

MATEMATIKA PERTANIAN

**Joni Wilson Sitopu
Ketut Queena Fredlina
Putri Anugrah Cahya Dewi
Novita Aswan
Fahmy Rinanda Saputri
Afnaria
Lathifatul Aulia
Beatric Videlia Remme'**



GET PRESS INDONESIA

MATEMATIKA PERTANIAN

Penulis :

Joni Wilson Sitopu
Ketut Queena Fredlina
Putri Anugrah Cahya Dewi
Novita Aswan
Fahmy Rinanda Saputri
Afnaria
Lathifatul Aulia
Beatric Videlia Remme'

ISBN :

Editor : Ari Yanto., M.Pd

Penyunting : Tri Putri Wahyuni,S.Pd

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd

Penerbit : GET PRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :

Jln. Palarik Air Pacah No 26 Kel. Air Pacah
Kec. Koto Tangah Kota Padang Sumatera Barat
Website : www.getpress.co.id
Email : adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, Oktober 2023

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan
dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Segala Puji dan syukur atas kehadiran Allah SWT dalam segala kesempatan. Sholawat beriring salam dan doa kita sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW. Alhamdulillah atas Rahmat dan Karunia-Nya penulis telah menyelesaikan buku Matematika Pertanian ini.

Secara detail pembahasan buku ini meliputi : Hakekat belajar matematika, Logika matematika, Relasi, fungsi, dan variabel, Persamaan dan pertidaksamaan fungsi, Fungsi linear dan terapannya, Fungsi kuadrat dan terapannya, Fungsi eksponen, Kalkulus integral.

Materi pokok tersebut dikemas sedemikian rupa sehingga setelah mengikuti kegiatan pembelajaran dengan buku ini, mahasiswa diharapkan mampu memahami buku Matematika Pertanian terkini dengan baik dan benar secara utuh.

Akhir kata, penulis sampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyelesaian buku ini. Penulis juga menyadari bahwa di dalam pembuatan buku ini masih banyak kekurangan, untuk itu penulis menerima saran dan kritik yang sifatnya membangun. Mudah-mudahan buku Matematika Pertanian ini memberikan banyak manfaat.

Padang, September 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	v
DAFTAR TABEL	vi
BAB 1 HAKEKAT BELAJAR MATEMATIKA	1
1.1 Pendahuluan.....	1
1.2 Hakekat Matematika	2
1.3 Klasifikasi Belajar Matematika.....	4
1.4 Belajar Matematika	6
1.5 Kegunaan Matematika	9
DAFTAR PUSTAKA	12
BAB 2 LOGIKA MATEMATIKA	13
2.1 Pendahuluan.....	13
2.2 Proposisi	13
2.3 Operator Logika	15
2.4 Tabel Kebenaran	16
2.5 Hukum Logika	17
2.6 Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi	20
2.6.1 Tautologi	20
2.6.2 Kontradiksi	20
2.6.3 Kontingensi	20
2.7 Ekuivalensi Logis.....	22
2.8 Konvers, Invers, dan Kontraposisi	23
DAFTAR PUSTAKA	25
BAB 3 RELASI, FUNGSI, DAN VARIABEL	27
3.1 Pendahuluan.....	27
3.2 Relasi	27
3.2.1 Operasi Relasi	30
3.2.2 Sifat-Sifat Relasi	32
3.3 Fungsi	35
3.3.1 Jenis-Jenis Fungsi.....	36

3.3.2 Fungsi Invers	38
3.3.3 Komposisi Fungsi	39
3.4 Variabel	40
DAFTAR PUSTAKA.....	42
BAB 4 PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN FUNGSI ...	43
4.1 Pendahuluan	43
4.2 Persamaan Fungsi.....	44
4.2.1 Menyelesaikan Persamaan Fungsi	45
4.2.2 Penerapan Persamaan Fungsi pada Konteks Real ...	46
4.2.3 Penerapan Persamaan Fungsi pada Bidang Pertanian	47
4.3 Pertidaksamaan Fungsi	49
4.3.1 Menyelesaikan Pertidaksamaan Fungsi.....	50
4.3.2 Penerapan Pertidaksamaan Fungsi pada Konteks Real.....	52
4.3.3 Penerapan Pertidaksamaan Fungsi pada Bidang Pertanian.....	54
DAFTAR PUSTAKA.....	56
BAB 5 FUNGSI LINIER DAN TERAPANNYA	57
5.1 Fungsi Linier.....	57
5.2 Menggambar Grafik Fungsi Linier dan Menentukan Persamaannya	59
5.2.1 Menggambar Grafik Fungsi Linier.....	59
5.2.2 Menentukan Persamaan Grafik Fungsi Linier	61
5.3 Invers Fungsi Linier	62
5.4 Penerapan Fungsi Linier	63
DAFTAR PUSTAKA.....	68
BAB 6 FUNGSI KUADRAT DAN TERAPANNYA.....	69
6.1 Pendahuluan	69
6.2 Grafik Fungsi Kuadrat	69
6.2.1 Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat.....	70
6.2.2 Hubungan <i>a, b, c dan D</i> dengan kurva	74
6.3 Membentuk Persamaan Fungsi Kuadrat	79

6.4 Hubungan Garis dengan Grafik Fungsi Kuadrat	82
6.5 Terapan Fungsi Kuadrat	84
DAFTAR PUSTAKA	86
BAB 7 FUNGSI EKSPONEN	87
7.1 Pendahuluan.....	87
7.2 Eksponen.....	88
7.3 Fungsi Eksponen	89
7.3.1 Definisi Fungsi Eksponen	89
7.3.2 Fungsi Pertumbuhan	92
7.3.3 Fungsi Peluruhan.....	93
7.4 Persamaan Eksponen	94
7.5 Fungsi Eksponen Asli	95
DAFTAR PUSTAKA	97
BAB 8 KALKULUS INTEGRAL.....	99
8.1 Pendahuluan.....	99
8.2 Integral Tak Tentu.....	99
8.2.1 Pengintegralan dengan Penggantian (substitusi).....	101
8.2.2 Integral Parsial.....	103
8.2.3 Integral Fungsi Rasional	105
8.3 Integral Tentu	106
DAFTAR PUSTAKA	109
BIODATA PENULIS	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1. Diagram Panah Contoh 3-1	29
Gambar 3.2. Diagram Panah Contoh 3-2	30
Gambar 3.3. Relasi dan Fungsi	36
Gambar 3.4. Relasi dan Bukan Fungsi	36
Gambar 3.5. (a) injektif, (b) bukan injektif	37
Gambar 3.6. (a) surjektif, (b) bukan surjektif	37
Gambar 3.7. (a) bijektif, (b) bukan bijektif	38
Gambar 3.8. Hubungan fungsi dan inversnya	38
Gambar 3.9. Diagram Komposisi Fungsi	39
Gambar 5.1. Grafik dari fungsi linier $y = f(x) = 3x - 1$	60
Gambar 6.1. Grafik Fungsi Kuadrat (parabola) $f(x) = x^2$	70
Gambar 6.2. Properti Grafik Fungsi Kuadrat	71
Gambar 6.3. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - x - 6$	74
Gambar 6.4. Grafik Fungsi Kuadrat Menurut Nilai a	75
Gambar 6.5. Grafik fungsi $f(x) = -x^2 + 6x - 5$	75
Gambar 6.6. Grafik Fungsi Kuadrat Menurut Nilai b	76
Gambar 6.7. Grafik Fungsi Kuadrat Menurut Nilai c	77
Gambar 6.8. Grafik Fungsi Kuadrat Menurut Nilai D	78
Gambar 6.9. Hubungan garis dengan grafik fungsi kuadrat	82
Gambar 6.10. Garis Potong parabola $y = 2x^2 + 4x - 6$	83
Gambar 6.12. Nilai maksimum dan minimum parabola	84

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. Tabel Kebenaran Konjungsi, Disjungsi, Negasi, Implikasi, dan Biimplikasi	16
Tabel 3.1. Tabel berpasangan.....	35

BAB 1

HAKEKAT BELAJAR MATEMATIKA

Oleh Joni Wilson Sitopu

1.1 Pendahuluan

Pertanian adalah komponen penting perekonomian kita, menyediakan makanan dan bahan mentah bagi populasi yang terus bertambah. Dalam beberapa tahun terakhir, pemodelan matematika telah muncul sebagai alat penting untuk meningkatkan produktivitas dan keberlanjutan pertanian. Pembelajaran matematika bisa lebih efektif dalam pendidikan Pertanian, dalam sistem sekolah umum hal ini telah berkembang pesat sejak dimulainya pada pergantian abad yang lalu. Pendidikan pertanian melampaui batas-batas produksi-pertanian memberikan keterampilan untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan model algoritma dan rumus yang diperlukan untuk perhitungan, bidang kehidupan sebelumnya, termasuk pertanian, penerapan matematika telah ditemukan sebagai kunci untuk meningkatkan produktivitas pertanian dan mutu pendidikan ilmu pertanian untuk integrasi nasional. Namun demikian, skenarionya berfokus pada konsep penjaminan mutu, administrasi pendidikan, matematika pertanian, integrasi nasional dan masalah penjaminan mutu dalam administrasi pendidikan.

Seperti pada bidang kehidupan lainnya, matematika memainkan peran penting dalam pertanian, misalnya dalam analisis tanah, penghitungan berbagai kandungan pupuk, dan penggunaan statistik dalam estimasi. Matematika juga diperlukan dalam memperkirakan kebutuhan pupuk atau insektisida, memperkirakan hasil berdasarkan sampel tanaman, dll. Seperti yang diungkapkan oleh Ada (2015), bahwa matematika sebagai

bahasa menyediakan sarana yang sangat diperlukan untuk menyelidiki sifat suatu benda khususnya mereka yang ditangani di lapangan dalam penyuluhan dan pengembangan pertanian. Dengan demikian, matematika dalam pendidikan pertanian memberikan kesempatan kepada siswa untuk belajar secara nyata dan relevan. Dalam mempelajari matematika, dapat memperkaya dengan contoh-contoh nyata dan meningkatkan keterlibatan siswa dalam proses pembelajaran, para pendidik ditantang untuk mempersiapkan siswanya menjadi seorang yang berprestasi profesional dalam pilihan karirnya, sehingga siswa dapat menangani masalah yang relevan dan nyata. Untuk menganalisis pendidikan pertanian terhadap penerapan matematika, diharapkan dapat menghasilkan usulan tindakan untuk menjadi kurikulum pendidikan pertanian yang tinggi dan berstandar, dan bertujuan untuk mengidentifikasi tema-tema utama dalam aspek pertanian yang dimasukkan melalui matematika, berfungsi sebagai informasi, panduan dan landasan. bagi para pelajar dan juga bagi para petani agar mereka mendapat pendidikan yang cukup tentang peran matematika dalam pendidikan pertanian.

1.2 Hakekat Matematika

Polya (1962), mendefinisikan pengetahuan matematika sebagai informasi dan pengetahuan. Dari keduanya, ia menganggap pengetahuan (*know-how*) sebagai hal yang lebih penting, mendefinisikannya sebagai kemampuan untuk memecahkan masalah yang membutuhkan kemandirian, penilaian, orisinalitas, dan kreativitas. Seorang siswa yang berbakat belajar matematika memiliki semua karakteristik dan memerlukan kesempatan untuk menggunakannya ketika memecahkan masalah yang menantang. Dalam penekanan baru belajar matematika menyertai setiap perubahan baru diperoleh hasil tes yang dipublikasikan, namun sering kali hasil tersebut menekankan remedial atau latihan tambahan daripada pengembangan kerangka berpikir matematika.

Jika hakekat matematika ingin ditemukan dan dikembangkan, perubahan dalam praktik/metode pengajaran di kelas dan materi kurikuler diperlukan. Perubahan ini hanya akan efektif jika kreativitas dalam belajar matematika diberlakukan menjadi bagian dari pengalaman pendidikan. Hakikat matematika telah banyak dibahas bahkan sebelum abad keempat. Plato dan muridnya Aristoteles adalah orang pertama yang memberikan ruang untuk membahas hakikat matematika. Menurut Plato, objek matematika mempunyai eksistensinya sendiri, di belakang pikiran, di dunia luar (Dossey, 1992). Sebagai siswa untuk belajar matematika tingkat sekolah, sudut pandang Plato. berpikir bahwa matematika berada di luar pemikiran kita, abstrak dan dapat ditemukan. Menurut Aristoteles, Pandangannya tentang matematika tidak didasarkan pada teori pengetahuan eksternal, independen, dan tidak dapat diobservasi, namun didasarkan pada realitas yang dialami di mana pengetahuan diperoleh dari eksperimen, observasi, dan abstraksi (Dossey, 1992). Hal ini berarti bahwa pengamatan terhadap objek apa pun berbeda dari orang lain. Hal ini berdasarkan pengalaman mereka atau berkaitan dengan cara pandang mereka.

Pada tahun 1980, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) mengidentifikasi siswa berbakat matematika sebagai segmen siswa yang terabaikan dan mereka tertantang untuk mencapai prestasi yang tinggi. Pada tahun 1995, gugus tugas NCTM pada bidang matematika yang menjanjikan menemukan perubahan, ternyata dalam 15 tahun berikutnya hanya sedikit yang berubah (Sheffield, Bennett, Beriozabal, DeArmond, & Wertheimer, 1999). Definisi bakat matematika berbeda-beda tergantung pada alat identifikasi yang digunakan dan program yang ditawarkan. Terlepas dari definisi yang digunakan, menemukan siswa dengan bakat matematika merupakan sebuah tantangan bagi para pendidik dan masyarakat. Seringkali bakat dalam matematika diidentifikasi melalui prestasi di kelas, nilai ujian, dan

rekomendasi. Namun, penelitian menunjukkan bahwa tingkat prestasi yang tinggi dalam matematika sekolah bukanlah unsur yang diperlukan untuk mencapai tingkat prestasi yang tinggi dalam matematika (Hong & Aqui, 2004; Mayer & Hegarty, 1996; Pehkonen, 1997; Sternberg, 1996). Perbedaan yang nyata antara matematika sekolah dan prestasi matematika menunjukkan bahwa beberapa siswa berbakat diabaikan oleh praktik yang ada di sekolah.

1.3 Klasifikasi Belajar Matematika

James dan James (1996) dalam kamus matematikannya mengatakan bahwa Matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep berhubungan lainnya dengan jumlah banyak dan terbagi ke dalam tiga bidang, yaitu aljabar, analisis dan geometri. Selanjutnya, Johnson & Rising dalam JICA (2001) mengatakan bahwa Matematika adalah pola berpikir, pola mengorganisasikan, pembuktian yang logis, yang menggunakan bahasa dengan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol dan padat, lebih berupa bahasa simbol mengenai ide dari pada mengenai bunyi. Sementara Kline dalam JICA (2001) mengatakan pula, bahwa matematika itu bukanlah pengetahuan menyendiri yang dapat sempurna karena dirinya sendiri, tetapi adanya matematika itu terutama untuk membantu manusia dalam memahami dan menguasai permasalahan sosial, ekonomi dan alam. Menurut Gagne dalam (Joni Wilson Sitepu, (2009)) menyatakan bahwa Matematika memiliki cakupan objek yang sangat luas yang bersifat langsung yang terdiri dari fakta, konsep, skill dan prinsip, serta yang bersifat tidak langsung, seperti transfer belajar, kemampuan inkuiri, kemampuan memecahkan masalah, disiplin pribadi dan penghargaan terhadap struktur matematika. Dari berbagai definisi matematika yang telah dikemukakan di atas, dapat dipahami

betapa banyak manfaat belajar matematika dalam upaya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi dalam kehidupan sehari-hari. Namun untuk matematika yang dipelajari di sekolah dan di perguruan tinggi dapat didefinisikan bahwa matematika adalah pelajaran tentang kuantitas dan hubungannya dengan menggunakan bilangan dan simbol.

Cornelius dalam Mulyono (1998) mengemukakan beberapa alasan tentang perlunya belajar Matematika bagi siswa/mahasiswa, antara lain karena :

1. Selain digunakan dalam segala segi kehidupan,
2. Semua bidang studi memerlukan matematika yang sesuai,
3. Merupakan sarana komunikasi yang kuat, singkat, dan jelas,
4. Dapat dipergunakan untuk menyajikan informasi dalam berbagai cara,
5. Meningkatkan kreativitas,
6. Memberikan kepuasan terhadap usaha memecahkan masalah yang menantang.

Dari pendadapat di atas dapat dipahami bahwa matematika merupakan ilmu pengetahuan yang memiliki cakupan objek yang sangat luas dan kompleks, mencakup konsep, fakta, skill dan prinsip, transfer belajar, kemampuan inkuiri, kemampuan memecahkan masalah dan lain sebagainya. Matematika sangat dibutuhkan dalam kebutuhan belajar karena mampu untuk membantu seseorang dalam memecahkan berbagai persoalan yang dihadapainya, menggunakan pola pikir yang sistematis dan terstruktur (*rasional*), cermat, jelas dan akurat. Kemampuan untuk menciptakan gagasan-gagasan dan alternatif pemecahan masalah secara rasional ini dapat dimiliki oleh siswa dengan kemampuan pengetahuan dan keterampilan Matematika yang memadai guna memperoleh komunikasi belajar Matematika yang optimal.

1.4 Belajar Matematika

Pembelajaran matematika dengan pemahaman semakin mendapat perhatian dari para pendidik matematika dan psikolog dan secara bertahap diangkat menjadi salah satu tujuan terpenting pendidikan matematika bagi semua siswa, realisasi tujuan ini telah lama menjadi permasalahan. Banyak faktor yang mungkin menyebabkan hal ini, seperti pengetahuan dan pedagogi guru, kurikulum, dll. Salah satu faktor masalah, yaitu kurikulum, dengan fokus pada deskripsi satu kerangka kurikulum tentang isu-isu yang terkait dengan peningkatan pembelajaran bermakna di sekolah-sekolah. Fokus ini penting karena, meskipun visi siswa belajar matematika dengan pemahaman sering muncul dalam kerangka kurikulum, visi ini cenderung kurang dijelaskan, sehingga memberikan dukungan yang terbatas kepada pengembang kurikulum. Prinsip dan Standar Matematika Sekolah, sebuah kerangka kurikulum matematika yang dirilis oleh National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) dalam (Joni Wilson Sitepu, (2009)). Prinsip dan standar matematika sekolah didasarkan pada prinsip-prinsip pembelajaran oleh guru dan administrator harus menggunakannya sebagai dasar pengalaman yang mereka rencanakan untuk siswanya.

Prinsip-prinsip tersebut antara lain sebagai berikut:

1. Belajar adalah suatu proses mengkonstruksi pengetahuan secara aktif.
 - a. Menciptakan lingkungan dan merencanakan pengalaman yang mendorong penyelidikan, pertanyaan, prediksi, eksplorasi, pengumpulan, permainan edukatif, dan komunikasi
 - b. Melibatkan pelajar dalam pengalaman yang mendorong konstruksi pengetahuan pribadi mereka, misalnya sains dan matematika secara langsung dan langsung; drama; gerakan kreatif; representasi artistik; menulis dan berbicara untuk belajar

- c. Memberikan pengalaman yang melibatkan siswa secara aktif dan bermakna secara pribadi
- 2. Siswa membangun pengetahuan dan menjadikannya bermakna berdasarkan pengetahuan dan pengalaman mereka sebelumnya.
 - a. Mencari tahu apa yang sudah diketahui dan dapat dilakukan siswa
 - b. Menciptakan lingkungan belajar dan merencanakan pengalaman yang membangun pengetahuan peserta didik sebelumnya
 - c. Memastikan bahwa peserta didik dapat melihat dirinya tercermin dalam materi pembelajaran yang digunakan di sekolah.
 - d. Mengenali, menghargai, dan menggunakan keragaman pengalaman dan informasi yang dibawa siswa ke sekolah.
 - e. Memberikan kesempatan belajar yang menghormati dan mendukung ras, budaya, dan ras siswa. Dan identitas sosial
 - f. Memastikan bahwa siswa diundang atau ditantang untuk membangun pengetahuan sebelumnya, mengintegrasikan pemahaman baru dengan pemahaman yang sudah ada
- 3. Pembelajaran ditingkatkan bila dilakukan dalam lingkungan sosial dan kolaboratif.
 - a. memastikan bahwa pembicaraan, kerja kelompok, dan usaha kolaboratif merupakan hal yang penting dalam kegiatan kelas
 - b. Melihat bahwa pelajar mempunyai kesempatan yang sering untuk belajar dari dan bersama orang lain
 - c. Menyusun peluang bagi pelajar untuk terlibat dalam interaksi sosial yang beragam dengan teman sebaya dan orang dewasa

- d. Membantu siswa untuk melihat diri mereka sebagai anggota komunitas pembelajar
- 4. Siswa perlu terus memandang pembelajaran sebagai satu kesatuan yang utuh.
 - a. Merencanakan peluang untuk membantu siswa membuat hubungan antar kurikulum dan dengan dunia luar dan menyusun aktivitas yang mengharuskan siswa untuk merefleksikan hubungan tersebut
 - b. Mengundang siswa untuk menerapkan strategi dari seluruh kurikulum untuk memecahkan masalah dalam situasi nyata
- 5. Peserta didik harus melihat dirinya mampu dan berhasil.
 - a. Menyediakan aktivitas, sumber daya, dan tantangan yang sesuai dengan perkembangan pelajar
 - b. Mengkomunikasikan harapan yang tinggi terhadap prestasi kepada semua siswa
 - c. Mendorong pengambilan risiko dalam pembelajaran
 - d. Memastikan bahwa semua siswa mengalami kesuksesan sejati secara teratur
 - e. Menghargai eksperimen dan memperlakukan pendekatan sebagai tanda pertumbuhan
 - f. Sering memberikan kesempatan bagi siswa untuk merenungkan dan menjelaskan apa yang mereka ketahui dan dapat lakukan
 - g. Memberikan pengalaman pembelajaran dan sumber daya yang mencerminkan keragaman komunitas lokal dan global
 - h. Memberikan kesempatan belajar yang mengembangkan harga diri
- 6. Peserta didik mempunyai cara yang berbeda-beda dalam mengetahui dan merepresentasikan pengetahuan.

- a. Mengenali cara-cara yang disukai setiap pelajar dalam membangun makna dan memberikan kesempatan untuk mengeksplorasi cara-cara alternative
 - b. Merencanakan berbagai macam pengalaman terbuka dan strategi penilaian
 - c. Mengenali, mengakui, dan membangun beragam cara siswa dalam mengetahui dan merepresentasikan pengetahuan mereka
 - d. Menyusun kesempatan yang sering bagi siswa untuk menggunakan berbagai bentuk seni—musik, drama, seni visual, tari, gerak, kerajinan tangan—sebagai sarana untuk mengeksplorasi, merumuskan, dan mengekspresikan gagasan
7. Refleksi merupakan bagian integral dari pembelajaran.
- a. Menantang keyakinan dan praktik mereka berdasarkan refleksi berkelanjutan
 - b. Merefleksikan proses dan pengalaman pembelajaran mereka sendiri
 - c. Mendorong siswa untuk merefleksikan proses dan pengalaman belajar mereka
 - d. Mendorong siswa untuk mengakui dan mengartikulasikan pembelajaran mereka
 - e. Membantu siswa menggunakan refleksi mereka untuk memahami diri mereka sendiri sebagai pembelajar, membuat hubungan dengan pembelajaran lain, dan melanjutkan pembelajaran

1.5 Kegunaan Matematika

Pentingnya matematika diketahui semua orang, kreatif dan diakui secara global. Pentingnya hal ini tidak dapat terlalu ditekankan. Matematika mempunyai peranan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan modern. Matematika diyakini sebagai ibu dari ilmu pengetahuan modern. Dasar-dasar yang

dikembangkan dalam matematika seperti persamaan, hukum dan logaritma digunakan secara implisit dalam ilmu-ilmu lain. Misalnya, perkembangan algoritma dalam matematika akan mempengaruhi masa depan ilmu komputer karena sembilan puluh persen teori ilmu komputer dan struktur pemrograman didasarkan pada algoritma abstrak. Contoh lain terkait dengan bidang medis dimana, persamaan yang menggambarkan mekanika jantung termasuk mekanika darah, otot, dan katup serta elektrofisiologi adalah berbeda, dalam kedua kasus tersebut pengobatan yang realistis menuntut penggunaan metode yang memperhitungkan. untuk anisotropi, homogenitas, dan geometri kompleks” yang merupakan bidang dalam matematika abstrak. Matematika penting karena penggunaannya sehari-hari dalam kehidupan nyata oleh semua orang. Operasi aritmatika dasar telah digunakan manusia mengenai asal usul, budaya, dan bahasanya. Keempat operasi ini terdiri dari bagian dasar matematika. Orang menggunakan matematika untuk menimbang besaran yang digunakan melalui penjumlahan dan pengurangan menggunakan timbangan dan satuan seperti kilogram dan liter. Contoh lainnya mengenai pentingnya matematika dalam kehidupan sehari-hari adalah mengatur bagaimana pertumbuhan keuangan dan bagaimana menjaganya agar tidak berkurang. Operasi aritmatika sederhana (plus dan minus) digunakan untuk menghitung pendapatan dari rekening tabungan atau tagihan yang terakumulasi pada kartu kredit dan operasi ini dapat menghasilkan keuntungan besar seiring berjalannya waktu. Pembelajaran matematika penting adalah bahwa matematika adalah satu-satunya bahasa bersama yang digunakan oleh semua umat manusia tanpa memandang asal usul, jenis kelamin, agama, atau budaya mereka. Matematika menghubungkan manusia dengan budaya lain untuk mengkomunikasikan dan mentransfer pemahaman tentang fenomena aneh. Matematika lebih dari sekedar ilmu angka yang diajarkan oleh guru di sekolah kepada

siswa/siswa yang menikmati atau takut terhadapnya. Ia mempunyai peranan penting dalam kehidupan individu dan masyarakat pada umumnya. Teori matematika digunakan sehari-hari baik oleh para ahli ilmu terapan seperti dokter atau oleh koki di restoran murah. Hal ini perlu diperkuat dalam pendidikan untuk membekali siswa dengan keterampilan yang dibutuhkan untuk mencapai aspirasi karir pendidikan tinggi dan mencapai kepuasan pribadi.

DAFTAR PUSTAKA

- Ada, O. C. 2015. Mathematics Applications for Agricultural Development: Implications for Agricultural Extension Delivery. *Journal of Natural Sciences Extension delivery*, 5, 20
- Dossey. 1992. The nature of mathematics: Its role *.ⁿ³ its influence. Dalam Grouws D. A. (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. (h. 39-48). New York: Macmillan Publishing Company.
- Ebbut, s dan Straker, A. 1995. *Children and mathematics : Mathematics in prima school*, part 1, London : Collins Education.
- James, R. dan James. 1974. ***Introductory and Informal Approach***, Belmonth : Brooks/Cole Publishing Company
- Joni Wilson Sitepu, (2009). Pengaruh penerapan strategi pembelajaran dan proses berpikir terhadap kemampuan komunikasi matematika siswa SMP Kota Pematangsiantar tahun ajaran 2008/2009. *Thesis UNIMED*. Medan.
- JICA. 2001. *Common Textbook Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. FPMIPA Jurusan Pendidikan Matematika UPI, Bandung.
- Mulyono. 1998.. *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar*. Jakarta: Rineka Cipta.
- NCTM. 2000.. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*.
- Polya. 1962. *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: John Wiley .

BAB 2

LOGIKA MATEMATIKA

Oleh Ketut Queena Fredlina

2.1 Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering kali dihadapkan pada berbagai keputusan dan pernyataan yang memerlukan pemikiran yang jelas dan logis. Inilah peran penting yang dimainkan oleh logika matematika. Logika matematika adalah bahasa yang memungkinkan kita untuk merinci, menggambarkan, dan menganalisis pemikiran yang rasional (Hurley, 2017). Dengan pemahaman yang baik tentang konsep-konsep dasar dalam logika matematika, kita dapat membangun dasar yang kuat untuk berpikir secara kritis, mengevaluasi argumen-argumen, dan membuat keputusan yang cerdas (Enderton, 2001). Dalam bab ini, kita akan memulai perjalanan kita menuju pemahaman yang lebih mendalam tentang logika matematika, menjelajahi proposisi, operator logika, tabel kebenaran, hukum logika, dan konsep-konsep penting lainnya yang membentuk dasar dari pemikiran rasional.

2.2 Proposisi

Proposisi adalah konsep dasar dalam logika matematika. Secara sederhana, proposisi adalah pernyataan yang dapat dianggap benar atau salah, tetapi tidak bisa bersifat ambigu atau samar. Proposisi adalah unit terkecil dari pemikiran logis, dan mereka membentuk pondasi dari segala jenis penalaran dalam matematika dan ilmu pengetahuan (Munir, 2016).

Proposisi dapat berupa pernyataan sederhana seperti "Langit itu biru" atau " $2 + 2 = 4$ ", yang dengan jelas dapat

dikategorikan sebagai benar atau salah. Mereka juga dapat lebih kompleks, seperti "Jika matahari bersinar, maka tanah akan menjadi hangat." Dalam contoh ini, proposisi tersebut masih dapat dievaluasi sebagai benar atau salah berdasarkan kondisi yang ada. Penting untuk memahami bahwa proposisi bukanlah pertanyaan, perintah, atau pernyataan yang bersifat ambigu. Contohnya, "Bagaimana cuaca hari ini?" bukan proposisi karena tidak memiliki nilai kebenaran yang tetap.

Adapun contoh proposisi dan bukan proposisi adalah sebagai berikut:

Contoh Proposisi:

1. "Bulan itu mengelilingi Bumi." - Ini adalah proposisi karena pernyataan ini dapat dianggap benar atau salah, dan dalam hal ini, benar.
2. " $1 + 1 = 3$." - Ini adalah proposisi karena pernyataan ini dapat dievaluasi bernilai salah. Dalam matematika, kita tahu bahwa $1 + 1$ sama dengan 2, bukan 3.
3. "Manusia dapat hidup di matahari" – Ini adalah proposisi karena pernyataan ini bernilai salah. Manusia tidak dapat hidup di matahari.

Contoh Bukan Proposisi:

1. "Bagaimana cuaca hari ini?" - Ini bukan proposisi karena ini adalah pertanyaan dan tidak memiliki nilai kebenaran yang tetap.
2. "Tolong buka pintu." - Ini adalah perintah, bukan proposisi. Itu adalah tindakan yang diminta, bukan pernyataan yang dapat dianggap benar atau salah.
3. "Wow!" - Ini bukan proposisi karena itu adalah ekspresi emosi atau kekaguman, bukan pernyataan yang dapat dievaluasi secara logis.

Apabila terdapat kalimat seperti “ x adalah bilangan ganjil”, pernyataan tersebut dinyatakan sebagai kalimat terbuka atau fungsi proposisi. Ketika kita berikan nilai tertentu pada x , misalnya $x = 2$ atau $x = 6$, maka kalimat ini menjadi proposisi yang jelas yang dalam hal ini akan bernilai benar.

Dalam matematika, kalimat terbuka digunakan secara luas untuk mendefinisikan fungsi, relasi, dan konsep-konsep lain yang melibatkan variabel. Mereka membantu kita menggambarkan hubungan dan aturan matematika dengan lebih abstrak.

2.3 Operator Logika

Operator logika adalah simbol atau kata-kata khusus yang digunakan untuk menghubungkan proposisi dan membangun pernyataan yang lebih kompleks dari proposisi-proposisi tersebut (Johar and Marthen, 2012). Operator logika digunakan untuk menyusun argumen, membuat keputusan, dan melakukan penalaran logis dengan lebih kompleks.

Ada beberapa operator logika yang umum digunakan dalam logika matematika, antara lain:

1. Konjungsi (dan): Operator ini dilambangkan dengan simbol " $\wedge$ ". Konjungsi menghasilkan pernyataan benar hanya jika kedua proposisi yang dihubungkan oleh "dan" adalah benar. Misalnya, jika p dan q adalah proposisi, maka $p \wedge q$ benar hanya jika p dan q sama-sama benar.
2. Disjungsi (atau): Operator ini dilambangkan dengan simbol " $\vee$ ". Disjungsi menghasilkan pernyataan benar jika salah satu atau kedua proposisi yang dihubungkan oleh "atau" adalah benar. Misalnya, $p \vee q$ benar jika p atau q atau keduanya adalah benar.
3. Negasi (tidak): Operator ini dilambangkan dengan simbol " $\sim$ ". Negasi menghasilkan pernyataan yang berlawanan dari proposisi yang diberikan. Misalnya, $\sim p$ adalah benar jika p salah, dan sebaliknya.

4. Implikasi (jika...maka...): Operator ini dilambangkan dengan " $\rightarrow$ ". Implikasi menghubungkan dua proposisi dan menghasilkan pernyataan benar kecuali jika proposisi pertama benar dan proposisi kedua salah. Misalnya, $p \rightarrow q$ benar jika p salah atau jika q benar.
5. Biimplikasi (jika dan hanya jika): Operator ini dilambangkan dengan " $\leftrightarrow$ ". Biimplikasi menghasilkan pernyataan benar hanya jika kedua proposisi yang dihubungkan olehnya memiliki nilai kebenaran yang sama. Misalnya, $p \leftrightarrow q$ benar jika p dan q sama-sama benar atau jika keduanya sama-sama salah.

2.4 Tabel Kebenaran

Tabel kebenaran adalah alat yang sangat berguna dalam logika matematika untuk menganalisis dan mengevaluasi nilai kebenaran proposisi atau pernyataan logis yang lebih kompleks (Pohan, 2007). Tabel ini menyajikan semua kemungkinan kombinasi nilai kebenaran untuk proposisi-proposisi yang terlibat dalam suatu ekspresi logis dan membantu kita menentukan nilai kebenaran keseluruhan dari ekspresi tersebut.

Adapun tabel kebenaran untuk seluruh operator logika, dapat dilihat pada Tabel 2.1:

Tabel 2.1. Tabel Kebenaran Konjungsi, Disjungsi, Negasi, Implikasi, dan Biimplikasi

p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$
B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B
S	B	S	S	B	B
S	S	S	S	S	S

p	$\sim p$
B	S
S	B

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh 2-1:

Jika p dan q adalah proposisi. Bentuklah tabel kebenaran dari ekspresi logika berikut:

$$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow p)$$

Jawaban:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \rightarrow p$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow p)$
B	B	S	S	B	B	B
B	S	S	B	S	B	S
S	B	B	S	B	B	B
S	S	B	B	B	S	S

2.5 Hukum Logika

Hukum logika adalah serangkaian aturan dan prinsip yang mengatur bagaimana pernyataan logis, termasuk proposisi dan ekspresi logis yang lebih kompleks, dapat dievaluasi dan disusun. Aturan-aturan ini membentuk dasar dari penalaran logis yang

tepat dan membantu kita memastikan kesahihan dan validitas argumen-argumen kita. Beberapa hukum logika yang paling umum adalah:

Hukum Identitas

- (i) $p \vee \mathbf{S} \Leftrightarrow p$
- (ii) $p \wedge \mathbf{B} \Leftrightarrow p$

Hukum null/dominasi

- (i) $p \wedge \mathbf{S} \Leftrightarrow \mathbf{S}$
- (ii) $p \vee \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B}$

Hukum negasi

- (i) $p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathbf{B}$
- (ii) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow \mathbf{S}$

Hukum idempoten

- (i) $p \vee p \Leftrightarrow p$
- (ii) $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Hukum involusi (negasi ganda)

$$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$$

Hukum penyerapan (absorpsi)

- (i) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
- (ii) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Hukum komutatif

- (i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
- (ii) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Hukum asosiatif

- (i) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
- (ii) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

Hukum distributif

$$(i) \quad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(ii) \quad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Hukum De Morgan

$$(i) \quad \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$$(ii) \quad \sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Contoh 2-2:

Buktikan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Jawaban:

$$\begin{aligned} p \vee \sim(p \vee q) &\Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q) && \text{De Morgan} \\ &\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) && \text{Hukum Distributif} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{B} \wedge (p \vee \sim q) && \text{Hukum Negasi} \\ &\Leftrightarrow (p \vee \sim q) && \text{Hukum Identitas} \end{aligned}$$

Contoh 2-3:

Buktikan $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Jawaban :

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &\Leftrightarrow (p \vee \mathbf{S}) \wedge (p \vee q) && \text{Hukum identitas} \\ &\Leftrightarrow p \vee (\mathbf{S} \wedge q) && \text{Hukum distributif} \\ &\Leftrightarrow p \vee \mathbf{S} && \text{Hukum null/dominasi} \\ &\Leftrightarrow p && \text{Hukum identitas} \end{aligned}$$

2.6 Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

2.6.1 Tautologi

Sebuah proposisi dikatakan sebagai tautologi jika ia selalu benar, tidak peduli apa nilai kebenaran proposisi-proposisi yang terlibat dalamnya. Dengan kata lain, tautologi adalah proposisi yang memiliki nilai kebenaran benar dalam setiap situasi. Contoh tautologi adalah $\vee (p \vee \sim p)$, yang selalu benar karena itu adalah disjungsi antara proposisi p dan negasi p .

2.6.2 Kontradiksi

Sebuah proposisi dikatakan sebagai kontradiksi jika ia selalu salah, tidak peduli apa nilai kebenaran proposisi-proposisi yang terlibat dalamnya. Kontradiksi adalah proposisi yang tidak pernah benar dalam setiap konteks. Contoh kontradiksi adalah $(p \wedge \sim p)$, yang selalu salah karena itu adalah konjungsi antara proposisi p dan negasi p .

2.6.3 Kontingensi

Sebuah proposisi dikatakan sebagai kontingensi jika ia bisa benar atau salah tergantung pada nilai kebenaran proposisi-proposisi yang terlibat dalamnya. Proposisi kontingensi adalah proposisi yang bisa memiliki nilai kebenaran benar atau salah tergantung pada situasi atau konteks tertentu. Contoh kontingensi adalah $p \vee q$, di mana nilai kebenaran bergantung pada nilai kebenaran p dan q .

Contoh 2-4:

Periksa apakah proposisi berikut merupakan tautologi, kontradiksi, atau kontingensi

- $(p \rightarrow q) \vee (\sim p \vee q)$
- $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
- $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$

Jawaban:

- $(p \rightarrow q) \vee (\sim p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \vee (\sim p \vee q)$
B	B	S	B	B	B
B	S	S	S	S	B
S	B	B	B	B	B
S	S	B	B	B	B

Karena nilai kebenarannya adalah benar, maka ekspresi logika diatas merupakan **tautologi**.

b. $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$q \rightarrow \sim p$	$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	S
S	B	B	S	S	B	S
S	S	B	B	S	B	S

Karena nilai kebenarannya selalu salah, maka ekspresi logika diatas merupakan **kontradiksi**.

c. $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$
B	B	S	B	S	S
B	S	S	B	S	S
S	B	B	B	B	B
S	S	B	S	S	S

Karena nilai kebenarannya adalah benar dan juga salah, maka ekspresi logika diatas merupakan **kontingensi**.

Klasifikasi tautologi, kontradiksi, dan kontingensi membantu kita dalam analisis logis dan pemahaman proposisi-proposisi dalam berbagai konteks. Tautologi menunjukkan proposisi-proposisi yang selalu benar, kontradiksi menunjukkan proposisi-proposisi yang selalu salah, dan kontingensi menunjukkan proposisi-proposisi yang bisa berubah-ubah dalam nilai kebenarannya tergantung pada situasi atau kondisi tertentu. Pemahaman ini adalah bagian penting dari penalaran logis dan analisis argumen.

2.7 Ekuivalensi Logis

Ekuivalensi logis adalah hubungan logis antara dua proposisi atau ekspresi logis yang menunjukkan bahwa keduanya memiliki nilai kebenaran yang sama dalam setiap konteks atau situasi. Dalam simbolisasi, ekuivalensi logis umumnya dilambangkan dengan simbol " $\equiv$ " atau " $\leftrightarrow$ ".

Misalnya, jika kita memiliki dua proposisi, p dan q , maka $p \equiv q$ menyiratkan bahwa jika p benar, maka q juga benar, dan jika q benar, maka p juga benar. Selain itu, jika p salah, maka q juga salah, dan jika q salah, maka p juga salah. Dengan kata lain, $p \equiv q$ menunjukkan bahwa p dan q memiliki nilai kebenaran yang sama, atau keduanya benar, atau keduanya salah.

Contoh 2-5:

Tunjukkan apakah ekspresi logika berikut ekuivalen:

$\sim(p \vee q)$ dengan $(\sim p \wedge \sim q)$

Jawaban:

Dengan tabel kebenaran maka diperoleh:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B

Karena kedua ekspresi logika memiliki nilai kebenaran yang sama, maka $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$.

2.8 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Konvers, invers, dan kontraposisi adalah tiga jenis transformasi yang digunakan dalam logika matematika untuk memahami dan memanipulasi implikasi logis ($\rightarrow$). Implikasi logis adalah pernyataan yang menyatakan bahwa jika satu proposisi benar, maka proposisi lainnya juga benar. Inilah penjelasan masing-masing transformasi:

Konversi (Konverse): Dalam konversi, kita menukar urutan proposisi dalam sebuah implikasi. Misalnya, jika kita memiliki implikasi $p \rightarrow q$, maka konversi dari implikasi ini adalah $q \rightarrow p$. Perhatikan bahwa konversi tidak selalu menghasilkan implikasi yang ekuivalen; artinya, jika $p \rightarrow q$ benar, maka belum tentu $q \rightarrow p$ adalah benar.

Inversi (Invers): Dalam inversi, kita mengambil negasi dari kedua proposisi dalam sebuah implikasi. Jika kita memiliki implikasi $p \rightarrow q$, maka inversinya adalah $\sim p \rightarrow \sim q$. Perhatikan bahwa inversi juga tidak selalu menghasilkan implikasi yang ekuivalen; artinya, jika $p \rightarrow q$ benar, maka belum tentu $\sim p \rightarrow \sim q$ adalah benar.

Kontraposisi (Kontrapositif): Kontraposisi adalah transformasi yang menggabungkan konversi dengan inversi. Dalam kontraposisi, kita menukar urutan proposisi dan mengambil negasi dari keduanya. Jadi, jika kita memiliki implikasi $p \rightarrow q$, maka kontraposisinya adalah $\sim q \rightarrow \sim p$. Salah satu sifat menarik dari kontraposisi adalah bahwa itu selalu menghasilkan implikasi yang ekuivalen dengan implikasi asli. Artinya, jika $p \rightarrow q$ adalah benar, maka $\sim q \rightarrow \sim p$ juga benar, dan sebaliknya.

Transformasi ini sering digunakan dalam pemecahan masalah logis dan dalam pembuktian teorema. Mereka membantu kita memahami hubungan antara proposisi dalam sebuah implikasi

dan bagaimana pernyataan tersebut dapat diubah atau dimanipulasi untuk mengungkapkan hubungan-hubungan logis yang lebih dalam.

Contoh 2-6:

Ubahlah implikasi berikut menjadi konvers, invers, dan kontraposisi.

- a. Jika cuaca cerah, maka kita akan pergi piknik.
- b. Badan menjadi lemas akibat dari kerja yang berlebihan.

Jawaban:

- a. Dalam hal ini p = cuaca cerah dan q = kita akan pergi piknik.
Konvers : Jika kita pergi piknik, maka cuaca cerah
Invers : Jika cuaca tidak cerah, maka kita tidak akan pergi piknik
Kontraposisi : Jika kita tidak pergi piknik, maka cuaca tidak cerah
- b. Dalam hal ini p = kerja yang berlebihan dan q = badan menjadi lemas.
Konvers : Jika badan menjadi lemas, maka kerja dilakukan berlebihan
Invers : Jika kerja tidak berlebihan, maka badan tidak menjadi lemas.
Kontraposisi : Jika badan tidak menjadi lemas, maka tidak bekerja yang berlebihan.

DAFTAR PUSTAKA

- Enderton, H.B. 2001. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press.
- Hurley, P.J. 2017. *Introduction to Logic*. Cengage Learning.
- Johar, R. and Marthen, R. 2012. *Logika Matematika*. Bandung: Penerbit ITB.
- Munir, R. 2016. *Matematika Diskrit*. Revisi Keenam. Bandung: Informatika Bandung.
- Pohan, A.W. 2007. *Pengantar Logika Matematika*. Erlangga.

BAB 3

RELASI, FUNGSI, DAN VARIABEL

Oleh Putri Anugrah Cahya Dewi

3.1 Pendahuluan

Dalam dunia matematika, konsep relasi, fungsi, dan variabel adalah fondasi utama yang mendukung berbagai bidang ilmu, mulai dari fisika hingga ilmu komputer. Mengapa belajar tentang relasi, fungsi, dan variabel penting? Jawabannya sederhana: mereka adalah alat penting dalam pemecahan masalah, analisis data, dan pemodelan dunia nyata. Dengan memahami konsep-konsep ini, Anda akan dapat merumuskan pertanyaan matematis yang lebih baik, mengidentifikasi hubungan dalam data, dan membuat prediksi yang lebih akurat. Tanpa basa-basi lebih lanjut, mari kita mulai dengan memahami esensi dari relasi, fungsi, dan variabel.

3.2 Relasi

Dalam matematika, "relasi" adalah konsep yang menggambarkan hubungan atau korespondensi antara elemen-elemen dari dua himpunan atau lebih (Rusli et al., 2018). Contoh relasi yang diterapkan dalam kehidupan sehari-hari yaitu hubungan antara luas lahan yang digunakan untuk menanam tanaman dan hasil panen yang dihasilkan, hubungan antara jenis pupuk dan kualitas tanaman yang dihasilkan, dan lain sebagainya.

Salah satu cara yang umum digunakan untuk menyatakan relasi adalah dengan menggunakan "pasangan terurut" atau "*ordered pairs*". Pasangan terurut adalah cara yang sederhana namun kuat untuk menggambarkan bagaimana elemen-elemen dalam dua himpunan terkait satu sama lain. Misalkan A dan B

merupakan himpunan, maka himpunan semua pasangan terurut (a, b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$ diperoleh dengan perkalian kartesius A dengan B . Hasil kali kartesian A dengan B disimbolkan dengan $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \quad (1)$$

Jika $(a, b) \in A \times B$ dan a memiliki relasi dengan b , maka dapat dituliskan $a R b$. Sedangkan apabila a tidak memiliki relasi dengan b , maka dituliskan $a \not R b$. Relasi antara dua himpunan juga dapat dikatakan sebagai relasi biner. Relasi biner dari A ke B merupakan himpunan bagian dari $A \times B$. Dalam relasi biner juga tidak berlaku hukum komutatif, di mana $(a, b) \neq (b, a)$.

Contoh 3-1

Misalkan diketahui dua himpunan sebagai berikut.

$$A = \{2, 4\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

Tentukan himpunan pasangan berurutan dari himpunan A dan B .

Penyelesaian:

Jumlah anggota himpunan pasangan terurut A dan B yaitu

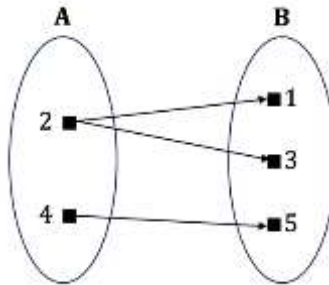
$$|A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$$

Maka,

$$A \times B = \{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5)\}$$

Jika relasi R didefinisikan sebagai $R = \{(2,1), (2,3), (4,5)\}$, maka relasi R merupakan himpunan bagian dari $A \times B$ atau dapat dituliskan $R \subseteq A \times B$. Maka, $(2,1) \in R$ atau dapat ditulis $2 R 1$ sedangkan $(2,3) \notin R$ atau dapat ditulis $2 \not R 3$.

Himpunan pasangan terurut A dengan B juga dapat dituliskan dalam bentuk diagram panah. Dari contoh 3-1, maka dapat dibuat diagram panah sebagai berikut.



Gambar 3.1. Diagram Panah Contoh 3-1

Dari diagram panah tersebut, dapat diketahui bahwa himpunan A merupakan daerah asal R dan himpunan B dapat disebut sebagai daerah hasil R .

Contoh 3-2

Seorang petani mencatat jumlah pupuk (dalam kilogram) yang digunakan dan tinggi tanaman jagungnya (dalam sentimeter) pada beberapa waktu tertentu. Misalkan P adalah jumlah pupuk dan Q adalah tinggi tanaman jagungnya.

$$P = \{10, 18, 30, 36, 49\}$$

$$Q = \{5, 6, 7\}$$

Jika relasi R dari P ke Q didefinisikan sebagai $(p, q) \in R$ jika p kelipatan dari q .

Tentukan anggota himpunan R .

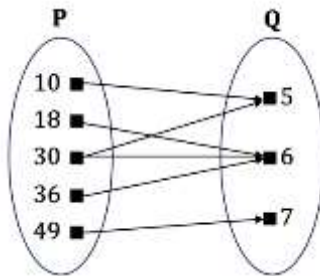
Penyelesaian:

Himpunan pasangan berurutan P ke Q dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$R = \{(10, 5), (18, 6), (30, 5), (30, 6), (36, 6), (49, 7)\}$$

Dari himpunan pasangan berurutan R juga dapat diketahui bahwa $R \subseteq P \times Q$.

Diagram panah dari pasangan berurutan P dan Q dapat dituliskan sebagai berikut.



Gambar 3.2. Diagram Panah Contoh 3-2

3.2.1 Operasi Relasi

Oleh karena relasi biner merupakan himpunan pasangan berurutan, maka operasi pada himpunan juga berlaku untuk operasi pada relasi. Terdapat 5 (lima) operasi pada relasi sebagai berikut.

1. Irisan (*intersection*)

Operasi ini menghasilkan relasi baru yang memuat elemen-elemen yang terdapat dalam kedua relasi yang dioperasikan. Irisan relasi dilambangkan dengan simbol $\cap$. Misalnya, jika P dan Q adalah dua relasi, maka $P \cap Q$ adalah hasil dari irisan P dan Q.

$$P \cap Q = \{x | x \in P \text{ dan } x \in Q\}$$

2. Gabungan (*union*)

Operasi ini menggabungkan dua relasi atau lebih untuk menghasilkan relasi baru yang memuat semua elemen yang ada dalam salah satu atau kedua relasi yang dioperasikan. Penyatuan relasi dilambangkan dengan simbol $\cup$. Misalnya, jika P dan Q adalah dua relasi, maka $P \cup Q$ adalah hasil gabungan P dan Q.

$$P \cup Q = \{x | x \in P \text{ atau } x \in Q\}$$

3. Beda Setangkup (*symmetric difference*)

Operasi ini menggabungkan dua relasi dan menghasilkan relasi baru yang berisi elemen-elemen yang ada dalam salah satu relasi tetapi tidak ada dalam keduanya secara bersamaan. Operasi ini juga disebut sebagai "diferensial simetris" karena menghasilkan himpunan yang berisi elemen yang berbeda secara simetris antara dua relasi.

$$P \oplus Q = \{x | x \in P \text{ tetapi } x \notin Q \text{ dan } x \in Q \text{ tetapi } x \notin P\}$$

4. Selisih - (*difference*)

Operasi ini menghasilkan relasi baru yang memuat elemen-elemen yang terdapat dalam relasi pertama tetapi tidak dalam relasi kedua. Operasi perpotongan dapat digunakan untuk menghapus elemen-elemen yang sama dari dua relasi. Operasi ini juga dapat disebut sebagai "perbedaan relasi."

$$P - Q = \{x | x \in P \text{ atau } x \notin Q\}$$

5. Komplemen (P^c)

Operasi ini digunakan untuk menghasilkan himpunan yang berisi elemen-elemen yang tidak terdapat dalam himpunan P, yaitu elemen-elemen yang "tidak termasuk" dalam himpunan P.

$$P^c = \{x | x \notin P, x \in S\}$$

Contoh 3-3

Seorang petani memiliki dua kebun yang berbeda, yaitu Kebun A dan Kebun B, yang berisi berbagai jenis tanaman. Petani tersebut mencatat jenis-jenis tanaman yang ada di setiap kebun sebagai berikut:

Kebun A: Tanaman sayuran

$A = \{\text{Selada, Kubis, Wortel, Tomat}\}$

Kebun B: Tanaman buah

$B = \{\text{Apel, Pisang, Jeruk, Mangga}\}$

Relasi $R_1 = \{(Selada, Apel), (Kubis, Pisang), (Wortel, Jeruk), (Tomat, Mangga)\}$

Relasi $R_2 = \{(Selada, Pisang), (Selada, Jeruk), (Selada, Mangga)\}$

Tentukan $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1$, dan $R_1 \oplus R_2$.

Penyelesaian:

$$R_1 \cup R_2$$

$$= \{(Selada, Apel), (Kubis, Pisang), (Wortel, Jeruk), (Tomat, Mangga), (Selada, Pisang), (Selada, Jeruk), (Selada, Mangga)\}$$

$$R_1 \cap R_2$$

$$= \{(Selada, Apel)\}$$

$$R_1 - R_2$$

$$= \{(Kubis, Pisang), (Wortel, Jeruk), (Tomat, Mangga)\}$$

$$R_2 - R_1$$

$$= \{(Selada, Pisang), (Selada, Jeruk), (Selada, Mangga)\}$$

$$R_1 \oplus R_2$$

$$= \{(Kubis, Pisang), (Wortel, Jeruk), (Tomat, Mangga), (Selada, Pisang), (Selada, Jeruk), (Selada, Mangga)\}$$

3.2.2 Sifat-Sifat Relasi

Relasi memiliki beberapa sifat yang menggambarkan hubungan antara elemen-elemen dalam relasi tersebut. Berikut adalah beberapa sifat umum relasi:

1. Refleksif

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan refleksif jika setiap elemen a dalam himpunan A memiliki hubungan dengan dirinya sendiri dalam relasi R . Secara formal, untuk setiap a dalam A , (a, a) harus ada dalam R .

$$R = \{(a, a) | a \in A\}$$

Relasi "Sama dengan" merupakan salah satu contoh relasi refleksif karena setiap angka sama dengan dirinya sendiri (misalnya, $1 = 1$, $2 = 2$, dsb).

Contoh 3-4

Seorang ahli pertanian sedang melakukan penelitian tentang pertumbuhan tanaman di kebunnya. Dia memiliki himpunan A yang berisi berbagai jenis tanaman yang ada di kebunnya:

$A = \{\text{Padi, Jagung, Tomat, Jeruk}\}$

Jika terdapat relasi R yang terbentuk dari himpunan A yang didefinisikan sebagai berikut.

$R = \{(\text{Padi, Padi}), (\text{Jagung, Jagung}), (\text{Tomat, Tomat}), (\text{Jeruk, Jeruk})\}$

Maka, apakah relasi R termasuk relasi refleksif? Sebutkan alasannya!

Penyelesaian:

Ya, relasi R adalah refleksif. Ini terjadi karena setiap elemen dalam himpunan A membentuk pasangan terurut dengan dirinya sendiri dalam relasi R. Dalam notasi matematika, untuk setiap a dalam A, pasangan terurut (a, a) ada dalam R. Ini sesuai dengan definisi sifat refleksif, di mana setiap elemen memiliki hubungan dengan dirinya sendiri dalam relasi tersebut. Dalam konteks ini, relasi R menggambarkan fakta bahwa setiap tanaman tumbuh dengan dirinya sendiri.

2. Simetris (Setangkup) dan Antisimetris

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan simetris jika untuk setiap pasangan terurut (a, b) yang ada dalam R, pasangan terurut (b, a) juga ada dalam R. Relasi "Sama dengan" merupakan relasi simetris karena jika $a = b$, maka $b = a$.

$$(a, b) \in R \text{ maka } (b, a) \in R$$

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan antisimetris jika untuk setiap pasangan terurut (a, b) dan (b, a) yang ada dalam R, a harus sama dengan b ($a = b$). Hubungan "lebih tua dari" antara dua orang adalah relasi antisimetris karena jika

A lebih tua dari B dan B lebih tua dari A, maka A dan B harus memiliki usia yang sama.

$$(a, b) \in R \text{ dan } (b, a) \in R \\ \text{sehingga } a = b \text{ untuk semua } a \text{ dan } b \in R$$

Contoh 3-5

Misalkan diketahui himpunan berikut.

$A = \{\text{padi, jagung, tomat}\}$

Buatlah relasi R yang termasuk relasi simetris dan antisimetris.

Penyelesaian:

Relasi simetris

$R_1 = \{(\text{padi, padi}), (\text{padi, jagung}), (\text{padi, tomat}), (\text{jagung, tomat}), (\text{tomat, padi}), (\text{jagung, padi}), (\text{tomat, jagung})\}$

Relasi antisimetris

$R_2 = \{(\text{padi, padi}), (\text{jagung, jagung}), (\text{tomat, tomat})\}$

Relasi R_2 juga termasuk relasi simetris.

3. Transitif

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan simetris jika untuk setiap pasangan terurut (a, b) yang ada dalam R , pasangan terurut (b, a) juga ada dalam R .

$$(a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in R \text{ maka } (a, c) \in R$$

Relasi "Sama dengan" juga merupakan relasi simetris karena jika $a = b$, maka $b = a$.

Contoh 3-6

Seorang petani memiliki tiga jenis tanaman di kebunnya: padi, jagung, tomat dan kacang hijau. Dia mencatat hubungan pertumbuhan antara tanaman-tanaman ini sebagai relasi R . Relasi R didefinisikan sebagai berikut:

$R = \{(jagung, padi), (tomat, padi), (tomat, jagung), (kacang hijau, padi), (kacang hijau, jagung), (kacang hijau, tomat)\}$

Apakah relasi R merupakan relasi transitif? Sebutkan alasannya.

Penyelesaian:

Tabel 3.1. Tabel berpasangan

(a,b)	(b,c)	(a,c)
(tomat, jagung)	(jagung, padi)	(tomat, padi)
(kacang hijau, jagung)	(jagung, padi)	(kacang hijau, padi)
kacang hijau, tomat)	(tomat, padi)	kacang hijau, padi)
(kacang hijau, tomat)	(tomat, jagung)	(kacang hijau, jagung)

Ya, relasi R adalah transitif. Ini terjadi karena setiap pasangan (a, b) dan (b, c) yang ada dalam relasi R menghasilkan pasangan (a, c) yang juga ada dalam relasi tersebut.

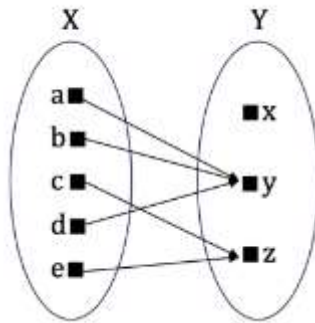
3.3 Fungsi

Fungsi adalah relasi khusus yang menghubungkan setiap elemen dari satu himpunan (atau dapat disebut domain) ke tepat satu elemen dalam himpunan lain (atau dapat disebut kodomain) (M. Nur Rianto Al-Arif, 2013). Fungsi menggambarkan relasi atau keterkaitan antara elemen-elemen kedua himpunan ini, di mana setiap elemen dalam domain memiliki "pasangan" atau "nilai fungsi" tunggal dalam kodomain.

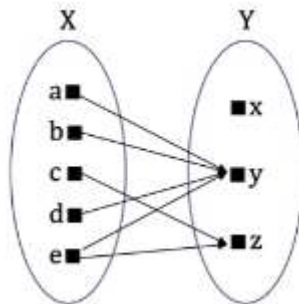
Jika fungsi f merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B , maka fungsi f dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f: A \rightarrow B$$

Berikut contoh hubungan antara domain, kodomain dan range.



Gambar 3.3. Relasi dan Fungsi



Gambar 3.4. Relasi dan Bukan Fungsi

Dari gambar 3.3 dan gambat 3.4, dapat diketahui bahwa $X = \{a, b, c, d, e\}$ merupakan daerah asal atau domain, $Y = \{x, y, z\}$ merupakan daerah hasil atau kodomain, dan $\{y, z\}$ merupakan daerah hasil atau range.

3.3.1 Jenis-Jenis Fungsi

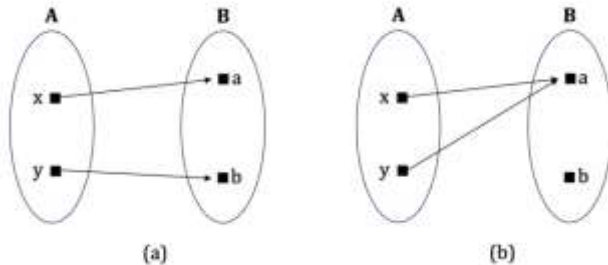
Fungsi dibedakan menjadi 3 (tiga) jenis (Siang, 2014) sebagai berikut.

1. Fungsi Satu-Satu (Injektif)

Sebuah fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut injektif jika setiap elemen pada domain A dipetakan ke elemen berbeda dalam

kodomain B . Dengan kata lain, tidak ada dua elemen berbeda dalam domain A yang dipetakan ke elemen yang sama dalam kodomain B .

Fungsi f dikatakan injektif jika untuk setiap x_1 dan x_2 dalam A , jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$.

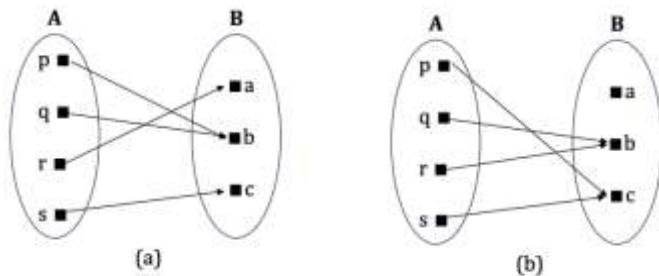


Gambar 3.5. (a) injektif, (b) bukan injektif

2. Fungsi Onto (Surjektif)

Sebuah fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut surjektif jika setiap elemen dalam kodomain B dapat dipetakan dari setidaknya satu elemen dalam domain A . Dengan kata lain, fungsi surjektif mencakup seluruh kodomain dengan pemetaan dari elemen-elemen dalam domain.

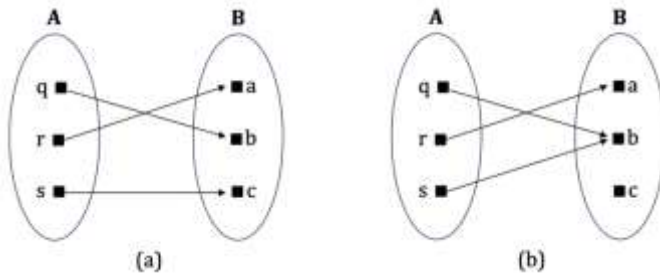
Fungsi f dikatakan surjektif jika untuk setiap y dalam B , ada setidaknya satu x dalam A sehingga $f(x) = y$.



Gambar 3.6. (a) surjektif, (b) bukan surjektif

3. Fungsi Korespondensi Satu-Satu (Bijektif)

Sebuah fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi injektif dan juga merupakan fungsi surjektif.



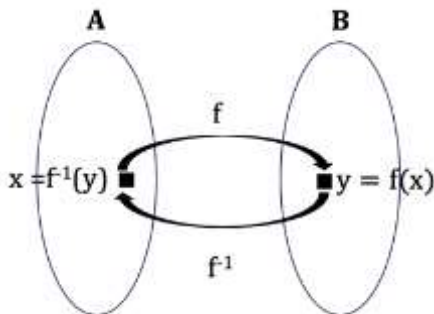
Gambar 3.7. (a) bijektif, (b) bukan bijektif

3.3.2 Fungsi Invers

Fungsi invers merupakan fungsi kebalikan dari fungsi asalnya. Fungsi invers dari fungsi f didefinisikan sebagai:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Berikut hubungan antara fungsi dan inversnya.



Gambar 3.8. Hubungan fungsi dan inversnya

Contoh 3-7

Misal diketahui $f(x) = 2x + 3$, maka tentukan $f^{-1}(x)$.

Penyelesaian:

$$f(x) = 2x + 3$$

$$y = 2x + 3$$

$$x = \frac{y - 3}{2}$$

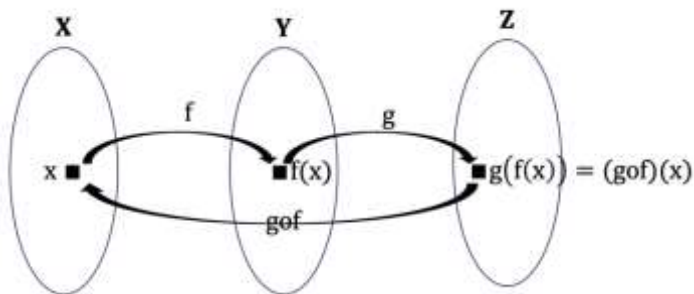
3.3.3 Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi adalah operasi matematika yang menggabungkan dua atau lebih fungsi untuk membentuk fungsi baru. Komposisi fungsi biasa dinotasikan dengan $(f \circ g)(x)$.

Jika terdapat dua fungsi yaitu $f(x)$ dan $g(x)$, maka komposisi fungsi $(f \circ g)(x)$ didefinisikan sebagai:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Berikut gambaran diagram komposisi fungsi.



Gambar 3.9. Diagram Komposisi Fungsi

Contoh 3-8

Misalkan diberikan dua fungsi:

$$f(x) = \frac{2x-4}{3x+1}$$

$$g(x) = 3x + 5$$

Tentukan $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$.

Penyelesaian:

Komposisi $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(3x + 5)$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{2(3x + 5) - 4}{3(3x + 5) + 1}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{6x + 6}{9x + 16}$$

Komposisi $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{2x - 4}{3x + 1}\right)$$

$$(g \circ f)(x) = 3\left(\frac{2x - 4}{3x + 1}\right) + 5$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{6x - 12}{3x + 1} + \frac{15x + 5}{3x + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{21x - 7}{3x + 1}$$

3.4 Variabel

Variabel adalah simbol atau lambang yang digunakan dalam matematika maupun ilmu lainnya, dimana besaran nilainya dapat berubah-ubah. Dalam konteks relasi dan fungsi, variabel adalah unsur yang digunakan untuk menggambarkan hubungan antara dua himpunan.

Terdapat dua jenis variabel berdasarkan nilainya, yaitu

1. Variabel diskrit

Variabel diskrit adalah variabel yang mengambil nilai-nilai terbatas dan terpisah. Ini berarti variabel tersebut hanya dapat memiliki nilai-nilai tertentu yang dapat dihitung atau dihitungkan.

Nilai-nilai variabel diskrit sering kali merupakan bilangan bulat atau kuantitas yang dapat dihitung secara eksak.

Contohnya jumlah siswa dalam sebuah kelas, jumlah koin yang dilempar, atau jumlah mobil yang melintas di suatu titik dalam waktu tertentu.

2. Variabel Kontinu

Variabel kontinu adalah variabel yang dapat mengambil nilai-nilai dalam rentang yang tak terbatas dan berkelanjutan. Ini berarti variabel tersebut dapat memiliki nilai apa pun dalam interval tertentu.

Nilai-nilai variabel kontinu sering kali merupakan kuantitas yang dapat diukur atau dihitung dalam bentuk bilangan riil. Contohnya tinggi badan seseorang, berat badan, suhu, atau waktu.

DAFTAR PUSTAKA

- M. Nur Rianto Al-Arif, M. S. 2013. *Matematika Terapan Untuk Ekonomi: Vol. 16x24 cm* (pp. 1–344).
- Rusli, M., Suniantara, I. K. P., & Nugroho, A. 2018. *Logika & Matematika* (E. Kurnia (ed.)). Penerbit Andi.
- Siang, J. J. 2014. *Logika Matematika* (F. S. Suyantoro (ed.)). Penerbit Andi.

BAB 4

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN FUNGSI

Oleh Novita Aswan

4.1 Pendahuluan

Dalam dunia matematika, fungsi adalah konsep fundamental yang memungkinkan kita untuk menggambarkan hubungan antara input dan output dalam suatu sistem. Fungsi dapat berupa hubungan matematis yang menggambarkan perubahan dalam variabel terhadap variabel lainnya. (Marsitin and Sesanti, 2019) Dalam banyak kasus, kita ingin memahami bagaimana fungsi-fungsi ini berperilaku, baik dalam hal persamaan maupun pertidaksamaan.

Pada subbab ini, kita akan menjelajahi konsep persamaan dan pertidaksamaan fungsi. Persamaan fungsi adalah pernyataan matematis di mana dua fungsi dianggap sama, yaitu memiliki output yang identik untuk setiap input yang sama. Persamaan fungsi sering digunakan untuk memecahkan masalah di berbagai bidang, seperti ilmu fisika, ekonomi, dan rekayasa. (Waney, Nicolaas and Kondo, 2018).

Di sisi lain, pertidaksamaan fungsi mengacu pada pernyataan matematis dimana hubungan antara dua fungsi adalah perbandingan yang dapat berupa lebih besar, lebih kecil, lebih besar sama dengan, atau lebih kecil sama dengan. (Suharno, 2014). Pertidaksamaan fungsi memiliki peran penting dalam menganalisis rentang nilai yang dimungkinkan untuk variabel dalam suatu konteks tertentu. Dengan pemahaman yang baik tentang persamaan dan pertidaksamaan fungsi, Anda akan memiliki alat

yang kuat untuk menganalisis dan memecahkan masalah matematis dan situasi kehidupan nyata dengan lebih baik.

4.2 Persamaan Fungsi

Persamaan fungsi adalah pernyataan matematis yang menyatakan bahwa dua fungsi memiliki nilai yang sama untuk setiap nilai input yang sesuai. (Estrellita V.Y.Waney, 2018). Dalam konteks ini, fungsi pertama biasanya diwakili oleh ungkapan matematis yang mengandung variabel dan menghasilkan output, sedangkan fungsi kedua bisa berupa fungsi yang sama atau berbeda, tetapi menghasilkan nilai yang sama dengan fungsi pertama untuk setiap nilai input yang sama. (Irmayanti, Rosalina and Dkk, 2021) Misalkan kita memiliki dua fungsi:

1. Fungsi pertama:

$$f(x) = 2x + 3$$

2. Fungsi kedua:

$$g(x) = x^2 + 1$$

Kita ingin mencari solusi dari persamaan $f(x) = g(x)$, yaitu nilai-nilai x yang membuat $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki nilai yang sama. Dalam hal ini, kita akan mencari nilai x yang memenuhi $2x + 3 = x^2 + 1$.

Persamaan fungsi adalah konsep yang penting dalam matematika karena memungkinkan kita untuk mencari titik-titik di mana dua fungsi memiliki nilai yang sama. Penyelesaiannya melibatkan mencari akar-akar persamaan dan menguji apakah nilai-nilai tersebut memenuhi persamaan awal. Dalam beberapa kasus, persamaan fungsi dapat diselesaikan secara analitis, sementara dalam kasus lain mungkin memerlukan pendekatan numerik.

4.2.1 Menyelesaikan Persamaan Fungsi

Menyelesaikan persamaan fungsi, perlu kita menemukan nilai-nilai x yang memenuhi persamaan. Biasanya, langkah-langkah berikut dilakukan (Afidah and Khairunnisa, 2014):

1. **Menggabungkan Fungsi:** Gabungkan fungsi-fungsi yang ingin diselesaikan persamaannya, misalnya $f(x)$ dan $g(x)$, dalam satu persamaan: $f(x)=g(x)$.
2. **Sederhanakan Persamaan:** Sederhanakan persamaan jika memungkinkan dengan menggabungkan suku-suku yang serupa dan membawa semua suku ke satu sisi persamaan sehingga memiliki bentuk $0=\text{ekspektasi}$.
3. **Mencari Akar:** Cari nilai-nilai x yang membuat ekspresi di sisi kanan persamaan menjadi nol. Ini adalah akar-akar dari persamaan.
4. **Mengevaluasi Akar:** Untuk setiap akar yang ditemukan, substitusi nilai x ke dalam fungsi-fungsi asli (seperti $f(x)$ dan $g(x)$) untuk memeriksa apakah memang menghasilkan nilai yang sama.
5. **Penyelesaian Akhir:** Tulis solusi akhir dalam bentuk $x=\text{nilai}$ atau dalam bentuk interval jika diperlukan

Selanjutnya, menggunakan contoh sebelumnya kiat akan menyelesaikan persamaan $f(x)=g(x)$, yaitu $2x + 3 = x^2 + 1$.

1. **Menggabungkan Fungsi:** $2x + 3 = x^2 + 1$.
2. **Sederhanakan Persamaan:** $x^2 - 2x + 2 = 0$.
3. **Mencari Akar:** Kita perlu mencari akar-akar dari persamaan kuadrat ini. Ini bisa dilakukan dengan faktorisasi, melengkapi kuadrat, atau menggunakan rumus kuadrat.
4. **Mengevaluasi Akar:** Misalkan akar-akar yang ditemukan adalah $x=1+i$ dan $x=1-i$ (dalam bilangan kompleks).
5. **Penyelesaian Akhir:** Karena akar-akar ini adalah bilangan kompleks, kita dapat menyimpulkan bahwa persamaan

$f(x)=g(x)$ tidak memiliki solusi dalam himpunan bilangan real.

4.2.2 Penerapan Persamaan Fungsi pada Konteks Real

Persamaan fungsi adalah alat yang kuat untuk menganalisis hubungan antara fungsi-fungsi matematis dan mengidentifikasi nilai-nilai yang membuat fungsi-fungsi tersebut memiliki nilai yang sama. Penerapannya meliputi berbagai disiplin ilmu dan membantu dalam pemahaman dan pemecahan masalah yang melibatkan variabel dan hubungan matematis. (Suharno, 2014). Dengan pemahaman tentang persamaan fungsi, kita dapat menjelajahi dan memahami dunia nyata dari sudut pandang matematis yang lebih dalam.

Persamaan fungsi memiliki beragam penerapan dalam berbagai bidang ilmu. Beberapa contoh penerapannya adalah:

1. **Bidang Fisika:** Dalam fisika, persamaan fungsi sering digunakan untuk menganalisis pergerakan benda, hukum-hukum gerak, dan interaksi fisik lainnya. Misalnya, persamaan gerak parabola dalam bidang gravitasi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan fungsi.
2. **Bidang Ekonomi:** Dalam ilmu ekonomi, persamaan fungsi digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel ekonomi, seperti pendapatan, harga, dan permintaan. Contohnya adalah persamaan elastisitas harga permintaan yang mempertimbangkan perubahan harga terhadap perubahan permintaan.
3. **Bidang Rekayasa:** Dalam rekayasa, persamaan fungsi membantu dalam perancangan sistem dan komponen. Misalnya, persamaan yang menggambarkan hubungan antara arus dan tegangan dalam rangkaian listrik.
4. **Bidang Sains Komputer:** Dalam sains komputer, persamaan fungsi digunakan dalam pemodelan algoritma

- dan analisis kompleksitas algoritma. Persamaan rekursi dalam pemrograman dinamis adalah contoh penerapan ini.
5. **Bidang Biologi:** Dalam biologi, persamaan fungsi sering digunakan untuk memodelkan pertumbuhan populasi, perubahan genetik, dan interaksi dalam ekosistem.
 6. **Bidang Matematika Keuangan:** Dalam matematika keuangan, persamaan fungsi digunakan untuk menghitung nilai masa depan investasi berdasarkan tingkat bunga dan waktu

Terkadang, persamaan fungsi tidak dapat diselesaikan secara analitis, terutama dalam kasus persamaan yang kompleks atau nonlinier. Dalam situasi ini, solusi numerik sering digunakan. Metode numerik seperti metode Newton-Raphson atau metode bisection dapat membantu menemukan akar persamaan dengan pendekatan iteratif.

4.2.3 Penerapan Persamaan Fungsi pada Bidang Pertanian

Penerapan persamaan fungsi dalam bidang pertanian memiliki peran yang penting dalam analisis dan pengelolaan berbagai aspek pertanian. Berikut ini adalah beberapa contoh penerapan persamaan fungsi dalam bidang pertanian:

1. **Pemodelan Pertumbuhan Tanaman:** Dalam pertanian, persamaan fungsi digunakan untuk memodelkan pertumbuhan tanaman sepanjang siklus hidupnya. Misalnya, persamaan logistik dapat digunakan untuk memprediksi pertumbuhan populasi tanaman dalam jangka waktu tertentu, dengan mempertimbangkan faktor-faktor seperti ketersediaan air, nutrisi, dan cahaya.
2. **Optimasi Penjadwalan Irigasi:** Penjadwalan irigasi yang efisien sangat penting dalam pertanian. Persamaan fungsi dapat digunakan untuk mengoptimalkan jadwal irigasi

berdasarkan faktor-faktor seperti curah hujan, suhu, kelembaban tanah, dan jenis tanaman yang ditanam.

3. **Prediksi Panen:** Dalam usaha pertanian, prediksi waktu panen yang tepat dapat mempengaruhi hasil panen. Persamaan fungsi dapat memprediksi waktu kematangan tanaman berdasarkan data pertumbuhan sebelumnya, cuaca, dan faktor-faktor lainnya.
4. **Pengendalian Hama dan Penyakit:** Persamaan fungsi dapat digunakan untuk memodelkan perkembangan populasi hama atau penyakit pada tanaman. Dengan pemahaman tentang persamaan ini, petani dapat mengambil tindakan pencegahan atau pengendalian yang sesuai.
5. **Pemilihan Pupuk dan Nutrisi:** Persamaan fungsi dapat membantu dalam memilih jenis pupuk dan dosis yang tepat untuk tanaman. Model matematika dapat mempertimbangkan ketersediaan nutrisi dalam tanah, kebutuhan tanaman, dan interaksi antara berbagai elemen nutrisi.
6. **Analisis Kebutuhan Air:** Dalam pengelolaan irigasi yang efisien, persamaan fungsi dapat digunakan untuk menghitung kebutuhan air yang tepat untuk tanaman berdasarkan faktor-faktor seperti jenis tanaman, fase pertumbuhan, dan kondisi iklim.
7. **Pemetaan Lahan Pertanian:** Persamaan fungsi dapat digunakan dalam pemetaan dan analisis lahan pertanian. Model matematika dapat membantu mengidentifikasi potensi produktivitas lahan berdasarkan faktor-faktor seperti tekstur tanah, drainase, dan kondisi mikroklimat.

Penerapan persamaan fungsi dalam pertanian memiliki beberapa keuntungan, antara lain:

1. **Optimasi Hasil Pertanian:** Dengan menggunakan persamaan fungsi, petani dapat mengoptimalkan faktor-faktor yang mempengaruhi hasil pertanian, seperti irigasi, pupuk, dan perlakuan tanaman.
2. **Prediksi dan Perencanaan:** Persamaan fungsi memungkinkan petani merencanakan kegiatan pertanian dengan lebih baik, termasuk prediksi panen, pengendalian hama, dan pengelolaan sumber daya.
3. **Efisiensi Penggunaan Sumber Daya:** Dengan memodelkan pertumbuhan tanaman dan kebutuhan sumber daya, persamaan fungsi dapat membantu mengurangi pemborosan air, pupuk, dan energi.
4. **Pemahaman Lebih Mendalam:** Penerapan persamaan fungsi membantu petani memahami interaksi kompleks antara faktor-faktor pertanian dan bagaimana hal itu memengaruhi hasil panen.

Penerapan persamaan fungsi dalam bidang pertanian memungkinkan petani dan ahli pertanian menganalisis, merencanakan, dan mengoptimalkan berbagai aspek pertanian. Dengan menggunakan model matematika, petani dapat mengambil keputusan yang lebih informasional dan akurat, serta merencanakan tindakan yang sesuai untuk mencapai hasil pertanian yang lebih baik dan berkelanjutan.

4.3 Pertidaksamaan Fungsi

Pertidaksamaan adalah konsep dalam matematika yang melibatkan perbandingan antara dua ekspresi atau fungsi, dan menentukan kapan salah satu ekspresi lebih besar atau lebih kecil dari yang lain. Ketika pertidaksamaan melibatkan fungsi, kita berbicara tentang pertidaksamaan fungsi. Pertidaksamaan fungsi

berguna untuk memahami hubungan antara fungsi-fungsi berbeda dan mengidentifikasi rentang nilai yang memenuhi pertidaksamaan.

Pertidaksamaan fungsi dapat ditulis dalam notasi yang mirip dengan pertidaksamaan biasa, dengan perbedaan bahwa kita membandingkan dua fungsi. (Irmayanti, Rosalina and Dkk, 2021). Berikut adalah notasi umum yang digunakan:

1. $f(x) < g(x)$: Ini berarti bahwa untuk semua nilai x dalam domain yang sesuai, nilai fungsi $f(x)$ lebih kecil dari nilai fungsi $g(x)$.
2. $f(x) > g(x)$: Ini berarti bahwa untuk semua nilai x dalam domain yang sesuai, nilai fungsi $f(x)$ lebih besar dari nilai fungsi $g(x)$.
3. $f(x) \leq g(x)$: Ini berarti bahwa untuk semua nilai x dalam domain yang sesuai, nilai fungsi $f(x)$ kurang dari atau sama dengan nilai fungsi $g(x)$.
4. $f(x) \geq g(x)$: Ini berarti bahwa untuk semua nilai x dalam domain yang sesuai, nilai fungsi $f(x)$ lebih besar dari atau sama dengan nilai fungsi $g(x)$.

4.3.1 Menyelesaikan Pertidaksamaan Fungsi

Proses menyelesaikan pertidaksamaan fungsi mirip dengan menyelesaikan pertidaksamaan biasa, dengan perhatian khusus pada domain fungsi-fungsi yang terlibat. (Azizah and Ariyanti, 2018). Berikut langkah-langkah umum untuk menyelesaikan pertidaksamaan fungsi:

1. **Identifikasi Domain:** Pastikan Anda mengetahui domain dari masing-masing fungsi yang terlibat. Pertidaksamaan hanya berlaku dalam domain yang relevan.
2. **Cari Nilai Bersama:** Temukan nilai-nilai x di dalam domain yang memenuhi pertidaksamaan. Ini bisa dilakukan dengan mencari titik-titik di mana kedua fungsi bersentuhan atau berpotongan.

3. **Analisis Perilaku Fungsi:** Analisis perilaku fungsi-fungsi tersebut dalam domain yang relevan. Apakah fungsi-fungsi tersebut monoton naik atau monoton turun? Di mana terjadi perubahan tanda?
4. **Pemecahan Pertidaksamaan:** Dengan memahami perilaku fungsi-fungsi tersebut, tentukan interval-interval di mana $f(x)$ lebih besar atau lebih kecil dari $g(x)$, sesuai dengan tanda pertidaksamaan yang diberikan.
5. **Solusi Akhir:** Gabungkan interval-interval yang memenuhi pertidaksamaan untuk memberikan solusi akhir dari pertidaksamaan fungsi.

Misalkan kita memiliki dua fungsi $f(x)=x^2$ dan $g(x)=2x+1$.

Kita ingin menyelesaikan pertidaksamaan $f(x)<g(x)$. Berikut adalah langkah-langkah penyelesaiannya (Saraswati and Rodliyah, 2020):

1. **Domain:** Kedua fungsi ini berlaku untuk semua bilangan real.
2. **Nilai Bersama:** Kita harus mencari titik-titik di mana $f(x)$ dan $g(x)$ bersama-sama. Ini dapat ditemukan dengan mencari solusi dari persamaan $f(x)=g(x)$, yaitu $x^2=2x+1$. Solusi $x=1$ memenuhi.
3. **Analisis Perilaku Fungsi:**
 - Fungsi $f(x)=x^2$ monoton naik.
 - Fungsi $g(x)=2x+1$ monoton naik.
4. **Pemecahan Pertidaksamaan:** Karena $f(x)$ lebih kecil dari $g(x)$ saat $x<1$, dan $f(x)$ lebih besar dari $g(x)$ saat $x>1$, maka solusi pertidaksamaan adalah $x<1$.
5. **Solusi Akhir:** Solusi akhir adalah interval $x<1$.

Pertidaksamaan fungsi merupakan alat yang penting dalam matematika untuk membandingkan dan menganalisis hubungan antara berbagai fungsi. Dalam menyelesaikan pertidaksamaan fungsi, pemahaman tentang perilaku fungsi-fungsi tersebut dalam

domain yang sesuai sangat penting. Dengan menerapkan langkah-langkah yang tepat, kita dapat mengidentifikasi interval-interval di mana fungsi-fungsi tersebut memenuhi pertidaksamaan yang diberikan.

4.3.2 Penerapan Pertidaksamaan Fungsi pada Konteks Real

Pertidaksamaan fungsi memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, seperti ekonomi, ilmu sosial, ilmu alam, dan teknik. (Waney, Nicolaas and Kondo, 2018) Berikut beberapa contoh penerapannya:

1. Ekonomi: Analisis Biaya dan Pendapatan

Dalam ekonomi, pertidaksamaan fungsi digunakan untuk menganalisis biaya dan pendapatan perusahaan. Misalnya, pertidaksamaan $C(x) > R(x)$ di mana $C(x)$ adalah fungsi biaya dan $R(x)$ adalah fungsi pendapatan, dapat membantu perusahaan dalam menentukan kapan mereka menghasilkan keuntungan atau kerugian. Dengan menyelesaikan pertidaksamaan ini, perusahaan dapat mengidentifikasi kisaran produksi yang menguntungkan.

2. Matematika Keuangan: Investasi dan Pengembalian

Dalam matematika keuangan, pertidaksamaan fungsi dapat digunakan untuk menganalisis investasi dan pengembalian. Misalnya, pertidaksamaan $A(t) > P$ di mana $A(t)$ adalah nilai akhir investasi setelah t tahun dan P adalah jumlah investasi awal, membantu mengidentifikasi kapan suatu investasi akan menghasilkan pengembalian yang menguntungkan.

3. Ilmu Alam: Model Pertumbuhan Populasi

Dalam ilmu alam, pertidaksamaan fungsi sering digunakan untuk memodelkan pertumbuhan populasi. Misalnya, dalam model logistik, pertidaksamaan $P(t) < K$ di mana $P(t)$ adalah jumlah populasi pada waktu t dan K adalah kapasitas

maksimal lingkungan, membantu memahami bagaimana populasi suatu spesies akan berkembang seiring waktu.

4. Ilmu Sosial: Analisis Data Sosial

Dalam ilmu sosial, pertidaksamaan fungsi dapat digunakan untuk menganalisis data sosial. Misalnya, pertidaksamaan $I(t) < T$ di mana $I(t)$ adalah indeks kebahagiaan pada waktu t dan T adalah nilai ambang batas kebahagiaan, membantu dalam mengidentifikasi faktor-faktor yang berkontribusi terhadap kebahagiaan individu atau kelompok.

5. Teknik: Sistem Kendali dan Optimisasi

Dalam teknik, pertidaksamaan fungsi digunakan dalam sistem kendali dan optimisasi. Misalnya, pertidaksamaan $F(x) \leq C$ di mana $F(x)$ adalah fungsi yang mengukur kinerja suatu sistem dan C adalah batasan kinerja yang diizinkan, membantu dalam merancang sistem yang memenuhi batasan kinerja tertentu.

6. Ilmu Komputer: Analisis Algoritma

Dalam ilmu komputer, pertidaksamaan fungsi dapat digunakan untuk menganalisis kinerja algoritma. Misalnya, pertidaksamaan $T(n) \leq C$ di mana $T(n)$ adalah waktu eksekusi algoritma untuk input n dan C adalah batasan waktu yang diizinkan, membantu dalam memahami seberapa efisien algoritma tersebut dalam menangani input besar.

Penerapan pertidaksamaan fungsi dalam dunia nyata sangat luas dan meliputi berbagai bidang. Dengan memahami konsep pertidaksamaan dan kemampuan untuk menerapkannya dalam konteks nyata, kita dapat membuat keputusan yang lebih baik, merancang sistem yang efisien, dan menganalisis berbagai fenomena yang melibatkan perbandingan fungsi-fungsi berbeda.

4.3.3 Penerapan Pertidaksamaan Fungsi pada Bidang Pertanian

Pertidaksamaan fungsi memiliki beragam penerapan dalam konteks pertanian, dari analisis produksi hingga manajemen sumber daya. Berikut beberapa contoh penerapannya:

1. Analisis Produksi Tanaman

Pertidaksamaan fungsi dapat digunakan untuk menganalisis produksi tanaman. Misalnya, pertidaksamaan $P(x) > C(x)$, di mana $P(x)$ adalah pendapatan dari hasil panen dan $C(x)$ adalah biaya produksi, membantu petani dalam menentukan kapan produksi suatu tanaman akan menghasilkan keuntungan. Dengan memahami hubungan antara pendapatan dan biaya, petani dapat memilih tanaman yang paling menguntungkan untuk ditanam.

2. Manajemen Penggunaan Air

Pertidaksamaan fungsi dapat diterapkan dalam manajemen penggunaan air dalam pertanian. Misalnya, pertidaksamaan $Irr(x) \leq Cap$, di mana $Irr(x)$ adalah kebutuhan air irigasi untuk lahan pertanian dan Cap adalah kapasitas air yang tersedia, membantu dalam menentukan seberapa banyak lahan yang dapat diirigasi secara efisien. Dengan mematuhi pertidaksamaan ini, petani dapat mengelola sumber daya air dengan lebih bijaksana.

3. Pemilihan Pupuk

Dalam pertanian, pertidaksamaan fungsi dapat digunakan untuk memilih jenis dan jumlah pupuk yang paling efektif. Misalnya, pertidaksamaan $Yield(x) \leq Fert(x)$, di mana $Yield(x)$ adalah hasil panen dan $Fert(x)$ adalah jumlah pupuk yang diberikan, membantu dalam menentukan jumlah pupuk yang diperlukan untuk mencapai hasil panen optimal.

4. Rotasi Tanaman

Pertidaksamaan fungsi juga dapat diterapkan dalam keputusan rotasi tanaman. Misalnya, pertidaksamaan $Rev(x) > Cost(x)$, di mana $Rev(x)$ adalah pendapatan dari tanaman rotasi dan $Cost(x)$ adalah biaya penanaman, membantu dalam menentukan kapan tanaman rotasi akan menghasilkan keuntungan yang lebih besar daripada biayanya.

5. Pengendalian Hama dan Penyakit

Pertidaksamaan fungsi dapat digunakan dalam pengendalian hama dan penyakit. Misalnya, pertidaksamaan $Loss(x) \leq Exp(x)$, di mana $Loss(x)$ adalah kerugian potensial akibat hama atau penyakit dan $Exp(x)$ adalah biaya pengendalian, membantu dalam menentukan apakah pengendalian hama atau penyakit akan menguntungkan dalam jangka panjang.

Penerapan pertidaksamaan fungsi dalam bidang pertanian sangat relevan dan beragam. Dengan memahami konsep pertidaksamaan dan kemampuan untuk menerapkannya dalam konteks pertanian, petani dapat membuat keputusan yang lebih cerdas tentang manajemen produksi, penggunaan sumber daya, dan pengendalian risiko. Ini memungkinkan mereka untuk mencapai hasil panen yang lebih baik, efisiensi yang lebih tinggi, dan berkontribusi pada keberlanjutan pertanian secara keseluruhan.

DAFTAR PUSTAKA

- Afidah and Khairunnisa. 2014. *Matematika Dasar*. Jakarta: PT. Raja Grafindo Persada.
- Azizah, N. L. and Ariyanti, N. 2018. *Kalkulus*. Sidoarjo: Umsida Press.
- Irmayanti, Rosalina, N. and Dkk. 2021. *Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar*. Aceh: Yayasan Penerbit Muhammad Zaini.
- Marsitin, R. and Sesanti, N. R. 2019. *Dasar-Dasar Kalkulus*. Malang: Ediide Infografika.
- Saraswati, S. and Rodliyah, I. 2020. *Kalkulus Dasar*. Banten: CV. AA. Rizky.
- Suharno. 2014. *Matematika terapan*. Yogyakarta: Sekolah Tinggi Pertanahan Nasional.
- Waney, E. V. Y., Nicolaas, S. and Kondo, N. E. 2018. *Matematika Terapan 1*. Manado: Polimdo Press.

BAB 5

FUNGSI LINIER DAN TERAPANNYA

Oleh Fahmy Rinanda Saputri

5.1 Fungsi Linier

Fungsi linier adalah jenis fungsi matematika di mana variabel independennya memiliki pangkat tertinggi yang sama dengan satu (Afriyanti, 2008). Fungsi linier juga dapat diartikan sebagai fungsi matematika yang memiliki variabel bebas dengan pangkat pertama. Fungsi linier adalah jenis fungsi matematika yang paling sederhana, tetapi memiliki banyak kegunaan dalam pertanian. Secara umum, fungsi linier dinyatakan sebagai berikut (Afriyanti, 2008).

1. $y = mx + b$, grafiknya akan melalui titik $(0, b)$
2. $y = mx$, grafiknya melalui titik $(1, m)$
3. $y = c$, grafiknya akan sejajar sumbu x dan fungsi ini disebut fungsi konstan.

di mana:

- a. y adalah variabel dependen (misalnya, produksi tanaman).
- b. x adalah variabel independen (misalnya, jumlah pupuk yang digunakan).
- c. m adalah koefisien kemiringan (slope), yang menggambarkan tingkat perubahan variabel dependen terhadap variabel independen.
- d. b adalah intercept, yang merupakan nilai y ketika $x = 0$.

Adapun ciri-ciri fungsi linier (Darma, no date):

1. Jika $m > 0$, maka garis akan bergerak dari bawah ke kanan atas

2. Jika $m < 0$, maka garis akan bergerak dari kiri atas ke kanan bawah
3. Jika $m_1 \neq m_2$, maka garis akan berpotongan
4. Jika $m_1 = m_2$, maka garis akan sejajar
5. Titik b adalah perpotongan sumbu y
6. m disebut juga $\tan \alpha$, dimana m juga akan menunjukkan arah.

Persamaan umum $\tan \alpha$ adalah:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Grafik fungsi linier yang berbentuk lurus adalah representasi visual dari fungsi matematika linier. Grafik ini adalah sebuah garis lurus di bidang koordinat, di mana setiap titik pada garis tersebut menggambarkan pasangan nilai dari variabel dependen dan independen. Karakteristik utama dari grafik ini adalah bahwa garis tersebut memiliki kemiringan (slope) yang tetap, sehingga jika Anda memperbesar atau memperkecil bagian mana pun dari garis tersebut, kemiringannya akan selalu sama. Ini mengindikasikan bahwa setiap perubahan dalam variabel independen akan menghasilkan perubahan yang proporsional dalam variabel dependen, yang merupakan ciri khas dari fungsi linier.

Selain itu, titik di mana garis linier tersebut memotong sumbu vertikal (y-axis) dikenal sebagai intercept. Intercept ini mewakili nilai dari variabel dependen ketika variabel independen bernilai nol. Ini memiliki makna penting dalam konteks aplikasi, misalnya, dalam interpretasi nilai awal atau konstan dari suatu fenomena yang dimodelkan oleh fungsi linier.

Aplikasi grafik fungsi linier yang lurus dapat ditemukan dalam berbagai bidang, seperti ekonomi, fisika, ilmu sosial, dan tentu saja, matematika pertanian seperti yang telah dibahas sebelumnya. Dalam analisis data, grafik fungsi linier adalah alat

yang kuat untuk memahami hubungan antara dua variabel yang berubah secara linier, yang dapat membantu dalam membuat prediksi, mengoptimalkan keputusan, dan merencanakan strategi berdasarkan pola-pola yang terlihat dalam data.

5.2 Menggambar Grafik Fungsi Linier dan Menentukan Persamaannya

5.2.1 Menggambar Grafik Fungsi Linier

Adapun langkah-langkah untuk membuat grafik fungsi linier:

1. Tentukan titik koordinat cartesius
2. Tentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
3. Tentukan koefisien arah grafik atau gradien
4. Gambarlah grafik sesuai dengan yang sudah dilakukan pada langkah 1 hingga 3.

Contoh:

Gambar grafik fungsi linier dari $y = f(x) = 3x - 1$!

1. Menentukan titik koordinat cartesius

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x) = 3x - 1$	-7	-4	-1	2	5

Sehingga titik koordinatnya adalah

$(-2, -7)$

$(-1, -4)$

$(0, -1)$

$(1, 2)$

$(2, 5)$

2. Menentukan titik potong dengan sumbu x dan y

Titik potong sumbu x diperoleh saat $y=0$

$$y = f(x) = 3x - 1 = 0$$

$$y = 3x - 1$$

$$0 = 3x - 1$$

$$3x = 1$$

$$x = 1/3$$

sehingga nilai (x, y) adalah $(1/3, 0)$

Titik potong sumbu y diperoleh saat $x=0$

$$y = f(x) = 3x - 1$$

$$y = 3x - 1$$

$$y = 3 \cdot 0 - 1$$

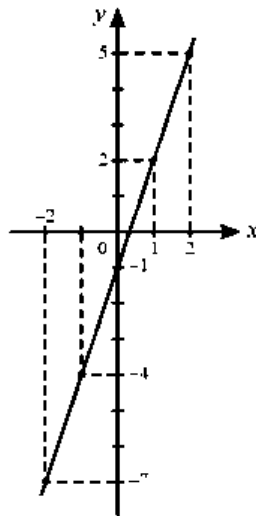
$$y = -1$$

sehingga nilai (x, y) adalah $(0, -1)$

3. Menentukan koefisien arah grafik atau gradien

$y = f(x) = 3x - 1$, koefisien dari x yaitu 3 sehingga gradiennya (m) adalah 3

4. Menggambar grafik



Gambar 5.1. Grafik dari fungsi linier $y = f(x) = 3x - 1$
(Afriyanti, 2008)

5.2.2 Menentukan Persamaan Grafik Fungsi Linier

Titik yang dilalui atau gradien dapat menentukan persamaan fungsi liniernya. Bahkan grafik yang sudah diketahui dapat menentukan persamaan grafik fungsi liniernya.

1. Melalui satu titik

Jika melalui titik (x_1, y_1) dan gradien m , maka persamaan grafik fungsi linier dapat ditentukan dengan:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

2. Melalui dua titik

Jika melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) , maka persamaan grafik fungsi linier dapat ditentukan dengan:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

3. Dengan gradien tertentu

Persamaan grafik fungsi yang saling sejajar

Jika terdapat dua garis lurus yang saling sejajar maka nilai gradiennya sama.

$$m_1 = m_2$$

Persamaan grafik fungsi yang saling tegak lurus

Jika terdapat dua garis lurus yang saling tegak lurus maka hasil kali dari kedua gradiennya sama dengan -1.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

4. Menentukan persamaan grafik fungsi linier apabila grafiknya diketahui

Untuk menentukan persamaan grafik fungsi linier jika grafiknya diketahui, Perlu diketahui gradien m dan perpotongan dengan sumbu y . Penentuan persamaan fungsi linier dalam bentuk umum, yaitu $y = mx + b$.

Langkah-langkahnya, yaitu tentukan dua titik yang diketahui, hitung kemiringan garis, hitung perpotongan sumbu y (b), dan susun persamaan fungsi linier

5.3 Invers Fungsi Linier

Invers fungsi f^{-1} dari suatu fungsi f yang merupakan pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dinyatakan dalam pasangan terurut (a,b) dapat ditentukan dengan cara berikut:

1. Tentukan Fungsi f^{-1} :
 - a. Fungsi invers f^{-1} adalah fungsi yang memetakan himpunan B ke himpunan A dengan cara yang membalikkan pemetaan yang dilakukan oleh fungsi f .
 - b. Fungsi invers ini akan memiliki himpunan domain yang sama dengan himpunan B dan himpunan kodomain yang sama dengan himpunan A .
 - c. Fungsi invers f^{-1} akan memiliki aturan pemetaan yang berkebalikan dengan fungsi f , yaitu jika $f(a)=b$, maka $f^{-1}(b)=a$.
2. Tentukan Fungsi Invers Berdasarkan Pasangan Terurut:
 - a. Untuk menentukan fungsi invers f^{-1} berdasarkan pasangan terurut (a,b) , Anda perlu membalikkan pasangan tersebut sehingga menjadi (b,a) .
 - b. Ini berarti bahwa jika $f(a)=b$, maka $f^{-1}(b)=a$.
3. Uji Fungsi Invers:
 - a. Setelah Anda mendefinisikan fungsi invers f^{-1} , uji kebenarannya dengan mencocokkan pasangan input dan output yang sesuai dengan aturan invers.
 - b. Pastikan bahwa $f(f^{-1}(b))=b$ untuk setiap b di himpunan B , dan $f^{-1}(f(a))=a$ untuk setiap a di himpunan A . Jika ini benar, maka Anda telah berhasil menemukan invers fungsi f .

Tidak semua fungsi memiliki invers. Untuk memiliki invers, fungsi f harus bersifat satu-satu (injektif) dan terus-menerus (bijektif) dalam pemetaannya, yang berarti bahwa setiap elemen di himpunan A harus memiliki satu elemen unik di himpunan B yang sesuai, dan tidak ada elemen yang terlewatkan atau duplikat dalam pemetaan tersebut.

5.4 Penerapan Fungsi Linier

Fungsi linier merupakan konsep matematis yang sangat relevan dan bermanfaat dalam berbagai bidang, termasuk bidang pertanian. Dalam konteks pertanian, fungsi linier dapat digunakan untuk menggambarkan hubungan antara berbagai variabel, seperti waktu, luas lahan, jumlah pupuk, kebutuhan air, produksi tanaman, dan sebagainya. Dengan memahami dan menerapkan fungsi linier, para petani dapat membuat keputusan yang lebih tepat dan efisien dalam pengelolaan pertanian mereka. Misalnya, mereka dapat memprediksi jumlah pupuk yang dibutuhkan berdasarkan luas lahan atau memperkirakan hasil panen berdasarkan jumlah air yang diberikan. Dengan demikian, fungsi linier menjadi alat penting dalam meningkatkan produktivitas dan keberlanjutan sektor pertanian.

Selain itu, dalam era modern ini, teknologi seperti sensor pertanian, pemantauan cuaca, dan analisis data telah memungkinkan penggunaan fungsi linier secara lebih canggih dalam pertanian presisi. Ini memungkinkan petani untuk mengoptimalkan penggunaan sumber daya seperti air, pupuk, dan pestisida, yang tidak hanya menghasilkan hasil yang lebih baik tetapi juga mengurangi dampak lingkungan. Oleh karena itu, pemahaman yang mendalam tentang fungsi linier dan kemampuan untuk mengaplikasikannya dalam pemecahan masalah pertanian menjadi keterampilan yang sangat berharga dalam menghadapi tantangan global seperti ketahanan pangan dan perubahan iklim.

Berikut ini adalah beberapa contoh soal dan solusi pengerjaan fungsi linier dalam konteks aplikasi pertanian:

Soal-01: Seorang petani ingin menanam tanaman jagung di ladangnya. Dia ingin menentukan berapa banyak pupuk yang harus digunakan berdasarkan luas ladang yang akan ditanami. Dia percaya bahwa jumlah pupuk yang diperlukan berhubungan secara linier dengan luas ladang. Petani tersebut memiliki data dari tahun-tahun sebelumnya sebagai berikut:

1. Pada tahun 1, dengan luas ladang 2 hektar, dia menggunakan 4 ton pupuk.
2. Pada tahun 2, dengan luas ladang 4 hektar, dia menggunakan 8 ton pupuk.
3. Pada tahun 3, dengan luas ladang 6 hektar, dia menggunakan 12 ton pupuk.

Hitunglah persamaan fungsi linier yang menghubungkan luas ladang (x) dengan jumlah pupuk yang diperlukan (y).

Solusi-01: Langkah pertama adalah menemukan persamaan fungsi linier yang menggambarkan hubungan antara luas ladang dan jumlah pupuk. Kita dapat menggunakan metode regresi linier untuk ini. Persamaan regresi linier adalah dalam bentuk:

$$y = mx + b$$

di mana:

1. y adalah variabel dependen (jumlah pupuk).
2. x adalah variabel independen (luas ladang).
3. m adalah kemiringan garis (slope).
4. b adalah perpotongan sumbu y (intercept).

Kita dapat menggunakan data yang diberikan untuk mencari m dan b .

1. Ambil salah satu pasangan data, misalnya, data pada tahun 1: $x_1=2$ hektar dan $y_1=4$ ton pupuk.
2. Gunakan data ini untuk menghitung kemiringan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

3. Selanjutnya, gunakan nilai m untuk menghitung perpotongan b dengan salah satu pasangan data. Mari kita gunakan data tahun 1:

$$4 = 2 \cdot 2 + b$$

$$4 = 4 + b$$

$$b = 4 - 4$$

$$b = 0$$

4. Jadi, persamaan fungsi linier yang menghubungkan luas ladang (x) dengan jumlah pupuk yang diperlukan (y) adalah: $y = 2x$

Dengan persamaan ini, petani dapat menghitung jumlah pupuk yang diperlukan berdasarkan luas ladang yang akan ditanam secara linier. Misalnya, jika luas ladangnya adalah 5 hektar, dia akan memerlukan $y = 2 \cdot 5 = 10$ ton pupuk.

Soal-02:

Seorang petani ingin mengetahui berapa banyak air yang harus dia berikan pada tanaman jagungnya setiap hari berdasarkan jumlah hari sejak tanaman ditanam. Dia percaya bahwa kebutuhan air tanaman berhubungan secara linier dengan jumlah hari. Petani tersebut memiliki data dari pengalaman sebelumnya sebagai berikut:

Setelah 5 hari tanaman ditanam, dia memberikan 10 liter air.

Setelah 10 hari, dia memberikan 20 liter air.

Setelah 15 hari, dia memberikan 30 liter air.

Hitunglah persamaan fungsi linier yang menghubungkan jumlah hari (x) dengan jumlah air yang diperlukan (y).

Solusi-02:

Langkah pertama adalah menemukan persamaan fungsi linier yang menggambarkan hubungan antara jumlah hari dan jumlah air yang diperlukan. Kita dapat menggunakan metode regresi linier untuk ini. Persamaan regresi linier adalah dalam bentuk:

$$y = mx + b$$

di mana:

- y adalah variabel dependen (jumlah air yang diperlukan).
- x adalah variabel independen (jumlah hari).
- m adalah kemiringan garis (slope).
- b adalah perpotongan sumbu y (intercept).

Kita dapat menggunakan data yang diberikan untuk mencari m dan b .

1. Ambil salah satu pasangan data, misalnya, data setelah 5 hari: $x_1=5$ hari dan $y_1=10$ liter air.
2. Gunakan data ini untuk menghitung kemiringan m :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{20 - 10}{10 - 5} = \frac{10}{5} = 2$$

3. Selanjutnya, gunakan nilai m untuk menghitung perpotongan b dengan salah satu pasangan data. Mari kita gunakan data setelah 5 hari:

$$10 = 2 \cdot 5 + b$$

$$10 = 10 + b$$

$$b = 10 - 10$$

$$b = 0$$

4. Jadi, persamaan fungsi linier yang menghubungkan jumlah hari (x) dengan jumlah air yang diperlukan (y) adalah: $y=2x$

Dengan persamaan ini, petani dapat menghitung jumlah air yang diperlukan berdasarkan jumlah hari sejak tanaman ditanam secara linier. Misalnya, setelah 7 hari, dia akan memerlukan $y = 2 \cdot 7 = 14$ liter air.

Dengan demikian, memahami konsep fungsi linier dan memiliki keterampilan untuk mengaplikasikannya dalam berbagai konteks pertanian adalah langkah kunci menuju pertanian yang lebih efisien, berkelanjutan, dan mampu beradaptasi dengan perubahan lingkungan dan pasar. Penggunaan alat matematika seperti fungsi linier bukan hanya merupakan bantuan bagi petani dalam membuat keputusan yang cerdas, tetapi juga memiliki potensi untuk memberikan kontribusi yang positif dalam usaha memenuhi tuntutan kebutuhan pangan global yang terus meningkat.

DAFTAR PUSTAKA

- Afriyanti, D. 2008. *Matematika Kelompok Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian*. PT Grafindo Media Pratama. Available at: <https://books.google.co.id/books?id=xDrojCZ0vZIC>.
- Darma, U.B. (no date) *Fungsi Linier*. Available at: [http://eprints.binadarma.ac.id/6627/1/PER_01_Fungsi Linier%282020-2021%29Ganjil_UNIVARSITAS BINA DARMA.pdf](http://eprints.binadarma.ac.id/6627/1/PER_01_Fungsi_Linier%282020-2021%29Ganjil_UNIVARSITAS_BINA_DARMA.pdf).

BAB 6

FUNGSI KUADRAT DAN TERAPANNYA

Oleh Afnaria

6.1 Pendahuluan

Fungsi kuadrat merupakan suku banyak berderajat dua yang terdiri dari dua variabel atau lebih. Bentuk umum, fungsi kuadrat dengan satu variabel adalah

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dimana yang menjadi variabel disini adalah x , dan $a \neq 0$.

Misalnya $f(x) = x^2 - 5x + 6$, disini dapat ditentukan nilai $a = 1, b = -5$ dan $c = 6$.

Sedangkan bentuk umum fungsi kuadrat dengan dua variabel adalah

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$$

dimana yang menjadi variabel disini adalah x dan y , serta $a \neq 0$ dan $c \neq 0$.

Misalnya $f(x, y) = 3x^2 - 5x + y^2 + 4y + 10$, disini dapat ditentukan nilai $a = 3, b = -5, c = 1, d = 4$ dan $e = 10$.

Dalam hal ini kita membatasi pembahasan hanya pada fungsi berderajat dua dengan satu variabel saja (Weisstein, 2004).

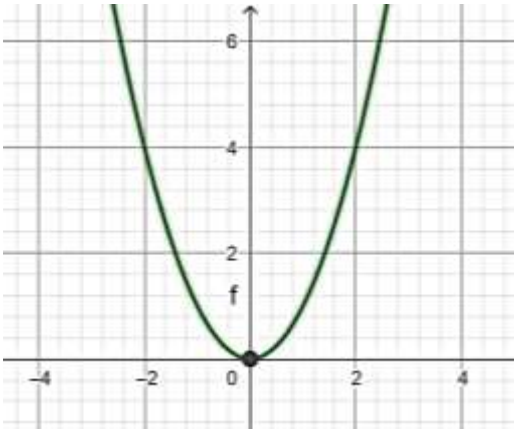
6.2 Grafik Fungsi Kuadrat

Grafik dari sebuah fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ merupakan sebuah kurva yang berbentuk parabola, dimana sumbu simetrinya paralel dengan sumbu- y .

Misalkan grafik fungsi $f(x) = x^2$, grafik fungsinya disebut sebagai parabola. Kita dapat menggambar grafik fungsi kuadrat ini dengan memilih serangkaian nilai x dan menghitung nilai y yang bersesuaian (Khan & Hill, 2017).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y= x^2$	9	4	1	0	1	4	9

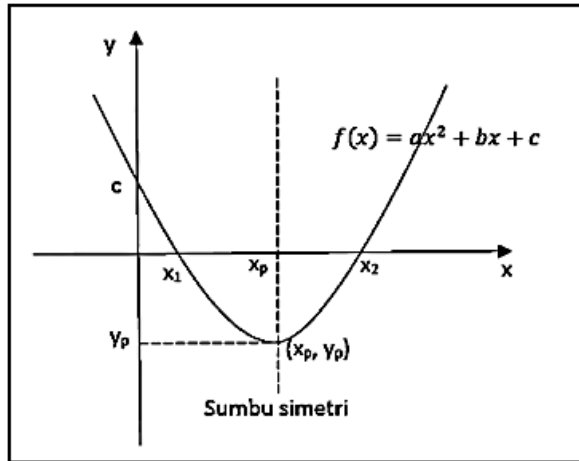
Selanjutnya, titik-titik yang diperoleh, di-plot ke koordinat cartesius dan diperoleh grafik fungsi seperti pada gambar 6.1.



Gambar 6.1. Grafik Fungsi Kuadrat (parabola) $f(x) = x^2$

6.2.1 Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat

Tentu saja, menghitung banyak titik koordinat yang bersesuaian untuk menggambar sebuah grafik fungsi membutuhkan banyak waktu. Guna memudahkan membuat sketsa grafik fungsi kuadrat, cukup dengan menentukan beberapa properti yang diperlukan seperti pada gambar 6.2.



Gambar 6.2. Properti Grafik Fungsi Kuadrat

Berikut langkah-langkah menggambar grafik fungsi kuadrat:

1. Identifikasi titik potong sumbu x, jika ada, yaitu titik $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$.

Titik ini merupakan titik koordinat yang diperoleh dengan menyelesaikan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Penyelesaian persamaan kuadrat ini bisa dilakukan dengan pemfaktoran, namun jika persamaan kuadrat ini tidak dapat difaktorkan, dapat digunakan rumus ABC, yaitu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Temukan titik potong sumbu y, yaitu titik $(0, c)$.

Titik ini diperoleh dengan men-substitusi nilai $x = 0$ ke dalam persamaan $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3. Tentukan sumbu simetri.

Sumbu simetri ditentukan dengan rumus:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

4. Tentukan titik balik (ekstrim) maksimum/minimum, disebut juga sebagai titik puncak (x_p, y_p) .

Titik puncaknya ditentukan dengan rumus:

$$(x_p, y_p) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a} \right)$$

Dimana $D = b^2 - 4ac$

Dalam hal ini, titik balik (ekstrim) maksimum diperoleh saat $a > 0$ dan titik balik (ekstrim) minimum diperoleh saat $a < 0$.

5. Domain dari fungsi $f(x)$ adalah $D_f = \{x | x \in R\}$.
6. Range dari fungsi $f(x)$ adalah $R_f = \{y | y \geq 0\}$ untuk $a > 0$ atau $R_f = \{y | y \leq 0\}$ untuk $a < 0$.

Contoh 1:

Misalkan akan digambar grafik fungsi $f(x) = x^2 - x - 6$, maka akan dilakukan sebagai berikut.

Langkah 1: Tentukan titik potong dengan sumbu x

Dari persamaan $f(x) = x^2 - x - 6$, dibuat menjadi

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Selanjutnya persamaan ini difaktorkan, diperoleh:

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$(x - 3) = 0 \text{ atau } (x + 2) = 0$$

$$x_1 = 3 \text{ atau } x_2 = -2$$

Dengan demikian diperoleh titik potong dengan sumbu x adalah **(3, 0) dan (-2, 0)**.

Langkah 2: Tentukan titik potong dengan sumbu y

Dari persamaan $f(x) = x^2 - x - 6$, dibuat menjadi

$$f(0) = x^2 - x - 6$$

$$f(0) = (0)^2 - 0 - 6$$

$$f(0) = y = -6$$

Hasilnya, **(0,-6)** adalah titik pertemuan sumbu y dan garis tersebut.

Langkah 3: Tentukan sumbu simetri.

Dari persamaan $f(x) = x^2 - x - 6$, diketahui nilai $a = 1, b = -1$ dan $c = -6$.

Selanjutnya dengan menggunakan rumus

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1)}{2.1} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Dengan demikian, persamaan sumbu simetrinya adalah $x = \frac{1}{2}$.

Langkah 4. Tentukan titik puncak

Titik puncaknya ditentukan dengan rumus:

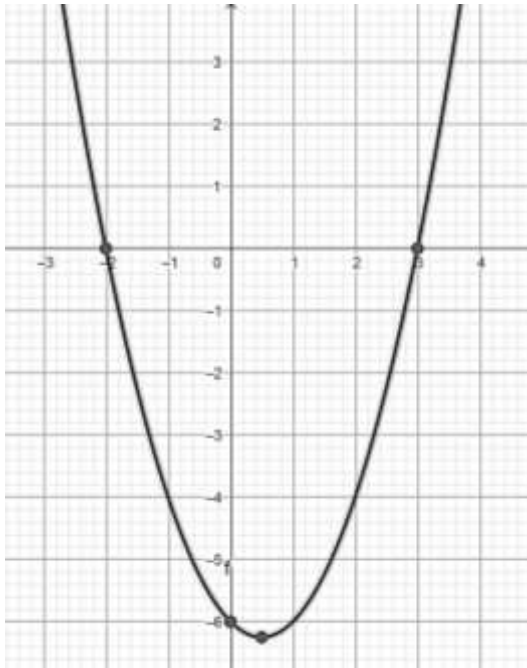
$$(x_p, y_p) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a} \right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a} \right)$$

$$(x_p, y_p) = \left(\frac{-(-1)}{2.1}, \frac{(-1)^2 - 4.1.(-6)}{-4.1} \right)$$

$$(x_p, y_p) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1+24}{-4} \right) \rightarrow (x_p, y_p) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4} \right)$$

Dengan demikian koordinat titik puncaknya adalah $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4} \right)$.

Selanjutnya diperoleh gambar grafik fungsi $f(x) = x^2 - x - 6$ sebagai berikut:



Gambar 6.3. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - x - 6$

6.2.2 Hubungan a, b, c dan D dengan kurva

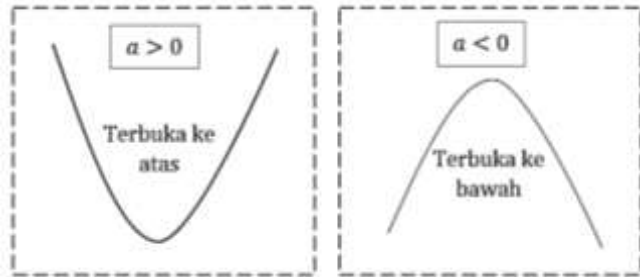
Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, memiliki koefisien a, b dan $c \in R$, dimana $a \neq 0$.

1. Hubungan a dengan kurva

Nilai a berkaitan dengan arah terbukanya kurva. Dengan $a \in R$ dan $a \neq 0$, maka nilai a yang mungkin adalah: $a > 0$ dan $a < 0$.

Dengan demikian, jika

- $a > 0$, maka kurva terbuka ke **atas**. Hal ini mengakibatkan kurva memiliki nilai *minimum*.
- $a < 0$, maka kurva terbuka ke **bawah**. Hal ini mengakibatkan kurva memiliki nilai *maksimum*.



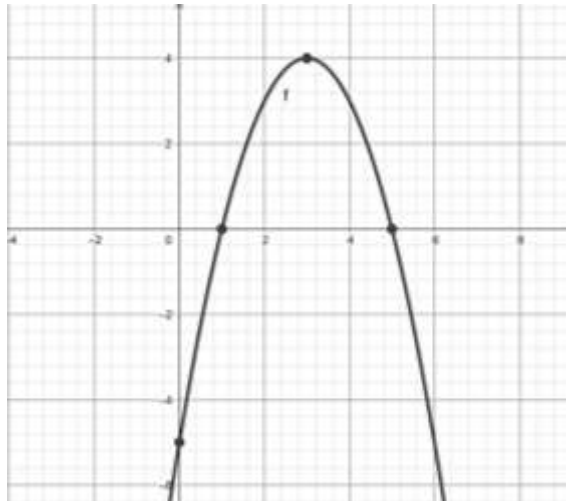
Gambar 6.4. Grafik Fungsi Kuadrat Menurut Nilai a

Contoh 2:

Dari contoh 1, grafik fungsi $f(x) = x^2 - x - 6$; dimana $a = 1$, dalam hal ini $a > 0$, maka grafik fungsi terbuka ke atas (lihat gambar 6.3).

Contoh 3:

Grafik fungsi $f(x) = -x^2 + 6x - 5$; dimana $a = -1$, dalam hal ini $a < 0$, maka grafik fungsi terbuka ke bawah.



Gambar 6.5. Grafik fungsi $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

2. Hubungan b dengan kurva

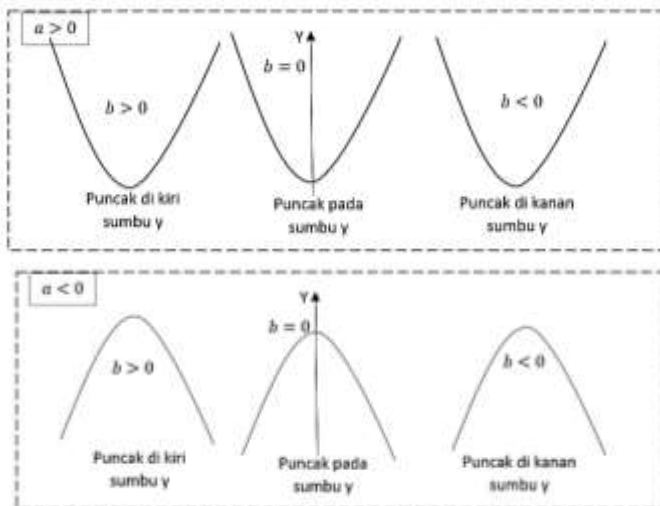
Nilai b berkaitan dengan posisinya terhadap sumbu y dengan memperhatikan nilai a .

Untuk $a > 0$, jika

- (1) nilai $b < 0$, maka puncak kurva berada disebelah **kanan** sumbu y
- (2) nilai $b = 0$, maka puncak kurva berada **pada** sumbu y
- (3) nilai $b > 0$, maka puncak kurva berada di sebelah **kiri** sumbu y .

Untuk $a < 0$, jika

- (1) nilai $b < 0$, maka puncak kurva berada disebelah **kiri** sumbu y
- (2) nilai $b = 0$, maka puncak kurva berada **pada** sumbu y
- (3) nilai $b > 0$, maka puncak kurva berada di sebelah **kanan** sumbu y .



Gambar 6.6. Grafik Fungsi Kuadrat Menurut Nilai b

Contoh 4:

Dari contoh 1, diketahui fungsi $f(x) = x^2 - x - 6$; dimana $a = 1$, dalam hal ini $a > 0$, dan $b = -1$, dalam hal ini $b < 0$, maka puncak kurva ada disebelah kanan sumbu y (lihat gambar 6.3).

Selanjutnya, dari contoh 3, diketahui fungsi $f(x) = -x^2 + 6x - 5$; dimana $a = -1$, dalam hal ini $a < 0$, dan $b = 6$, dalam hal ini $b > 0$, maka puncak kurva ada disebelah kanan sumbu y (lihat gambar 6.5).

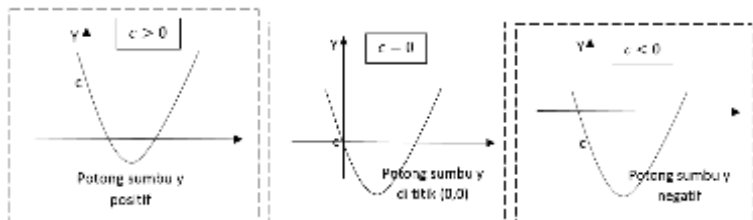
3. Hubungan c dengan kurva

Perpotongan kurva dengan sumbu y, dimana jika, menentukan nilai c :

$c > 0$ maka kurva memotong sumbu **y positif**;

$c = 0$, maka kurva memotong sumbu y di **titik (0,0)**;

$c < 0$, maka kurva memotong sumbu **y negatif**.



Gambar 6.7. Grafik Fungsi Kuadrat Menurut Nilai c

Contoh 5:

Selanjutnya dari contoh 3, fungsi $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, diketahui nilai $c = -5$ dalam hal ini $c < 0$, grafik fungsi kemudian memotong sumbu y negatif (lihat gambar 6.5).

4. Hubungan D dengan kurva

Diskriminan (D) dirumuskan sebagai :

$$D = b^2 - 4ac$$

Nilai D berkaitan dengan titik potong kurva dengan sumbu x , yaitu jika:

a. $D > 0$

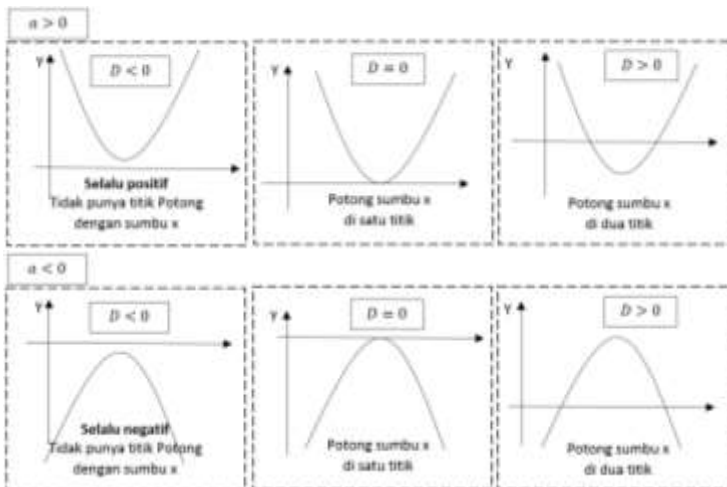
Akibatnya, kurva memiliki dua titik yang memotong sumbu x

b. $D = 0$

Dalam keadaan ini, kurva memiliki satu titik memotong sumbu x .

c. $D < 0$

Maka kurva tidak memotong sumbu x . Dalam hal ini, jika $a > 0$, maka kurva dikatakan definit (selalu) positif. Dan jika $a < 0$, maka kurva dikatakan definit (selalu) negatif (IDSchool, 2023).



Gambar 6.8. Grafik Fungsi Kuadrat Menurut Nilai D

Contoh 6:

Dari contoh 1, fungsi $f(x) = x^2 - x - 6$, nilai $a > 0$, dan $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 23$; dalam hal ini berarti $D > 0$. Akibatnya, kurva memiliki dua titik yang memotong sumbu x (Lihat gambar 6.3).

6.3 Membentuk Persamaan Fungsi Kuadrat

Selain mampu membuat grafik fungsi kuadrat, kita juga harus mampu memahami persamaan grafik fungsi kuadrat tertentu. Untuk menentukan persamaannya, digunakan beberapa rumus menurut apa yang diketahui, sebagai berikut:

1. Jika diketahui koordinat titik puncaknya (ekstrim), yaitu (x_p, y_p) , maka digunakan rumus:

$$y = a(x - x_p)^2 + y_p$$

Contoh 7:

Tentukan persamaan grafik fungsi yang melalui titik (2,-3) dengan titik ekstrimnya sama dengan titik puncak grafik $f(x) = x^2 - 2x - 15$.

Solusi:

Dari persamaan $f(x) = x^2 - 2x - 15$, titik puncaknya adalah:

$$\begin{aligned}(x_p, y_p) &= \left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a} \right) \\ &= \left(\frac{-(-2)}{2.1}, \frac{(-2)^2 - 4.1.(-15)}{-4.1} \right) \\ (x_p, y_p) &= (1, 16)\end{aligned}$$

Titik ekstrim kurva sama dengan titik titik puncaknya yaitu (1,16),

$$\begin{aligned}y &= a(x - x_p)^2 + y_p \\ y &= a(x - 1)^2 + 16\end{aligned}$$

melalui titik (2,-3), diperoleh:

$$-3 = a(2 - 1)^2 + 16$$

$$a = -19$$

Dengan demikian, persamaan grafik fungsinya adalah:

$$y = a(x - x_p)^2 + y_p$$

$$y = -19(x - 1)^2 + 16$$

$$y = -19(x^2 - 2x + 1) + 16$$

$$y = -19x^2 + 36x - 3$$

2. Jika diketahui titik potong dengan sumbu x, yaitu x_1 dan x_2 maka digunakan rumus:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Contoh 8:

Tentukan persamaan grafik fungsi yang melalui titik (0,3) dan titik (-2,0) dan (3,0) pada sumbu x.

Solusi:

Dari rumus $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, diperoleh:

$$y = a(x + 2)(x - 3)$$

Selanjutnya melalui titik (0,3), maka:

$$3 = a(0 + 2)(0 - 3)$$

$$3 = -6a \rightarrow a = -2$$

Dengan demikian, dari persamaan

$$y = a(x + 2)(x - 3)$$

Substitusi nilai $a = -2$, diperoleh:

$$y = -2(x + 2)(x - 3)$$

$$y = -2(x^2 - x - 6)$$

$$y = -2x^2 - 2x + 12$$

3. Jika yang diketahui selain titik puncak dan titik potong dengan sumbu x, maka digunakan rumus umum, yaitu:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Contoh 9

Sebuah fungsi kuadrat melalui titik (1,-7), (2,0) dan (-1,15), tentukan persamaannya.

Solusi:

Dari titik (1,-7) diperoleh:

$$\begin{aligned} -7 &= a(1)^2 + b(1) + c \\ -7 &= a + b + c \end{aligned} \quad (1)$$

Dari titik (2,0) diperoleh:

$$0 = a(2)^2 + b(2) + c$$

$$0 = 4a + 2b + c \quad (2)$$

Dari titik (-1,15) diperoleh:

$$\begin{aligned} 15 &= a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 15 &= a - b + c \end{aligned} \quad (3)$$

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$$\begin{array}{r} -7 = a + b + c \\ 15 = a - b + c \\ \hline -22 = 2b \rightarrow b = -11 \end{array}$$

Selanjutnya, dari persamaan (1) dan (3) diperoleh ;

$$\begin{array}{r} -7 = a - 11 + c \\ 15 = a + 11 + c \\ \hline 8 = 2a + 2c \end{array} \quad (4)$$

Dari persamaan (2) dan (3), diperoleh:

$$\begin{array}{r} 0 = 4a - 22 + c \\ 15 = a + 11 + c \\ \hline -15 = 33a - 33 \rightarrow a = \frac{18}{33} = \frac{3}{11} \end{array}$$

Dari persamaan (4) diperoleh

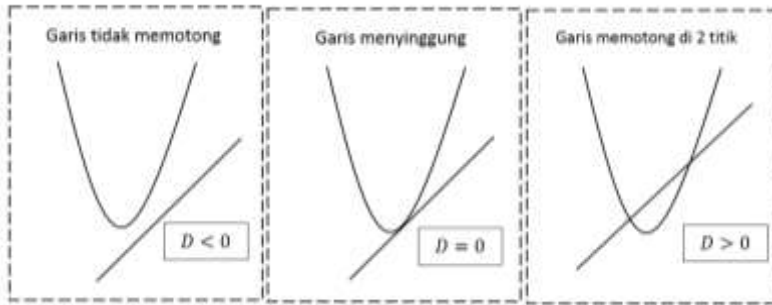
$$\begin{aligned} 8 &= 2\left(\frac{11}{3}\right) + 2c \\ 24 &= 22 + 6c \rightarrow c = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan fungsi kuadratnya adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f(x) &= \frac{3}{11}x^2 - 11x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

6.4 Hubungan Garis dengan Grafik Fungsi Kuadrat

Hubungan garis dengan grafik fungsi kuadrat (parabola) ada tiga, yaitu memotong di dua titik, memotong di satu titik (menyinggung) dan tidak memotong parabola. Hubungan garis dengan parabola ini dapat ditentukan berdasarkan nilai diskriminannya (D). Perhatikan gambar 6.9.



Gambar 6.9. Hubungan garis dengan grafik fungsi kuadrat

Contoh 10:

Tentukan kedudukan garis $y = 2x - 3$ terhadap grafik parabola $y = 2x^2 + 4x - 6$, dan tentukan koordinat titik potongnya jika ada.

Solusi:

Persamaan garis $y = 2x - 3$ disubstitusi ke persamaan parabola $y = 2x^2 + 4x - 6$, diperoleh:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 2x^2 + 4x - 6 \\ 2x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Dari sini diketahui nilai $a = 2, b = -2$ dan $c = -3$. Selanjutnya ditentukan nilai diskriminannya, diperoleh:

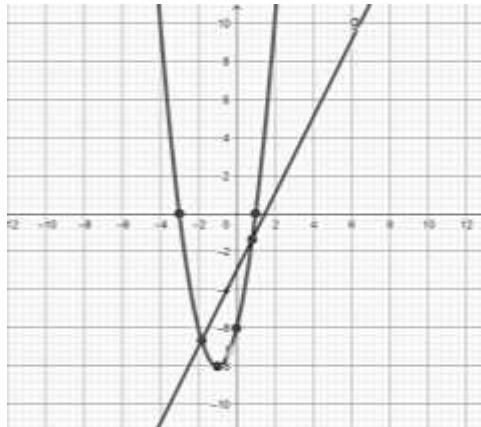
$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ D &= (-2)^2 - 4.2.(-3) \\ D &= 16 \end{aligned}$$

Karena $D > 0$, berarti *garis memotong parabola di dua titik*. Untuk menentukan titik potongnya, diselesaikan persamaan

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (2x - 3)(x + 1) &= 0 \\ x_1 &= 3/2 \text{ atau } x_2 = -1 \end{aligned}$$

Untuk menentukan koordinat titik potongnya, disubstitusi nilai $x_1 = 3/2$ dan $x_2 = -1$, ke $y = 2x - 3$, diperoleh nilai $y_1 = 0$, dan $y_2 = -5$.

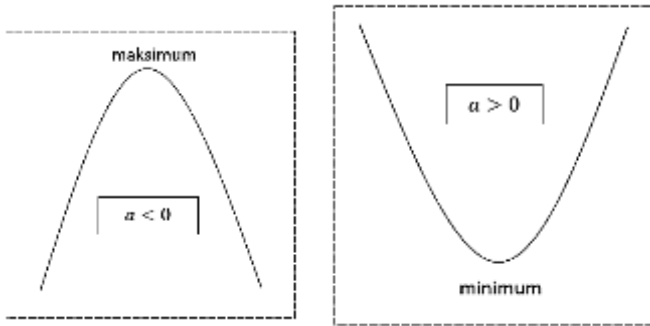
Dengan demikian, koordinat titik potong garis $y = 2x - 3$ dengan parabola $y = 2x^2 + 4x - 6$ adalah $(3/2, 0)$ dan $(-1, -5)$, seperti pada gambar 6.10.



Gambar 6.10. Garis Potong parabola $y = 2x^2 + 4x - 6$

6.5 Terapan Fungsi Kuadrat

Terapan fungsi kuadrat berkaitan dengan nilai ekstrim, yaitu nilai maksimum dan nilai minimum. Nilai maksimum diperoleh saat kurva terbuka ke bawah, dalam hal ini saat nilai $a < 0$. Dan sebaliknya, nilai minimum diperoleh saat kurva terbuka ke atas, dalam hal ini saat nilai $a > 0$.



Gambar 6.12. Nilai maksimum dan minimum parabola

Langkah-langkah menentukan nilai maksimum/minimum dari suatu parabola:

1. Tentukan persamaan parabola dalam bentuk persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. Lihat nilai a , jika:
 $a < 0$, maka fungsi bernilai maksimum.

$$y_{maksimum} = \frac{D}{-4a}$$

$a > 0$, maka fungsi bernilai minimum.

$$y_{minimum} = \frac{D}{-4a}$$

3. Nilai $y_{maks/min}$, saat $x = \frac{-b}{2a}$

Contoh 11

Santi memiliki pekarangan berbentuk persegi panjang, dengan panjang $(4x - 5)$ dan lebarnya $(7 - 2x)$. Tentukan luas maksimum pekarangan Santi.

Solusi:

$$\text{Luas pekarangan} = p \times l = (4x - 5)(7 - 2x)$$

$$L = -8x^2 + 38x - 35$$

Nilai $a = -8$, $b = 38$ dan $c = -35$ dalam hal ini $a < 0$, maka luas memiliki nilai maksimum.

$$L_{\text{maksimum}} = \frac{D}{-4a}$$

$$L_{\text{maksimum}} = \frac{(38)^2 - 4 \cdot (-8) \cdot (-35)}{-4 \cdot (-8)}$$

$$L_{\text{maksimum}} = \frac{1444 - 1190}{32} = 7,9375 \text{ satuan luas}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Eves, H., 1997. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. 3rd ed. New York: Dover Publications.
- IDSchool, 2023. <https://idschool.net/>. [Online] Available at: <https://idschool.net/sma/sifat-grafik-fungsi-kuadrat/> [Accessed 30 Agustus 2023].
- Khan, R. & Hill, D., 2017. *Mathematics Fundamentals*. 1st ed. western Australia: bookboon learning.
- Weisstein, E. W., 2004. *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. [Online] Available at: <https://mathworld.wolfram.com/QuadraticEquation.html> [Accessed 19 8 2023].

BAB 7

FUNGSI EKSPONEN

Oleh Lathifatul Aulia

7.1 Pendahuluan

Terlebih dahulu kita kenal apa itu Eksponen? Eksponen merupakan bilangan berpangkat yaitu bentuk perkalian suatu bilangan dengan dirinya sendiri secara berulang. Selain itu, eksponen dapat digunakan untuk meringkas penulisan yang berukuran terlalu besar atau terlalu kecil agar diperoleh penulisan yang lebih sederhana. Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI), eksponen dalam matematika adalah angka dan sebagainya yang ditulis di sebelah kanan atas angka lain yang menunjukkan pangkat dari angka tersebut, seperti angka 4 pada 3^4 . Perlu diketahui bahwa proses penemuan dari konsep eksponen telah dimulai sejak zaman *Euclid* yaitu seorang matematikawan yang dikenal sebagai Bapak Geometri karena kontribusinya yang besar dalam bidang geometri. *Euclid* secara implisit menggunakan konsep eksponen dalam karyanya, sebab pada zamannya eksponen belum ditemukan. Namun, *Euclid* menggunakan konsep pangkat dalam geometri dan aritmatika dalam bukunya yang berjudul “The Elements”. Pada buku tersebut, eksponen digunakan untuk menunjukkan perbandingan ukuran antara objek-objek geometri seperti segitiga, persegi, dan lingkaran. Dimana eksponen hanya sebagai konsep geometri dan tidak digunakan dalam notasi matematika. Tetapi, awal mula eksponen muncul sebagai konsep matematika setelah matematikawan dari Arab dan Eropa pada abad ke-16 dan ke-17. Dalam modul ini akan memperkenalkan konsep fungsi produksi pertanian. Dimana fungsi produksi

menjelaskan bagaimana hubungan teknis yang mentranformasikan in (sumberdaya) menjadi output (komoditi).

7.2 Eksponen

Definisi Eksponen

Jika b suatu bilangan riil dan n bilangan bulat positif, b^n menyatakan hasil kali bilangan b sebanyak n faktor dan secara umum dituliskan sebagai berikut.

$$b^n = \underbrace{b \times b \times b \times b \times \dots \times b}_n$$

Dengan b merupakan bilangan pokok, n merupakan bilangan pangkat/eksponen.

Perlu diketahui beberapa hal penting mengenai definisi terkait dengan eksponen.

1. Untuk b sembarang bilangan riil dan $b \neq 0$ berlaku:

$$1 = \frac{b^n}{b^n} = b^{n-n} = b^0. \text{ Jadi, dapat didefinisikan bahwa } b^0 = 1 \text{ untuk sembarang } b \neq 0.$$

2. Untuk b sembarang bilangan riil dan $b \neq 0$ berlaku:

$$b^{-1} = b^{-n} \times \frac{b^n}{b^n} = \frac{b^{-n} \times b^n}{b^n} = \frac{b^{-n+n}}{b^n} = \frac{b^0}{b^n} = \frac{1}{b^n}. \text{ Jadi, dapat didefinisikan bahwa } b^{-n} = \frac{1}{b^n}.$$

Contoh I

- a. $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- b. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
- c. $(-3)^4 = -3 \times -3 \times -3 \times -3 = 81$
- d. $(\sqrt{7})^3 = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = \sqrt{343} = 7\sqrt{7}$
- e. $(-12)^2 = -12 \times -12 = 144$

Berikut sifat bilangan Eksponensial

Dengan $\alpha > 0$ dan $\alpha \neq 0$, maka

1. $\alpha^k \times \alpha^l = \alpha^{k+l}$
2. $\alpha^k \div \alpha^l = \alpha^{k-l}$
3. $(\alpha^k)^l = \alpha^{k \times l}$

$$4. (\alpha \times \beta)^k = \alpha^k \times \beta^k$$

$$5. (\alpha \div \beta)^k = \alpha^k \div \beta^k$$

$$6. \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \frac{\alpha^k}{\beta^k}$$

$$7. \alpha^0 = 1$$

$$8. \alpha^{-k} = \frac{1}{\alpha^k}$$

$$9. \sqrt[k]{\alpha^k} = \alpha^{\frac{k}{k}}$$

Diberikan contoh soal, sebagai berikut.

Contoh II

$$1. 27^3 \times 27^5 = 27^{3+5} = 27^8$$

$$2. 64 \times 2^{10} = 2^6 \times 2^{10} = 2^{6+10} = 2^{16}$$

$$3. 5^7 \div 5^2 = 5^{7-2} = 5^5$$

$$4. (10^4)^3 = 10^{4 \times 3} = 10^{12}$$

$$5. (5 \times 6)^3 = 5^3 \times 6^3$$

$$6. \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6^2}{5^2}$$

$$7. 17^0 = 1$$

$$8. 25^{-3} = \frac{1}{25^3}$$

$$9. \sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}$$

$$10. \left(\frac{x^3 y^6}{x^5 y^{-2}}\right)^5 = (x^{3-5} y^{6-(-2)})^5 = (x^{-2} y^8)^5 = x^{-2 \times 5} y^{8 \times 5} = x^{-10} y^{40} = \frac{y^{40}}{x^{10}}$$

7.3 Fungsi Eksponen

7.3.1 Definisi Fungsi Eksponen

Bentuk umum fungsi eksponen adalah $y = a^x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, dimana a disebut sebagai basis dari fungsi eksponen $y = a^x$.

Perlu diingat bahwa basis untuk bilangan riil positif untuk menghindari munculnya bilangan kompleks, contoh $(-2)^{\frac{1}{2}}$ menunjukkan basis -2 merupakan bukan bilangan riil. Adapun

pembatasan $a \neq 1$ dilakukan untuk menghindari fungsi konstan $f(x) = 1^x = 1$, di mana $f(x)$ tidak memiliki invers karena bukan bijektif. Diberikan contoh untuk fungsi eksponen, sebagai berikut.

- a. $f(x) = 3^x$
- b. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

Grafik fungsi konstan dibedakan menjadi dua yaitu untuk $0 < a < 1$ dan untuk $a > 1$.

Grafik $y = a^x$, untuk $0 < a < 1$ merupakan fungsi turun.

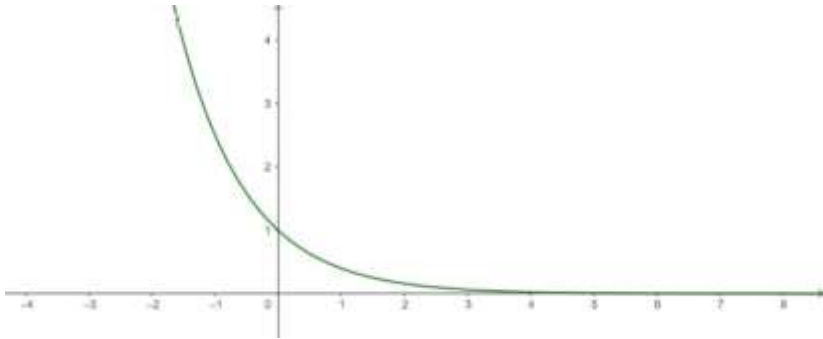
Diberikan salah satu kasus yaitu $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

Fungsi $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- a. Terdefinisi untuk semua $x \in \mathbb{R}$;
- b. Jika x bernilai kecil sekali dan bertanda negatif maka nilai y besar sekali dan bertanda positif;
- c. Jika x bernilai besar sekali dan bertanda positif maka nilai y bernilai mendekati nol dan bertanda positif;
- d. Untuk $x = 0$, maka nilai $y = 1$.

Berdasarkan uraian diatas, berikut disajikan tabel yang berisi beberapa nilai fungsi $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ berserta gambar grafiknya.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$	15,625	6,25	2,5	1	0,4	0,16	0,064



Grafik $y = a^x$, untuk $a > 1$ merupakan fungsi naik.

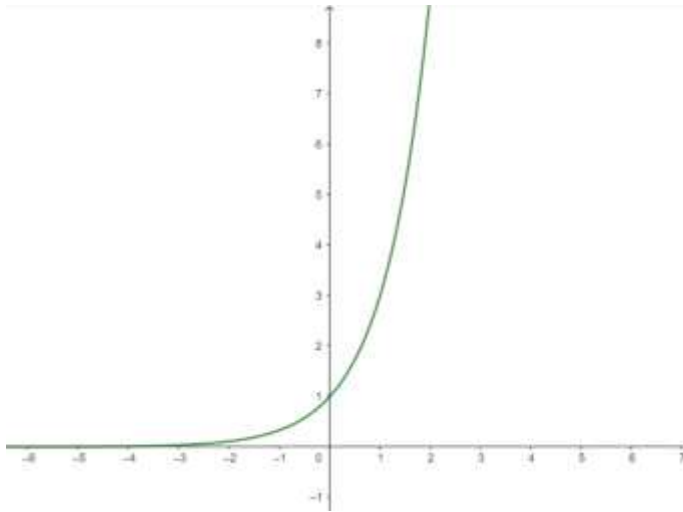
Diberikan salah satu kasus yaitu $y = (3)^x$

Fungsi $y = (3)^x$ memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- Terdefinisi untuk semua $x \in \mathbb{R}$;
- Jika x bernilai kecil sekali dan bertanda negatif maka nilai y mendekati nol dan bertanda positif;
- Jika x bernilai besar sekali dan bertanda positif maka nilai y bernilai besar sekali dan bertanda positif;
- Untuk $x = 0$, maka nilai $y = 1$.

Berdasarkan uraian diatas, berikut disajikan tabel yang berisi beberapa nilai fungsi $y = (3)^x$ berserta gambar grafiknya.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (3)^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27



7.3.2 Fungsi Pertumbuhan

Pertumbuhan eksponensial adalah perubahan yang terjadi ketika nilai asli meningkat dengan laju yang konsisten dalam jangka waktu tertentu atau terdapat penambahan jumlah/kandungan objek tertentu yang teratur setiap periodenya menghasilkan selisih nilai yang memenuhi grafik fungsi eksponen. Pertumbuhan secara eksponensial dinyatakan sebagai berikut.

$$P_n = P_0(1 + i)^n$$

Dengan,

P_n = jumlah objek pada saat periode ke- n

P_0 = jumlah objek saat awal atau mula-mula

i = persentase pertumbuhan atau rasio pertumbuhan

n = periode.

Contoh soal

1. Petani sayur organik mencatat hasil panen sayurinya pada 2 tahun terakhir, disimpulkan bahwa hasil panen sayur organik mengalami kenaikan sebesar 5% dari tahun ke tahun. Diketahui hasil panen sayur organik

pada tahun pertama sebesar 2 kwintal, hitunglah hasil panen sayur organik pada tahun ke-5!

Penyelesaian:

Diberikan bentuk umum pertumbuhan eksponensial.

$$P_n = P_0(1 + i)^n$$

Diketahui $P_0 = 2$ kwintal, $i = 0,05$ per tahun

$$P_5 = 2(1 + 0,05)^5$$

$$P_5 = 2(1,05)^5$$

$$P_5 = 2 \times 1,2763 = 2,55256 \text{ kwintal}$$

7.3.3 Fungsi Peluruhan

Fungsi peluruhan atau fungsi pertumbuhan negatif. Fungsi peluruhan secara eksponensial dinyatakan dengan sebagai berikut.

$$P_n = P_0(1 - i)^n$$

Dengan,

P_n = jumlah objek pada saat periode ke- n

P_0 = jumlah objek saat awal atau mula-mula

i = persentase peluruhan atau rasio peluruhan

n = periode.

Contoh soal

1. Diidentifikasi tanaman padi mulai terserang hama wereng hijau merupakan hama utama tanaman padi yang selalu menjadi faktor penyebab tanaman padi menjadi turun dan gagal panen karena adanya virus tungro menyebabkan penyakit pada tanaman padi tersebut. Setelah dilakukan pengecekan ternyata terdapat 50 butir telur pada setiap tanaman padi. Supaya tanaman padi tetap panen, maka petani perlu menanggulangi dengan membasmi hama tersebut menjadi seperduapuluhlima dari hama yang ada setiap 3 jam. Tentukan sisa hama setelah 9 jam!

Penyelesaian:

Diberikan bentuk umum peluruhan eksponensial.

$$P_n = P_0(1 - i)^n$$

Diketahui $P_0 = 50$ butir, $i = 0,04$ per 3 jam

$$P_5 = 50(1 - 0,04)^{\frac{9}{3}}$$

$$P_5 = 50(0,96)^3$$

$$P_5 = 50 \times 0,884735 = 44,23675 \text{ butir}$$

7.4 Persamaan Eksponen

Persamaan eksponen adalah persamaan yang didalamnya terdapat eksponen dengan bilangan pokok atau eksponennya mengandung suatu variable. Adapun penyelesaian persamaan eksponen bergantung pada bentuk persamaan eksponennya, sebagai berikut beberapa bentuk persamaan eksponen dan penyelesaiannya.

1. Persamaan Eksponen berbentuk $\alpha^{f(x)} = 1$

Jika $\alpha^{f(x)} = 1$ dengan $\alpha > 0$ dan $\alpha \neq 1$, nilai $f(x) = 0$.

2. Persamaan Eksponen berbentuk $\alpha^{f(x)} = \alpha^q$

Jika $\alpha^{f(x)} = \alpha^q$ dengan $\alpha > 0$ dan $\alpha \neq 1$, nilai $f(x) = q$.

3. Persamaan Eksponen berbentuk $\alpha^{f(x)} = \alpha^{g(x)}$

Jika $\alpha^{f(x)} = \alpha^{g(x)}$ dengan $\alpha > 0$ dan $\alpha \neq 1$, nilai $f(x) = g(x)$.

4. Persamaan Eksponen berbentuk $\alpha^{f(x)} = \beta^{f(x)}$

Jika $\alpha^{f(x)} = \beta^{f(x)}$ dengan $\alpha > 0$ dan $\alpha \neq 1$, $\beta > 0$ dan $\beta \neq 1$ nilai $f(x) = 0$.

5. Persamaan Eksponen berbentuk $(h(x))^{f(x)} = (h(x))^{g(x)}$

Jika $(h(x))^{f(x)} = (h(x))^{g(x)}$, beberapa kemungkinan sebagai berikut.

- a. $f(x) = g(x)$

- b. $h(x) = 1$

- c. $h(x) = 0, f(x)$ dan $g(x)$ positif
 - d. $h(x) = -1, f(x)$ dan $g(x)$ keduanya ganjil atau $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya genap.
6. Persamaan Eksponen berbentuk $A(\alpha^{f(x)})^2 + B(\alpha^{f(x)}) + C = 0$, dengan $\alpha > 0$ dan $\alpha \neq 1$, A, B , dan C bilangan riil dan $A \neq 0$, penyelesaiannya dengan cara mengubah persamaan eksponen menjadi persamaan kuadrat $Ay^2 + By + C = 0$ dengan $y = \alpha^{f(x)}$.
Berikut diberikan contoh soal.

Tentukan himpunan penyelesaian dari setiap persamaan eksponen berikut.

1. $5^{3-x} = 1$

Penyelesaian. $5^{3-x} = 1 \Leftrightarrow 5^{3-x} = 5^0$,
maka $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

2. $3^{x+5} = 3^{x^2+4x-5}$

Penyelesaian $3^{x+5} = 3^{x^2+4x-5} \Leftrightarrow x + 5 = x^2 + 4x - 5$
 $\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 - x - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$
 $\Leftrightarrow (x + 5)(x - 2) = 0$

Sehingga diperoleh nilai $x = -5$ atau $x = 2$.

3. $100^{x-5} = 101^{x-5}$

Penyelesaian $100^{x-5} = 101^{x-5}$ agar memenuhi maka
 $x - 5 = 0$ maka $x = 5$.

7.5 Fungsi Eksponen Asli

Definisi Fungsi eksponen asli dinyatakan dengan *exp*.
Sehingga dapat dituliskan

$$x = \exp y = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$$

Sifat-sifat Fungsi eksponen

1. Huruf e menyatakan bilangan riil positif unik demikian sehingga $\ln e = 1$. Nilai $e \approx 2,718281828459045$

2. Diberikan α dan β sebarang bilangan riil, maka $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$ dan $\frac{e^\alpha}{e^\beta} = e^{\alpha-\beta}$

Contoh soal

Sederhanakanlah bentuk fungsi eksponen asli berikut.

1. $e^{3 \ln x} = x^3$
2. $\ln e^{\cos x} = \cos x$
3. $e^{x - \ln x} = \frac{e^x}{e^{\ln x}} = \frac{e^x}{x}$

DAFTAR PUSTAKA

- Martono, K., 1985, Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik I, Penerbit Angkasa, Bandung.
- Purcell, J, E, Rigdon, S., E.,. 2003. *Kalkulus*, 8th edition, jilid I. Jakarta: Erlangga.
- Soemartojo, N., 1985, Kalkulus, Penerbit Erlangga, Jakarta.
- Richard Bronson, G. B. 2014. *Schaum's Outlines Differential Equations*. New York: McGraw Hill Education

BAB 8

KALKULUS INTEGRAL

Oleh Beatric Videlia Remme'

8.1 Pendahuluan

Kalkulus integral adalah salah satu cabang matematika yang penting dan berfungsi untuk menghitung luas di bawah sebuah kurva atau grafik. Ini juga dapat digunakan untuk menentukan berbagai hal, seperti total perubahan dalam suatu sistem, rata-rata dari sejumlah data, dan banyak aplikasi lainnya di berbagai bidang ilmu salah satunya adalah bidang pertanian. Apabila suatu fungsi yang sudah diturunkan kemudian dikembalikan ke fungsi sebelumnya, maka proses ini dikatakan sebagai "pengintegralan". Simbol integral dituliskan " $\int$ ". (Pinem, 2015).

Sebagai contoh $y = 4x^3 + 5x^2 + 5$, memiliki turunan $dy = (12x^2 + 10x)dx$, selanjutnya integral dari $dy = (12x^2 + 10x)dx$ dituliskan $\int dy = \int (12x^2 + 10x)dx$, sehingga diperoleh: $y = 4x^3 + 5x^2 + C$, dimana C adalah bilangan konstanta.

8.2 Integral Tak Tentu

Beberapa rumus dasar integral tak tentu:

1. $\int A dx = Ax + c$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
3. $\int Ax^n dx = \frac{A}{n+1} x^{n+1} + c$
4. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) + \int g(x) + c$
5. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) - \int g(x) + c$
6. $\int \frac{A}{x+a} dx = a \ln(x+a) + c$

Catatan: Pada integral, pangkatnya selalu ditambahkan dengan satu, sedangkan pada differensial pangkatnya selalu dikurangi satu.

Contoh 1

Tentukan $\int (4x^5 - 2x^3 + 2x - 1)dx$

Jawab:

Bentuk soal diatas dipisahkan oleh tanda kurang dan tambah, sehingga proses pengintegralan dilakukan sbb:

$$\begin{aligned}\int (4x^5 - 2x^3 + 2x - 5)dx \\&= \int 4x^5 dx - \int 2x^3 dx + \int 2x dx - \int 5 dx \\&= \frac{4}{5+1} x^{5+1} - \frac{2}{3+1} x^{3+1} + \frac{2}{1+1} x^{1+1} - 5x + c \\&= \frac{4}{6} x^6 - \frac{2}{4} x^4 + x^2 - 5x + c\end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan $\int \left(\frac{x^6-3}{x^3} \right) dx$

Jawab:

Bentuk soal di atas disederhanakan menjadi:

$$\frac{x^6 - 3}{x^3} = \frac{x^6}{x^3} - \frac{3}{x^3} = x^3 - 3x^{-3}$$

Maka bentuk integral menjadi:

$$\begin{aligned}\int (x^3 - 3x^{-3}) dx &= \frac{1}{3+1} x^{3+1} - \frac{3}{-3+1} x^{-3+1} + c \\&= \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{-2} x^{-2} + c \\&= \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{-2x^2} + c\end{aligned}$$

Contoh 3

Tentukan $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

Jawab:

Bentuk persamaan $\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Sehingga } \int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\
 &= \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + c \\
 &= \frac{1}{\frac{5}{3}} x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + c \\
 &= \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} - 2\sqrt{x} + c
 \end{aligned}$$

8.2.1 Pengintegralan dengan Penggantian (substitusi)

Pengintegralan dengan substitusi adalah salah satu teknik integral yang berguna untuk menyelesaikan integral tertentu yang sulit dipecahkan. Teknik ini juga dikenal sebagai aturan rantai, dan sering digunakan untuk mengatasi integral yang melibatkan fungsi trigonometri, eksponensial, dan lainnya.

Beberapa rumus dasar fungsi trigonometri dan fungsi eksponen:

1. $\int \sin u \, du = -\cos u + c$
2. $\int \cos u \, du = \sin u + c$
3. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$
4. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$
5. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$
6. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$
7. $\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + c$
8. $\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + c$
9. $\int e^u \, du = e^u + c$
10. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c, a \neq 1, a > 0$

(Ratnadewi, dkk, 2016)

Contoh 4

Tentukan $\int 3e^{4x} dx$

Jawab:

Misal $u = 4x$, $du = 4 \, dx$ atau $dx = \frac{1}{4} du$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int 3e^{4x} dx &= 3 \int e^u \frac{1}{3} du \\
 &= e^u + c \\
 &= e^{4x} + c
 \end{aligned}$$

Contoh 5

Tentukan $\int x^4 \sqrt{5x^5 + 11} dx$

Jawab:

Misal $u = 5x^5 + 11$, $du = 25x^4 dx$ atau $dx = \frac{1}{25x^4} du$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int x^4 \sqrt{5x^5 + 11} dx &= \int x^4 \sqrt{u} \frac{1}{25x^4} du \\
 &= \frac{1}{25} \int \sqrt{u} du \\
 &= \frac{1}{25} \int u^{\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + c \\
 &= \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + c \\
 &= \frac{1}{25} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c \\
 &= \frac{2}{75} (5x^5 + 11)^{\frac{3}{2}} + c \\
 &= \frac{2}{75} \sqrt{(5x^5 + 11)^3} + c
 \end{aligned}$$

Contoh 6

Tentukan $\int \cos 3x dx$

Jawab:

Misalkan $u = 3x$, $du = 3 dx$ atau $dx = \frac{1}{3} du$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int \cos 3x dx &= \int \cos u \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{1}{3} \int \cos u du \\
 &= \frac{1}{3} \sin u + c \\
 &= \frac{1}{3} \sin 3x + c
 \end{aligned}$$

Contoh 7

Tentukan $\int \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) dx$

Jawab:

Misalkan $u = \frac{x}{3}$, $du = \frac{1}{3} dx$ atau $dx = 3 du$, sehingga:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 u 3du &= 3 \int \cos u \cdot \cos^2 u du \\&= 3 \int \cos u \cdot \cos^2 u du \\&= 3 \int \cos u [1 - \sin^2 u] du \\&= 3 \int \cos u du - 3 \int \cos u \sin^2 u du \quad (\text{mis } v = \sin u) \\&= 3 \sin u + c - 3 \int v^2 dv \\&= 3 \sin \frac{x}{3} - \sin^3 \frac{x}{3} + c\end{aligned}$$

8.2.2 Integral Parsial

Integral parsial adalah teknik yang berguna untuk menyelesaikan integral yang melibatkan produk dari dua fungsi. Teknik ini memungkinkan kita untuk mengubah integral dari produk dua fungsi menjadi kombinasi integral dari fungsi-fungsi yang lebih sederhana. Integral parsial berguna terutama ketika kita dihadapkan pada integral yang melibatkan produk dari fungsi-fungsi aljabar, trigonometri, atau eksponensial.

Rumus dasar integral parsial adalah sebagai berikut:

Perlu diingat kembali bahwa turunan dari suatu fungsi merupakan perkalian atau pembagian dari dua fungsi yang lain.

$$\begin{aligned}f(x) &= u(x) \cdot v(x) \\df(x) &= d[u(x) \cdot v(x)] = u dv + v du \\d(uv) &= u dv + v du\end{aligned}$$

Bila kedua ruas diintegrasikan maka didapat:

$$\begin{aligned}\int d(uv) &= \int u dv + \int v du \\uv &= \int u dv + \int v du \\\int u dv &= uv - \int v du\end{aligned}$$

Bentuk ini disebut sebagai integral parsial. Pemilihan u dan dv adalah langkah kunci dalam penyelesaian soal-soal integral parsial.

Contoh 8

Tentukan $\int x \cos x dx$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Misalkan } u = x &\longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx &\longrightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \\ \int u dv &= uv - \int v du \\ \int x \cos x dx &= x \cdot \sin x - \int \sin x dx \\ \int x \cos x dx &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

Contoh 9

Tentukan $\int x^2 e^x dx$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Misalkan } u = x^2 &\longrightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx &\longrightarrow v = \int e^x dx = e^x \\ \int u dv &= uv - \int v du \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int e^x 2x dx \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \end{aligned}$$

Bentuk $\int x e^x dx$ tidak dapat langsung diselesaikan karena itu, perlu diparsialkan kembali: $u = x \longrightarrow$

$$\begin{aligned} du &= dx \\ dv &= e^x dx \longrightarrow v = \int e^x dx = e^x \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2[x e^x - \int e^x dx] \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2[x e^x - e^x] \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \end{aligned}$$

Contoh 10

Tentukan $\int e^x \sin x dx$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Misalkan } u = e^x &\longrightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx &\longrightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x \end{aligned}$$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

Karena bentuk $\int -e^x \cos x \, dx$, tidak dapat langsung diselesaikan, karena itu perlu diparsialkan kembali:

Misalkan $u = e^x \longrightarrow du = e^x \, dx$

$$dv = \cos x \, dx \longrightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \{e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx\}$$

$$\int e^x \sin x \, dx + \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

8.2.3 Integral Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah suatu fungsi yang dinyatakan dengan

$$H(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Contoh 11

Tentukan $\int \frac{6x}{(x^2-3)^4} \, dx$

Jawab:

Misalkan $U = x^2 - 3$, maka $dU = 2x \, dx$, $3dU = 6x \, dx$ sehingga

$$dx = \frac{1}{3x} dU$$

Substitusikan U dan dx ke persamaan awal sehingga menjadi:

$$\int \frac{6x}{(x^2-3)^4} \, dx = \int \frac{6x}{U^4} \cdot \frac{1}{3x} dU$$

$$= 2 \int \frac{1}{U^4} dU$$

$$= 2 \int U^{-4} dU = 2 \cdot \frac{1}{-\frac{3}{2}} U^{-\frac{3}{2}} + c$$

Substitusikan kembali nilai $U = x^2 - 3$, sehingga diperoleh

$$\int \frac{6x}{(x^2-3)^4} \, dx = -\frac{2}{3(x^2-3)^3} + c$$

Contoh 12

Tentukan $\int \frac{3x^2+2x-2}{2(x^3+x^2-2x)^3} \, dx$

Jawab:

Misalkan $U = x^3 + x^2 - 2x$, maka $dU = (3x^2 + 2x - 2)dx$, sehingga

$$dx = \frac{1}{3x^2 + 2x - 2} dU$$

Substitusikan U dan dx ke persamaan awal sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+2x-2}{2(x^3+x^2-2x)^3} dx &= \int \frac{3x^2+2x-2}{2U^3} \cdot \frac{1}{3x^2+2x-2} dU \\ &= \int \frac{1}{2U^3} dU \\ &= \frac{1}{2} \int U^{-3} dU = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} U^{-2} + c\end{aligned}$$

Substitusikan kembali nilai $U = x^3 + x^2 - 2x$ sehingga diperoleh

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{2(x^3+x^2-2x)^3} dx = -\frac{1}{4(x^3+x^2-2x)^2} + c$$

8.3 Integral Tentu

Integral tentu adalah jenis integral yang memiliki batas atas dan batas bawah tertentu. Ini berbeda dari integral tak tentu (integral indefinit) yang hanya menghasilkan fungsi tanpa batasan spesifik. Jika integral fungsi $f(x)$ adalah $F(x)$, a batas bawah integral dan b batas atas integral, maka dapat dituliskan:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Bentuk rumus di atas disebut integral tertentu, karena hasil integral tidak lagi ditambahkan dengan konstanta c (Pinem, 2015).

Contoh 13

Tentukan $\int_a^b (x^2 - 5x + 1)dx$

Jawab:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2 - 5x + 1)dx &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x \\ &= \left\{ \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{5}{2}(2)^2 + 2 \right\} - \left\{ \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{5}{2}(1)^2 + 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{5}{2} \cdot 4 + 2 \right\} - \left\{ \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{5}{2} \cdot 1 + 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{8}{3} - 10 + 2 \right\} - \left\{ \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 1 \right\} = \frac{28}{3} - \frac{7}{6} = \frac{49}{6}\end{aligned}$$

Contoh 14

Tentukan $\int_a^b (x - 3)^2 dx$

Jawab:

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x - 3)^2 dx &= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \\ &= \left\{ \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 \right\} - \left\{ \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 \right\} \\ &= \{9 - 27 + 27\} - \{0\} = 45\end{aligned}$$

Contoh 15

Tentukan $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - 2 \cos 4x) dx$

Jawab:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - 2 \cos 4x) dx &= -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 4x \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} \cos 2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \sin 4 \cdot 0 \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \cdot (0) - \frac{1}{2} \cdot (0) \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} (0) \right\} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Integral adalah konsep matematika yang memiliki banyak aplikasi dalam bidang pertanian. Beberapa penggunaan integral dalam pertanian misalnya: Perhitungan Luas Lahan yang memiliki bentuk yang kompleks, seperti lahan yang berkontur atau memiliki batas-batas yang tidak teratur, menghitung volume air yang diperlukan untuk irigasi lahan pertanian, menghitung jumlah pupuk yang dibutuhkan untuk suatu lahan berdasarkan analisis tanah dan kebutuhan tanaman, dan masih banyak yang lain.

Berikut contoh soal penggunaan integral dalam bidang pertanian:

Contoh 16

Sebuah lahan pertanian memiliki bentuk yang tidak teratur, diberikan fungsi batas $y = 3x^2 + 6x + 1$ di mana x adalah jarak horizontal dalam meter dan y adalah tinggi dalam meter. Hitunglah luas lahan tersebut di antara $x=0$ dan $x=4$ menggunakan integral.

Jawab:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 (3x^2 + 6x + 1) dx = x^3 + 3x^2 + x \\ &= \{4^3 + 3.4^2 + 4\} - \{0^3 + 3.0^2 + 0\} \\ &= \{64 + 48 + 4\} - 0 \\ &= 116 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Pinem, D, M. 2015. *Kalkulus Untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Penerbit Rekayasa Sains
- Ratnadewi, dkk. 2016. *Matematika Teknik Untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Penerbit Rekayasa Sains

BIODATA PENULIS



Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd.
Dosen Universitas Simalungun

Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd, lahir di Medan, Pendidikan S1 Prodi Matematika FMIPA USU Medan, S2 Prodi Pendidikan Matematika UNIMED Medan dan S3 Prodi Ilmu Matematika FMIPA USU Medan. Dosen di FKIP, SPS Prodi S2 PW, IPS dan Manajemen, serta Kepala Lembaga Akreditasi Internal (LAI) Universitas Simalungun. Penulis aktif mengikuti sebagai pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional dan aktif menulis Buku, Jurnal OJS, Sinta, dan Scopus.

BIODATA PENULIS



Ketut Queena Fredlina, S.Si., M.Si.

Dosen Program Studi Teknik Informatika
Fakultas Teknologi Informasi dan Desain

Penulis lahir di Denpasar tanggal 31 Oktober 1990. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Informatika Fakultas Teknologi Informasi dan Desain, Universitas Primakara. Penulis memperoleh gelar Sarjana (S.Si.) dari Universitas Udayana, pada Jurusan Matematika, kemudian memperoleh gelar Magister (M.Si.) dari Institut Teknologi Bandung (ITB), dengan fokus pada bidang Matematika. Sebagai seorang dosen, penulis telah terlibat dalam pengajaran dan pembimbingan di Jurusan Teknik Informatika di Universitas Primakara. Ia memiliki pengalaman dalam menyampaikan materi yang kompleks dengan cara yang mudah dipahami oleh mahasiswa. Penulis memiliki minat khusus dalam penelitian yang berkaitan dengan penerapan konsep matematika dalam dunia teknologi. Ia telah menghasilkan beberapa karya ilmiah dan penelitian yang berkontribusi pada pemahaman dan perkembangan di bidang ini.

BIODATA PENULIS



Putri Anugrah Cahya Dewi, M.Pd.

Dosen Program Studi Sistem Informasi Akuntansi
Fakultas Teknologi Informasi dan Desain Universitas Primakara

Penulis lahir di Timor-Timur tanggal 28 Agustus 1994. Penulis asli Bali ini adalah dosen tetap pada Program Studi Sistem Informasi Akuntansi, Universitas Primakara. Penulis menyelesaikan studi S1 dan S2 bidang Pendidikan Matematika di Universitas Pendidikan Ganesha. Jabatan fungsional terakhirnya adalah Lektor. Penulis turut aktif dalam melakukan publikasi ilmiah pada jurnal terakreditasi nasional dengan fokus penelitian pada bidang pendidikan. Selain sebagai dosen tetap, penulis juga menjabat sebagai Wakil Rektor III Bidang Kemahasiswaan dan Alumni Universitas Primakara.

BIODATA PENULIS



Fahmy Rinanda Saputri, S.T., M.Eng.

Dosen Program Studi Teknik Fisika
Fakultas Teknik dan Informatika Universitas Multimedia
Nusantara

Penulis lahir pada bulan Agustus 1993 di Cilacap. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Fisika Fakultas Teknik dan Informatika, Universitas Multimedia Nusantara. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Teknik Fisika Universitas Gadjah Mada dan melanjutkan studi pada Program Magister Teknik Fisika Universitas Gadjah Mada. Penulis menekuni bidang instrumentasi, fisika bangunan, dan energi baru terbarukan.

BIODATA PENULIS



Dr. Afnaria, S.Si, M.Si

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Islam Sumatera Utara

Penulis lahir di Medan tanggal 16 Januari 1981. Penulis adalah dosen tetap LLDIKTI Wilayah I dpk FKIP UISU, bertugas sejak tahun 2005 sampai dengan sekarang. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika, FMIPA USU pada tahun 2004. Menyelesaikan pendidikan S2 pada jurusan matematika, FMIPA USU pada tahun 2010. Dan menyelesaikan pendidikan S3 pada jurusan matematika, FMIPA USU pada tahun 2020.

BIODATA PENULIS



Lathifatul Aulia, S.Si., M.Mat.

Dosen Program Studi Sains Aktuaria

Fakultas Sains dan Teknologi

Institut Teknologi Statistika dan Bisnis Muhammadiyah Semarang

Penulis lahir di Demak tanggal 1 Februari 1995. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sains Aktuaria, Fakultas Sains dan Teknologi, Institut Teknologi Statistika dan Bisnis Muhammadiyah Semarang. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika Universitas Diponegoro dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Diponegoro. Sekarang, saya sering mengajar pada matakuliah Aljabar Linier, Kalkulus, Matematika Diskrit, dan Statistika Matematika. Penulis menekuni bidang pada matematika terapan.

BIODATA PENULIS



Beatric Videlia Remme', S.Pd., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Kristen Indonesia (UKI) Toraja

Penulis lahir di Rantepao, pada tanggal 6 April 1989. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Kristen Indonesia Toraja. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika UKI Toraja pada tahun 2011 dan melanjutkan S2 tahun 2012 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Makassar. Penulis menyelesaikan studi S2 pada tahun 2015, dan sampai saat ini penulis aktif mengajar pada program studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja, mengajarkan mata kuliah Teori Bilangan, Kalkulus Vektor, dan Geometri, dan Kalkulus.