$



Maka $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\alpha, 0 \leq \alpha \leq \pi$

Besar sudut antara dua vektor $\cos\alpha = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$

Atau $\cos\alpha = \frac{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}{\sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)}}$

Jika dua vektor saling tegak lurus maka nilai dari $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$,
dimana vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$ adalah vektor-vektor tak nol.

5.3.12 Proyeksi Vektor

a. Proyeksi Skalar Orthogonal

Proyeksi skalar orthogonal $\vec{q}$ pada $\vec{p} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}|}$

Proyeksi skalar orthogonal $\vec{p}$ pada $\vec{q} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{q}|}$

b. Proyeksi Vektor Orthogonal

Proyeksi vektor orthogonal $\vec{q}$ pada $\vec{p} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}|^2} \vec{p}$

Proyeksi vektor orthogonal $\vec{p}$ pada $\vec{q} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{q}|^2} \vec{q}$

DAFTAR PUSTAKA

- Amir, M.F. and Prasajo, B.H. (2016) *Matematika Dasar*, Umsida Press.
- Anton, H. (1997) 'Aljabar Linier Elementer', Erlangga, 5.
- Direktorat Pembinaan SMA Kemendikbud (2013) 'Direktorat Pembinaan SMA Kemendikbud', pp. 1–29. Available at: [https://repositori.kemdikbud.go.id/19919/1/Kelas X_Ekonomi_KD 3.1 %282%29.pdf](https://repositori.kemdikbud.go.id/19919/1/Kelas_X_Ekonomi_KD_3.1_%282%29.pdf).
- Lipschuttz, S. and Lipson, M. (2002) 'Aljabar Linear', in *Schaum' Outlines*. 3rd edn. Erlangga, pp. 24–31.
- Raharjo, D.M.E. (2009) *VEKTOR JENJANG DASAR*.
- Sutisna, E. (no date) *Modul Matematika Peminatan Kelas X KD 3.2*.

BAB 6

BANGUN RUANG SISI LENGKUNG

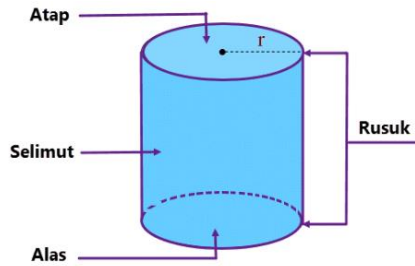
Oleh Mirna Riazil Jannah

6.1 Pendahuluan

Sumanto, dkk (2008) menyatakan bahwa Bangun Ruang adalah sebuah bangun geometri dimensi tiga yang mempunyai sifat-sifat tertentu, yakni dengan adanya sisi (bidang), rusuk dan titik sudut. Materi luas permukaan maupun volume bangun ruang sisi lengkung banyak diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. (Marasabessy, Aan Hasanah, & Dadang Juandi, 2021). Bangun ruang sisi lengkung terdiri atas: 1) Tabung, 2) kerucut dan 3) Bola.

6.2 Tabung

Soenarjo (2008) menyatakan bahwa bangun ruang tabung memiliki bagian atas dan bagian bawah berupa lingkaran yang sama. Selanjutnya, Soewito, dkk (1992) menyatakan bahwa tabung memiliki permukaan tertutup sederhana yang batasnya pun berupa bagian dari tabung itu sendiri dan alasanya berupa lingkaran. Selanjutnya, Nurfarisyah (2013) menyatakan bahwa tabung adalah bangun ruang yang dibatasi oleh dua bidang lingkaran yang sama besar dan sebangun (kongruen) yang berhadapan, sejajar, dan tiap titik yang bersesuaian pada kedua lingkaran tersebut saling berhubungan dengan garis lurus. Adapun bentuk tabung seperti gambar berikut ini.



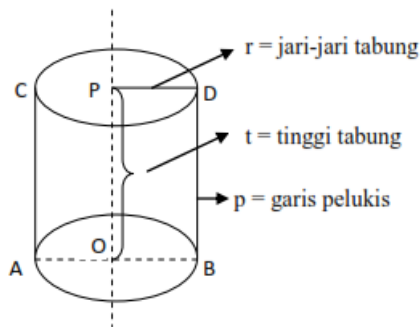
Gambar 6.1 Tabung
(<https://informazone.com/>)

Contoh benda berbentuk tabung dalam kehidupan sehari-hari sebagai berikut:



Gambar 6.2 Gambar Contoh Tabung

6.3 Unsur-Unsur Tabung



Gambar 6.3 Gambar Tabung

Dari gambar diatas dapat disimpulkan unsur-unsur tabung sebagai berikut:

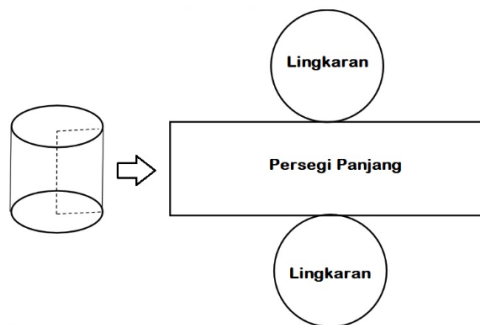
- Sisi alas yaitu sisi yang berbentuk lingkaran dengan pusat O dan sisi atas yaitu yang berbentuk lingkaran dengan pusat P.
- Selimut tabung yaitu lengkung tabung (sisi yang melingkar ke samping) selain sisi alas dan sisi atas.
- Diameter lingkaran alas yaitu ruas garis AB dan diameter lingkaran atas yaitu ruas garis CD.
- Jari-jari lingkaran alas (r) yaitu ruas garis OA dan OB, jari-jari lingkaran atas (r) yaitu ruas garis PC dan PD.
- Tinggi tabung ditunjukkan oleh panjang ruas garis AC, OP dan BD.

6.4 Sifat-sifat Tabung

Menurut Suharjana (2008: 27) sifat-sifat tabung yaitu:

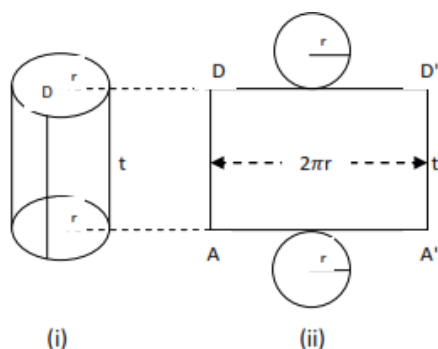
- Terdiri dari dua sisi berbentuk lingkaran dan satu sisi berbentuk sisi lengkung (selimut Tabung)
- Memiliki dua rusuk lengkung
- Tidak memiliki titik sudut

6.5 Jaring-jaring Tabung



Gambar 6.4 Jaring-jaring Tabung

Sumber: (<https://www.ilmusiana.com/>)



Gambar 6.5 Jaring-jaring Tabung

$$\text{Luas selimut Tabung} = 2\pi r \times t$$

$$\text{Luas Alas Tabung} = \text{luas alas lingkaran} = \pi r^2$$

$$\text{Luas Permukaan Tabung} = \text{Luas selimut} + \text{Luas sisi alas} + \text{luas sisi atas}$$

$$= 2\pi r t + \pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 2\pi r t + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r (r + t)$$

$$\text{Luas Permukaan Tanpa Tutup} = \text{luas alas} + \text{luas selimut}$$

$$= \pi r^2 + 2\pi r t$$

$$= \pi r (r + 2t)$$

Volume Tabung dapat dihitung dari luas alas atau tutup dikalikan tinggi tabung.

$$\text{Volume Tabung} = \pi r^2 \times t$$

Keterangan:

$$\pi = \text{Phi (3,14 atau } \frac{22}{7})$$

r = jari-jari tabung

t = tinggi tabung

Dengan demikian, untuk tabung tertutup berlaku:

RUMUS TABUNG

$$\text{Luas Selimut Tabung} = 2\pi r t$$

$$\text{Luas Permukaan Tabung} = 2\pi r(r + t)$$

$$\text{Volume Tabung} = \pi r^2 \times t$$

$$d = 2r \text{ atau } r = \frac{1}{2} d$$

Keterangan

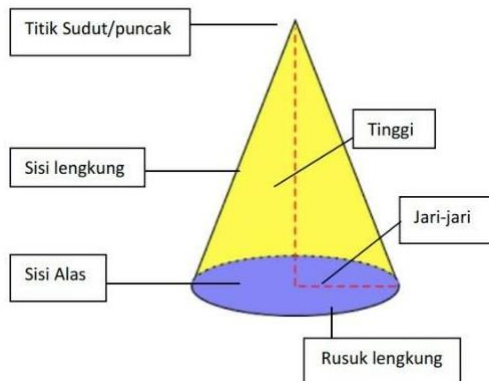
$$\pi = \text{Phi (3,14 atau } \frac{22}{7})$$

r = jari-jari tabung

d = diameter

6.6 Kerucut

Sumanto, dkk (2008) menyatakan bahwa kerucut dibatasi oleh sebuah sisi alas berbentuk lingkaran dan sebuah sisi lengkung, salah satu sisi lengkung berupa selimut yang mengerucut ke arah atas, semakin ke atas maka akan semakin kecil atau lancip. Adapun bentuk kerucut seperti gambar berikut ini.



Gambar 6.6 Kerucut

Sumber: (<https://gramedia.com/literasi>)

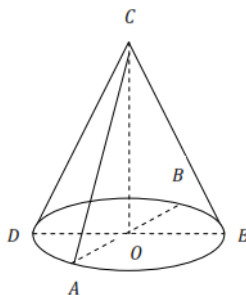
Contoh benda berbentuk bangun ruang kerucut dalam kehidupan sehari-hari antara lain topi ulang tahun, *cone* es krim dan lain sebagainya.



Gambar 6.7 Contoh Kerucut

6.7 Unsur-unsur Kerucut

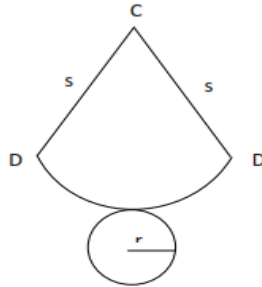
Berdasarkan gambar berikut dapat ditentukan unsur-unsur kerucut.



Gambar 6.8 Kerucut

- Sisi lingkaran merupakan bidang alas
- Diameter bidang alas (d) yaitu ruas garis AB
- Jari-jari sisi alas (r) terdiri atas garis OA dan ruas garis OB
- Tinggi kerucut (t) yaitu jarak dari titik puncak ke pusat bidang alas (ruas garis CO)
- Selimut kerucut
- Garis pelukis yaitu garis-garis pada selimut kerucut yang ditarik dari titik puncak C ke titik pada lingkaran.

6.8 Jaring-jaring Kerucut



Gambar 6.9 Jaring-jaring Kerucut
Sumber: (<https://gramedia.com/literasi>)

6.9 Sifat-sifat Kerucut

Menurut Suharjana (2008:27) sifat-sifat kerucut yaitu

- Mempunyai alas yang salah satu sisinya berbentuk lingkaran dan sisi launnya berbentuk bidang lengkung (selimut kerucut)
- Memiliki satu rusuk lengkung
- Tidak memiliki titik sudut
- Memiliki satu titik puncak

RUMUS KERUCUT

$$\text{Luas Selimut Kerucut} = \pi r s$$

$$\text{Luas Permukaan kerucut} = \pi r (s + r)$$

$$\text{Volume Tabung} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 t$$

$$= \frac{1}{2} d$$

KETERANGAN

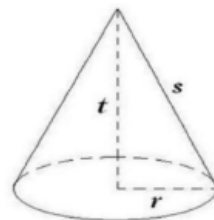
π = Phi (3,14 atau $\frac{22}{7}$)

r = jari-jari kerucut

t = tinggi kerucut

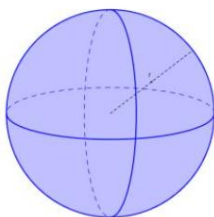
s = garis pelukis kerucut

V = Volume Kerucut



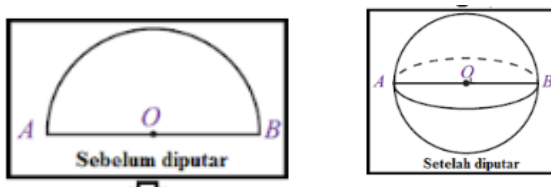
6.10 Bola

Bola merupakan bangun ruang sisi lengkung yang dibatasi oleh satu bidang lengkung, bola dapat dibentuk dari bangun setengah lingkaran yang diputar 360° pada garis tengahnya. Menurut Simanjuntak, dkk (1993:92) bahwa irisan bola pada bidang datar akan berbentuk lingkaran berjari-jari r .



Gambar 6.10 Bola

Sumber: (<https://rumuspintar.com/>)



Gambar 6.11 Bola Sebelum dan Setelah Diputar

6.11 Unsur-unsur Bola

- Titik pusat adalah titik pada bola yang jaraknya sama dari segala arah sepanjang permukaannya.
- Diameter adalah garis lurus dari satu titik permukaan bola ke titik lain permukaan bola yang melalui titik pusat bola. Diameter dilambangkan dengan “ d ”. nilai diameter adalah dua kali nilai jari-jari bola.
- Jari-jari bola adalah garis lurus yang berpangkal dititik pusat dan berakhir dipermukaan bola. Jari-jari dilambangkan huruf “ r ”.
- Sebuah bola hanya memiliki satu sisi yaitu sisi melengkung, yang membentuk permukaan melengkung dengan mengelilingi setiap titik pada permukaan benda.

6.12 Sifat-sifat Bola

Menurut Suharjana (2008) sifat-sifat bola antara lain:

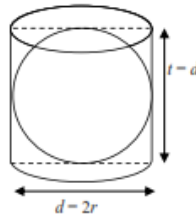
- Memiliki satu sisi berbentuk bidang lengkung (selimut Bola)
- Tidak memiliki rusuk
- Tidak memiliki titik sudut



Gambar 6.12 Contoh Bola

6.13 Luas Permukaan Bola

Untuk menentukan luas permukaan setengah bola dapat dilakukan dengan percobaan Archimedes yaitu “jika sebuah bola dimasukkan ke dalam tabung yang berukuran tinggi sama dengan 2 kali jari-jari atau diameter bola, maka luas bola itu sama dengan luas selimut tabung”. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 6.13 Percobaan Archimedes

$$\begin{aligned}\text{Luas permukaan bola} &= 2 \times \text{luas permukaan setengah bola} \\ &= 2 \times 2\pi r^2 \\ &= 4\pi r^2\end{aligned}$$

Volume $\frac{1}{2}$ bola = dua kali volume kerucut

$$V_{\text{setengah bola}} = 2 \times \frac{1}{3}\pi r^3$$

Volume Bola = 2 × volume $\frac{1}{2}$ bola

$$\begin{aligned}V_{\text{bola}} &= 2 \times \frac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

RUMUS BOLA

$$\text{LUAS PERMUKAAN BOLA} = 4\pi r^2$$

$$V_{\text{setengah bola}} = 2 \times \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$d = 2r \text{ atau } r = \frac{1}{2}d$$

Keterangan

$$\pi = \text{Phi (3,14 atau } \frac{22}{7})$$

r = jari-jari bola

d = diameter

V = Volume Bola

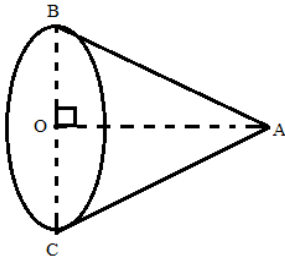


SOAL DAN PEMBAHASAN



1. Soal Prediksi UN/Pengetahuan

Perhatikan gambar berikut! Unsur kerucut AO adalah....



- a. Diameter
- b. Jari-jari
- c. Garis pelukis
- d. Garis tinggi

Pembahasan

AC dan BC = Garis Pelukis

AO = garis tinggi

BC = diameter

OB dan OC = Jari-Jari

Jawaban D. Garis Tinggi



2. Soal Kisi-kisi UN/Aplikasi

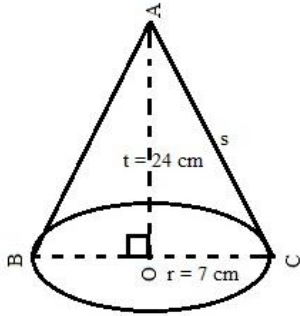
Sebuah kerucut yang tingginya 24 cm dan diameter alasnya 14 cm. Luas permukaan kerucut adalah....

- a. 217 π cm²
- b. 224 π cm²
- c. 532 π cm³
- d. 546 π cm²

Pembahasan

Sebuah kerucut $d = 14$ cm maka $r = 7$ cm
 $t = 24$ cm

Perhatikan gambar berikut!



Mencari sisi $AC = s = \sqrt{t^2 + r^2}$ (dengan *Teorema Pythagoras*)

$$AC = s = \sqrt{24^2 + 7^2}$$

$$AC = s = 25 \text{ cm}$$

Luas permukaan kerucut memenuhi:

$$L = \pi r s + \pi r^2$$

$$L = \pi \cdot 7 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} + \pi \cdot 7 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm}$$

$$L = 175 \pi \text{ cm}^2 + 49 \pi \text{ cm}^2$$

$$L = 224 \pi \text{ cm}^2$$

Jawaban B. $224 \pi \text{ cm}^2$



3. Soal UN/Aplikasi

Sebuah tabung diameter alasnya 14 cm dan tinggi tabung 18

cm ($\pi = \frac{22}{7}$). Luas seluruh permukaan tabung adalah....

a. 1.100 cm^2

b. 1.102 cm^2

c. 1.104 cm^2

d. 1.106 cm^2

Pembahasan

Ukuran

$$r = \frac{1}{2} d$$

$$r = \frac{1}{2} (14 \text{ cm})$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

$$t = 18 \text{ cm}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \text{Luas Permukaan Tabung} &= 2\pi r(r + t) \\ &= 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 \text{ cm} (7 \text{ cm} + 18 \text{ cm}) \\ &= 44 \text{ cm} \cdot (25 \text{ cm}) \\ &= 1.100 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Jawaban A. 1.100 cm^2

4. Soal Prediksi UN/ Pengetahuan

Luas Permukaan sebuah bola yang berjari-jari 21 cm adalah....

- a. 1.828 cm^2
- b. 5.544 cm^2
- c. 16.424 cm^2
- d. 38.808 cm^2

Pembahasan

Diketahui $r = 21 \text{ cm}$

Sehingga

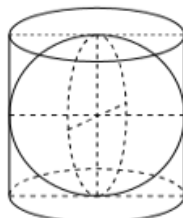
$$\begin{aligned} \text{Luas Permukaan Bola} &= 4\pi r^2 \\ &= 4 \cdot \frac{22}{7} \cdot 21 \text{ cm} \cdot 21 \text{ cm} \\ &= 5.544 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Jawaban B. 5.544 cm^2

5. Soal Kisi-kisi UN/ Pengetahuan

sebuah bola dimasukkan ke dalam tabung seperti gambar di bawah ini. Jari-jari bola 7 cm maka luas setengah permukaan tabung adalah....

- a. $49 \pi \text{ cm}^2$
- b. $147 \pi \text{ cm}^2$
- c. $294 \pi \text{ cm}^2$
- d. $343 \pi \text{ cm}^2$



Pembahasan

Bola tepat memenuhi tabung berarti:

$$r_{\text{tabung}} = r_{\text{bola}} = 7 \text{ cm}$$

$$r_{\text{tabung}} = 2r_{\text{bola}} = 14 \text{ cm}$$

Luas seluruh permukaan tabung sebesar:

$$L = 2L_{\text{alas lingkaran}} = L_{\text{selimut tabung}}$$

$$L = 2 \cdot \pi r_{\text{tabung}}^2 + 2 \cdot \pi r_{\text{tabung}} \cdot t_{\text{tabung}}$$

$$L = 2 \cdot \pi \cdot 7 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} + 2 \cdot \pi \cdot 7 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm}$$

$$L = 294\pi \text{ cm}^2$$

Jawaban C. $294\pi \text{ cm}^2$





BANK SOAL



1. Soal Prediksi UN/ Pengetahuan

Volume bola terbesar yang dapat dimasukkan ke dalam kotak berbentuk kubus dengan panjang sisi 18 cm adalah....

- a. $324 \pi \text{ cm}^3$
- b. $468 \pi \text{ cm}^3$
- c. $972 \pi \text{ cm}^3$
- d. $1.296 \pi \text{ cm}^3$

2. Soal Kisi-kisi UN/Aplikasi

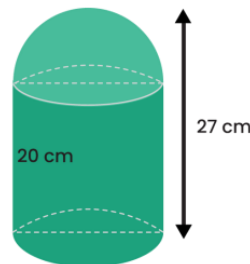
Tabung berdiameter 14 cm dan tinggi 15 cm maka luas permukaan tabung adalah.... ($\pi = \frac{22}{7}$)

- a. 814 cm^2
- b. 868 cm^2
- c. 968 cm^2
- d. 1.232 cm^2

3. Soal prediksi UN/ Pengetahuan

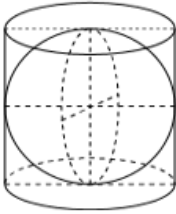
Tempat sampah berbentuk tabung tutupnya setengah bola seperti gambar di bawah ini. Luas seluruh permukaan tempat sampah adalah....

- a. 1.034 cm^2
- b. 1.188 cm^2
- c. 1.342 cm^2
- d. 1.496 cm^2



4. Soal kisi-kisi UN/Aplikasi

Perhatikan gambar berikut ini !



Luas permukaan seluruh tabung jika luas permukaan bola adalah 120 cm^2 ($\pi = \frac{22}{7}$)

- a. 150 cm^2
- b. 160 cm^2
- c. 180 cm^2
- d. 200 cm^2

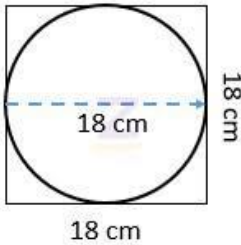


PEMBAHASAN



1. Pembahasan

Perhatikan gambar berikut.



Diketahui sisi = 18 cm (sisi kubus = diameter bola)

Maka $d = 18$ cm sehingga $r = 9$ cm

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 9^3$$

$$V = 972 \pi \text{ cm}^3$$

Jawaban C. $972 \pi \text{ cm}^3$



2. Pembahasan

Diketahui

$$r = \frac{1}{2} d$$

$$r = \frac{1}{2} (14 \text{ cm})$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

$$t = 15 \text{ cm}$$

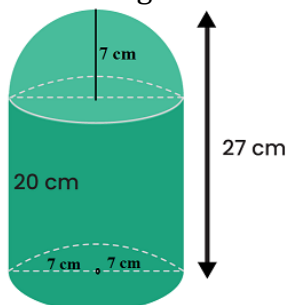
$$\begin{aligned} \text{Luas Permukaan Tabung} &= 2\pi r (r + t) \\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \text{ cm} (7 \text{ cm} + 15 \text{ cm}) \\ &= 154 \text{ cm} \times 22 \text{ cm} \\ &= 968 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Jawaban C. 968 cm^2



3. Pembahasan

Perhatikan gambar berikut



$$\begin{aligned}\text{Luas permukaan tabung} &= 2\pi r (r + t) \\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \text{ cm} (7 \text{ cm} + 20 \text{ cm}) \\ &= 44 \text{ cm} \times 27 \text{ cm} \\ &= 1.188 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Jawaban B. 1.188 cm^2



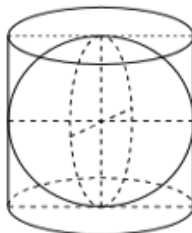
4. Pembahasan

Perhatikan Gambar!

Diketahui

Jari-jari tabung = jari-jari bola = r

Tinggi tabung (t) = diameter = $2r$



$$\begin{aligned}\text{Luas permukaan bola} &= 4\pi r^2 \\ 120 \text{ cm}^2 &= 4\pi r^2 \\ 30 \text{ cm}^2 &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luas Permukaan Tabung} &= 2\pi r^2 + 2\pi r t \\
 &= 2\pi r^2 + 2\pi r(2r) \\
 &= 2\pi r^2 + 4\pi r^2 \\
 &= 6\pi r^2 \\
 &= 6.30 \text{ cm}^2 \\
 &= 180 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Jawaban C. 180 cm^2



DAFTAR PUSTAKA

- Marasabessy, R., Aan Hasanah, & Dadang Juandi. (2021). Bangun Ruang Sisi Lengkung dan Permasalahan dalam Pembelajaran Matematika. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, Vol. 4, No. 1.
- Soenarjo. (2008). *Matematika 5*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.
- Soewito, & dkk. (1991/1992). *Pendidikan Matematika 1*. Jakarta: P2TK Dirjen Dikti, Depdikbud.
- Suharjana, A. (2008). *Mengenal Bangun Ruang dan Sifat-sifatnya di Sekolah Dasar*. Jakarta: Pusat Pengembangan dan pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika.
- Sumanto, Y. D., & dkk. (2008). *Gemar Matematika 5*. Jakarta: Pusat perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.
- TIM-GURU-Indonesia. (2019). *TOP ONE Bedah Kisi-kisi Terlengkap UN-USBN SMP/MTs 2020*. Jakarta: Bintang Wahyu.

BAB 7

TRIGONOMETRI

Oleh Ardiana Fatma Dewi

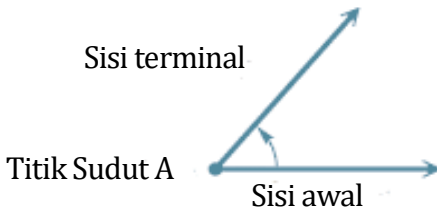
7.1 Pengertian Sudut

Dua titik yang berbeda A dan B akan membentuk sebuah garis yang disebut dengan garis AB. Bagian dari garis antara A dan B, termasuk titik A dan B itu sendiri disebut dengan ruas AB. Sedangkan bagian garis AB yang dimulai dari A dan berlanjut melewati B, disebut dengan sinar AB, dimana titik A merupakan titik akhir sinar (Lial *et al.*, 2017). Untuk lebih jelasnya maka perhatikan Gambar 7.1 dibawah ini.



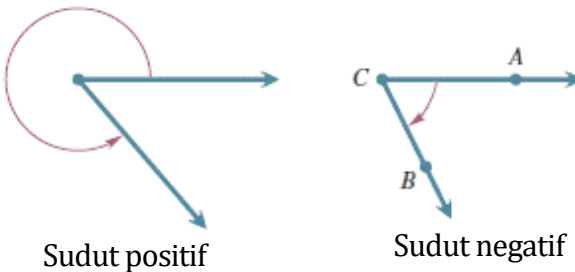
Gambar 7.1 Garis, Ruas, dan Sinar AB

Dalam pengertian trigonometri, dua sinar yang terbentuk pada suatu bidang yang memiliki titik ujung yang sama, atau dua ruas garis yang memiliki titik ujung sama disebut dengan sudut. Kedua sinar merupakan sisi-sisi sudut, dan titik ujung persekutuanannya adalah titik sudut, dapat dilihat pada di Gambar 7.2.



Gambar 7.2 Sudut A

Bersadarkan Gambar 7.2, ukuran sudut diperoleh dari rotasi yang dihasilkan oleh titik sudut. Besaran sudut ini ditentukan dengan cara memutar sinar datang dari salah satu sisi sudut, yaitu sisi awal ke sisi terminal. Rotasi ada yang searah dan berlawanan dengan jarum jam. Rotasi yang melawan arah jarum jam, menghasilkan ukuran positif. Sedangkan rotasi yang searah dengan jarum jam menghasilkan ukuran negatif, berikut ini gambarannya.



Gambar 7.3 Sudut Positif dan Negatif

Pemberian nama sudut dapat menggunakan nama titik sudutnya. Sebagai contoh pada Gambar 7.3 dapat diberi nama sudut C. Untuk alternatif lain biasanya nama sudut dituliskan dengan tiga huruf dengan titik sudut yang berada di tengahnya. Sebagai contoh diatas kita dapat menyebutkan sebagai sudut ACB atau sudut BCA.

7.2 Pengukuran Sudut

Ukuran yang paling umum digunakan untuk mengukur sudut adalah derajat. Ukuran tersebut dikenalkan oleh bangsa Babilonia 4000 tahun yang lalu. Tetapi, selain ukuran derajat juga terdapat ukuran sudut dalam radian.

7.2.1 Ukuran dalam Derajat

Menurut ahli satu lingkaran penuh dibagi menjadi 360° . Maka, satu derajat yang dituliskan 1° akan mewakili $1/360$ dari putaran penuh sebuah lingkaran. Jika dituliskan dalam persamaan sebagai berikut.

$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ putaran}$$

1° dibagi menjadi 60 bagian sama yang setiap bagian disebut "1 menit" dan satu menit dibagi menjadi 60 bagian sama yang dinamakan "1 detik" sehingga diperoleh hubungan berikut.

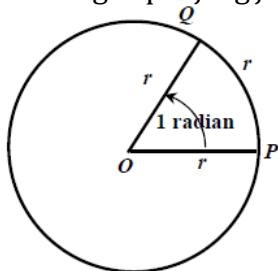
$$1^\circ = 60' \text{ (menit)}$$

$$1' = 60'' \text{ (detik)}$$

$$1^\circ = 3600'' \text{ (detik)}$$

7.2.2 Ukuran dalam Radian

Radian merupakan ukuran sudut di dalam sebuah lingkaran yang diapit oleh dua jari-jari dan panjang busur lingkaran yang sama dengan panjang jari-jarinya.



Gambar 7.4 Ilustrasi Radian

Pada Gambar 7.4 di atas, dapat diketahui :

- Busur PQ = r
- Besar $\angle POQ = \frac{\text{Panjang Busur PQ}}{r}$
- Radian = $\frac{r}{r}$
- Jika besar sudut QOP = α
- Panjang busur PQ = OQ = OP
- $\alpha = \frac{\text{Panjang Busur PQ}}{r} = 1$

Hubungan derajat dengan radian yaitu, satu putaran penuh sama dengan 2π , rad

$$\frac{\text{Panjang Busur PQ}}{\text{Keliling Lingkaran}} = \frac{\angle QOP}{\text{Sudut Satu Putaran}}$$

$$\frac{r}{2\pi r} = \frac{1\text{Rad}}{360^0}$$

$$1\text{rad} \times 2\pi r = r \times 360^0$$

$$1\text{rad} = r \frac{360^0}{2\pi r}$$

Sehingga diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$360^0 = 2\pi \text{ rad}$$

$$1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1\text{rad} \approx 57,3^0$$

Hubungan nilai derajat (D), radian (R), dan banyak putaran (P) sebagai berikut:

$$\frac{R}{D} = \frac{R}{P \times 360^0} = \frac{\pi}{180^0}$$

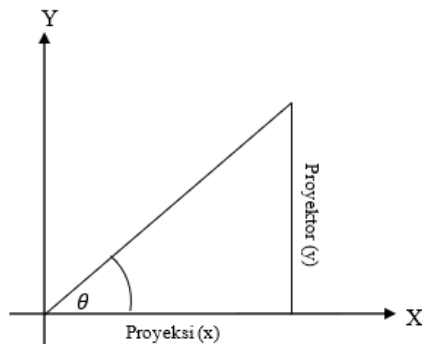
$$D = P \times 360^0$$

Nilai $\pi = 3,14$ untuk radian, dan $\pi = 180^0$ untuk derajat
Maka dapat ditarik kesimpulan berikut:

$$2\pi rad = 360^0$$

$$\pi rad = 180^0$$

7.3 Fungsi Trigonometri



Gambar 7.5 Ilustrasi Proyektor dan Proyeksi

Gambar 7.5 diatas membentuk sebuah segitiga siku-siku, jika r = sisi miring (proyektum), x = sisi alas (proyeksi), dan y = sisi tegak (proyektor) dan θ sebagai sudut yang diapit diantara sisi alas dan sisi miring maka definisi sinus, cosinus dan tangen adalah :

$$\text{Sinus } \angle \theta = \frac{\text{Panjang Sisi Tegak}}{\text{Panjang Sisi Miring}}$$

$$\text{Cosinus } \angle \theta = \frac{\text{Panjang Sisi Alas}}{\text{Panjang Sisi Miring}}$$

$$\text{Tangen } \angle \theta = \frac{\text{Panjang Sisi Tegak}}{\text{Panjang Sisi Alas}}$$

Definisi fungsi diatas dituliskan dalam bentuk lain sebagai berikut. $\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$. Fungsi trigonometri **secant** (sec), **cosecant** (scs), cotangent (cotan).

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos} = \frac{1}{\frac{x}{r}} = \frac{r}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin} = \frac{1}{\frac{y}{r}} = \frac{r}{y}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y}$$

$y = \text{sisi depan}$

Catatan : $x = \text{sisi samping}$

$r = \text{sisi miring}$

Rumus Kebalikan:

$$a. \sin \theta = \frac{1}{\csc}$$

$$d. \csc \theta = \frac{1}{\sin}$$

$$g. \sin \theta. \csc \theta = 1$$

$$b. \cos \theta = \frac{1}{\sec}$$

$$e. \sec \theta = \frac{1}{\cos}$$

$$h. \cos \theta. \sec \theta = 1$$

$$c. \tan \theta = \frac{1}{\cot}$$

$$f. \cot \theta = \frac{1}{\tan}$$

$$i. \tan \theta. \cot \theta = 1$$

Rumus Perbandingan:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Rumus Identitas Trigonometri:

$$a. \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$b. \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$c. \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

Ringkasan Tanda Fungsi Trigonometri:

θ° di kwadran	$\sin \theta^\circ$ $\csc \theta^\circ$	$\cos \theta^\circ$ $\sec \theta^\circ$	$\tan \theta^\circ$ $\cot \theta^\circ$
I	Positif	Positif	Positif
II	Positif	Negatif	Negatif
III	Negatif	Negatif	Positif
IV	Negatif	Positif	Negatif

Fungsi Trigonometri untuk Ukuran Sudut Istimewa:

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha^\circ$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha^\circ$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha^\circ$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	TD
$\csc \alpha^\circ$	TD	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec \alpha^\circ$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	TD
$\cot \alpha^\circ$	TD	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Keterangan :

TD = Tidak Didefinisikan

Cara mudah untuk mengingat nilai fungsi trigonometri sudut istimewa sebagai berikut :

Perhatikan nilai fungsi $\sin \alpha^\circ$ dan $\cos \alpha^\circ$ untuk 0° , 30° , 45° , 60° , dan 90°

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos \alpha^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

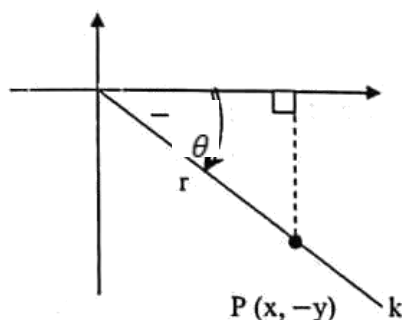
dimana,

$$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0, \frac{1}{2}\sqrt{1} = 1 \text{ dan } \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

7.4 Nilai Fungsi Trigonometri Sudut yang Saling Berhubungan (Berelasi)

7.4.1 Nilai Sudut Negatif

Jika, diketahui sudutnya bernilai negatif:



Gambar 7.6 Ilustrasi Sudut Negatif

$$\sin(-\theta)^0 = \frac{-y}{r}$$

$$\csc(-\theta)^0 = \frac{r}{-y}$$

$$\cos(-\theta)^0 = \frac{x}{r}$$

$$\sec(-\theta)^0 = \frac{r}{x}$$

$$\tan(-\theta)^0 = \frac{-y}{x}$$

$$\cot(-\theta)^0 = \frac{x}{-y}$$

Jika dihubungkan dengan fungsi trigonometri, maka diperoleh hubungan sudut negatif sebagai berikut:

$$\sin(-\theta)^0 = -\sin \theta^0$$

$$\csc(-\theta)^0 = -\csc \theta^0$$

$$\cos(-\theta)^0 = \cos \theta^0$$

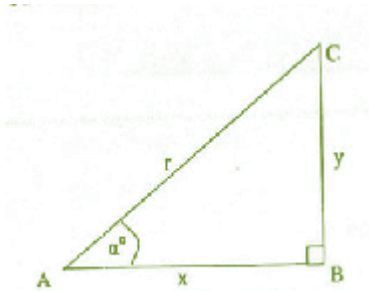
$$\sec(-\theta)^0 = \sec \theta^0$$

$$\tan(-\theta)^0 = -\tan \theta^0$$

$$\cot(-\theta)^0 = -\cot \theta^0$$

7.4.2 Fungsi Trigonometri untuk Sudut θ^0 dan $(90 - \theta)^0$

Perhatikan gambar dibawah ini untuk mengetahui sudut $(90 - \theta)^0$ yang berada di kwadran I.



Gambar 7.7 Ilustrasi Sudut Kwadran I

$$\sin(90 - \theta)^0 = \frac{x}{r} \qquad \csc(90 - \theta)^0 = \frac{r}{x}$$

$$\cos(90 - \theta)^0 = \frac{y}{r} \qquad \sec(90 - \theta)^0 = \frac{r}{y}$$

$$\tan(90 - \theta)^0 = \frac{x}{y} \qquad \cot(90 - \theta)^0 = \frac{y}{x}$$

Jika dihubungkan dengan rumus fungsi trigonometri akan dapat diperoleh hubungan sudut yang saling berelasi yaitu:

$$\sin(90 - \theta)^0 = \cos \theta^0 \qquad \csc(90 - \theta)^0 = \sec \theta^0$$

$$\cos(90 - \theta)^0 = \sin \theta^0 \qquad \sec(90 - \theta)^0 = \csc \theta^0$$

$$\tan(90 - \theta)^0 = \cot \theta^0 \qquad \cot(90 - \theta)^0 = \tan \theta^0$$

7.4.3 Fungsi Trigonometri untuk Sudut $(90 + \theta)^0$ dan $(180 - \theta)^0$

Untuk sudut-sudut yang berelasi di kwadran II kita dapat menuliskan dalam Bentuk $(90 + \theta)^0$ dan $(180 - \theta)^0$. Gunakan rumus sudut negative pada rumus (2.4.1) dan Rumus (2.4.2) dengan mengganti θ^0 dengan $(-\theta^0)$ sehingga diperoleh hubungan yaitu:

$$\begin{aligned}
\sin(90 + \theta)^0 &= \sin[(90 - (-\theta))]^0 = \cos(-\theta)^0 = \cos \theta^0 \\
\cos(90 + \theta)^0 &= \cos[(90 - (-\theta))]^0 = \sin(-\theta)^0 = -\sin \theta^0 \\
\tan(90 + \theta)^0 &= \tan[(90 - (-\theta))]^0 = \cot(-\theta)^0 = -\cot \theta^0 \\
\csc(90 + \theta)^0 &= \csc[(90 - (-\theta))]^0 = \sec(-\theta)^0 = \sec \theta^0 \\
\sec(90 + \theta)^0 &= \sec[(90 - (-\theta))]^0 = \csc(-\theta)^0 = -\csc \theta^0 \\
\cot(90 + \theta)^0 &= \cot[(90 - (-\theta))]^0 = \tan(-\theta)^0 = -\tan \theta^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(180 - \theta)^0 &= \sin[90 + (90 - \theta)]^0 = \cos(90 - \theta)^0 = \sin \theta^0 \\
\cos(180 - \theta)^0 &= \cos[90 + (90 - \theta)]^0 = -\sin(90 - \theta)^0 = -\cos \theta^0 \\
\tan(180 - \theta)^0 &= \tan[90 + (90 - \theta)]^0 = -\cot(90 - \theta)^0 = -\tan \theta^0 \\
\csc(180 - \theta)^0 &= \csc[90 + (90 - \theta)]^0 = \sec(90 - \theta)^0 = \csc \theta^0 \\
\sec(180 - \theta)^0 &= \sec[90 + (90 - \theta)]^0 = -\csc(90 - \theta)^0 = -\sec \theta^0 \\
\cot(180 - \theta)^0 &= \cot[90 + (90 - \theta)]^0 = -\tan(90 - \theta)^0 = -\cot \theta^0
\end{aligned}$$

7.4.4 Fungsi Trigonometri untuk Sudut $(180 + \theta)^0$ dan $(270 - \theta)^0$

Fungsi trigonometri berikut ini merupakan bentuk sudut yang berelasi di kwadran III, dengan mengubah bentuk $(180 + \theta)^0$ menjadi bentuk $[180 - (-\theta)]^0$ dengan menggunakan sifat yang telah diperoleh dari sub bab 2.4.3, akan diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned}
\sin(180 + \theta)^0 &= -\sin \theta^0 & \csc(180 + \theta)^0 &= -\csc \theta^0 \\
\cos(180 + \theta)^0 &= -\cos \theta^0 & \sec(180 + \theta)^0 &= -\sec \theta^0 \\
\tan(180 + \theta)^0 &= \tan \theta^0 & \cot(180 + \theta)^0 &= \cot \theta^0
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk bentuk $(270 - \theta)^0$ diubah menjadi bentuk $[180 + (90 - \theta)]^0$ sehingga akan diperoleh hubungan yaitu:

$$\begin{aligned}
\sin(270 - \theta)^0 &= -\cos \theta^0 & \csc(270 - \theta)^0 &= -\sec \theta^0 \\
\cos(270 - \theta)^0 &= -\sin \theta^0 & \sec(270 - \theta)^0 &= -\csc \theta^0 \\
\tan(270 - \theta)^0 &= \cot \theta^0 & \cot(270 - \theta)^0 &= \tan \theta^0
\end{aligned}$$

7.4.5 Fungsi Trigonometri untuk Sudut $(270 + \theta)^0$ dan $(360 - \theta)^0$

Bentuk fungsi ini berada pada kwadran ke IV, karena kita sudah memiliki formula pada sub bab 2.4.4 maka dapat digunakan acuan dalam mencari nilai $(270 + \theta)^0$ dengan cara mengubah menjadi bentuk $[270 - (-\theta)]^0$ sehingga akan diperoleh hubungan:

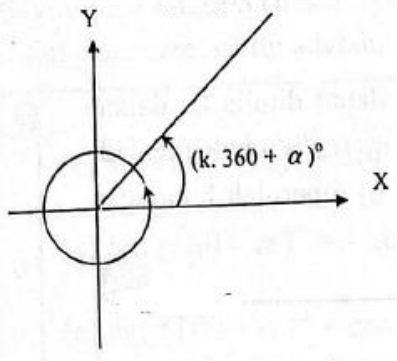
$$\begin{array}{ll} \sin(270 + \theta)^0 = -\cos \theta^0 & \csc(270 + \theta)^0 = -\sec \theta^0 \\ \cos(270 + \theta)^0 = \sin \theta^0 & \sec(270 + \theta)^0 = \csc \theta^0 \\ \tan(270 + \theta)^0 = -\cot \theta^0 & \cot(270 + \theta)^0 = -\tan \theta^0 \end{array}$$

Sedangkan untuk bentuk $(360 - \theta)^0$ dapat diubah menjadi bentuk $[270 + (90 - \theta)]^0$ sehingga akan diperoleh hubungan yaitu:

$$\begin{array}{ll} \sin(360 + \theta)^0 = -\sin \theta^0 & \csc(360 + \theta)^0 = -\csc \theta^0 \\ \cos(360 + \theta)^0 = \cos \theta^0 & \sec(360 + \theta)^0 = \sec \theta^0 \\ \tan(360 + \theta)^0 = -\tan \theta^0 & \cot(360 + \theta)^0 = -\cot \theta^0 \end{array}$$

7.4.6 Fungsi Trigonometri untuk Sudut $(k.360 + \theta)^\circ$

Untuk menentukan fungsi trigonometri yang melebihi sudut 360° misalkan sudut $450^\circ = 1..360^\circ + 90^\circ$ (kwadran I), $860^\circ = 2..360^\circ + 140^\circ$ (kwadran II) dst.



Gambar 7.8 Ilustrasi Sudut Lebih dari 360°

Maka akan diperoleh hubungan yaitu:

$$\sin(k.360 + \theta)^\circ = \sin \theta^\circ$$

$$\csc(k.360 + \theta)^\circ = \csc \theta^\circ$$

$$\cos(k.360 + \theta)^\circ = \cos \theta^\circ$$

$$\sec(k.360 + \theta)^\circ = \sec \theta^\circ$$

$$\tan(k.360 + \theta)^\circ = \tan \theta^\circ$$

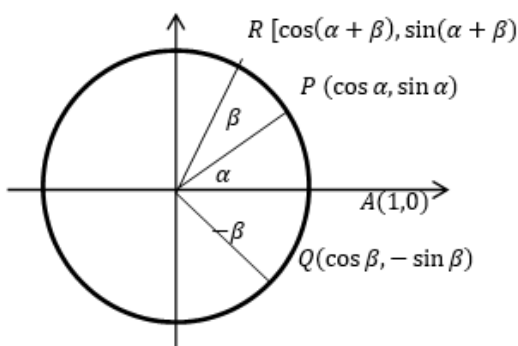
$$\cot(k.360 + \theta)^\circ = \cot \theta^\circ$$

dimana $k \in \text{bil. bulat}$

7.5 Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

7.5.1 Rumus $\cos(\alpha \pm \beta)$

Perhatikan posisi titik-titik A, P, Q, dan R yang terletak pada sumbu kartesius dibawah ini. Pada gambar dibawah ini dapat diketahui bahwa $AR=PQ$.



Karena $AR=PQ$, maka berlaku $(AR)^2 = (PQ)^2$ dengan menggunakan rumus jarak antar titik (x_1, y_1) yaitu:

$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, maka berlaku hubungan berikut:

$$(AR)^2 = (PQ)^2$$

$$(1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + (0 - \sin(\alpha + \beta))^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - (-\sin \beta))^2$$

$$(1 - 2\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2 \beta) = \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta$$

$$+ \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta$$

$$1 - 2\cos(\alpha + \beta) + 1 = 2 - 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$$

$$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 2 - 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$$

$$-2\cos(\alpha + \beta) = -2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$$

Jadi dari rumus diatas dapat diketahui bahwa:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$$

Untuk menentukan rumus $\cos(\alpha - \beta)$ maka perlu kita rubah bentuk menjadi $\cos(\alpha + (-\beta))$ sehingga akan menjadi:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta))$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Jadi,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

7.5.2 Rumus Sin $(\alpha \pm \beta)$

Untuk menentukan rumus penjumlahan $\sin(\alpha + \beta)$ terlebih dahulu diubah menjadi bentuk $\cos[90 - (\alpha + \beta)]^0$ atau $\cos[(90 - \alpha) - \beta]^0$ sehingga didapatkan hubungan:

$\sin(\alpha + \beta) = \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta]$ dan dengan rumus $\cos(\alpha - \beta)$ diperoleh sin:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ - \alpha) \cos \beta + \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{Jadi, } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Sedangkan untuk bentuk $\sin(\alpha - \beta)$ diubah menjadi bentuk $\sin(\alpha + (-\beta))$ sehingga didapatkan:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)]$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{Jadi, } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

7.5.3 Rumus Tan ($\alpha \pm \beta$)

Karena $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ maka berlaku juga

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$$

Akan didapatkan rumus:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

7.6 Rumus Sudut Rangkap dan Pertengahan

7.6.1 Rumus Sudut Rangkap Sin, Cos, Tan

Setelah mengetahui rumus jumlah dan selisih dua sudut, kita dapat mengetahui rumus sudut rangkap dan pertengahan dengan menggunakan aturan rumus jumlah dan selisih dua sudut.

Jika diketahui : $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

Maka berlaku rumus sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

Rumus sudut rangkap untuk cos didapatkan dari penjumlahan dari $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ dengan mengganti β dengan α seperti berikut.

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

Jika diketahui identitas trigonometri

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Maka berlaku:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

Jadi, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$
 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

Untuk sudut rumus rangkap dari tangen juga berlaku demikian

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha)$$

Jadi,
$$\begin{aligned}&= \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 \alpha}\end{aligned}$$

7.6.2 Rumus Sudut Pertengahan Sin, Cos, Tan

Berdasarkan rumus sudut rangkap pada sub bab 2.7.1 maka dapat mencari rumus sudut pertengahan dengan cara mengganti nilai α dengan $2(\frac{1}{2}\alpha)$, sehingga akan berlaku rumus berikut.

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

Untuk mencari sudut pertengahan dari cos maka kita gunakan rumus:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow \cos 2\alpha &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Untuk sudut pertengahan dari tan maka berlaku perbandingan sin dan cos berikut.

$$\begin{aligned}\tan \frac{1}{2}\alpha &= \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \Rightarrow \tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \times \frac{2\cos \frac{1}{2}\alpha}{2\cos \frac{1}{2}\alpha} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{1}{2}\alpha &= \frac{2\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{1 + (\cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 1)}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

atau bisa digunakan bentuk lain dengan mengalikan dengan $\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$, maka $\tan \frac{1}{2} \alpha$ akan menjadi bentuk berikut.

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \Rightarrow \tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow \tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow \tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Jadi, $\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha}$ atau $\tan \frac{1}{2} \alpha = \csc \alpha - \cot \alpha$

Karena $\tan$ adalah perbandingan $\sin$ dan $\cos$, berdasarkan rumus sudut pertengahan $\sin$ dan $\cos$ maka berlaku juga rumus berikut:

$$\tan \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

7.7 Rumus Sudut Lipat dan Rumus Pangkat

7.7.1 Rumus Sudut Lipat

Bentuk sudut rangkap sudah dibahas di sub bab sebelumnya seperti $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, dan $\tan 2\alpha$. Sudut lipat merupakan bentuk sudut yang lebih dari sudut rangkap seperti $\sin 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, dan $\tan 5\alpha$. Dengan acuan menggunakan sudut rangkap bisa didapatkan rumus sudut lipat sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) \\
&= \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha \\
&= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) \\
&= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\
&= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\
&= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha
\end{aligned}$$

Jadi, $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

Dengan cara yang sama, untuk rumus $\cos$ dan $\tan$ maka juga akan berlaku rumus:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

Berlaku juga untuk sudut lipat $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, dan $\tan 4\alpha$ dan seterusnya, sehingga secara umum untuk sudut lipat dapat ditulis sebagai berikut:

Rumus umum sudut lipat sin:

$$\sin n\alpha = \sin \alpha \left\{ (2 \cos \alpha)^{n-1} - \binom{n-2}{1} (2 \cos \alpha)^{n-3} + \binom{n-3}{2} (2 \cos \alpha)^{n-5} - \dots \right\}$$

Rumus umum sudut lipat cos:

$$\cos n\alpha = \frac{1}{2} \left\{ (2 \cos \alpha)^n - \frac{n}{1} (2 \cos \alpha)^{n-2} + \frac{n}{2} \binom{n-3}{1} (2 \cos \alpha)^{n-4} - \frac{n}{3} \binom{n-4}{2} (2 \cos \alpha)^{n-6} + \dots \right\}$$

dimana, $\binom{n}{k}$ merupakan rumus kombinasi $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

7.7.2 Rumus Sudut Pangkat

Dari rumus sudut rangkap dan sudut lipat maka dapat diturunkan rumus sudut pangkat seperti berikut ini:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$\text{Jadi, } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

Sedangkan dari turunan sudut rangkap $\cos$ didapatkan hubungan:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha = \cos 2\alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$\text{Jadi, } \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

Dengan cara yang sama pula dapat mencari sudut dengan pangkat 3, 4, dan seterusnya. Sehingga berlaku rumus umum sudut pangkat sebagai berikut:

Rumus Sudut Pangkat $\sin$ jika pangkat ganjil:

$$\sin^{2n-1} \alpha = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \left\{ \sin(2n-1)\alpha - \binom{2n-1}{1} \sin(2n-3)\alpha + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{n-1} \sin \alpha \right\}$$

Rumus Sudut Pangkat $\sin$ jika pangkat genap:

$$\sin^{2n} \alpha = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2n\alpha - \binom{2n}{1} \cos(2n-2)\alpha + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{n-1} \cos 2\alpha \right\}$$

Rumus Sudut Pangkat cos jika pangkat ganjil:

$$\cos^{2n-1} \alpha = \frac{1}{2^{2n-2}} \left\{ \cos(2n-1)\alpha + \binom{2n-1}{1} \cos(2n-3)\alpha + \dots + \binom{2n-1}{n-1} \cos \alpha \right\}$$

Rumus Sudut Pangkat cos jika pangkat genap:

$$\cos^{2n} \alpha = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1^n}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2n\alpha + \binom{2n}{1} \cos(2n-2)\alpha + \dots + \binom{2n-1}{n-1} \cos 2\alpha \right\}$$

dimana, $\binom{n}{k}$ merupakan rumus kombinasi $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

DAFTAR PUSTAKA

- Beecher, J.A., Penna, J.A. and Bittinger, M.L. (2008) *Algebra and trigonometry*. 3rd ed. New York : Pearson Addison Wesley.
- Krismanto, A. (2008) *Trigonometri, Pembelajaran Trigonometri SMA*. Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika Yogyakarta.
- Kristayulita (2020) *Trigonometri, Jurnal Penelitian Pendidikan Guru Sekolah Dasar*. Mataram: Sanabil.
- Lial, M.L. *et al.* (2017) *Trigonometry*. Eleventh E. Pearson.
- Sullivan, M. (2012) *Algebra & Trigonometry*. Ninth Edit. Pearson Education, USA.
- Supratman (2022) *Trigonometri*. Edureka Media Aksara.
- Zen, F. (2012). *Trigonometri*. Alfabeta Bandung

BAB 8

LOGARITMA

Oleh Hartina Husain

8.1 Definisi Logaritma

Logaritma adalah istilah yang berasal dari kata “logos” yang berarti perbandingan dan “arithmos” yang berarti bilangan. Penemuan logaritma terjadi pada awal abad ke-17 oleh dua tokoh, yaitu John Napier (1550-1617) dan Joost Burgi (1552-1632). Meskipun banyak yang menganggap John Napier sebagai pelopor utama dalam penemuan logaritma, Napier sendiri menghabiskan sekitar dua puluh tahun untuk mengembangkan ide ini. Penemuan logaritma ini kemudian diperluas oleh Henry Briggs, seorang profesor geometri di Oxford (Pratama, 2018).

Logaritma merupakan operasi matematika yang digunakan dalam memahami hubungan antara eksponen dan pangkat suatu bilangan. Selain itu, dapat pula diartikan sebagai kebalikan dari perpangkatan dengan mencari pangkat dari suatu bilangan pokok sehingga hasilnya sesuai dengan yang diketahui. Definisi dari logaritma dapat dituliskan sebagai berikut (Dicky Susanto dkk, 2021):

Misalkan a merupakan bilangan positif dengan $0 < a < 1$ atau $a > 1, b > 0$,

$${}^a\log b = c \text{ jika dan hanya jika } b = a^c$$

Dimana:

a adalah basis logaritma atau bilangan pokok, b adalah numerus, dan c adalah hasil logaritma.

Untuk meningkatkan pemahaman mengenai definisi logaritma, berikut ini beberapa contoh terkait konsep tersebut.

Contoh 8.1 :

1. Nyatakan bentuk perpangkatan $6^2 = 36$ menjadi logaritma

Jawab :

Berdasarkan definisi logaritma, pada perpangkatan $6^2 = 36$ diperoleh nilai $a = 6$, $b = 36$, dan $c = 2$. Dengan demikian, dapat dituliskan dalam bentuk ${}^a\log b = c$ yaitu ${}^2\log 36 = 6$.

2. Nyatakan bentuk logaritma ${}^5\log \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ menjadi perpangkatan

Jawab:

Dari bentuk logaritma ${}^5\log \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, diperoleh nilai $a = 5$, $b = \sqrt{5}$, dan $c = \frac{1}{2}$. Dengan demikian, bentuk perpangkatan dapat dituliskan menjadi $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

3. Tentukan nilai logaritma dari ${}^2\log 32$

Jawab:

$${}^2\log 32 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 32 .$$

Contoh diatas menunjukkan bahwa antara eksponen dan logaritma saling berkaitan. Hal ini membantu dalam menjawab pertanyaan “pangkat berapa suatu bilangan harus dipangkatkan agar hasilnya menjadi suatu bilangan tertentu ?”

Sementara itu, suatu logaritma yang memiliki basis 10 dikenal juga sebagai logaritma umum . Penulisan bentuk ini juga dapat dilakukan dengan menghilangkan basis logaritmanya. Definisi logaritma umum dapat dituliskan sebagai berikut :

$$^{10}\log a = \log a$$

Contoh 8.2:

Hitunglah nilai dari $\log 100$?

Jawab :

Adapun $\log 100$ artinya memiliki basis 10 dan numerus 100, dimana hasilnya $\log 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$.

8.2 Sifat-Sifat Logaritma

8.2.1 Sifat 1

Diberikan a dan n bilangan real dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, berlaku:

➤ $^a\log a = 1$

➤ $^a\log 1 = 0$

➤ $^a\log a^n = n$

Contoh 8.3:

1. ${}^a\log a = p \Leftrightarrow a^p = a$ sehingga $p = 1$ atau ${}^a\log a = 1$
2. ${}^a\log 1 = q \Leftrightarrow a^q = 1$ sehingga $q = 0$ atau ${}^a\log 1 = 0$
3. ${}^a\log a^n = r \Leftrightarrow a^r = a^n$ sehingga $r = n$ atau ${}^a\log a^n = n$
(terbukti)

8.2.2 Sifat 2

Diberikan a, p , dan q bilangan real dengan $a > 0$ dan $a \neq 1, p > 0$ dan $q > 0$, berlaku:

$${}^a\log (p \times q) = {}^a\log p + {}^a\log q$$

Bukti :

$${}^a\log p = x \Leftrightarrow p = a^x$$

$${}^a\log q = y \Leftrightarrow q = a^y$$

Kemudian mengalikan nilai dari p dan q , diperoleh:

$$p \times q = a^x \times a^y$$

$$p \times q = a^{x+y}$$

$${}^a\log (p \times q) = x + y \text{ (Gunakan definisi logaritma)}$$

Substitusi kembali nilai x dan y

$${}^a\log (p \times q) = {}^a\log p + {}^a\log q \text{ (terbukti)}$$

8.2.3 Sifat 3

Diberikan a, p , dan q bilangan real dengan $a > 0$ dan $a \neq 1, p > 0$ dan $q > 0$, berlaku:

$${}_a\log\left(\frac{p}{q}\right) = {}_a\log p - {}_a\log q$$

Bukti :

$${}_a\log p = x \Leftrightarrow p = a^x$$

$${}_a\log q = y \Leftrightarrow q = a^y$$

Kemudian membagi antara nilai dari p dan q , diperoleh:

$$\frac{p}{q} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$\frac{p}{q} = a^{x-y}$$

$${}_a\log\left(\frac{p}{q}\right) = x - y \text{ (Gunakan definisi logaritma)}$$

Substitusi kembali nilai x dan y

$${}_a\log\left(\frac{p}{q}\right) = {}_a\log p - {}_a\log q \text{ (terbukti)}$$

8.2.4 Sifat 4

Diberikan a, n , dan p bilangan real dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, berlaku:

$$\overbrace{{}_a\log p^n}^{n \text{ faktor}} = n {}_a\log p$$

Bukti :

$${}_a\log p^n = {}_a\log (p \times p \times p \times \cdots \times p)$$

$${}_a\log p^n = {}_a\log p + {}_a\log p + \cdots + {}_a\log p \text{ (sebanyak } n \text{ faktor)}$$

$${}_a\log p^n = n {}_a\log p \text{ (terbukti)}$$

8.2.5 Sifat 5

Diberikan a, m, n , dan p bilangan real dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, berlaku:

$${}_a^m\log p^n = \frac{n}{m} {}_a\log p$$

Bukti :

$${}_a\log p = x \Leftrightarrow a^x = p$$

$${}_a^m\log p^n = y \Leftrightarrow a^{m \cdot y} = p^n$$

Dari perpangkatan di atas diperoleh:

$$p^n = a^{m \cdot y}$$

$$(a^x)^n = a^{m \cdot y} \text{ (Substitusi nilai } p)$$

$$a^{xn} = a^{my}$$

$$xn = my$$

$$y = \frac{n}{m}x$$

Kemudian substitusikan kembali nilai y dan x

$${}_a^m\log p^n = \frac{n}{m} {}_a\log p \text{ (terbukti)}$$

8.2.6 Sifat 6

Diberikan a, r , dan p bilangan real dengan $a, r > 0$ dan $a, r \neq 1$, berlaku:

$${}_a\log p = \frac{{}_r\log p}{{}_r\log a} = \frac{1}{{}_p\log a}$$

Bukti :

$${}_a\log p = x \Leftrightarrow p = a^x$$

Ambil sembarang r bilangan real dan $r \neq 1$ sedemikian sehingga

$${}_r\log p = {}_r\log a^x$$

$${}_r\log p = x \quad (\text{Sifat 4})$$

$$x = \frac{{}_r\log p}{{}_r\log a} \quad (\text{Terbukti})$$

Jika nilai $r = p$, maka :

$$x = \frac{{}_p\log p}{{}_p\log a} = \frac{1}{{}_p\log a}$$

8.2.7 Sifat 7

Diberikan a, p , dan q bilangan real dengan $a, p, q > 0$, berlaku :

$${}_a\log p \times {}_p\log q = {}_a\log q$$

Bukti :

$${}_p\log q = y \Leftrightarrow q = p^y$$

Dari bentuk perpangkatan di atas diperoleh:

$${}_a\log p \times {}_p\log q = {}_a\log p \times {}_p\log p^y$$

$${}_a\log p \times {}_p\log q = {}_a\log p \times y {}_p\log p$$

$${}^a\log p \times {}^p\log q = y {}^a\log p \times {}^p\log p$$

$${}^a\log p \times {}^p\log q = y {}^a\log p$$

$${}^a\log p \times {}^p\log q = {}^a\log p^y \text{ (substitusi nilai } q = p^y \text{)}$$

$${}^a\log p \times {}^p\log q = {}^a\log q \text{ (Terbukti)}$$

Contoh 8.4 :

Sederhanakanlah bentuk logaritma menggunakan sifat-sifat logaritma berikut :

- ${}^3\log 81$
- Tentukan nilai x jika diketahui ${}^x\log 64 = 3$
- $4 {}^5\log 5 - {}^5\log 25$
- ${}^2\log 6 + {}^2\log 4 - {}^2\log 3$
- ${}^3\log 27 - {}^2\log 25 \times {}^5\log \frac{1}{4} + {}^5\log 625$

Jawaban

- ${}^3\log 81 = {}^3\log 3^4 = 4$
- ${}^x\log 64 = 3$
 ${}^x\log 2^6 = 3$
 $6 {}^x\log 2 = 3$
 ${}^x\log 2 = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{{}^2\log x} = \frac{1}{2} \Rightarrow {}^2\log x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$
- $4 {}^5\log 5 - {}^5\log 25 = {}^5\log 5^4 - {}^5\log 25$

$$= {}^5\log 5^4 - {}^5\log 5^2$$

$$= {}^5\log \left(\frac{5^4}{5^2} \right)$$

$$= {}^5\log 5^2 = 2$$

$$4. \quad {}^2\log 6 + {}^2\log 4 - {}^2\log 3 = {}^2\log \left(\frac{6 \times 4}{3} \right)$$

$$= {}^2\log 8$$

$$= {}^2\log 2^3 = 3$$

$$5. \quad {}^3\log 27 - {}^2\log 25 \times {}^5\log \frac{1}{4} + {}^5\log 625$$

$$= {}^3\log 3^3 - {}^2\log 5^2 \times {}^5\log \frac{1}{2^2} + {}^5\log 5^4$$

$$= 3 - 2 {}^2\log 5 \times {}^5\log 2^{-2} + 4$$

$$= 7 - 2 {}^2\log 2^{-2}$$

$$= 7 - 2(-2) {}^2\log 2$$

$$= 7 + 4 = 11$$

Contoh 8.5 :

Jika diketahui ${}^2\log 3 = a$ dan ${}^3\log 5 = b$, nyatakanlah bentuk berikut dalam a dan b .

$$1. \quad {}^4\log 75$$

$$2. \quad {}^{25}\log 36$$

Jawab :

$$1. \quad {}^4\log 75 = {}^{2^2}\log 75$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} {}^2\log 75 \\
&= \frac{1}{2} {}^2\log 3 \times 25 \\
&= \frac{1}{2} ({}^2\log 3 \times {}^2\log 5^2) \\
&= \frac{1}{2} \times 2 ({}^2\log 3 \times {}^2\log 5) \\
&= {}^2\log 3 \times {}^2\log 5 \\
&= {}^2\log 3 \times \frac{{}^3\log 5}{{}^3\log 2} \\
&= {}^4\log 3 \times {}^4\log 3 \times {}^3\log 5 \\
&= {}^2\log^2 3 \times {}^3\log 5 \\
&= a^2 + b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad {}^{25}\log 36 &= {}^{5^2}\log 9 \times 4 \\
&= \frac{1}{2} ({}^5\log 9 \times 4) \\
&= \frac{1}{2} ({}^5\log 9 + {}^5\log 4) \\
&= \frac{1}{2} ({}^5\log 3^2 + {}^5\log 2^2) \\
&= \frac{1}{2} (2 {}^5\log 3 + 2 {}^5\log 2) \\
&= \frac{1}{2} \times 2 ({}^5\log 3 + {}^5\log 2) \\
&= {}^5\log 3 + {}^5\log 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{{}^3\log 5} + \frac{{}^3\log 2}{{}^3\log 5} \\
&= \frac{1}{{}^3\log 5} + \frac{1}{{}^2\log 3 \times {}^3\log 5} \\
&= \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \\
&= \frac{a+1}{ab}
\end{aligned}$$

8.3 Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma dapat didefinisikan sebagai berikut (Sutisna, 2020):

Fungsi logaritma dengan basis a ($a > 0$ dan $a \neq 1$) adalah fungsi yang mempunyai bentuk umum: $y = f(x) = {}^a\log x$

Dimana fungsi $y = {}^a\log x$ merupakan fungsi invers dari fungsi eksponen $y = a^x$.

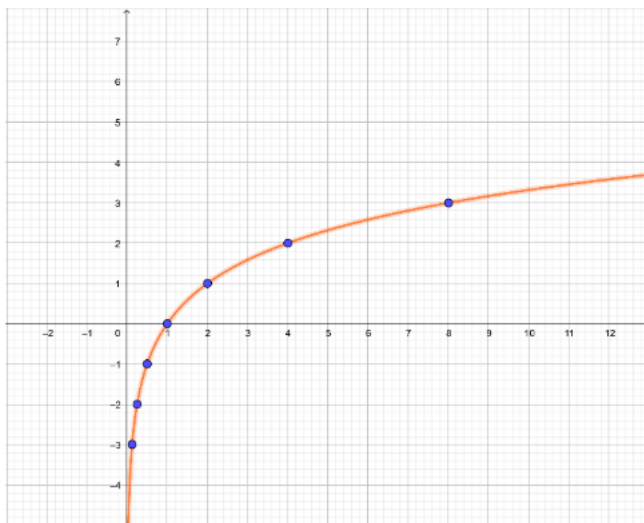
8.3.1 Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $a > 1$

Salah satu kasus dengan basis $a > 1$ yaitu $y = {}^2\log x$. Adapun langkah-langkah dalam membuat fungsi tersebut adalah (Raharjo *et al.*, 2020):

1. Menentukan beberapa titik yang dilalui oleh $y = {}^2\log x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3

2. Menghubungkan titik-titik yang telah diperoleh pada langkah 1.



Sumber : Raharjo *et al.*, 2020

Gambar 8.1 Grafik Fungsi $y = {}^2\log x$

Sifat-sifat yang dimiliki oleh grafik fungsi $y = {}^2\log x$ adalah :

- Terdefinisi pada semua nilai x positif
- Apabila x mendekati nol maka y semakin kecil dan memiliki tanda negatif
- Grafik memotong pada sumbu x pada titik $(1,0)$
- Apabila nilai x semakin membesar melebihi 1 maka y juga semakin besar dan memiliki tanda positif

8.3.2 Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $0 < a < 1$

Salah satu kasus dengan basis $0 < a < 1$ yaitu

$y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$. Adapun sifat-langkah-langkah dalam membuat fungsi tersebut adalah (Raharjo *et al.*, 2020):

1. Menentukan beberapa titik yang dilalui oleh $y = \frac{1}{2}\log x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	2	2	0	-1	-2	-3

2. Menghubungkan titik-titik yang telah diperoleh pada langkah 1.



Sumber : Raharjo *et al.*, 2020

Gambar 8.2 Grafik Fungsi $y = \frac{1}{2}\log x$

Sifat-sifat yang dimiliki oleh grafik fungsi $y = \frac{1}{2}\log x$ adalah :

- a. Terdefinisi pada semua nilai x positif
- b. Apabila x mendekati nol maka y semakin besar dan memiliki tanda positif

- c. Grafik memotong pada sumbu x pada titik $(1,0)$
- d. Apabila nilai x semakin membesar melebihi 1 maka y semakin kecil dan memiliki tanda negatif.

DAFTAR PUSTAKA

- Dicky Susanto, Theja Kurniawan, Savitri K. Sihombing, Eunice Salim, Marianna, Magdalena Radjawane, Ummy Salmah, A.K.W. (2021) *Buku Siswa Matematika SMA/MA Kelas X*.
- Pratama, M.Y. (2018) 'Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri'.
- Raharjo, D. *et al.* (2020) *Unit Pembelajaran 1 : Fungsi Eksponen dan Logaritma*.
- Sutisna, E. (2020) 'Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma Matematika Peminatan Kelas X', *Modul Pembelajaran Matematika SMA Umum Kelas X*, pp. 1–51.

BAB 9

PROGRAM LINEAR

Oleh Aprizal Resky

9.1 Pendahuluan

Program linear adalah metode matematis yang digunakan untuk mencari solusi optimal dari suatu permasalahan yang memiliki fungsi tujuan yang ingin dioptimalkan, dengan mempertimbangkan sejumlah batasan atau kendala yang ada. Dengan mempelajari program linear kita dapat mengembangkan keterampilan pemecahan masalah yang bersifat analitis dan sistematis, dimana situasi dunia nyata dapat direpresentasikan dalam bentuk matematika.

Secara umum, program linear melibatkan pemaksimalan dan meminimalan suatu fungsi linear yang dibiaya kita kenal sebagai fungsi tujuan, yang merupakan kombinasi linear variabel keputusan. Variabel keputusan ini merupakan variabel-variabel yang dinilai dapat diubah untuk memperoleh solusi yang optimal. Selain itu, dalam program linear terdapat sejumlah kendala dan batasan yang harus dipatuhi dalam mencari solusi, dinyatakan sebagai fungsi-fungsi linear dari variabel keputusan.

Program linear memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari, seperti pengambilan keputusan dalam bisnis, perencanaan produksi dan manajemen sumber daya. Dengan memahami konsep program linear, kita dapat merepresentasikan masalah dunia nyata yang dapat dipecahkan dan membuat pembelajaran menjadi lebih menarik dan bermanfaat.

9.2 Persamaan Linear

Persamaan linear merupakan suatu bentuk persamaan matematika yang melibatkan variabel dengan pangkat eksponen tertinggi yaitu 1 (derajat satu). Artinya, variabel x tidak memiliki eksponen lain selain 1. Adapun bentuk umum persamaan linear adalah sebagai berikut:

$$ax + b = 0,$$

dimana,

$$x = \text{variabel}$$

$$a = \text{konstanta dari variabel, } a \neq 0$$

$$b = \text{konstanta.}$$

Persamaan linear umumnya memiliki solusi tunggal untuk variabel x . Solusi ini dapat diperoleh dengan mengisolasi variabel x di satu sisi persamaan. Sehingga, solusi dari persamaan linear tersebut adalah $x = -\frac{b}{a}$.

Contoh persamaan linear:

- 1) $3x + 4 = 0$, ini merupakan persamaan linear dengan variabel x . Solusinya adalah $x = -\frac{4}{3}$
- 2) $2y - 5 = 0$, ini merupakan persamaan linear dengan variabel y . Solusinya adalah $y = \frac{5}{2}$
- 3) $8 - 2a = 0$, ini merupakan persamaan linear dengan variabel a . Solusinya adalah $a = 4$.

9.2.1 Persamaan Linear Dua Variabel

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan matematika yang melibatkan dua variabel dengan pangkat eksponen tertinggi pada kedua variabel adalah 1 (derajat pertama). Adapun bentuk umum dari persamaan linear dua variabel adalah sebagai berikut:

$$ax + by + c = 0,$$

dimana a , b , dan c adalah konstanta dan x dan y adalah variabel.

Persamaan ini dapat diubah ke dalam bentuk *slope-intercept* ($y = mx + b$) dengan memisahkan variabel y sebagai berikut:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

dimana dalam bentuk *slope-intercept*, m adalah kemiringan (*slope*) dan $-\frac{c}{b}$ adalah intersep y pada sumbu y .

Contoh persamaan linear dua variabel:

- 1) $2x - 3y - 6 = 0$, adapun bentuk *slopt-intercept* dari persamaan ini adalah $y = \frac{2}{3}x - 2$
- 2) $4x + 2y - 8 = 0$, adapun bentuk *slopt-intercept* dari persamaan ini adalah $y = -2x + 4$
- 3) $3x + 5y - 15 = 0$, adapun bentuk *slopt-intercept* dari persamaan ini adalah $y = -\frac{3}{5}x + 3$.

Persamaan-persamaan ini merepresentasikan garis lurus pada bidang kartesian, dan solusi dari sistem persamaan linear dua variabel adalah pasangan nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut pada saat yang bersamaan.

9.2.2 Persamaan Linear Tiga Variabel

Persamaan linear tiga variabel adalah persamaan matematika yang melibatkan tiga variabel dengan pangkat eksponen tertinggi pada ketiga variabel adalah 1 (derajat pertama). Adapun bentuk umum dari persamaan linear tiga variabel adalah sebagai berikut:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

dimana a , b , c dan d adalah konstanta dan x , y dan z adalah variabel.

Sama halnya dengan persamaan linear dua variabel, persamaan ini dapat diubah menjadi bentuk yang lebih terperinci, tetapi umumnya lebih sulit untuk divisualisasikan ke dalam bentuk grafis karena melibatkan tiga dimensi.

Contoh persamaan linear tiga variabel:

1) $2x + 3y - z = 7$

2) $4x - 2y + 6z = 12$

3) $x + 2y + 3z = 8.$

9.3 Pertidaksamaan Linear

Pertidaksamaan linear adalah persamaan matematika yang melibatkan variabel dengan pangkat eksponen tertinggi satu dan tidak melibatkan variabel dalam akar pangkat atau di dalam pecahan dengan pangkat eksponen yang lebih tinggi.

Adapun bentuk umum pertidaksamaan linear adalah:

$$ax + b < c,$$

$$ax + b > c,$$

$$ax + b \leq c,$$

$$ax + b \geq c,$$

dimana a , b , dan c adalah konstanta dan x adalah variabel.

Pertidaksamaan linear seringkali kita jumpai dalam berbagai konteks, terutama dalam masalah matematika terapan dan ilmu pengetahuan ekonomi. Misalnya, pertidaksamaan bisa mewakili batasan produksi di suatu pabrik dimana x dan y mewakili jumlah unit dari dua produk yang berbeda.

Contoh pertidaksamaan linear:

- 1) $2x + 3 > 7$, solusi dari persamaan ini adalah $x = 2$ yang berarti semua nilai x yang lebih besar dari 2 adalah solusi
- 2) $4y - 5x \leq 10$, solusi dari persamaan ini adalah $y \leq \frac{5}{4}x + 2$ yang berarti solusi ini menciptakan sebuah area di bidang yang terbatas oleh garis $y = \frac{5}{4}x + 2$
- 3) $3z \geq 2z - 5$, solusi dari persamaan ini adalah $z \geq -5$ yang berarti semua nilai z yang lebih besar atau sama dengan -5 adalah solusi.

9.4 Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

Sistem persamaan linear adalah kumpulan dua atau lebih persamaan linear yang melibatkan satu set variabel yang sama. Sistem persamaan linear bisa diartikan juga sebagai kumpulan dua atau lebih persamaan yang dapat membentuk terhingga banyak solusi, tak hingga banyak solusi atau tidak memiliki solusi.

Adapun bentuk umum dari sistem persamaan dengan dua variabel:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

sedangkan bentuk umum sistem persamaan linear tiga variabel:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Contoh sistem persamaan linear adalah:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$$

solusi dari sistem persamaan ini adalah nilai-nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut secara bersamaan, yaitu $x = \frac{11}{4}$ dan $y = \frac{1}{2}$.

$$2) \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 4x - y + 2z = 8 \\ x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

solusi dari sistem persamaan ini adalah nilai-nilai x , y dan z yang memenuhi tiga persamaan tersebut secara bersamaan. Solusi ini bisa berupa titik tunggal di ruang tiga dimensi atau bahkan bisa tidak ada solusi atau memiliki banyak solusi tergantung pada hubungan antar persamaan tersebut.

Sistem Pertidaksamaan Linear adalah kumpulan dua atau lebih pertidaksamaan linear dimana semua suku memiliki derajat pertama (eksponen terhadap variabel ada satu).

Adapun bentuk umum dari pertidaksamaan linear adalah sebagai berikut:

$$ax + by + cz + \dots \leq d$$

dimana $a, b, c, \dots$ adalah koefisien-koefisien dari variabel $x, y, z, \dots$ dan d adalah konstanta yang merupakan batas atas (dalam kasus pertidaksamaan kurang dari atau sama dengan) atau batas bawah (dalam kasus pertidaksamaan lebih dari atau sama dengan) yang harus dipenuhi.

9.5 Program Linear dan Model Matematika

Program linear adalah metode untuk menentukan nilai optimum dari suatu persoalan linear. Nilai optimum (maksimal atau minimum) dapat diperoleh dari nilai suatu himpunan penyelesaian persoalan linear.

9.5.1 Model Matematika

Model matematika adalah representasi matematika dari suatu situasi, fenomena, atau sistem dunia nyata. Model ini digunakan untuk memahami, menganalisis, memprediksi dan menerjemahkan persoalan sehari-hari kedalam bentuk matematika, sehingga persoalan dapat diselesaikan secara sistematis.

Masalah-masalah yang akan diselesaikan dengan program linear, terlebih dahulu dirumuskan menjadi model matematika.

Contoh :

- 1) Seorang siswa kelas X dapat memilih jurusan IPA, jika memenuhi syarat berikut :
 - a) Nilai Biologi lebih dari 7
 - b) Nilai Kimia minimal 7

- c) Jumlah nilai Biologi dan Kimia tidak boleh kurang dari 14

Buatlah model matematika dari persoalan diatas

Jawaban :

Misalkan : Biologi= x dan Kimia= y

Maka model matematika dijadikan sebagai syarat atau kendala, diperoleh :

- a) $x > 7$
- b) $y \geq 7$
- c) $x + y \geq 14$ dengan $x, y \in R$

- 2) Developer sebuah perumahan akan membangun rumah di atas tanah seluas $10.000 m^2$. Rumah yang akan dibangun terdiri dari dua tipe yaitu A dan B. Luas tipe A $120 m^2$ dan luas tipe B $80 m^2$. Sebuah rumah tipe A dikerjakan oleh 7 orang dan sebuah rumah tipe B dikerjakan oleh 5 orang, sedangkan tenaga kerja yang tersedia 500 orang. Keuntungan dari penjualan adalah Rp1.000.000 untuk satu unit A dan Rp 750.000 untuk satu unit B.

Buat model matematika dan tulis labanya dalam x dan y !

Jawaban :

Misalkan : Rumah Tipe A= x dan Rumah Tipe B= y

Fungsi Kendala :

$$120x + 80y \leq 10000$$

$$7x + 5y \leq 500$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Fungsi Tujuan :

$$f(x, y) = 1.000.000x + 750.000y$$

9.5.2 Nilai Optimum Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan adalah ekspresi matematika linear yang digunakan untuk meminimalkan atau memaksimalkan suatu kriteria tertentu dalam konteks batasan-batasan tertentu. Fungsi tujuan dalam program linear dapat berbentuk:

1) Fungsi Tujuan untuk Optimisasi Maksimasi

Jika ingin memaksimalkan suatu kriteria seperti keuntungan, pendapatan, atau efisiensi. Contoh umumnya adalah :

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

dimana Z adalah nilai yang ingin dimaksimalkan, c_i adalah koefisien kontribusi dari variabel-variabel x_i yang berhubungan dengan kriteria maksimasi tertentu.

2) Fungsi Tujuan untuk Optimisasi Minimasi

Jika ingin meminimalkan suatu kriteria, seperti biaya, waktu, atau kerugian. Contoh umumnya adalah

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

dimana Z adalah nilai yang ingin diminimalkan, c_i adalah koefisien kontribusi dari variabel-variabel x_i yang berhubungan dengan kriteria minimasi tertentu.

9.5.3 Menyelesaikan Permasalahan Program Linear

Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan soal program linear adalah sebagai berikut:

- a) Identifikasi Variabel Keputusan : Tentukan variabel-variabel yang akan digunakan dalam masalah Anda. Variabel ini mewakili keputusan yang akan diambil dan dapat memiliki nilai numerik yang dapat dihitung.
- b) Buat Fungsi Tujuan : Tentukan apakah Anda ingin memaksimalkan atau meminimalkan suatu kriteria tertentu. Buatlah fungsi tujuan yang menggambarkan hubungan antara variabel-variabel keputusan dan kriteria ini dalam bentuk ekspresi matematika linear.
- c) Tentukan Kendala : Identifikasi kendala-kendala yang harus dipatuhi dalam masalah Anda. Kendala-kendala ini menggambarkan batasan-batasan yang membatasi nilai-nilai variabel keputusan. Ekspresikan kendala-kendala ini dalam bentuk persamaan atau ketidaksetaraan linear.
- d) Gambar daerah himpunan penyelesaian pada diagram cartesius
- e) Menentukan titik-titik sudut daerah himpunan penyelesaian kemudian menentukan nilai optimumnya.

Contoh :

Seorang penjual baju olahraga merencanakan akan membeli tidak lebih dari 100 set baju wanita dan pria untuk di jual. Harga beli set baju pria Rp 20.000 dan set baju wanita Rp.30.000. Modal yang tersedia Rp.2.400.000. Keuntungan untuk baju set pria Rp. 4.000 dan baju set wanita Rp. 5.000.

- a) Buatlah model matematikanya!
- b) Gambar daerah himpunan penyelesaiannya!
- c) Berapa set baju yang harus dibeli dan dijual agar diperoleh keuntungan maksimum?
- d) Berapa keuntungan maksimum yang diperoleh?

Jawab

- a) Model Matematika

Misal: Set baju pria= x dan set baju wanita= y

Fungsi Tujuan:

$$Z = 4000x + 5000y$$

Fungsi Kendala:

$$x + y \leq 100 \quad (i)$$

$$20.000x + 300.000y \leq 2.400.000 \text{ (dibagi 10.000)}$$

$$2x + 3y \leq 240 \quad (ii)$$

$$x \geq 0 \quad (iii)$$

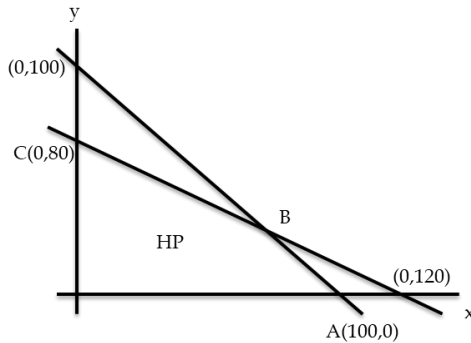
$$y \geq 0 \quad (iv)$$

- b) Gambar daerah himpunan penyelesaiannya

Menggambar garis $x + y = 100$, diperoleh titik bantu dari persamaan ini adalah $(0,100)$ dan $(100,0)$ dan selanjutnya akan digambar di bidang Cartesius.

Menggambar garis $2x + 3y = 240$, diperoleh titik bantu dari persamaan ini adalah $(0,80)$ dan $(120,0)$, selanjutnya akan digambarkan di bidang Cartesius.

Maka akan diperoleh gambar daerah himpunan penyelesaiannya adalah sebagai berikut:



- c) Berapa set baju yang harus dibeli dan dijual agar diperoleh keuntungan maksimum?

Berdasarkan gambar yang telah diperoleh sebelumnya, maka titik-titik sudutnya adalah titik $O(0,0)$, $A(100,0)$, dan $C(0,80)$ yang diperoleh dari titik potong garis $x + y = 100$ dengan garis $2x + 3y = 240$, kemudian titik B dapat diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi dan substitusi.

$$\begin{array}{r|l|l}
 x + y = 100 & \times 3 & 3x + 3y = 300 \\
 2x + 3y = 240 & \times 1 & 2x + 3y = 240 \\
 \hline
 & & x = 60
 \end{array}$$

Substitusi nilai $x = 60$ ke persamaan $x + y = 100$ sehingga diperoleh $60 + y = 100$, maka nilai $y = 100 - 60 = 40$, maka diperoleh titik B adalah $(60,40)$. Lakukan uji titik sudut terhadap Fungsi Tujuan

$Z = 4.000x + 5.000y$ untuk memperoleh nilai maksimum, maka:

Titik O(0,0) $Z = 4.000(0) + 5.000(0) = 0$

Titik A(100,0) $Z = 4.000(100) + 5.000(0) = 400.000$

Titik B(60,40) $Z = 4.000(60) + 5.000(40) = 440.000$

Titik C(0,80) $Z = 4.000(0) + 5.000(80) = 400.000$

Setelah dilakukan uji titik sudut, maka diperoleh nilai maksimum terhadap Fungsi Tujuan adalah Rp. 440.000 yang diperoleh dari nilai $x = 60$ dan $y = 40$. Jadi, set baju yang dibeli dan dijual agar diperoleh keuntungan maksimum baju set pria sebanyak 60 dan baju set wanita sebanyak 40.

9.6 Latihan Soal

1. Sebuah perusahaan memproduksi dua jenis produk: A dan B. Produk A memberikan laba 5 unit mata uang per unit dan Produk B memberikan laba 8 unit mata uang per unit. Perusahaan memiliki dua mesin yang dapat digunakan untuk produksi, tetapi mesin A memerlukan 2 jam untuk menghasilkan satu unit Produk A, sedangkan mesin B memerlukan 1 jam untuk menghasilkan satu unit Produk B. Perusahaan memiliki total 100 jam kerja per minggu untuk kedua mesin. Berapa banyak unit dari setiap produk yang harus diproduksi untuk memaksimalkan laba perusahaan?
2. Seorang petani memiliki lahan seluas 40 hektar yang dapat digunakan untuk menanam dua jenis tanaman: gandum dan jagung. Setiap hektar lahan yang digunakan untuk menanam gandum menghasilkan 8 ton gandum, sedangkan setiap hektar lahan yang digunakan untuk menanam jagung menghasilkan 12 ton jagung. Petani hanya memiliki 400 ton pupuk dan 300 jam kerja untuk digunakan. Biaya gandum adalah \$200 per ton, dan biaya jagung adalah \$150 per ton. Berapa hektar lahan yang harus digunakan untuk setiap tanaman agar petani memaksimalkan keuntungannya?

DAFTAR PUSTAKA

Irfan, Y. 2020. *Program Linear*. Jakarta: Direktorat SMA, Direktorat PAUD, DIKDAS, dan DIKMEN.

BAB 10

LIMIT FUNGSI, DIFERENSIAL & INTEGRAL

Oleh Muhammad Rifki Nisardi

10.1 Limit Fungsi

Limit dari suatu fungsi $f(x)$ untuk x mendekati suatu nilai a merupakan suatu nilai yang paling dekat dengan fungsi $f(x)$ ketika x mendekati nilai a , baik dari kiri maupun dari kanan atau dengan kata lain $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ terdefinisi jika dan hanya jika

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Sehingga, jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ maka artinya saat x mendekati nilai a , $f(x)$ akan mendekati nilai L (Varberg, Purcell and Rigdon, 2007).

10.1.1 Aturan Dasar Pengerjaan Limit

Berikut diberikan beberapa aturan dasar dalam mengerjakan soal limit fungsi yang dapat dilihat sebagai berikut (Nugroho and Gunarto, 2013)

1. Jika $f(x) = k$ maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$, untuk k konstan dan $a \in \mathbb{R}$.
2. Jika $f(x) = x$ maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

4. Jika k merupakan suatu konstanta maka

$$\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

6.
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

7.
$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\}^n$$

10.1.2 Limit Fungsi Aljabar

Untuk menyelesaikan soal-soal limit fungsi aljabar, cara umum yang dapat digunakan untuk menyelesaikan soal tersebut adalah dengan mensubstitusikan $x = a$ ke $f(x)$ sehingga diperoleh $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Namun jika $f(a) = \frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ maka $f(x)$ perlu diuraikan terlebih dahulu. Adapun cara menguraikan fungsi $f(x)$ dapat dilihat pada uraian sebagai berikut

Tabel 10.1 Cara menguraikan Fungsi $f(x)$

Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ menghasilkan $\frac{0}{0}$	Faktorisasi Contoh : Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \dots$ Penyelesaian : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+5)}{(x-3)} = \frac{1+5}{1-3} = -3$
	Kali Sekawan, jika $f(x)$ mengandung bentuk akar ($\sqrt{\quad}$)

	Contoh : Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{2x-4} = \dots$ Penyelesaian : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{2x-4} \times \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{(2x-4)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{2x}+2)}$ $= \frac{1}{(\sqrt{2(2)}+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$
	Dalil L'Hospital (menggunakan turunan) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Contoh : Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3} = \dots$ Penyelesaian : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{2x-4} = \frac{6}{-2} = -3$
Untuk $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ yang hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$	Membagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi. Gunakan bentuk berikut $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + \dots + a}{b_1x^n + b_2x^{n-1} + \dots + b} = \begin{cases} \infty & \text{untuk } m > n \\ \frac{a_1}{b_1} & \text{untuk } m = n \\ 0 & \text{untuk } m < n \end{cases}$ Contoh :

	Nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 20}{4x^2 + 2x - 15} = \dots$ Penyelesaian : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 20}{4x^2 + 2x - 15} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{20}{x^2} \right)}{x^2 \left(4 + \frac{2}{x} - \frac{15}{x^2} \right)}$ $= \frac{(3 - 0 + 0)}{(4 + 0 - 0)} = \frac{3}{4}$
Untuk $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ yang hasilnya $\infty - \infty$	Penyelesaian dapat dilakukan dengan kali sekawan jika $f(x)$ mengandung bentuk akar. Kemudian membagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi. Gunakan bentuk berikut $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} = \begin{cases} \infty & \text{untuk } a > p \\ \frac{b - q}{2\sqrt{a}} & \text{untuk } a = p \\ -\infty & \text{untuk } a < p \end{cases}$ Contoh : Nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 5x + 5} = \dots$ Penyelesaian : $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 5x + 5} - \sqrt{4x^2 + x - 3} = \frac{5 - 1}{2\sqrt{4}} = 1$

10.1.3 Limit Fungsi Trigonometri

Penyelesaian limit fungsi trigonometri secara umum hampir sama dengan limit fungsi aljabar. Substitusikan $x = a$ ke $f(x)$ sehingga diperoleh $f(a)$. Namun jika hasil $f(a) = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty},$ atau $\infty - \infty$ maka $f(x)$ perlu diuraikan terlebih dahulu.

Adapun cara menguraikan fungsi $f(x)$ dapat dilihat pada uraian sebagai berikut

- Jika soal limit fungsi trigonometri bentuk dasar, dapat menggunakan rumus (Perhatikan Polanya) :

Tabel 10.2 Bentuk dasar Fungsi Trigonometri

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\tan nx} = \frac{m}{n}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{nx} = \frac{m}{n}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\tan nx} = \frac{m}{n}$

- Untuk bentuk $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ yang menghasilkan $\frac{0}{0}$, jika $f(x)$ dan $g(x)$ dapat diturunkan, maka bentuk tersebut dapat diselesaikan dengan cara **dalil L'Hospital**.
- Beberapa soal limit fungsi trigonometri dapat diselesaikan dengan menyederhanakan bentuk soalnya menggunakan identitas trigonometri. Beberapa bentuk identitas trigonometri tersebut adalah

- 1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- 2) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- 3) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- 4) $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$
- 5) $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$

Contoh :

Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos 2x} = \dots$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2 \sin^2 x} \text{ (Bentuk } 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \text{)} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \\ &= \frac{3}{2} (1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

10.2 Diferensial

Diferensial (turunan) dapat diartikan sebagai laju perubahan terhadap waktu. Misalkan suatu fungsi $y = f(x)$, dengan y merupakan fungsi yang bergantung terhadap x dan dapat diturunkan pada setiap titik (diferensiabel). Turunan pertama fungsi y terhadap x ditulis dengan $\frac{dy}{dx}$ atau y' atau $f'(x)$. Secara definisi, turunan fungsi y terhadap x dapat ditulis sebagai (Varberg, Purcell and Rigdon, 2007).

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

10.2.1 Sifat-sifat Turunan

Dalam menyelesaikan masalah turunan fungsi, dapat digunakan beberapa sifat-sifat turunan berikut :

Tabel 10.3 Bentuk dasar Fungsi Trigonometri

Turunan fungsi x^n	Jika $f(x) = ax^n$ maka $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
Turunan fungsi konstan	Jika $y = c$ maka $y' = 0$
Turunan perkalian fungsi & konstanta	Jika $y = cf(x)$ maka $y' = cf'(x)$
Turunan penjumlahan/pengurangan fungsi	Jika $y = f(x) \pm g(x)$ maka $y' = f'(x) \pm g'(x)$
Turunan perkalian fungsi	Jika $y = u(x) \cdot v(x)$ maka $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
Turunan pembagian fungsi	Jika $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ maka $y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
Turunan rantai	Jika $y = f(x)$ dapat dinyatakan dengan bentuk komposisi dimana $y = f(g(x))$ maka turunan fungsinya adalah $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

10.2.2 Turunan Fungsi Trigonometri

Dalam menyelesaikan masalah turunan fungsi, dapat digunakan beberapa sifat-sifat turunan berikut :

Tabel 10.4 Bentuk turunan dasar Fungsi Trigonometri

Fungsi	Turunan
$f(x) = \sin y$	$f'(x) = \cos y$
$f(x) = \cos y$	$f'(x) = -\sin y$
$f(x) = \tan y$	$f'(x) = \sec^2 y$
$f(x) = \cot y$	$f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 y$
$f(x) = \sec y$	$f'(x) = \sec y \cdot \tan y$
$f(x) = \operatorname{cosec} y$	$f'(x) = -\operatorname{cosec} y \cot y$

Contoh Soal

1. Jika $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 2$, maka turunan dari fungsi f adalah $f'(x) = \dots$

Penyelesaian :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 2$$

Dengan menggunakan sifat turunan untuk fungsi x^n diperoleh

$$f'(x) = 3x^{3-1} - 2 \cdot 4x^{2-1} - x^{1-1} + 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 1$$

2. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \frac{1+\cos x}{\sin x}$ adalah $f'(x) =$

Penyelesaian :

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

Misalkan

$$u(x) = 1 + \cos x \rightarrow u'(x) = -\sin x$$

$$v(x) = \sin x \rightarrow v'(x) = \cos x.$$

Dengan menggunakan aturan turunan pembagian fungsi diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{-\sin x \sin x - (1+\cos x) \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) - \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-1 - \cos x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{(1+\cos x)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

3. Diketahui $f(x) = (3x^2 - 5)^4$. Jika f' adalah turunan pertama dari f , maka $f'(x) = \dots$

Penyelesaian :

Diberikan $f(x) = (3x^2 - 5)^4$, misalkan $u(x) = 3x^2 - 5$ maka fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $f(x) = u^4$. Dengan menggunakan aturan turunan rantai, sehingga diperoleh $f'(x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$\frac{df}{du} = 4u^3$; $\frac{du}{dx} = 6x$. Selanjutnya turunan f terhadap x adalah

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= 4u^3(6x) = 4(3x^2 - 5)^3(6x) \\ &= 24x(3x^2 - 5)^3\end{aligned}$$

10.3 Integral

Integral adalah operasi kebalikan dari turunan fungsi. Operasi integral biasa disebut dengan operasi anti turunan. Jika $f(x)$ adalah turunan dari $F(x)$ yaitu $f(x) = F'(x)$, maka (Varberg, Purcell and Rigdon, 2007)

$$\int f(x) dx = \int F'(x) dx = F(x) + C$$

Berdasarkan jenisnya, integral terbagi menjadi dua jenis yaitu

1. Integral tak tentu

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

2. Integral tentu

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \text{ dengan } a \leq x \leq b$$

10.3.1 Sifat Umum Integral

Dalam menyelesaikan soal-soal integral, berikut diberikan sifat-sifat umum integral sebagai berikut (Tim BBM, 2015).

- $\int c f(z) dz = c \int f(z) dz$, dengan c merupakan konstanta
- $\int \{f(z) \pm g(z)\} dz = \int f(z) dz \pm \int g(z) dz$

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu pada interval $m \leq x \leq n$ maka :

- $\int_m^m f(x) dx = 0$
- $\int_m^n f(x) dx = -\int_n^m f(x) dx$
- $\int_m^n f(x) dx = \int_m^d f(x) dx + \int_d^n f(x) dx$, dimana $m \leq d \leq n$

10.3.2 Rumus Integral Fungsi

Selain sifat umum integral terdapat rumus integral yang dapat digunakan untuk menyelesaikan soal-soal integral fungsi. Rumus tersebut dapat digunakan sesuai dengan bentuk fungsi yang diberikan. Berikut adalah beberapa rumus dasar maupun pengembangan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Integral fungsi

1. Rumus Integral Fungsi Aljabar dan Eksponen

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int p^x dx = \frac{p^x}{\ln p} + C$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int (mx + k)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (mx + k)^{n+1} + C$$

$$\int e^{(mx+k)} dx = \frac{1}{m} e^{(mx+k)} + C$$

$$\int p^{(mx+k)} dx = \frac{p^{(mx+k)}}{m \ln p} + C$$

$$\int \frac{1}{mx+k} dx = \frac{1}{m} \ln |mx + k| + C$$

2. Rumus Integral fungsi Trigonometri

$$\int \sin y dy = -\cos y + C$$

$$\int \cos y dy = \sin y + C$$

$$\int \sin (my + k) dy = -\frac{1}{a} \cos (my + k) + C$$

$$\int \cos (my + k) dy = \frac{1}{a} \sin (my + k) + C$$

$$\int \sec^2 (my + k) dy = \frac{1}{m} \tan (my + k) + C$$

$$\int \sin^m y \cos y dy = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} y + C$$

$$\int \cos^m y \sin y dy = -\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} y + C$$

10.3.3 Integral Parsial

Integral parsial merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan bentuk integral

$$\int f(x) \cdot g(x) dx$$

Pada umumnya, penyelesaian bentuk integral tersebut dapat dilakukan apabila salah satu fungsi entah $f(x)$ atau $g(x)$ dapat menghasilkan nilai nol ketika diturunkan terus menerus. Adapun langkah penyelesaian dari integral parsial tersebut adalah

- Salah satu bagian fungsi dimisalkan menjadi U
- Sisanya dianggap sebagai dV (termasuk dx)
- Bentuk integral $\int f(x) \cdot g(x) dx$ kemudian dapat dituliskan menjadi

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

Contoh Soal

1. Nilai dari $\int_0^2 x^2(x+2) dx = \dots$

Penyelesaian :

$$\int_0^2 x^2(x+2) dx = \int_0^2 x^3 + 2x^2 dx$$

Dengan menggunakan sifat dan rumus integral untuk fungsi aljabar serta eksponen diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^3 + 2x^2 dx &= \frac{1}{3+1}x^{3+1} + \frac{1}{2+1} \cdot 2 \cdot x^{2+1} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{4}(2)^4 + \frac{2}{3}(2)^3 - \left(\frac{1}{4}(0)^4 + \frac{2}{3}(0)^3 \right) \\ &= \frac{16}{4} + \frac{16}{3} = 9 \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. Hasil dari $\int (2x - 1)(x^2 - x + 3)^3 dx = \dots$

Penyelesaian :

Untuk soal ini, penyelesaian dapat dilakukan dengan menggunakan memisalkan

$$u = x^2 - x + 3$$

Kemudian, fungsi u diturunkan terhadap x sehingga diperoleh

$$\frac{du}{dx} = 2x - 1$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}\int (2x - 1)(u)^3 \frac{du}{(2x - 1)} &= \int u^3 du \\ \int u^3 du &= \frac{1}{4}u^4 + C\end{aligned}$$

Tuliskan kembali bentuk u kedalam x sehingga diperoleh

$$\int (2x - 1)(x^2 - x + 3)^3 dx = \frac{1}{4}(x^2 - x + 3)^4 + C$$

3. Nilai dari $\int \sin^2 x \cos x dx = \dots$

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan soal ini, rumus trigonometri yang dapat digunakan adalah

$$\int \sin^m x \cos x dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x + C$$

Selanjutnya kemudian diperoleh

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{2+1} \sin^{2+1} x + C$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

DAFTAR PUSTAKA

- Nugroho, P.A. and Gunarto, D. (2013) *Big Bank Soal - Bahas Matematika SMA/MA*.
- Tim BBM (2015) *Big Book Matematika SMA*.
- Varberg, D., Purcell, E. and Rigdon, S.E. (2007) *Calculus Ninth Edition*. New York: Pearson International Edition.

BAB 11

STATISTIKA DAN PELUANG

Oleh Putri Anugrah Cahya Dewi

11.1 Pendahuluan

Statistika dan peluang adalah dua aspek penting dalam matematika yang melingkupi hampir setiap aspek kehidupan kita. Dari pemilihan produk di supermarket hingga prediksi cuaca, dari riset medis hingga analisis data bisnis, statistika dan peluang membantu kita memahami dunia di sekitar kita dengan lebih baik.

Statistika adalah cara untuk mengumpulkan, mengorganisir, dan menganalisis data (Yusi and Idris, 2019). Bayangkan jika Anda bisa menggali informasi menarik dari sejumlah angka dan grafik, seperti berapa banyak teman sekelas yang suka matematika atau berapa banyak orang yang memilih makanan tertentu di kantin sekolah. Statistika dapat membantu Anda membuat keputusan yang lebih baik berdasarkan fakta dan bukan perkiraan semata. Sedangkan, peluang adalah tentang memahami kemungkinan. Pernahkah Anda berpikir tentang seberapa besar peluang Anda memenangkan permainan dadu? Atau mungkin Anda ingin tahu berapa kemungkinan hujan hari ini? Peluang dapat membantu Anda menjawab pertanyaan-pertanyaan semacam itu. Ini adalah cara menyenangkan untuk mengukur kejadian acak dan peristiwa. Dalam bab ini, kita akan memahami mengenai pengenalan statistika dan data, ukuran pemusatan data, serta konsep peluang.

11.2 Pengertian Statistika dan Data

Sebelum masuk ke pembahasan lebih dalam mengenai statistika, maka Anda perlu memahami perbedaan antara statistika dan statistik. Statistika merupakan bidang ilmu yang berkaitan dengan pengumpulan data, pengolahan data, analisis data, penyajian data serta penarikan kesimpulan dari data yang ada. Sedangkan, statistik merupakan suatu kesimpulan dari hasil pengumpulan, pengolahan dan analisa data yang dapat disajikan dalam bentuk tabel atau diagram untuk menggambarkan suatu kejadian atau fakta.

11.2.1 Data

Data adalah sekumpulan fakta, angka, atau informasi yang menggambarkan suatu keadaan, objek, atau peristiwa (Yusi and Idris, 2019). Data dapat berupa berbagai jenis informasi yang dapat diukur, diamati, atau didokumentasikan seperti baik, buruk, data berat badan, data makanan kesukaan, dll. Dalam dunia statistik, juga dikenal istilah datum yang berarti sebagian dari sekumpulan data yang menggambarkan suatu keadaan, objek, atau peristiwa.

Data dapat dikelompokkan menjadi dua jenis (Yanto, 2015), yaitu:

1. Data Kualitatif

Merupakan data yang menggambarkan karakteristik dalam bentuk non-angka dari suatu objek atau peristiwa. Data kualitatif biasanya berbentuk deskriptif dan tidak dapat diukur secara langsung. Contoh data kualitatif yaitu jenis kelamin, *rating podcast* (sangat informatif, informatif, kurang informatif, tidak informatif), warna mata seseorang, merk mobil, dan sebagainya.

2. Data Kuantitatif

Merupakan data yang menggambarkan karakteristik dalam bentuk angka dari suatu objek atau peristiwa. Data kuantitatif dibagi menjadi dua yaitu:

a. Data Diskrit

Merupakan data yang diperoleh dari hasil perhitungan atau mencacah.

Contoh: jumlah kucing dalam sebuah peternakan, jumlah anak dalam sebuah keluarga, atau jumlah buku dalam suatu perpustakaan.

b. Data Kontinu

Merupakan data yang diperoleh dari hasil pengukuran.

Contoh: suhu udara dalam derajat celcius, berat badan, tinggi badan, tebal buku, atau volume air.

11.2.2 Pengumpulan Data

Terdapat berbagai teknik pengumpulan data yang dapat disesuaikan dengan tujuan penelitian atau analisis yang dilakukan.

Berikut beberapa teknik pengumpulan data yang umum digunakan:

1. Wawancara

Merupakan metode pengumpulan data yang melibatkan pertanyaan dan interaksi langsung antara seorang pewawancara (penanya) dengan satu atau lebih responden (orang yang diwawancarai) dengan tujuan untuk mendapatkan informasi, pandangan, atau pemahaman yang lebih dalam tentang subjek tertentu. Wawancara dapat digunakan dalam berbagai konteks, termasuk penelitian ilmiah, survei, penelitian pasar, perekrutan karyawan, dsb.

2. Observasi (pengamatan)

Merupakan metode pengumpulan data yang melibatkan pengawasan atau pemantauan langsung terhadap suatu kejadian, objek, atau situasi. Metode ini digunakan untuk mengumpulkan informasi dengan cara mengamati dan mencatat apa yang terjadi tanpa interaksi langsung dengan subjek atau objek pengamatan.

3. *Survey* (Kuesioner)

Merupakan metode pengumpulan data dalam bentuk pertanyaan tertulis atau sejumlah pernyataan (kuesioner) yang diberikan kepada responden. Kuesioner dapat berisi berbagai jenis pertanyaan, baik yang terbuka (responden memberikan tanggapan bebas) maupun tertutup (responden memilih jawaban dari pilihan yang disediakan).

4. *Focus Group Discussion* (Diskusi terpusat)

Merupakan metode pengumpulan data yang melibatkan suatu kelompok yang sesuai dengan topik/isu untuk mendiskusikan topik/isu tertentu di bawah bimbingan seorang moderator. Metode ini digunakan untuk mendapatkan wawasan mendalam tentang pandangan, sikap, persepsi, dan pengalaman suatu kelompok terkait dengan topik penelitian atau permasalahan tertentu.

11.2.3 Penyajian Data

Dalam penyajian data, informasi yang telah dikumpulkan atau dianalisis diberikan dalam bentuk yang mudah dimengerti, relevan, dan informatif. Berikut beberapa teknik penyajian data yang umum digunakan (Sukestiyarno, 2013):

1. Tabel

Tabel digunakan untuk menyajikan data dalam bentuk baris dan kolom. Tabel umumnya digunakan untuk menyajikan data numerik.

Contoh 1:

Disajikan data nilai ujian matematika siswa kelas VIIB.

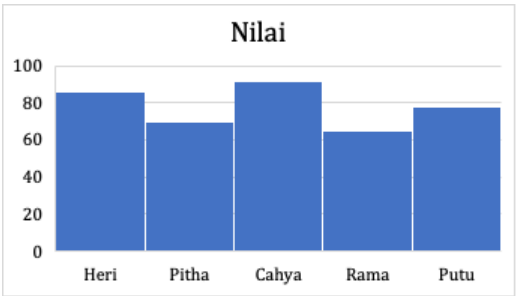
Nama Siswa	Nilai
Heri	86
Pitha	70
Cahya	92
Rama	65
Putu	78

2. Histogram

Histogram digunakan untuk menyajikan data dalam bentuk visual. Diagram ini terdiri dari batang-batang yang mewakili rentang nilai data dan tinggi batang menggambarkan frekuensi atau jumlah data dalam rentang tersebut.

Contoh 2:

Disajikan data nilai ujian matematika siswa kelas VIIB.

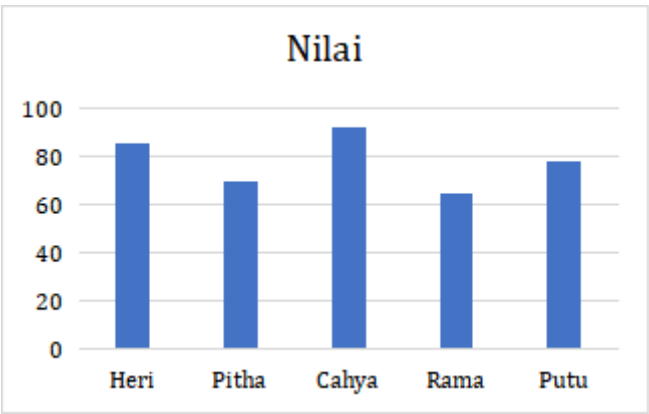


3. Diagram batang

Serupa dengan histogram, diagram batang atau "*bar chart*" digunakan untuk menyajikan data dalam bentuk visual. Namun, diagram batang umumnya digunakan untuk menggambarkan perbandingan antara beberapa kategori atau variabel. Diagram ini terdiri dari batang-batang vertikal atau horizontal yang mewakili data dalam bentuk garis-garis.

Contoh 3:

Disajikan data nilai ujian matematika siswa kelas VIIB.

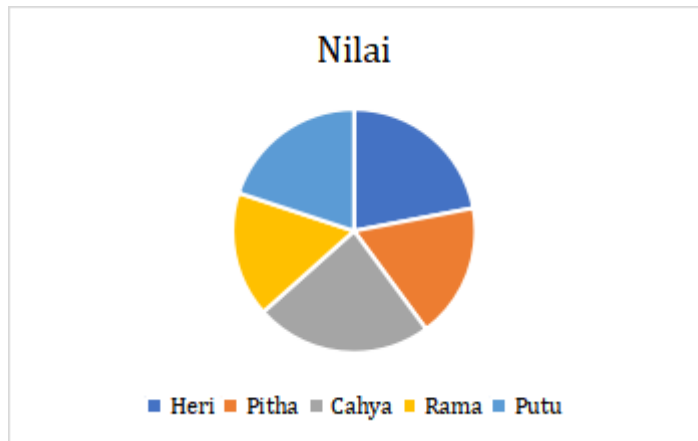


4. Diagram lingkaran

Diagram lingkaran atau *pie chart* merupakan diagram yang digunakan untuk menggambarkan proporsi atau persentase dari suatu data. Diagram ini berbentuk lingkaran yang dibagi menjadi sejumlah "potongan *pie*" atau juring yang mewakili berbagai kategori atau kelompok data. Setiap juring memiliki ukuran relatif yang mencerminkan proporsi atau persentase dari keseluruhan yang diwakilinya.

Contoh 4:

Disajikan data nilai ujian matematika siswa kelas VIIB.

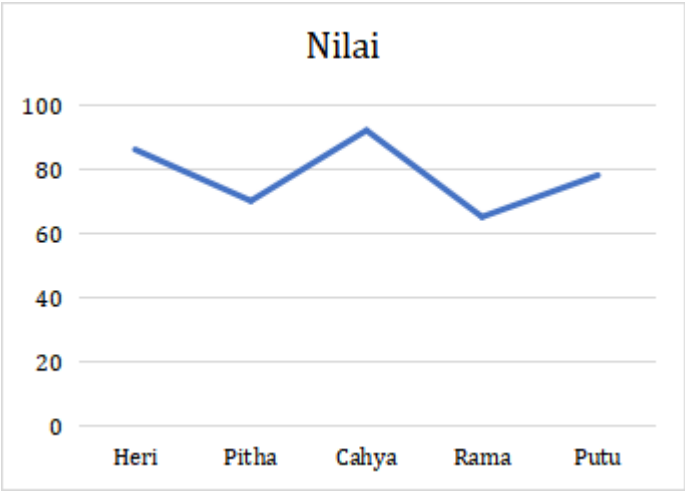


5. Diagram garis

Diagram garis atau *line chart* merupakan diagram yang digunakan untuk memvisualisasikan perubahan atau tren dalam data selama periode waktu tertentu. Diagram garis terdiri dari titik-titik data yang terhubung dengan garis lurus.

Contoh 5:

Disajikan data nilai ujian matematika siswa kelas VIIB.



11.2.4 Ukuran Pemusatan Data

Ukuran pemusatan data adalah statistik atau nilai yang digunakan untuk menggambarkan pusat atau titik tengah distribusi data. Ukuran-ukuran ini membantu dalam memahami bagaimana data terdistribusi dan memberikan gambaran tentang titik pusat distribusi data. Berikut tiga ukuran pemusatan data yang umum digunakan :

1. Mean

Mean atau rata-rata merupakan suatu nilai yang diperoleh dari jumlah seluruh nilai data dibagi dengan jumlah data.

Mean data tunggal :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Keterangan :

$\bar{x}$ = Mean

x_i = nilai data

n
= jumlah data

Mean data berkelompok :

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$$

Keterangan :

f_i = frekuensi data

x_i = titik tengah

2. Median

Median merupakan nilai tengah dari suatu data.

Median data tunggal :

Urutkan data dari yang terkecil sampai terbesar terlebih dahulu.

Letak Median = $\frac{(n+1)}{2}$

Median data berkelompok :

$$\frac{1}{2}n$$

Letak kelas median =

$$L_{Me} + \left(\frac{\frac{1}{2}n - f_{k_{Me}}}{f_{Me}} \right) p$$

Me =

Keterangan :

L_{Me} = tepi bawah kelas median

n
= jumlah data

$f_{k_{Me}}$ = frekuensi kumulatif sebelum kelas median

f_{Me} = frekuensi kelas median

p
= panjang kelas

3. Modus

Modus merupakan nilai yang paling sering muncul atau memiliki frekuensi tertinggi dalam suatu kumpulan data.

Modus data tunggal :

Modus data tunggal dicari dengan melihat nilai yang paling sering muncul dari sebaran data.

Modus data berkelompok :

Letak kelas modus = kelas dengan frekuensi tertinggi

$$L_{Mo} + \left(\frac{F_1}{F_1 + F_2} \right) p$$

Mo =

Keterangan :

L_{Mo} = tepi bawah kelas modus

F_1 = selisih antara nilai frekuensi kelas modus dengan nilai frekuensi sebelum kelas modus

F_2 = selisih antara nilai frekuensi kelas modus dengan nilai frekuensi sesudah kelas modus

Contoh 6 :

Diberikan data sebagai berikut.

8, 9, 4, 5, 7, 4, 4, 9, 8, 8

Tentukan mean, median dan modus data diatas.

Penyelesaian :

Data tersebut merupakan data tunggal sehingga menggunakan penyelesaian untuk data tunggal.

Mean :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{8+9+4+5+7+4+4+9+8+8}{10} = \frac{66}{10} = 6,6$$

Median :

Urutan data = 4, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 8, 9, 9

$$\text{Letak kelas median} = \frac{\frac{1}{2}n}{= \frac{1}{2}(10)} = 5$$

Maka, median = data ke-5 = 7

Modus :

Dari data tersebut, frekuensi tertinggi yaitu 3.

Frekuensi tertinggi dimiliki oleh data 4 dan 8, sehingga 4 dan 8 adalah modus data tersebut.

Contoh 7 :

Tentukan mean, modus dan median dari data hasil ujian matematika kelas XIA berikut.

Nilai	Frekuensi
30 – 40	3
41 – 51	5
52 – 62	7
63 – 73	5
74 – 84	12
94 - 104	8

Penyelesaian :

Nilai	f_i	f_k	x_i	$f_i \cdot x_i$
30 – 40	3	3	35	105
41 – 51	5	8	45	225
52 – 62	7	15	57	399
63 – 73	5	20	68	340
74 – 84	12	32	79	948
85 - 95	8	40	90	720
Total	40			2737

Mean :

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{2737}{40} = 68,425$$

Median :

$$\text{Letak kelas median} = \frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(40) = 20$$

Data ke-20 berada di kelas interval 63 – 73.

Maka,

$$L_{Me} + \left(\frac{\frac{1}{2}n - f_{kMe}}{f_{Me}} \right) p$$

Me =

$$\text{Me} = 62,5 + \left(\frac{\frac{1}{2}(40) - 15}{5} \right) \cdot 11$$

Me = 73,5

Catatan :

$$L_{Me} = \text{Batas bawah kelas median} - 0,5 = 63 - 0,5 = 62,5$$

$$p = \text{batas atas} - \text{batas bawah} + 1 = 73 - 63 + 1 = 11$$

Modus :

Letak kelas modus = kelas dengan frekuensi tertinggi

Sehingga, modus terletak pada kelas interval 74 - 84.

$$L_{Mo} + \left(\frac{F_1}{F_1 + F_2} \right) p$$

Mo =

$$\text{Mo} = 73,5 + \left(\frac{7}{7+4} \right) \cdot 11$$

Mo = 80,5

Catatan :

$$F_1 = 12 - 5 = 7$$

$$F_2 = 12 - 8 = 4$$

11.3 Peluang

Peluang merupakan nilai kemungkinan dari suatu kejadian atau percobaan. Peluang dari suatu percobaan berada antara skala 0 (tidak mungkin terjadi) dan skala 1 (pasti terjadi). Terdapat beberapa istilah dalam peluang yang sering digunakan, diantaranya:

- a. *Percobaan*, merupakan sekumpulan peristiwa yang menyebabkan terjadinya kemungkinan.
- b. *Kejadian*, merupakan sebagian peristiwa atau hasil yang mungkin terjadi.
- c. *Ruang Sampel*, merupakan himpunan semua hasil yang mungkin terjadi dalam suatu percobaan.
- d. *Titik Sampel*, merupakan anggota dari himpunan semua hasil yang mungkin terjadi dalam suatu percobaan.

11.3.1 Menentukan Ruang Sampel

Dalam menentukan ruang sampel dapat dengan cara mendaftar, menggunakan tabel maupun diagram pohon.

1. Mendaftar

Menentukan ruang sampel dengan cara mendaftar yaitu dengan menuliskan seluruh anggota ruang sampel secara berurutan.

2. Tabel

Tabel berisikan daftar informasi data yang tersusun secara terstruktur dalam baris dan kolom.

3. Diagram Pohon

Diagram pohon menggambarkan struktur titik sampel bertingkat.

Contoh :

Suatu percobaan melempar dua buah uang logam sekaligus. Tentukan ruang sampel beserta titik sampelnya.

Penyelesaian :

Mendaftar :

Maka, titik sampelnya adalah (A, A), (A, G), (G, A), (G, G).

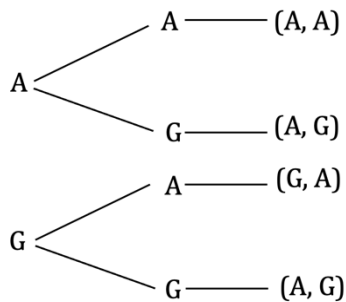
Ruang sampel = $S = (A, A), (A, G), (G, A), (G, G)$

$n(S) = 4$

Tabel :

	A	G
A	(A, A)	(A, G)
G	(G, A)	(G, G)

Diagram Pohon :



11.3.2 Peluang Suatu Kejadian

Terdapat dua pendekatan dalam peluang yaitu peluang empiris dan peluang teoritis. Perbedaannya yaitu pada sumber informasi yang digunakan untuk mengukur peluang (Yusi and Idris, 2019).

1. Peluang Empiris

Merupakan rasio dari hasil yang dimaksud dengan semua hasil yang mungkin terhadap banyaknya percobaan yang dilakukan.

Rumus :

$$f(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Keterangan :

$n(A)$ = frekuensi kejadian A

$n(S)$ = frekuensi percobaan yang dilakukan

Contoh :

Andi dan Satya melakukan percobaan dengan melempar dadu sebanyak 100 kali dan mencatat setiap pelemparan yang dilakukan. Hasil yang diperoleh yaitu :

Angka	Banyak kemunculan
1	20
2	15
3	18
4	22
5	12
6	13

Tentukan peluang empiris munculnya angka 4 pada pelemparan dadu tersebut.

Penyelesaian :

$$f(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$f(A) = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}$$

2. Peluang Teoritis

Merupakan rasio dari hasil yang dimaksud dengan semua hasil yang mungkin pada suatu percobaan tunggal.

Rumus :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Keterangan :

$n(A)$ = frekuensi kejadian yang diharapkan

$n(S)$ = frekuensi seluruh percobaan

Contoh :

Pada suatu kantong belanja, terdapat 20 permen dengan 8 permen rasa melon, 4 permen rasa coklat, dan sisanya rasa stroberi. Lalu, ada seorang anak perempuan yang mengambil 1 buah permen dalam kantong belanja secara acak. Tentukan peluang jika yang terambil adalah permen rasa stroberi.

Penyelesaian :

Peluang terambilnya permen rasa stroberi yaitu

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{20 - (8 + 4)}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Sukestiyarno (2013) *Statistika Dasar*. Edited by A. Pramesta. Semarang: CV. Andi Offset.
- Yanto (2015) *Statistika Inferensi untuk Penelitian Minitab*. Edited by Maya. Yogyakarta: CV. Andi Offset.
- Yusi, D. M. S. and Idris, D. U. (2019) *Statistika untuk Ekonomi, Bisnis, & Sosial*. Edited by E. Kurnia. Penerbit Andi.

BIODATA PENULIS



Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd.
Dosen Universitas Simalungun

Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd, lahir di Medan, Pendidikan S1 Prodi Matematika FMIPA USU Medan, S2 Prodi Pendidikan Matematika UNIMED Medan dan S3 Prodi Ilmu Matematika FMIPA USU Medan. Dosen di FKIP, SPS Prodi S2 PW, IPS dan Manajemen, serta Kepala Lembaga Akreditasi Internal (LAI) Universitas Simalungun. Penulis aktif mengikuti sebagai pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional dan aktif menulis Buku, Jurnal OJS, Sinta, dan Scopus.

BIODATA PENULIS



Penulis lahir di Desa Pante Lhoksukon Aceh Utara. Pada tanggal 07 Juli 1987. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Agama Islam, Universitas Muhammadiyah Aceh. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika UIN AR RANIRY Banda Aceh pada tahun 2011 dan melanjutkan S2 pada Jurusan Magister Pendidikan Matematika UNSYIAH Banda Aceh pada tahun 2012 dan selesai pada tahun 2015. Penulis telah menulis buku “Materi Ajar Untuk Sekolah Dasar” dan telah menyelesaikan penulisan buku tentang “Teknologi Pengajaran” yang berfokus pada bab Keterampilan Dasar Mengajar, buku “Konsep Dasar Matematika”, buku “Statistik Dasar”, buku “Aljabar Elementer”, dan buku “Matematika untuk Paud”.

BIODATA PENULIS



Mundzir, S.Kom., M.T

Dosen Program Studi Sistem Informasi
Fakultas Ilmu Komputer Universitas Mulia

Penulis lahir di Makassar tanggal 08 Agustus 1975. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sistem Informasi Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Mulia. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Teknik Informatika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Teknik Elektro. Penulis menekuni bidang ilmu komputer.

BIODATA PENULIS



Azmidar, M.Pd.

Dosen Program Studi Tadris Matematika
Fakultas Tarbiyah Institut Agama Islam Negeri Parepare

Penulis lahir di Mundan (Enrekang) tanggal 21 Desember 1991. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah, Institut Agama Islam Negeri Parepare. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar dan melanjutkan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia. Penulis menekuni bidang Pendidikan Matematika.

BIODATA PENULIS



Lita Lovia, M.Si

Dosen Program Studi Matematika
Universitas Dharma Andalas

Penulis lahir pada 20 April 1980 di Minang Kabau Lb. Aur. Tamat Sarjana pada Program Studi Matematika di Universitas Andalas Pada tahun 2003. Tamat Magister Program Studi Matematika di Universitas Andalas pada tahun 2011

BIODATA PENULIS



Mirna Riazil Jannah, S.Pd, M.Pd

Penulis lahir di Banda Aceh tanggal 29 Januari 1991. Penulis salah seorang guru matematika di MTsN 8 Aceh Besar. Menyelesaikan pendidikan S1 Pendidikan Matematika di Universitas Syiah Kuala dan melanjutkan S2 pada jurusan Magister Pendidikan Matematika Pasca Sarjana Universitas Syiah Kuala. Buku pendidikan yang pernah ditulis dengan judul “Perangkat Pembelajaran Program Linier dengan Model Pembelajaran Problem Based Learning Berbantuan Software Autograph (2013)”, “Kumpulan soal Ujian Semester Matematika Berkriteria UN/USBN jenjang SMP/MTs Kurikulum 2013 (2019)”. Adapun buku antologi “Global Warming (2019)”, “Sahabat anak Muslim (2019). “

Pengalaman adalah Pembelajaran hidup. Penulis dapat dihubungi melalui email di mirnariazilj@gmail.com. Kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan. Semoga karya ini menjadi penambah wawasan ilmu kita dan bermanfaat bagi kita.

BIODATA PENULIS



Ardiana Fatma Dewi, S.stat., M.Stat
Dosen Program Studi Tadris Matematika
Fakultas Tarbiyah
Institut Agama Islam Negeri (IAIN) Kediri

Penulis lahir di Kediri pada tanggal 23 Desember 1996. Anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Kediri. Menyelesaikan pendidikan S1 Jurusan Statistika di Universitas Brawijaya (UB) Malang pada tahun 2019. Penulis melanjutkan S2 pada Jurusan Statistika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya menyelesaikan studi pada tahun 2021.

Penulis aktif menjadi dosen sejak tahun 2022, dan awal mula berkarir di IAIN Kediri dengan beberapa mata kuliah statistika dan matematika yang diampu. Termasuk dipercaya untuk mengampu mata kuliah trigonometri. Berawal dari bangku kuliah yang dipercaya dosen menjadi asisten mata kuliah *Time Series* sehingga membawa peneliti memilih berkarir menjadi seperti yang sekarang ini menjadi seorang pengajar. Penulis menekuni bidang meneliti dan menulis dalam berbagai bidang statistika dan matematika. Penulis dapat dihubungi melalui *e-mail* berikut ardianafatmadewi@iainkediri.ac.id.

BIODATA PENULIS



Hartina Husain, S.Si., M.Stat

Dosen Program Studi Sains Data
Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir pada 23 Mei 1996 di Samata, Sulawesi Selatan. Penulis meraih gelar sarjana dari Universitas Hasanuddin tahun 2017 pada jurusan Statistika. Kemudian penulis melanjutkan studi magister di Surabaya tepatnya di Institut Teknologi Sepuluh Nopember dengan jurusan yang sama. Saat ini, penulis aktif bekerja sebagai Dosen Sains Data di Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie. Penulis juga aktif sebagai tutor online (tuton) di Universitas Terbuka. Adapun topik penulisan artikel penulis terkait pemodelan statistika, regresi non parametrik, dan analisis meta.

BIODATA PENULIS



Aprizal Resky, S.Si., M.Si.

Dosen Program Studi Sains Data
Jurusan Sains, Institut Teknologi B.J. Habibie

Penulis lahir di Parepare tanggal 24 April 1998. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sains Data, Jurusan Sains, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie Parepare. Menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Matematika di Universitas Hasanuddin. Selama menjadi mahasiswa, penulis juga aktif dalam kegiatan non-akademik seperti menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Matematika (Himatika) FMIPA Unhas dan Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unhas.

BIODATA PENULIS



Muhammad Rifki Nisardi, S.Si., M.Si.

Dosen Program Studi Matematika
Institut Teknologi B.J Habibie Parepare

Penulis lahir di Watampone tanggal 23 April 1998. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika Jurusan Sains, Institut Teknologi B.J Habibie Parepare. Menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin. Penulis pernah menjadi asisten Matematika Dasar 1 dan Matematika Dasar 2 di Universitas Hasanuddin. Aktif melakukan riset di bidang matematika epidemiologi pada jurnal ilmiah yang diterbitkan Jurnal Inprime (Indonesian Jurnal of Pure and Applied Mathematics) dan Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi.

BIODATA PENULIS



Putri Anugrah Cahya Dewi, M.Pd.

Dosen Program Studi Sistem Informasi Akuntansi
Fakultas Teknologi Informasi dan Desain

Penulis lahir di Timor-Timur tanggal 28 Agustus 1994. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sistem Informasi Akuntansi Fakultas Teknologi Informasi dan Desain, Universitas Primakara. Menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Ganesha. Jabatan fungsional terakhir adalah Lektor. Aktif menulis dalam beberapa jurnal nasional terakreditasi. Selain sebagai dosen tetap, penulis juga menjabat sebagai Wakil Rektor III Bidang Kemahasiswaan dan Alumni Universitas Primakara.