

KALKULUS DASAR

Fathan Mubina Dewadi

Sari Puspita

Rini Yunita

Erniati

Rahmi Wahyuni

Ariyani Muljo

Ardiana Fatma Dewi

Karyadi

Novrianti

Kurnia Ahadiyah

Sediyanto



GET PRESS INDONESIA

KALKULUS DASAR

Penulis :

Fathan Mubina Dewadi
Sari Puspita
Rini Yunita
Erniati
Rahmi Wahyuni
Ariyani Muljo
Ardiana Fatma Dewi
Karyadi
Novrianti
Kurnia Ahadiyah
Sediyanto

ISBN :

Editor : Ariyanto M.Pd

Penyunting : Tri Putri Wahyuni, S.Pd

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd

Penerbit : GET PRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :

Jln. Palarik Air Pacah No 26 Kel. Air Pacah
Kec. Koto Tangah Kota Padang Sumatera Barat
Website : www.getpress.co.id
Email : adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, Desember 2023

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan
dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Segala Puji dan syukur atas kehadiran Allah SWT dalam segala kesempatan. Sholawat beriring salam dan doa kita sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW. Alhamdulillah atas Rahmat dan Karunia-Nya penulis telah menyelesaikan Buku Kalkulus Dasar ini.

Buku ini membahas Sistem koordinat siku empat, Fungsi trigonometri, Aturan rantai, Teorema nilai rata-rata, Integral tentu, Luas daerah bidang rata, volume benda dalam ruang, Fungsi logaritma asli, Fungsi transenden, Turunan.

Proses penulisan buku ini berhasil diselesaikan atas kerjasama tim penulis. Demi kualitas yang lebih baik dan kepuasan para pembaca, saran dan masukan yang membangun dari pembaca sangat kami harapkan.

Penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung dalam penyelesaian buku ini. Terutama pihak yang telah membantu terbitnya buku ini dan telah mempercayakan mendorong, dan menginisiasi terbitnya buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi masyarakat Indonesia.

Padang, Desember 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	v
BAB 1 SISTEM KOORDINAT SEGI EMPAT	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Koordinat Titik	2
1.3 Garis dan Vektor	4
1.4 Soal-Soal Latihan	4
DAFTAR PUSTAKA	5
BAB 2 FUNGSI TRIGONOMETRI	11
2.1 Pendahuluan	11
2.2 Sifat-sifat Dasar Sinus dan Kosinus	12
2.3 Grafik Sinus dan Kosinus	16
2.4 Identitas Trigonometri	17
DAFTAR PUSTAKA	20
BAB 3 ATURAN RANTAI	21
3.1 Pendahuluan	21
3.2 Turunan Fungsi Komposisi.....	21
3.3 Aturan Rantai	22
3.3.1 Aturan Rantai Bersusun	25
3.3.2 Contoh Penerapan Penggunaan Aturan Rantai.....	27
3.3.3 Latihan Soal Aturan Rantai	30
DAFTAR PUSTAKA	31
BAB 4 TEOREMA NILAI RATA-RATA.....	33
4.1 Pendahuluan	33
4.2 Teorema Nilai Rata-Rata.....	33
4.3 Aplikasi Teorema Nilai Rata-Rata	33
4.4 Kesimpulan.....	38
DAFTAR PUSTAKA	39
BAB 5 INTEGRAL TENTU	40
5.1 Definisi.....	40
5.2 Teorema Dasar Kalkulus.....	40
5.3 Teorema-Teorema dalam Integral Tentu	42
5.3.1 Kelinegaran Integral Tentu.....	42
5.3.2 Bukti.....	42
5.4 Sifat-Sifat Integral Tentu.....	45

5.4.1 Sifat dari Teorema A	45
5.4.2 Sifat Teorema B	45
5.4.3 Sifat Teorema C	45
5.4.4 Sifat Teorema D	45
5.4.5 Sifat Teorema E	45
5.5 Perhitungan Integral Tentu	46
5.5.1 Teorema A	47
5.5.2 Teorema B	47
5.5.3 Teorema C (Teorema Simetri)	47
DAFTAR PUSTAKA	49
BAB 6 LUAS DAERAH BIDANG RATA	50
6.1 Daerah Diatas Sumbu X	50
6.2 Daerah Dibawah Sumbu X	52
6.3 Daerah antara 2 Kurva	57
DAFTAR PUSTAKA	62
BAB 7 VOLUME BENDA DALAM RUANG	63
7.1 Volume	63
7.2 Metode Lempengan (Penampang Diketahui)	66
7.3 Metode Cakram	68
7.4 Metode Cincin	73
7.5 Metode Kulit Tabung	75
DAFTAR PUSTAKA	80
BAB 8 LUAS PERMUKAAN PUTAR	82
8.1 Pendahuluan	82
8.2 Silinder Terpotong	83
8.3 Perbandingan Luas Permukaan	84
8.4 Soal-Soal Latihan	85
DAFTAR PUSTAKA	87
BAB 9 FUNGSI LOGARITMA ASLI	94
9.1 Pendahuluan	94
9.2 Logaritma Asli	94
9.2.1 Sifat – sifat logaritma asli	96
9.2.2 Turunan dari fungsi logaritma asli	99
9.2.3 Integrasi fungsi logaritma asli	100
9.3 Penerapan Logaritma Asli	101
DAFTAR PUSTAKA	104
BAB 10 FUNGSI TRANSENDEAN	106
10.1 Fungsi Logaritma Natural	106

10.2 Fungsi Invers	108
10.3 Fungsi Eksponen Natural.....	111
10.4 Fungsi Eksponen Umum dan Fungsi Logaritma Umum.....	112
10.5 Fungsi Trigonometri Balikan	114
10.6 Turunan Fungsi Trigonometri.....	116
10.7 Fungsi Hiperbolik dan Balikannya	117
DAFTAR PUSTAKA	121
BAB 11 TURUNAN	122
11.1 Pendahuluan	122
11.2 Aturan Turunan.....	123
11.3 Metode Turunan.....	125
11.4 Aplikasi Turunan	126
DAFTAR PUSTAKA	128
BIODATA PENULIS	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Titik P_1 dan P_2 pada Lingkaran Satuan.....	13
Gambar 2.2. Titik P_3 dan P_4 pada Lingkaran Satuan.....	13
Gambar 2.3. Grafik Sinus dan Kosinus	16
Gambar 7.1. Ilustrasi Volume Benda Beraturan.....	61
Gambar 7.2. Ilustrasi Volume Benda Tidak Beraturan ..	62
Gambar 7.3. Benda Bervolume Tidak beraturan	62
Gambar 7.4. Partisi dari Benda Bervolume Tidak Beraturan.....	62
Gambar 7.5. Ilustrasi Penjumlahan Riemann	63
Gambar 7.6. Ilustrasi Volume Metode Lempengan	64
Gambar 7.7. Ilustrasi Benda Putar Kerucut.....	66
Gambar 7.8. Ilustrasi Benda Putar Ban.....	67
Gambar 7.9. Ilustrasi Benda Putar Bola.....	67
Gambar 9.1. Perbedaan grafik fungsi $\ln(x)$ dan $\log(x)$	95
Gambar 9.2. Grafik fungsi $\ln(x)$ untuk $x \in (0, 3)$	96
Gambar 9.3. Representasi grafis persamaan (1) untuk $x = e$	97
Gambar 10.1. Grafik Fungsi $y = x$	110
Gambar 10.2. Grafik Fungsi $y = x$ dan inversnya	110
Gambar 10.3. Grafik Fungsi $\ln$ dan Inversnya	112
Gambar 10.4. Fungsi Logaritma secara Umum dan Inversnya	115

BAB 1

SISTEM KOORDINAT SEGI EMPAT

Oleh Fathan Mubina Dewadi

1.1 Pendahuluan

Penggunaan sistem koordinat sangat penting dalam matematika, fisika, dan teknik, karena memungkinkan pembuatan plot dan analisis titik-titik dalam ruang secara akurat (Alfianto *et al.*, 2023). Meskipun sistem koordinat kartesius adalah yang paling umum digunakan, ada sistem koordinat lain yang sama pentingnya (F. M. Dewadi, n.d.-b). Kita akan mempelajari sistem koordinat empat kali lipat, yang terdiri dari sistem koordinat kartesius, kutub, silinder, dan bola (Dahri *et al.*, 2023).

Sistem koordinat kartesius adalah sistem koordinat 2D yang menggunakan sumbu X dan Y untuk memplot titik (Nanda, Dewadi, *et al.*, 2023). Nama sistem ini diambil dari nama ahli matematika dan filsuf Perancis Rene Descartes, yang menemukan sistem ini pada abad ke-17 (F. M. Dewadi, Kristiana, *et al.*, 2023). Sumbu X melambangkan sumbu horizontal, sedangkan sumbu Y melambangkan sumbu vertikal (F. Dewadi *et al.*, 2023). Titik perpotongan kedua sumbu disebut titik asal (F. M. Dewadi, Milasari, *et al.*, 2023). Sistem koordinat cartesian banyak digunakan dalam geometri, aljabar, dan trigonometri (F. M. Dewadi, Wibowo, *et al.*, 2023).

Sistem koordinat kutub merupakan sistem koordinat 2D yang menggunakan sudut dan jarak dari titik asal ke titik plot (Santosa *et al.*, 2022). Namanya diambil dari nama ahli matematika Yunani Apollonius dari Perga, yang pertama kali menggunakan sistem ini pada abad ke-3 SM (Khoirudin *et al.*, 2021a).

Sistem koordinat kutub berguna dalam menganalisis gerak melingkar dan rotasi, serta dalam studi bilangan kompleks (F. M. Dewadi, Nanda, *et al.*, 2023). Jarak dari titik asal

disebut koordinat radial, sedangkan sudut disebut koordinat sudut (Nanda, Supriyanto, *et al.*, 2023).

Sistem koordinat silinder merupakan sistem koordinat 3D yang menggunakan sudut, jarak dari titik asal, dan tinggi untuk memplot titik (Mubina & Amir, 2022). Hal ini berguna dalam menganalisis objek silinder, seperti pipa, dan dalam studi kalkulus vektor (Nanda, Karyadi, *et al.*, 2023). Sistem koordinat bola adalah sistem koordinat 3D lain yang menggunakan jarak dari titik asal, dua sudut, dan berguna dalam menganalisis objek berbentuk bola, seperti planet, dan dalam studi kalkulus vektor (F. M. Dewadi, 2021b). Sistem koordinat empat kali lipat adalah alat penting dalam matematika, fisika, dan teknik (Kusmiwardhana *et al.*, 2023). Sistem koordinat kartesius, kutub, silinder, dan bola semuanya unik dengan caranya masing-masing dan digunakan untuk menganalisis berbagai jenis objek dan fenomena (F. M. Dewadi, 2023d). Memahami sistem koordinat ini sangat penting bagi siapa pun yang mempelajari bidang ini dan dapat mengarah pada penemuan dan terobosan baru dalam ilmu pengetahuan dan teknologi (Nanda & Dewadi, 2023). Dalam sistem koordinat siku empat, terdapat beberapa sub-bab atau konsep terkait yang penting untuk dipahami (F. M. Dewadi, Kiswanto, *et al.*, 2022).

1.2 Koordinat Titik

Dalam kalkulus, ada beberapa rumus yang berkaitan dengan koordinat titik, terutama dalam konteks fungsi dan perhitungan turunan serta integral (Muhammad *et al.*, n.d.).

Jarak d antara dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dalam ruang dua dimensi dapat dihitung menggunakan rumus jarak Euklides (F. M. Dewadi, Bachtiar, *et al.*, 2023):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Kemiringan (*slope*) m dari sebuah garis yang melewati dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah (Lawi *et al.*, 2023):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dengan kemiringan m adalah (F. M. Dewadi, 2023c):

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Atau dalam bentuk lain (F. M. Dewadi, 2022):

$$y = m \cdot x + (y_1 - m \cdot x_1)$$

Untuk fungsi $y = f(x)$, turunan pertama atau derivatifnya $f'(x)$ adalah (F. M. Dewadi, 2023b):

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Integral definit I dari fungsi $f(x)$ dalam interval $[a, b]$ adalah (F. M. Dewadi, 2023a):

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Integral tak tentu dari fungsi $f(x)$ adalah (F. M. Dewadi, n.d.-a):

$$\int f(x) dx$$

Ini adalah fungsi yang disebut juga sebagai "antiturunan" dari $f(x)$ (Supriyati et al., 2022). Teorema dasar kalkulus menghubungkan integral tak tentu dan turunan. Dinyatakan sebagai berikut (F. M. Dewadi et al., 2021):

$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$$

Integral ganda dari fungsi $f(x,y)$ dalam sebuah wilayah R dalam ruang dua dimensi adalah (Wibowo et al., 2022):

1.3 Garis dan Vektor

Jika memiliki dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) yang melalui garis, maka persamaan garis tersebut dapat dituliskan dalam bentuk *slope-intercept* $y=mx+b$, di mana (F. M. Dewadi et al., 2019):

Kemiringan (*slope*) m adalah (Asari et al., 2016):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Intersep b adalah (F. M. Dewadi, Amir, et al., 2022):

$$b = y_1 - m \cdot x_1$$

1.4 Soal-Soal Latihan

1. Tentukan koordinat dari titik A dan titik B, serta hitung jarak antara keduanya dalam sistem koordinat 2D (F. M. Dewadi, 2021a)
2. Hitung slope (kemiringan) dari garis yang melewati titik A(-2, 3) dan titik B(4, -1) (Nanda et al., 2022)!
3. Tentukan persamaan garis yang melalui titik P(1, 2) dengan kemiringan (*slope*) sebesar -3 (Suhara et al., 2023)!
4. Hitung kemiringan (*slope*) dari garis yang melalui titik A(3, 4) dan titik B(7, 8) (Khoirudin et al., 2021b)!
5. Hitung dot product (skalar product) antara dua vektor $v=\langle 2,3 \rangle$ dan $w=\langle -1,5 \rangle$ (Mulyadi & Dewadi, 2021)!

DAFTAR PUSTAKA

- Alfianto, E., Nurmalasari, N. P. Y., Sa'diyah, A., Fatkhulloh, A., Anwar, B., & Wibowo, C. 2023. *KONSEP PESAWAT TERBANG*. Get Press Indonesia.
- Asari, A., Anam, A. C., Litamahuputty, J. V., Dewadi, F. M., Prihastuty, D. R., Syukrilla, W. A., Murni, N. S., & Sukwika, T. 2016. *Pengantar Statistika*. PT MAFY MEDIA LITERASI INDONESIA.
- Dahri, A. T., Sa'diyah, A., Nurherdiana, S. D., Wibowo, R., Winardi, B., Satriawan, D., Dewadi, F. M., Santoso, H., & Novita, Y. 2023. *Konversi Energi Dan Sistem Pembangkit*. Global Eksekutif Teknologi.
- Dewadi, F., Kusmiwardhana, D., Hakim, F., & Tsabitha, N. 2023. Optimasi Rangka Electric Bike dengan Menitikberatkan Nilai Keamanan pada Tiap Titik Beban dengan Aplikasi Inventor. *Jurnal Mekanik Terapan*, 4(2), 103–107.
- Dewadi, F. M. (n.d.-a). BAB 1 RUANG LINGKUP TEKNIK PENDINGIN DAN PENGKONDISIAN. *TEKNIK PENDINGIN TEKNIK PENDINGIN TEKNIK PENDINGIN DAN TATA UDARA DAN TATA UDARA DAN TATA UDARA*, 1.
- Dewadi, F. M. (n.d.-b). *PERAN KARANG TARUNA DALAM PENGEMBANGAN SDM DI ERA MILENIAL*.
- Dewadi, F. M. 2021a. Analisis Efektivitas Liquid Section Heat Exchanger dengan Tube in Tube Heat Exchanger dari Sisi Aplikatif. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 2(1), 28–36.
- Dewadi, F. M. 2021b. Pengaruh Analisis Manajemen Stres Kinerja Perusahaan terhadap Pencapaian Kinerja Karyawan Optimal berdasarkan Pengalaman Pemuda Kreatif Kavling Rawa Bunga, Tangerang Selatan. *Bukit Tinggi, IAIN Bukit Tinggi*.
- Dewadi, F. M. 2022. BAB III SAMPLING DALAM ANALISIS. *Konsep Dasar Kimia Analitik*, 40.

- Dewadi, F. M. 2023a. BAB 2 KARAKTERISTIK KENDARAAN. *Rekayasa Lalu Lintas*, 19.
- Dewadi, F. M. 2023b. BAB 3 KRITERIA PEMILIHAN BAHAN TEKNIK DALAM APLIKASINYA. *MEKANIKA TEKNIK II*, 36.
- Dewadi, F. M. 2023c. BAB VII RANDOM VARIABLE. *PENGANTAR STATISTIKA*, 87.
- Dewadi, F. M. (2023d). PELATIHAN MASYARAKAT DESA KEDUNG JERUK DALAM PEMILIHAN JENIS MATERIAL KAYU DAN PEMBUATAN MEBEL RUMAH TANGGA UNTUK MENINGKATKAN UMKM DESA. *PROSIDING KONFERENSI NASIONAL PENELITIAN DAN PENGABDIAN UNIVERSITAS BUANA PERJUANGAN KARAWANG*, 3(1), 1429–1438.
- Dewadi, F. M., Amir, A., Rahman, M. A., Ramdani, R. T., & Suciyanti, Q. P. 2022. Upaya Meminimalisir Kadar Debu Pada Laboratorium Teknik Mesin dengan Vertical Garden. *Praxis: Jurnal Sains, Teknologi, Masyarakat Dan Jejaring*, 4(2), 128–135.
- Dewadi, F. M., Bachtiar, E., Alyah, R., Satriawan, D., Annisa, F., Pasaribu, J. S., Randjawali, E., Afrida, J., & Rochyani, N. 2023. *Fisika Dasar I (Mekanika Dan Panas)*. Global Eksekutif Teknologi.
- Dewadi, F. M., Dahlan, D., & Maulana, E. 2019. Frame e-Bike Optimization Capacity 48V. *Journal Online Jaringan Pengajian Seni Bina (JOJAPS)*, 14, 129–138.
- Dewadi, F. M., Kiswanto, L. Y., & Ghifary, A. M. (2022). KKN dengan Mode Hybrid di Wilayah Kavling Rawa Bunga, Tangerang Selatan. *Journal of Entrepreneurship and Community Innovations (JECI)*, 1(1), 1–8.
- Dewadi, F. M., Kristiana, R., La Ola, M. N., Setiawan, A. M., Rachim, F., Widiati, I. R., Yasin, A., Masgode, M. B., & Hamdi, F. 2023. *STATIKA TEKNIK*. Get Press Indonesia.

- Dewadi, F. M., Ma'arof, R. A. R., & Saputra, O. A. 2021. Coordinated Way to Deal With Schooling Educational Plan Based on Current Industry Needs in Indonesia. *On Advancing and Redesigning Education*.
- Dewadi, F. M., Milasari, L. A., Hermila, A., Wibowo, C., Suprayitno, A., Alfari, L., Saputra, A. A., & Gobel, F. F. 2023. *DESAIN PENELITIAN BIDANG TEKNIK*. Get Press Indonesia.
- Dewadi, F. M., Nanda, R. A., & Wibowo, C. 2023. Understanding of Machinery Technology in Understanding Renewable Energy Towards Indonesia Go Green. *International Conference on Elementary Education*, 5(1), 206–210.
- Dewadi, F. M., Wibowo, C., Mulyadi, D., Dahlan, M., & Nanda, R. A. 2023. *PROSES PRODUKSI MANUFAKTUR*. Get Press Indonesia.
- Khoirudin, K., Sukarman, S., Murtalim, M., Dewadi, F. M., Rahdiana, N., Rais, A., Abdulah, A., Anwar, C., & Abbas, A. 2021a. A report on metal forming technology transfer from expert to industry for improving production efficiency. *Mechanical Engineering for Society and Industry*, 1(2), 96–103.
- Khoirudin, K., Sukarman, S., Murtalim, M., Dewadi, F. M., Rahdiana, N., Rais, A., Abdulah, A., Anwar, C., & Abbas, A. 2021b. A report on metal forming technology transfer from expert to industry for improving production efficiency. *Mechanical Engineering for Society and Industry*, 1(2), 96–103.
- Kusmiwardhana, D., Dewadi, F. M., Soeprapto, A. C., Abdur, Y. A., & Bramantyo, R. 2023. Pemanfaatan membuat Civitas Akademika Politeknik Negeri Jakarta PSDKU Pekalongan Prodi Manufaktur di Museum Batik Pekalongan. *Jurnal Pengabdian Masyarakat Mandiri (JPMM)*, 1(02), 94–101.
- Lawi, A., Bora, M. A., Arifin, R., Andriani, M., Jumen, D., Rasyid, A., Dewadi, F. M., Didin, F. S., Oktavera, R., & Santoso, H. 2023. *Ergonomi Industri*. Global Eksekutif Teknologi.
- Mubina, F., & Amir, A. 2022. Perancangan Mesin Roll Plat Listrik sebagai Peningkatan Efisiensi Kerja di Industri Manufaktur. *Jurnal Mekanik Terapan*, 3(1), 18–25.

- Muhammad, A. C., Santoso, H., Purnama, Y. A., Parenden, D., Dewadi, F. M., Dewi, R. P., Winardi, B., & Lillahulhaq, Z. (n.d.). *KONVERSI ENERGI*.
- Mulyadi, D., & Dewadi, F. M. 2021. ANALISIS RANCANGAN SEL SURYA UNTUK KEBUTUHAN CADANGAN ENERGI LISTRIK DI KOLAM WILAYAH GRAHA RAYA BINTARO, TANGERANG SELATAN. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 2(1), 6–12.
- Nanda, R. A., & Dewadi, F. M. 2023. PELATIHAN MASYARAKAT DESA KEDUNG JERUK DALAM PEMILIHAN JENIS MATERIAL KAYU DAN PEMBUATAN MEBEL RUMAH TANGGA UNTUK MENINGKATKAN UMKM DESA. *JURNAL BUANA PENGABDIAN*, 5(1), 55–64.
- Nanda, R. A., Dewadi, F. M., Nugroho, A. A., & Ramadhan, G. A. 2023. Pelatihan Pembacaan Gambar Teknik Dalam Proses Pengelasan Bagi Pemuda Desa Tegal Sawah. *Journal of Entrepreneurship and Community Innovations (JECI)*, 2(1), 17–25.
- Nanda, R. A., Karyadi, K., Dewadi, F. M., & Rizki, M. N. 2023. Perancangan dan Pembuatan JIG FOG Lamp Mobil Dengan Material Aluminium. *Jurnal Mekanik Terapan*, 4(1), 9–14.
- Nanda, R. A., Supriyanto, A., & Dewadi, F. M. 2023. Using the MPX5500DP Sensor for Monitoring Microcontroller-Based HVAC Systems and IOT. *REM (Rekayasa Energi Manufaktur) Jurnal*, 8(1), 1–8.
- Nanda, R. A., Supriyono, T., Ma'arof, R. A. R., & Dewadi, F. M. 2022. Analisis Chassis Mobil Robot Penanaman Bibit Kangkung Menggunakan Metode Elemen Hingga. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 2(2), 1–8.

- Santosa, I., Firdaus, A., Hidayat, R., Rusnoto, R., Wibowo, A., & Dewadi, F. M. 2022. The Optimization of Vapor Compression Type for Desalination of Seawater Using the DFMA Method. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 3(1), 1–8.
- Suhara, A., Dewadi, F. M., & Febrian, R. 2023. ANALISAPENGARUHPELUMASTERHADAPGESEKAN MENGGUNAKANMETODETINKEN LOAD. *PROSIDING KONFERENSI NASIONAL PENELITIAN DAN PENGABDIAN UNIVERSITAS BUANA PERJUANGAN KARAWANG*, 3(1), 14–24.
- Supriyati, S., Elpisah, E., Jumiati, E., Rahayu, Y. P., Abolladaka, J., Jumri, J., Nasution, F. Z., Nazipawati, N., Shiddiq, M. H. A., & Ristiyana, R. 2022. *Pengantar Ilmu Ekonomi*.
- Wibowo, C., Sukarno, S., Nursanti, Y. B., & Dewadi, F. M. 2022. Kebutuhan Perguruan Tinggi di Wonogiri sebagai Bagian dari Pengembangan Sumber Daya Manusia. *VISIONER*, 4(1 JUNI), 20–27.

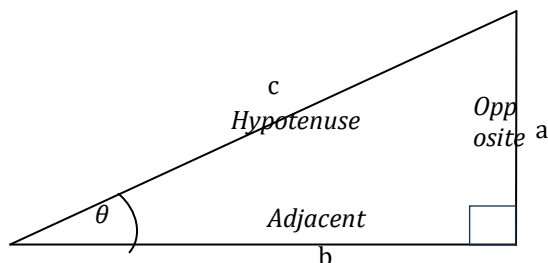
BAB 2

FUNGSI TRIGONOMETRI

Oleh Sari Puspita

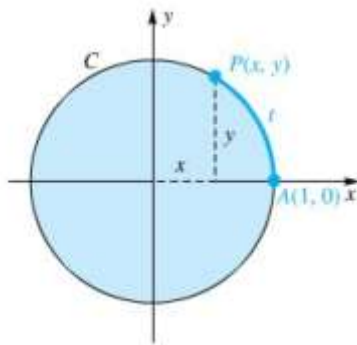
2.1 Pendahuluan

Dalam bahasa Yunani, istilah "trigonon" berarti "tiga sudut," dan "metron" berarti "mengukur." Ini adalah asal dari istilah "trigonometri". Pada trigonometri dipelajari hubungan antara panjang dan sudut segitiga. Konsep kesebangunan segitiga siku-siku adalah dasar trigonometri. Fungsi-fungsi trigonometri umum didefinisikan berdasarkan sudut-sudut segitiga seperti gambar berikut:



$$\sin \theta = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$
$$\cos \theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

Secara umum, dasar definisi fungsi trigonometri adalah lingkaran satuan. Misalkan C yang berjari-jari 1 adalah lingkaran satuan dengan titik pusat berada pada titik $(0,0)$ serta memiliki persamaan $x^2 + y^2 = 1$. Nyatakan A sebagai titik $(1,0)$ dan $t \in \mathbb{R}^+$, maka terdapat tepat satu titik $P(x,y)$ pada lingkaran C sehingga panjang busur AP yang diukur berlawanan arah dengan jarum jam dari A , sama dengan t .



Jika $t > 2\pi$, maka untuk menelusuri busur AP membutuhkan lebih dari satu putaran lingkaran C.

Jika $t < 0$, maka lingkaran C akan memiliki titik P tepat satu dimana panjang busur AP dapat diukur searah perputaran jarum jam sebesar t . Jadi, sebuah titik unik $P(x,y)$ pada lingkaran C dapat disesuaikan dengan sebarang bilangan riil t . Dengan demikian, diperoleh definisi sinus (sin) dan kosinus (cos) berikut:

Definisi Fungsi Sinus dan Kosinus

Misalkan bilangan riil t menentukan titik $P(x,y)$ seperti di atas, maka:

$$\sin t = y \text{ dan } \cos t = x$$

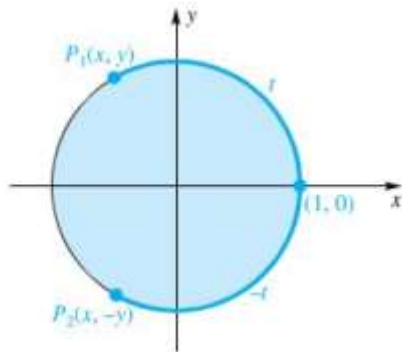
2.2 Sifat-sifat Dasar Sinus dan Kosinus

Daerah asal dari fungsi sinus dan kosinus berdasarkan definisi di atas adalah $(-\infty, \infty)$, karena t merupakan bilangan riil sembarang. Nilai x dan y selalu berada antara -1 dan 1, sehingga fungsi sinus dan kosinus memiliki nilai pada interval $[-1,1]$.

Karena keliling lingkaran satuan adalah 2π , maka t dan $t + 2\pi$ menentukan titik $P(x,y)$ yang sama, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\sin(t + 2\pi) &= \sin t \\ \cos(t + 2\pi) &= \cos t\end{aligned}$$

Perhatikan gambar berikut:

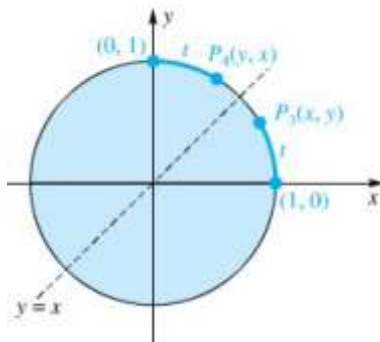


Gambar 2.1. Titik P_1 dan P_2 pada Lingkaran Satuan

Dari gambar di atas, terlihat bahwa titik P_1 dan P_2 yang berpadanan dengan t dan $-t$ simetri terhadap sumbu- x . Terlihat juga bahwa koordinat x -nya memiliki tanda yang sama, sementara koordinat y -nya berlawanan tanda. Sehingga diperoleh;

$$\begin{aligned}\sin(-t) &= -\sin t \\ \cos(-t) &= \cos t\end{aligned}$$

Dengan demikian, sinus adalah fungsi genap dan kosinus adalah fungsi ganjil.
Perhatikan juga gambar berikut:



Gambar 2.2. Titik P_3 dan P_4 pada Lingkaran Satuan

Titik P_3 dan P_4 yang berpadanan dengan t dan $\pi/2 - t$ simetri terhadap garis $y = x$ sehingga koordinat-koordinatnya saling bertukar. Artinya;

$$\begin{aligned}\sin(\pi/2 - t) &= \cos t \\ \cos(\pi/2 - t) &= \sin t\end{aligned}$$

Karena (x,y) berada pada lingkaran satuan dengan $x^2 + y^2 = 1$, maka untuk setiap t bilangan riil, diperoleh kesamaan identitas yang menghubungkan fungsi sinus dan kosinus berikut:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Berikut ini adalah empat fungsi trigonometri lainnya:

$$\begin{aligned}\tan t &= \frac{\sin t}{\cos t} \\ \sec t &= \frac{1}{\cos t} \\ \cot t &= \frac{\cos t}{\sin t} \\ \csc t &= \frac{1}{\sin t}\end{aligned}$$

Hubungan Dengan Trigonometri Sudut

Sudut dapat diukur baik dalam derajat maupun radian, dimana:

$$\begin{aligned} 360^\circ &= 2\pi \text{ radian} \\ 180^\circ &= \pi \text{ radian} \approx 3,1415927 \text{ radian} \\ 1 \text{ radian} &\approx 57,29578^\circ \\ 1^\circ &\approx 0,0174533 \text{ radian} \end{aligned}$$

Contoh Soal:

Ubahlah besaran derajat berikut menjadi radian.

1. $240^\circ = \dots \text{radian}$
2. $22,5^\circ = \dots \text{radian}$

Penyelesaian:

1. $240^\circ = 240 \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{4}{3}\pi \text{ radian}$
2. $22,5^\circ = 22,5 \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{1}{8}\pi \text{ radian}$

Nilai trigonometri sudut-sudut istimewa dapat dilihat pada tabel berikut:

t (derajat)	t (radian)	$\sin t$	$\cos t$
0	0	0	1
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
90	$\pi/2$	1	0
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$

t (derajat)	t (radian)	$\sin t$	$\cos t$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
180	π	0	-1

Contoh Soal:

Hitunglah tanpa menggunakan kalkulator:

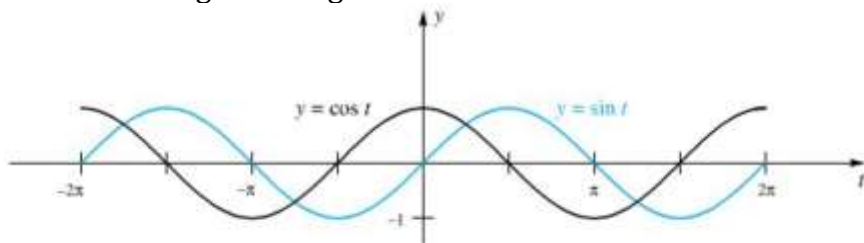
1. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$
2. $\csc\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Penyelesaian:

1. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$
2. $\csc\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

2.3 Grafik Sinus dan Kosinus

Berikut adalah grafik fungsi sinus dan kosinus.



Gambar 2.3. Grafik Sinus dan Kosinus

Berdasarkan grafik pada Gambar 2.5, diketahui bahwa:

1. Nilai $\sin t$ dan $\cos t$ berada pada $[-1, 1]$.
2. Kedua grafik berulang dengan sendirinya di selang yang berdampingan sepanjang 2π .

3. Grafik fungsi $y = \sin t$ simetri terhadap titik asal, dan fungsi $y = \cos t$ simetri terhadap sumbu-y.
4. Grafik fungsi $y = \sin t$ sama dengan grafik fungsi $y = \cos t$, tetapi digeser sejauh $\pi/2$ satuan ke kanan.

2.4 Identitas Trigonometri

Kesamaan berikut berlaku untuk semua x dan y , asalkan kedua sisi didefinisikan pada nilai x dan y yang dipilih.

Identitas Ganjil-Genap

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Identitas Ko-fungsi

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi/2 - x) = \cot x$$

Identitas Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identitas Penambahan

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Identitas Sudut Ganda

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Identitas Setengah Sudut

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Identitas Penjumlahan

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

Identitas Perkalian

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Contoh Soal:

Buktikan bahwa kesamaan berikut benar.

1. $(1 + \sin z)(1 - \sin z) = \frac{1}{\sec^2 z}$
2. $\frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \sin^2 t$

Penyelesaian:

1. $(1 + \sin z)(1 - \sin z) = 1 - \sin^2 z = \cos^2 z = \frac{1}{\sec^2 z}$
2. $\frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = 1 - \frac{1}{\sec^2 t} = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$

Latihan Soal.

1. Ubahlah besaran derajat berikut menjadi radian.
 - a. $18^\circ = \dots$ radian
 - b. $540^\circ = \dots$ radian
 - c. $-60^\circ = \dots$ radian
2. Hitunglah tanpa menggunakan kalkulator:
 - a. $\sec \left(\frac{3\pi}{4} \right)$
 - b. $\cot \left(\frac{\pi}{3} \right)$

c. $\sec(\pi)$

3. Buktikan bahwa kesamaan berikut benar.

a. $(\sec t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t$

b. $\sec t - \sin t \tan t = \cos t$

c. $\cot t (\tan t + \cot t) = \csc t$

DAFTAR PUSTAKA

D. Varberg, E. P. S. R., 2006. *Calculus*. 9th ed. s.l.:Pearson.
Purcell, n.d. *Kalkulus Jilid 1*. 9 ed. Jakarta: Erlangga.

BAB 3

ATURAN RANTAI

Oleh Rini Yunita

3.1 Pendahuluan

Pada bab ini akan membahas tentang turunan fungsi komposisi dan menentukan turunan fungsi menggunakan aturan rantai. Dimana turunan fungsi komposisi merupakan dasar dari aturan rantai.

3.2 Turunan Fungsi Komposisi

Teorema:

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka fungsi komposisi $f \circ g$, didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ terdiferensialkan di x dan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$$\text{Maka } D_x(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\text{Atau } D_x y = D_x y D_x u$$

Dengan kata lain turunan fungsi komposisi adalah turunan fungsi terluar yang dihitung pada fungsi yang lebih dalam dikali dengan turunan.

Contoh 1.

Jika $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ tentukan $D_x y$

Jawab:

Berdasarkan teorema, maka misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ untuk fungsi $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$

Maka $y = f(u) = u^{60}$ dan $u = g(x) = 2x^2 - 4x + 1$, maka u^{60} adalah fungsi terluar dan $2x^2 - 4x + 1$ adalah fungsi yang lebih dalam.

Dengan $f'(u) = 60u^{59}$ dan $g'(x) = 4x - 4$

Sehingga:

$$D_x y = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$D_x y = (60u^{59})(4x - 4)$$

$$D_x y = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$$

$$D_x y = 60(4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^{59}$$

$$D_x y = (240x - 240)(2x^2 - 4x + 1)^{59}$$

3.3 Aturan Rantai

Bentuk lain dari penulisan turunan fungsi komposisi dikenal dengan aturan rantai, yaitu sebagai berikut:

Apabila y fungsi dari u ditulis $y = f(u)$ dan $\frac{dy}{du}$ ada (memiliki turunan) dan u fungsi dari x ditulis $u = g(x)$ dan $\frac{du}{dx}$ (memiliki turunan), maka y fungsi dari x dan $\frac{dy}{dx}$ ada, dan dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Contoh 2.

Jika $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ tentukan $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian:

Misalkan u sebagai fungsi dari x (fungsi yang mengandung variabel x).

$$\text{Yaitu : } u = g(x) = 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x - 4$$

$$\text{Maka } y = f(u) = u^{60} \Rightarrow \frac{dy}{du} = 60u^{59}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= (60u^{59})(4x - 4) \\ &= 60(4x - 4)u^{59} \\ &= (240x - 240)u^{59} \end{aligned}$$

Ganti $u = 2x^2 - 4x + 1$,

$$= (240x - 240)(2x^2 - 4x + 1)^{59}$$

Contoh 3.

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $\ln x^3$

Penyelesaian

Misalkan $u = g(x) = x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$

Maka $y = \ln u \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$

Sehingga
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u} (3x^2) \\ &= \frac{3x^2}{u}\end{aligned}$$

Ganti $u = x^3$ diperoleh

$$\begin{aligned}&= \frac{3x^2}{x^3} \\ &= \frac{3}{x}\end{aligned}$$

Contoh 4.

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \sqrt{x^3 - x}$

Penyelesaian:

Rubah bentuk akar menjadi bentuk berpangkat sehingga

$$y = (x^3 - x)^{\frac{1}{2}}$$

Misalkan $u = g(x) = (x^3 - x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 - 1$

Maka $y = u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$

Sehingga
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} (3x^2 - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(3x^2-1)}{2u^{\frac{1}{2}}} u^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{(3x^2-1)}{2u^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

Ganti $u = x^3 - x$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(3x^2-1)}{2(x^3-x)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{(3x^2-1)}{2\sqrt{(x^3-x)}}
 \end{aligned}$$

Contoh 5.

Diketahui $y = \sin(x^2 + 1)$, tentukan $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = g(x) = (x^2 + 1)$

maka turunan dari $u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$

dan $y = \sin(u) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \cos(u)$

Sehingga
$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\
 &= \cos(u) (2x) \\
 &= 2x \cos(u)
 \end{aligned}$$

Ganti $u = x^2 + 1$
 $= 2x \cos(x^2 + 1)$

Contoh 6.

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = e^{\sin 2x}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = g(x) = \sin 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \cos 2x$

Maka $y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{du} = e^u$

Sehingga
$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\
 &= e^u (2 \cos 2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ganti } u &= \sin 2x \\ &= e^{\sin 2x} (2 \cos 2x) \\ &= 2 \cos 2x e^{\sin 2x}\end{aligned}$$

3.3.1 Aturan Rantai Bersusun

Apabila dalam penggunaan aturan rantai pada sebuah fungsi komposisi, terdapat turunan fungsi yang lebih dalam juga memerlukan aturan rantai, maka diperlukan aturan rantai untuk kedua kalinya, ini disebut dengan aturan rantai bersusun. Untuk aturan rantai yang terdiri dari n buah fungsi komposisi.

Misalkan :

$$y = y(u), u = u(u_1), u_1 = u_1(u_2), u_2 = u_2(u_3), \dots, u_n = u_n(x)$$

Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{du_1} \times \frac{du_1}{du_2} \times \frac{du_2}{du_3} \times \dots \times \frac{du_n}{dx}$$

Contoh 1. Fungsi polinomial dengan dua rantai

Diketahui $y = \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + 3} \right)^{13}$ tentukan $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\text{Misalkan } u &= \frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + 3} \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} &= \frac{(3x^2 - 2)(x^4 + 3) - (4x^3)(x^3 - 2x + 1)}{(x^4 + 3)^2} \\ &= \frac{(3x^6 + 9x^2 - 2x^4 - 6) - (4x^6 - 8x^4 + 4x^3)}{(x^4 + 3)^2} \\ &= \frac{-x^6 + 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 6}{(x^4 + 3)^2}\end{aligned}$$

$$\text{Dan } y = u^{13} \Rightarrow \frac{dy}{du} = 13u^{12}$$

$$\begin{aligned}\text{Maka } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= 13u^{12} \left(\frac{-x^6 + 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 6}{(x^4 + 3)^2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ganti nilai } u &= \frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + 3} \\ &= 13 \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + 3} \right)^{12} \left(\frac{-x^6 + 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 6}{(x^4 + 3)^2} \right)\end{aligned}$$

Contoh 2 Fungsi dengan tiga rantai

Diketahui $y = \sin^2(x^2 + 1)$, tentukan $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian

Misalkan $u_1 = g(x) = (x^2 + 1) \Rightarrow \frac{du_1}{dx} = 2x$

$$u = \sin(u_1) \Rightarrow \frac{du}{du_1} = \cos(u_1)$$

Maka $y = u^2 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 2u$

Sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{du_1} \times \frac{du_1}{dx} \\ &= 2u \cos(u_1) 2x \\ &= (4x)u \cos(u_1)\end{aligned}$$

Ganti $u = \sin(u_1)$

$$= 4x (\sin u_1) \cos(u_1)$$

Ganti $u_1 = x^2 + 1$

$$= 4x \sin(x^2 + 1) \cos(x^2 + 1)$$

Contoh 3 Fungsi dengan empat rantai

Diketahui $y = \sin^2 \sqrt{x^2 + 1}$ tentukan $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian :

Misalkan $u_2 = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du_2}{dx} = 2x$

$$u_1 = \sqrt{u_2} \Rightarrow \frac{du_1}{du_2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{u_2}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned}u &= \sin u_1 \Rightarrow \frac{du}{du_1} = \cos u_1 \\ &= \cos \sqrt{u_2} \\ &= \cos \sqrt{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Maka $y = u^2 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 2u$

$$\begin{aligned}&= 2 \sin u_1 \\ &= 2 \sin \sqrt{u_2} \\ &= 2 \sin \sqrt{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{du_1} \times \frac{du_1}{du_2} \times \frac{du_2}{dx}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \\
 &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos \sqrt{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Contoh 4. Fungsi dengan lima rantai

Diketahui $y = \tan^2(\sin^3(x^4))$ tentukan $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 \text{Misalkan } u_3 &= x^4 \quad \Rightarrow \frac{du_3}{dx} = 4x^3 \\
 u_2 &= \sin u_3 \quad \Rightarrow \frac{du_2}{du_3} = \cos u_3 \\
 &= \cos x^4 \\
 u_1 &= u_2^3 \quad \Rightarrow \frac{du_1}{du_2} = 3u_2^2 \\
 &= 3(\sin u_3)^2 \\
 &= 3\sin^2 x^4 \\
 u &= \tan u_1 \quad \Rightarrow \frac{du}{du_1} = \sec^2 u_1 \\
 &= \sec^2 u_2^3 \\
 &= \sec^2 (\sin u_3)^3 \\
 &= \sec^2 \sin^3 x^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Maka } y &= u^2 \quad \Rightarrow \frac{dy}{du} = 2u \\
 &= 2 \tan u_1 \\
 &= 2 \tan u_2^3 \\
 &= 2 \tan (\sin u_3)^3 \\
 &= 2 \tan \sin^3 x^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sehingga } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{du_1} \times \frac{du_1}{du_2} \times \frac{du_2}{du_3} \times \frac{du_3}{dx} \\
 &= 2 \tan \sin^3 x^4 \cdot \sec^2 \sin^3 x^4 \cdot 3 \sin^2 x^4 \cdot \cos x^4 \cdot 4x^3 \\
 &= 2 \cdot 4x^3 \cdot 3 \tan \sin^3 x^4 \cdot \sec^2 \sin^3 x^4 \cdot \sin^2 x^4 \cdot \cos x^4 \\
 &= 24x^3 \tan \sin^3 x^4 \cdot \sec^2 \sin^3 x^4 \cdot \sin^2 x^4 \cdot \cos x^4
 \end{aligned}$$

3.3.2 Contoh Penerapan Penggunaan Aturan Rantai

Contoh 1.

Sebuah benda bergerak sepanjang sumbu x sehingga posisinya pada waktu $t \geq 0$ ditentukan oleh $x(t) = \cos(t^2 + 1)$.

tentukan kecepatan benda sebagai fungsi dari t

Jawab:

Kita tahu bahwa kecepatan benda merupakan turunan dari fungsi t terhadap x yaitu: $\frac{dx}{dt}$. Fungsi x merupakan fungsi komposisi

dimana $x = \cos(u)$ dan $u = t^2 + 1$.

Dengan menggunakan aturan rantai maka:

$$\begin{aligned}\text{Misalkan } u &= t^2 + 1 &\Rightarrow \frac{du}{dt} &= 2t \\ x &= \cos(u) &\Rightarrow \frac{dx}{du} &= -\sin(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Maka } \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \times \frac{du}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= -\sin(u) (2t) \\ \frac{dx}{dt} &= -\sin(t^2 + 1) (2t) \\ \frac{dx}{dt} &= -2t \sin(t^2 + 1)\end{aligned}$$

Kecepatan benda dapat dinyatakan dengan fungsi $-2t \sin(t^2 + 1)$

Contoh 2

Tentukan kemiringan garis singgung dari kurva $y = \sin^5 x$. Pada titik $x = \frac{\pi}{3}$.

Jawab :

Kemiringan garis merupakan turunan pertama dari fungsi $f(x)$.

Yaitu $f'(x)$, maka $y = (\sin x)^5$

Dengan menggunakan aturan rantai :

$$\text{Misalkan } u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

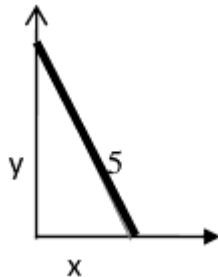
$$\begin{aligned}\text{Maka } y &= u^5 &\Rightarrow \frac{dy}{du} &= 5u^4 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= 5u^4 \cdot \cos x \\ \frac{dy}{dx} &= 5(\sin x)^4 \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\pi}{3} = 60^\circ \\
 \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big|_{x = \frac{\pi}{3} = 60^\circ} &= 5 \left(\sin \frac{\pi}{3} \right)^4 \cos \frac{\pi}{3} \\
 &= 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{45}{32}
 \end{aligned}$$

kemiringan garis singgung dari kurva $y = \sin^5 x$. Pada titik $x = \frac{\pi}{3}$ adalah $\frac{45}{32}$

Contoh 3

Sebuah papan yang memiliki panjang 5m bersandar pada sebuah dinding tegak seperti pada gambar 3.1 berikut. Jika bagian bawah papan bergeser menjauhi dinding dengan laju 0.2 m/s. Seberapa cepat puncak papan bergeser ke bawah terhadap dinding dengan jarak alas papan sejauh 4m dari dinding?



Penyelesaian:

Diketahui $\frac{dx}{dt} = 0.2 \text{ m/s}$ dengan $x^2 + y^2 = 25$

Akan dicari besar $\left(\frac{dy}{dt} \right) \Big|_{x=4}$?

Karena $x^2 + y^2 = 25$

Maka $y^2 = 25 - x^2$

$$y = \sqrt{25 - x^2} = (25 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Turunan dari fungsi y adalah $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(-2x)(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
 $= -x(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Dengan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= -x (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(0,2)\end{aligned}$$

Substitusikan nilai $x = 4$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -4 (25 - 4^2)^{-\frac{1}{2}}(0,2) \\ &= -4 (25 - 16)^{-\frac{1}{2}}(0,2) \\ &= -4 (9)^{-\frac{1}{2}}(0,2) \\ &= \frac{-4}{\sqrt{9}} \left(\frac{2}{10} \right) \\ &= \frac{-2}{3} \left(\frac{2}{5} \right) \\ &= \frac{-4}{15}\end{aligned}$$

Jadi puncak papan akan bergeser kebawah dengan laju $\frac{4}{15} m/s$.

3.3.3 Latihan Soal Aturan Rantai

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi berikut ini:

1. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
2. $y = \sqrt[4]{3x^2 - 4x}$
3. $y = \frac{1}{(x^3 + 2x)^{2/3}}$
4. $y = \sqrt{x^2 + \sin x}$
5. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 \sin x}}$

Penyelesaian soal latihan

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^4}}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-2}{2 \sqrt[4]{(3x^2-4x)^3}}$
3. $\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2+4}{3 \sqrt[3]{(x^3+2x)^5}}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+\cos x}{2 \sqrt{x^2+\sin x}}$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 \cos x + 2x \sin x}{3 \sqrt[3]{(x^2 \sin x)^4}}$

DAFTAR PUSTAKA

- Edwin J Purcell, dale V. 2011. *Kalkulus Jilid 1*. edisi delapan. Prentice Hall.
- Indriati, K. 2019. *Kalkulus Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. jakarta: Universitas Khatolik Indonesia Atma Jaya.
- Thomas, G.B., Weir, M.D. and Hass, J. 2009. *Thomas' calculus*. 11th edn. Pearson Addison Wesley, 2004.
- Warsito. 2023. *Kalkulus I*. edisi ketiga. Tangerang Selatan: Universitas terbuka.

BAB 4

TEOREMA NILAI RATA-RATA

Oleh Erniati Bachtiar

4.1 Pendahuluan

Bab ini membahas Teorema Nilai Rata-Rata, sebuah konsep penting dalam analisis matematika/kalkulus yang digunakan untuk memahami hubungan antara integral dan turunan suatu fungsi. Teorema ini memberikan pemahaman yang dalam tentang bagaimana fungsi berperilaku di suatu interval tertentu.

Teorema Nilai Rata-Rata adalah salah satu hasil penting dalam kalkulus, yang pertama kali ditemukan oleh matematikawan Prancis, Augustin-Louis Cauchy. Teorema ini mengaitkan integral suatu fungsi dengan turunan fungsi pada interval tertentu, dan seringkali digunakan dalam berbagai aplikasi ilmu pengetahuan, seperti fisika, ekonomi, dan teknik.

4.2 Teorema Nilai Rata-Rata

Teorema Nilai Rata-Rata menyatakan bahwa jika sebuah fungsi $f(x)$ kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan dapat diferensial pada interval terbuka (a, b) , maka terdapat setidaknya satu nilai c dalam interval (a, b) sedemikian rupa sehingga turunan fungsi tersebut $f'(c)$ adalah rata-rata perubahan fungsi $f(x)$ pada interval $[a, b]$. Dengan kata lain, terdapat c sehingga persamaan dapat dilihat pada Persamaan 4.1.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (4.1)$$

4.3 Aplikasi Teorema Nilai Rata-Rata

Teorema Nilai Rata-Rata (*Mean Value Theorem*) adalah salah satu teorema dasar dalam kalkulus yang memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang teknik. Teorema ini menyatakan

bahwa jika sebuah fungsi $f(x)$ kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan diferensial pada interval terbuka (a,b) , maka ada setidaknya satu titik c di dalam interval $a < c < b$ dimana gradien pada seluruh interval $[a, b]$.

Aplikasi Teorema Nilai Rata-Rata dalam berbagai bidang teknik adalah sebagai berikut:

1. Teknik Mesin: Dalam studi kinematika, teorema ini dapat digunakan untuk menentukan kecepatan rata-rata atau percepatan rata-rata dari benda dalam gerakan. Misalnya, jika kita memiliki data perpindahan benda terhadap waktu, teorema ini dapat digunakan untuk menentukan saat-saat di mana kecepatan rata-rata mencapai kecepatan instan.
2. Teknik Sipil: Dalam rekayasa struktur, teorema ini dapat digunakan untuk menganalisis tegangan dan regangan pada bahan struktural. Hal ini membantu dalam memahami bagaimana perubahan keadaan atau beban dapat mempengaruhi tegangan pada struktur.
3. Teknik Elektro: Dalam analisis sirkuit listrik, teorema ini dapat digunakan untuk menentukan nilai rata-rata arus atau tegangan dalam suatu komponen sirkuit selama suatu interval waktu tertentu.
4. Teknik Kimia: Dalam kimia reaksi kinetika, teorema ini dapat digunakan untuk menghitung laju rata-rata reaksi kimia selama suatu interval waktu. Ini dapat membantu dalam pemahaman tentang sejauh mana reaksi berlangsung selama waktu tertentu.
5. Teknik Komputer: Dalam pemrosesan sinyal dan pengolahan gambar, Teorema Nilai Rata-Rata dapat digunakan untuk mengukur perubahan rata-rata intensitas warna atau kecerahan dalam gambar digital selama interval waktu tertentu.

Teorema Nilai Rata-Rata adalah salah satu konsep kunci dalam kalkulus yang dapat digunakan untuk memahami berbagai fenomena dalam berbagai bidang teknik.

Berikut adalah contoh penggunaan Teorema Nilai Rata-Rata dalam konteks Teknik dalam menganalisis Laju Pergerakan

Kendaraan. Misalkan kita memiliki data pergerakan suatu kendaraan selama interval waktu tertentu, dan kita ingin menentukan kecepatan rata-rata kendaraan tersebut selama interval waktu tersebut.

Langkah-langkah yang dapat diambil menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata:

1. Pertama, kita perlu memiliki data tentang posisi kendaraan terhadap waktu. Misalkan $s(t)$ adalah fungsi yang menggambarkan posisi kendaraan terhadap waktu, dengan t dalam interval $[a, b]$.
2. Kita ingin menentukan kecepatan rata-rata kendaraan selama interval waktu $[a, b]$. Kecepatan rata-rata ini dapat dihitung sebagai perubahan posisi dibagi oleh perubahan waktu yang mengacu pada Persamaan 4.1, sehingga kecepatan rata-rata sebagaimana Persamaan 4.2

$$V_{rata-rata} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} \quad (4.2)$$

3. Selanjutnya penerapan teorema Nilai rata-rata. Jika $s(t)$ kontinu pada interval $[a, b]$ dan diferensial pada interval (a, b) , maka ada setidaknya satu nilai c dalam (a, b) sehingga $s'(c)$ adalah kecepatan rata-rata selama interval waktu tersebut sebagaimana Persamaan 4.3.

$$s'(c) = V_{rata-rata} \quad (4.3)$$

4. Hasil ini memberikan kita nilai c dan dengan demikian memberikan kita pemahaman tentang kecepatan rata-rata kendaraan selama interval waktu $[a, b]$.

Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata dalam analisis kinematika ini, kita dapat menghitung kecepatan rata-rata kendaraan pada suatu saat tertentu selama pergerakan, yang dapat sangat berguna dalam pemodelan dan perencanaan pergerakan kendaraan, seperti perencanaan jarak tempuh perjalanan atau analisis kendaraan otonom.

Selain itu, Teorema Nilai Rata-Rata juga dapat diterapkan dalam analisis sirkuit listrik, perhitungan rata-rata laju perubahan suhu dalam rekayasa termal, dan berbagai bidang teknik lainnya di mana kita perlu memahami bagaimana suatu

parameter berubah selama interval waktu atau ruang tertentu.

Dalam bidang teknik sipil, teorema nilai rata-rata atau average value theorem dapat digunakan untuk berbagai aplikasi, terutama terkait dengan analisis struktur dan perencanaan konstruksi. Beberapa contoh aplikasinya melibatkan bidang-bidang berikut:

1. Analisis Tegangan pada Struktur

Teorema nilai rata-rata dapat digunakan untuk menghitung tegangan rata-rata pada elemen struktur tertentu. Misalnya, pada balok atau kolom tertentu, Anda dapat menggunakan teorema ini untuk menemukan nilai rata-rata tegangan pada elemen tersebut.

2. Deformasi dan Pemuaian

Dalam perencanaan konstruksi, pemuaian dan deformasi struktur sangat penting. Teorema nilai rata-rata dapat membantu dalam menghitung deformasi atau perubahan dimensi rata-rata suatu material atau struktur.

3. Analisis Distribusi Beban:

Teorema ini dapat digunakan untuk menghitung distribusi rata-rata beban atau gaya pada struktur tertentu. Hal ini dapat berguna dalam memahami sebaran beban pada suatu jembatan, fondasi, atau struktur lainnya.

4. Perhitungan Koefisien Keamanan:

Dalam desain struktur, perhitungan koefisien keamanan penting untuk memastikan bahwa suatu struktur aman dan tahan terhadap beban yang diberikan. Teorema nilai rata-rata dapat digunakan sebagai bagian dari analisis untuk menghitung koefisien keamanan pada elemen struktur.

5. Pengukuran Deformasi Tanah:

Dalam rekayasa geoteknik, pemahaman deformasi tanah sangat penting. Teorema nilai rata-rata dapat digunakan untuk mengukur deformasi rata-rata pada lapisan tanah tertentu.

6. Analisis Kekuatan Material:

Teorema ini dapat diterapkan untuk analisis tegangan dan regangan pada material konstruksi tertentu, membantu dalam menentukan sifat mekanisnya.

4.4 Kesimpulan

Penerapan teorema nilai rata-rata biasanya melibatkan perhitungan integral atau turunan untuk mendapatkan nilai rata-rata yang diinginkan. Penting untuk memahami kondisi dan konteks spesifik dari aplikasi tersebut agar dapat menerapkan teorema ini dengan benar. Dalam beberapa kasus, perangkat lunak komputer dan perangkat lunak elemen hingga dapat digunakan untuk memudahkan perhitungan dalam skala yang lebih besar atau kompleks. Penerapan teorema nilai rata-rata sangat luas aplikasinya terutama dalam aplikasi berbagai bidang Teknik.

DAFTAR PUSTAKA

- Stewart, J. 2008. "Calculus: Early Transcendentals." Thomson Learning.
- Apostol, T. M. 1974. "Mathematical Analysis." Addison-Wesley.
- Larson, R., & Edwards, B. 2017. "Calculus." Cengage Learning.
- Rudin, W. 1976. "Principles of Mathematical Analysis." McGraw-Hill.
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. 2002. "Calculus: Early Transcendentals." John Wiley & Sons.

BAB 5

INTEGRAL TENTU

Oleh Rahmi Wahyuni

Integral tentu atau disebut juga dengan definite integral merupakan integral yang berbentuk variable yang integrasinya memiliki batasan yaitu dimana batas nya adalah batas atas dan batas bawah dengan penulisan notasi integralnya di bagian atas dan bawah.

5.1 Definisi

Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup $[a,b]$, dan jika $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \Delta x$ ada, maka:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \Delta x = \int_a^b f(x) d_x$$

5.2 Teorema Dasar Kalkulus

Andaikan f kontinu (karenanya terintegralkan) pada $[a,b]$ dan andaikan F sebarang anti turunan dari f disana, maka:

$$\int_a^b f(x) d_x = F(b) - F(a)$$

Atau :

Jika F merupakan suatu integral dari fungsi f dengan daerah domain.

$Df = \{x | a \leq x \leq b\}$, maka:

$$\int_a^b f(x) d_x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Keterangan :

$F(x)$ = Anti turunan dari $f(x)$

$F(x)$ = Integral

Contoh Soal

1. Hitunglah $\int_0^{\frac{1}{2}} (4x - x^2) dx$

Jawaban:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} (4x - x^2) dx &= \left[\frac{4}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\&= \left(\frac{4}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right) - \left(\frac{4}{2} (0)^2 - \left(\frac{1}{3} (0)^3 \right) \right) \\&= \frac{4}{2} \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \right) - 0 \\&= \frac{4}{2} - \frac{1}{24} \\&= \frac{8}{12} - \frac{1}{24} \\&= \frac{24}{24} \\&= \frac{11}{24}\end{aligned}$$

2. Hitunglah $\int_0^x 5 \sin x \, d_x \dots$

Jawaban:

$$\begin{aligned}\int_0^x 5 \sin x \, d_x &= [-5 \cdot \cos x]_0^x \\&= (-5 \cos x) - (-5 \cos 0) \\&= ((-5)(-1)) - (-5(1)) \\&= (5) + (5) \\&= 10\end{aligned}$$

3. Hitunglah $\int_0^x \cos \frac{1}{2} x \, d_x \dots$

Jawaban:

$$\int_0^x \cos \frac{1}{2} x \, d_x =$$

$$\text{Misal : } y = \frac{1}{2} x$$

$$dx = 2 \, dy$$

$$\int_0^x \cos \frac{1}{2} x \, d_x = \int_0^x \cos y \cdot 2 \, dy$$

$$= [2 \cdot \sin y]_0^x$$

$$\begin{aligned}
&= \left[2 \sin. \frac{1}{2}. x \right]_0^x \\
&= \left(2 \sin. \frac{x}{2} \right) - (2 \cdot \sin 0) \\
&= (2) - (0) \\
&= 2
\end{aligned}$$

5.3 Teorema-Teorema dalam Integral Tentu

5.3.1 Kelinearan Integral Tentu

Jika f dan g terintegralkan pada $[a,b]$ dan k bahwa k konstanta. Maka k_f *dan* $f+g$ adalah terintegralkan dan

1. $\int_a^b Kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ dan tak tentu
3. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

5.3.2 Bukti

Pembuktian tergantung pada kelinearian Σ *dan* sifat-sifat limit kita perhatikan (ii)

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{|p|} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)] \Delta x_i \\
&= \lim_{|p| \rightarrow 0} [\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \Delta x_i] \\
&= \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \Delta x_i \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx
\end{aligned}$$

Contoh soal

1. Hitunglah $\int_1^2 (2x^2 + 3x + 5)dx$

Jawaban :

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 (2x^2 + 3x + 5) dx \\
&= 2 \int_1^2 x^2 dx + 3 \int_1^2 x dx + \int_1^2 5 dx \\
&= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 - 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + 5 [x]_1^2 \\
&= 2 \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) - 3 \left(2 - \frac{1}{2} \right) + 5 (2 - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(\frac{7}{3} \right) - 3 \left(\frac{3}{2} \right) + 5 (1) \\
 &= \frac{14}{3} - \frac{9}{2} + 5 \\
 &= \frac{31}{6}
 \end{aligned}$$

2. Hitunglah $\int_0^1 x (x^2 + 2)^3 dx \dots$

Jawaban :

$$\int_0^1 x (x^2 + 2)^3 dx$$

Misalkan :

$$y = x^2 + 2$$

$$dy = 2x \cdot dx$$

$$x dx = \frac{1}{2} dy$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x (x^2 + 2)^3 &= \int_0^1 y^3 \cdot \frac{1}{2} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^3 dy \\
 &= \frac{1}{8} [y^4]_0^1 \\
 &= \frac{1}{8} [(x^2 + 2)^4]_0^1 \\
 &= \frac{1}{8} ((3)^4 - (2)^4) \\
 &= \frac{1}{8} (81 - 16) \\
 &= \frac{65}{8}
 \end{aligned}$$

3. Hitunglah $\int_{-1}^1 \frac{6x^2}{(x^3+2)^3} dx \dots$

Jawaban :

Misalkan :

$$y = x^3 + 2$$

$$dy = 3 x^2 dx$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3} dy$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \frac{6x^2}{(x^3+2)^3} dx &= 6 \int_{-1}^1 \frac{1}{y^3} \cdot \frac{1}{3} dy \\
 &= \frac{6}{3} \cdot \int_{-1}^1 y^{-3} dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6}{3} \left(-\frac{1}{2} y^3 \right)^1_{-1} \\
&= [-y \cdot^{-3}]_{-1}^1 \\
&= [-(x^3 + 2)^{-3}]_{-1}^1 \\
&= \left[\frac{1}{(x^3 + 2)^3} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{(1+2)^3 - (-1+2)^3} \\
&= \frac{1}{27 - (1)} \\
&= \frac{1}{26}
\end{aligned}$$

4. Hitunglah $\int_0^{\frac{x}{2}} \cos x \cdot dx \dots$

Jawaban :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{x}{2}} \cos x \cdot dx &= [\sin x]_0^{\frac{x}{2}} \\
&= \left(\sin \frac{x}{2} \right) - (\sin(0)) \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

5. Hitunglah $\int_1^2 \frac{x^3 + 5x^2 - 4x}{x} \dots$

Jawaban

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{x^3 + 5x^2 - 4x}{x} \\
&= \int_1^2 \frac{x^3}{x} dx + 5 \int_1^2 \frac{x^2}{x} dx - 4 \int_1^2 \frac{x}{x} dx \\
&= \int_1^2 x^2 dx + 5 \int_1^2 x dx - 4 \int_1^2 dx \\
&= \frac{1}{3} x^3 \int_1^2 + 5 \frac{1}{2} x^2 \int_1^2 - 4 \int_1^2 x \\
&= \frac{1}{3} (8 - 1) + \frac{5}{2} (4 - 1) - 4 (2 - 1) \\
&= \frac{7}{3} + \frac{15}{2} - 4 \\
&= \frac{59}{6} - 4 \\
&= \frac{35}{6} \\
&= 5,8
\end{aligned}$$

5.4 Sifat-Sifat Integral Tentu

5.4.1 Sifat dari Teorema A

Pada Sifat Penambahan Selang. Jika f terintegralkan pada suatu selang yang terdapat tiga titik a, b , dan c dapat dituliskan:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Bagaimanapun urutan dari a, b , dan c

5.4.2 Sifat Teorema B

Untuk f dan g yang terintegralkan di $[a, b]$ dan jika $f(x) < g(x)$ untuk semua x dalam $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

5.4.3 Sifat Teorema C

Pada Sifat Keterbatasan. Untuk f terintegralkan pada $[a, b]$ dan jika $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua x dalam $[a, b]$, maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

5.4.4 Sifat Teorema D

Pada pendiferensialan suatu Integral Tentu. Andaikan f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan andaikan x sebuah (variabel) titik dalam $[a, b]$, maka

$$D_x \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

5.4.5 Sifat Teorema E

Pada teorema nilai rata-rata Integral. Jika f kontinu di selang $[a, b]$ maka ada suatu bilangan c diantara a dan b sedemikian sehingga $\int_a^b f(t) dt = f(c)(b-a)$.

Contoh soal

1. Hitunglah $\int_1^2 x^4 dx = \int_1^2 x^4 dx + \int_2^2 x^4 dx \dots$

Jawaban :

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_2^3 \\
&= \left(\frac{1}{5} (2)^5 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} (3)^5 - \frac{1}{5} (2)^5 \right) \\
&= \left(\frac{1}{5} (32) - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} (243) - \frac{1}{5} (32) \right) \\
&= \left(\frac{31}{5} \right) + \left(\frac{243}{5} - \frac{32}{5} \right) \\
&= \frac{242}{5} \\
&\approx 48,4
\end{aligned}$$

2. Cari $D_x \left[\int_2^x t^{\frac{2}{3}} dt \right] \dots$

Jawaban :

$$D_x \left[\int_2^0 t^{2/3} dt \right] = x^{2/3}$$

3. Cari $D_x \left[\int_x^6 \sin 4 u \text{ dan } \tan u \, du \right], \frac{x}{2} < x < \frac{3x}{2} \dots$

Jawaban :

$$\begin{aligned}
&D_x \left[\int_x^6 \sin^4 u \tan u \, du \right] \\
&= D_x \left[- \int_6^x \sin^4 u \tan u \, du \right] \\
&= -D_x \left[\int_6^x \sin^4 \tan u \, du \right] \\
&= -\sin^4 x \cos x
\end{aligned}$$

4. Carilah $D_x \left[\int_{2x}^4 \sqrt{t^2 + 4} \, dt \right] \dots$

Jawaban :

Pada tahap pertama kita dapat merubah batas-batas dan kemudian kita dapat memaka Teorema D Bersama dengan aturan rantai

$$\begin{aligned}
&D_x \left[\int_{2x}^4 \sqrt{t^2 + 4} \, dt \right] \\
&= D_x \left[- \int_4^{2x} \sqrt{t^2 + 4} \, dt \right] \\
&= -\sqrt{(2x)^2 + 2(4)} \\
&= -4 \sqrt{4x^2 + 2}
\end{aligned}$$

5.5 Perhitungan Integral Tentu

Secara umum perhitungan integral tentu melalui dua tahap yaitu menghitung suatu anti turunan atau integral tak tentu dan selanjutnya mengaplikasikan Teorema dasar kalkulus.

Ada beberapa bantuan dalam penghitungan integral tentu yaitu dijelaskan dalam beberapa teorema berikut.

5.5.1 Teorema A

Andaikan g suatu fungsi yang terdiferensialkan dan andaikan bahwa F adalah suatu anti turunan dari f , maka jika $u=g(x)$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + c$$

5.5.2 Teorema B

Andaikan g mempunyai turunan kontinu pada $[a,b]$ dan andaikan f kontinu pada daerah nilai dari g , maka

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

5.5.3 Teorema C (Teorema Simetri)

Jika f fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Jika f fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Contoh Soal

1. Hitunglah $\int_{-1}^2 \frac{-x}{(x^2+1)^2} dx \dots$

Jawaban

Misalkan $y = x^2 + 1$

$$x dx = \frac{1}{2} dy$$

$$\int_{-2}^2 \frac{-x}{(x^2+1)^2} dx = - \int_{-1}^2 \frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{2} dy\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^2 y^{-2} dy \\
&= \frac{1}{2} y^{-1} \Big|_{-1}^2 \\
&= -\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1} \Big|_{-1}^2 \\
&= -\frac{1}{x^2 + 1} \Big|_{-1}^2 \\
&= -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

2. Hitunglah $\int_0^3 \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+9}} dx \dots$

Jawaban

$$\int_0^3 \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+9}} dx, \quad \text{Misalkan : } Y = x^3 + 9$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3} dy$$

$$\int_0^3 \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+9}} dx = 4 \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}} dx$$

$$= 4 \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{3} dy \right)$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^3 y^{-1/2} dy$$

$$= \frac{8}{3} \sqrt{x^3+9} \Big|_0^3$$

$$= \frac{8}{3} (\sqrt{36} - \sqrt{9})$$

$$= \frac{48}{3} - \frac{8}{3} \sqrt{9}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Berkey, D. Dennis, 1988. *Calculus*, 2nd edition. New York: Saunders College Publishing.
- Edwin J. Purcell., Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1* (terjemahan I Nyoman Susila dkk). Jakarta: Erlangga.
- Rachmani, Nuriana. 2020. *Buku Ajar Kalkulus Integral Berorientasi pada Pembelajaran Preprospec Berbantuan TIK*. Jawa Tengah: Lakeisha.
- Putranti, S.R.D. 1999. *Integral*. Surabaya: PT Rineka Cipta.

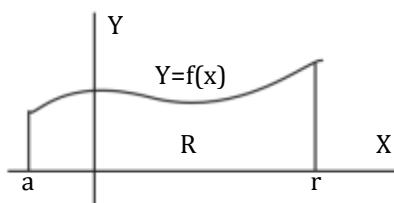
BAB 6

LUAS DAERAH BIDANG RATA

Oleh Ariyani Muljo

6.1 Daerah Diatas Sumbu X

Perhatikan gambar daerah rata dibawah ini

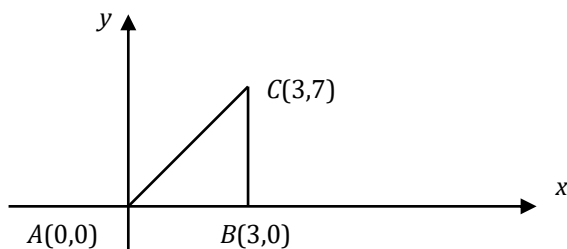


R adalah bidang datar yang dibatasi oleh grafik-grafik

Andaikan $y = f(x)$ menentukan persamaan sebuah kurva di bidang $-xy$ dan andaikan f kontinu dan tak-negatif pada selang $a \leq x \leq b$ seperti pada gambar. Tinjaulah daerah R yang daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik $y = f(x), x = a, x = b, \text{ dan } y = 0$. Kita menggunakan acuan R sebagai daerah dibawah $y = f(x)$, antara $x = a \text{ dan } x = b$. Dengan menggunakan integral tertentu luas luasan R dinyatakan dengan $A(R) = \int_a^b f(x) dx$

Contoh 1:

Segitiga ABC terletak pada XOY, titik-titik sudutnya dinyatakan dalam koordinat Cartesius. Titik A(0,0), B(3,0) dan C(3,7). Dengan menggunakan integral tertentu tentukan luas segitiga ABC.



Persamaan garis AC dapat dinyatakan dengan rumus:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

Diperoleh persamaan $\frac{y-0}{x} = \frac{7-0}{3-0}$

$$3y = 7x \text{ atau } y = \frac{7x}{3}$$

Sehingga luas yang dicari dinyatakan dan $A(R) = \int_a^b f(x) dx$

$$\int_0^3 \frac{7x}{3} dx = \left(\frac{7}{6} x^2 \right)_0^3 = \left(\frac{7}{6} \cdot 9 \right) = 10,5$$

Contoh 2:

Tentukan luas daerah R dibawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$

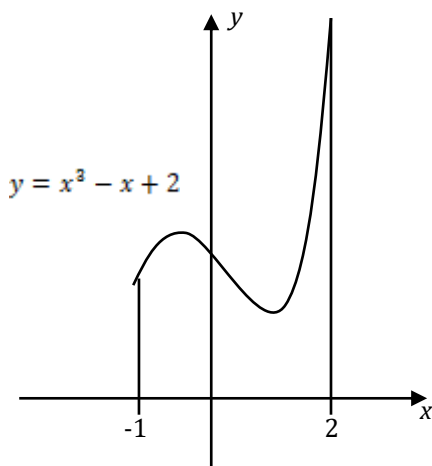
Penyelesaian :

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-1}^2 (x^4 - 2x^3 + 2) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2 \right) \\ &= \left(\frac{33}{5} - \frac{15}{2} + 6 \right) \\ &= \frac{66}{10} - \frac{75}{10} + \frac{60}{10} \\ &= \frac{51}{10} = 5,1 \end{aligned}$$

Uji Kompetensi

Kerjakan soal latihan berikut pada ruang kosong di *Lembar Kerja* Anda!

Dalam soal dibawah ini, gunakan prosedur tiga langkah (iris, hampiri, integrasikan) untuk menyusun integral (atau integral-integral) untuk daerah yang ditunjukkan



Kesimpulan

Setelah mengerjakan soal diatas, bagaimana pendapat anda terhadap materi daerah diatas sumbu-X? Coba kemukakan 2 simpulan mengenai materi tersebut?

6.2 Daerah Dibawah Sumbu X

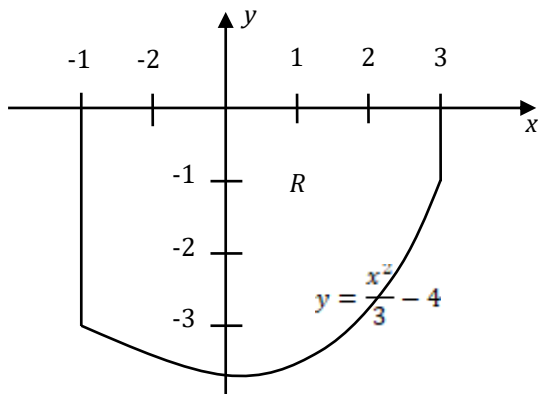
Luas dinyatakan oleh bilangan yang tak negatif. Apabila grafik $y = f(x)$ terletak dibawah sumbu x, maka $\int_a^b f(x)dx$ adalah bilangan yang negatif, sehingga tak dapat melukiskan suatu luas. Akan tetapi bilangan itu adalah negatif untuk luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x), x = a, x = b$ dan $y = 0$. Maka luasnya didefinisikan sebagai :

$$A(R) = - \int_a^b f(x) dx$$

Contoh 1 :

Tentukan luas daerah antara kurva $y = 3x$, sumbu X , $x = -1$ dan $x = 1$!

Penyelesaian :



$$L = -\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = -\left(0 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

satuan luas.

Contoh 2:

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = \frac{x^2}{3} - 4$, sumbu x , $x = -2$, $x = 3$

Penyelesaian :

Daerah R diperlihatkan pada gambar. Taksiran kita untuk luas adalah $(5)(3) = 15$. Nilai eksaknya adalah ...

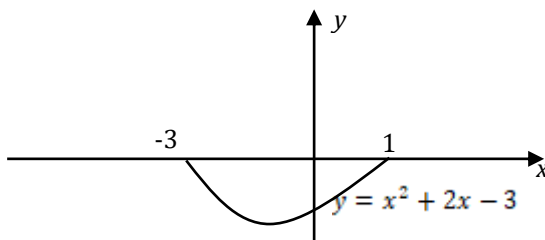
$$\begin{aligned} A(R) &= -\int_{-2}^3 \left(\frac{x^2}{3} - 4\right) dx = \int_{-2}^3 \left(\frac{x^2}{3} + 4\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^3 = \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right) = \frac{145}{9} = 16,11 \end{aligned}$$

Kita diyakinkan dengan kedekatan **16,11** terhadap nilai taksiran itu.

Uji Kompetensi

Kerjakan soal latihan berikut pada ruang kosong di *Lembar Kerja* Anda!

Gunakan prosedur tiga langkah (iris, hampiri, integrasikan) untuk menyusun integral (atau integral-integral) untuk daerah yang ditunjukkan

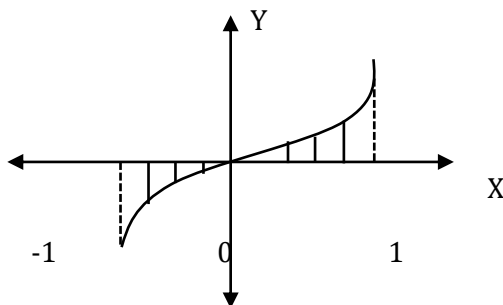


Kesimpulan

Setelah mengerjakan soal diatas, bagaimana pendapat anda terhadap materi daerah dibawah sumbu-X? Coba kemukakan 2 simpulan mengenai materi tersebut?

Cara Berpikir yang Dapat Membantu

Untuk daerah-daerah sederhana sejenis yang ditinjau diatas, mudah sekali untuk menuliskan integral yang benar. Bilaman kita meninjau daerah yang lebih rumit (misalnya daerah diantara dua kurva), tugas pemilihan integral yang benar lebih sukar. Tetapi terdapat suatu cara berpikir yang dapat sangat membantu. Pemikiran itu kembali ke definisi luas dan integral tentu. Berikut cara berpikir tersebut dalam langkah-langkah:

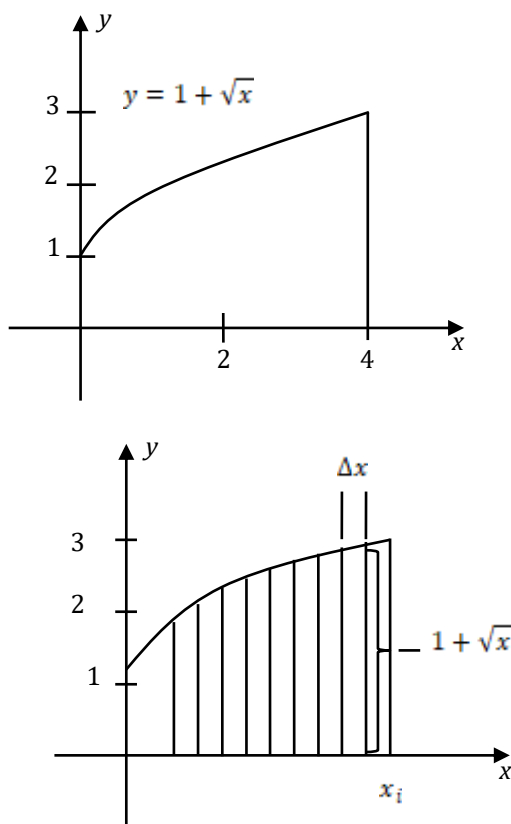


- Langkah 1** : Gambarlah daerah yang bersangkutan.
- Langkah 2** : Irislah menjadi irisan kecil, berilah label pada suatu irisan.
- Langkah 3** : Hampiri luas irisan tertentu, dengan menganggapnya berupa sebuah segi empat.
- Langkah 4** : Jumlahkan lah hampiran-hampiran luas irisan tersebut.
- Langkah 5** : Ambillah limit dengan lebar masing-masing irisan mendekati 0, sehingga diperoleh suatu integral tentu.

Contoh 4

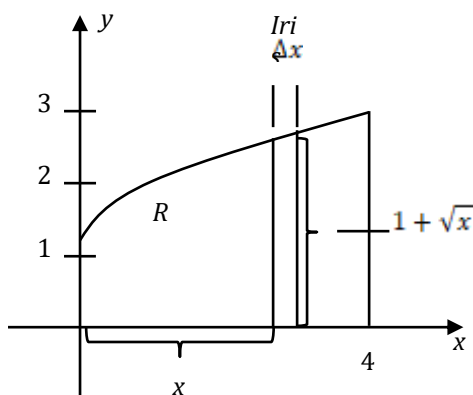
Susunlah integral untuk luas daerah dibawah kurva $y = 1 + \sqrt{x}$ yang terletak antara garis dengan persamaan $x = 0$ dan $x = 4$

Penyelesaian :



1. Hampiri luas irisan masing-masing $\Delta a_i = (1 + \sqrt{x_i})\Delta x_i$
2. Jumlahkanlah titik dua $\Sigma = (1 + \sqrt{x_i})\Delta x_i$
3. Ambillah *lim*: $a = \int_0^4 (1 + \sqrt{x})dx$

Begitu kita memahami prosedur lima langkah tersebut, kita dapat menyingkatnya menjadi 3 langkah, yaitu iris, hampiri, integrasikan. Pikirkan kata integrasikan bermakna sebagai jumlahkan dan ambil limit apabila lebar irisan menuju 0. Dalam proses ini $\Sigma \dots \Delta x$ berubah menjadi $\int \dots dx$.



Hampiri
 $\Delta A \approx (1 + \sqrt{x})\Delta x$
 Integrasikan
 $A = \int_0^4 (1 + \sqrt{x})dx$

6.3 Daerah antara 2 Kurva

Tinjaualah kurva-kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $g(x) \leq f(x)$ pada $a \leq x \leq b$. Kurva-kurva dan selang itu menentukan daerah yang diperlihatkan pada gambar. Kita menggunakan metode iris, hampiri, dan integrasikan untuk menentukan luasnya. Yakinkanlah untuk memperhatikan bahwa $f(x) - g(x)$ memberikan tinggi yang benar dari irisan tipis tersebut, walaupun grafik g dibawah sumbu x . Sebab dalam kasus ini $g(x)$ negatif, jadi mengurangi dengan $g(x)$ berarti menambah dengan bilangan yang positif. Anda dapat memeriksa bahwa $f(x) - g(x)$ juga memberikan tinggi yang benar $g(x)$ dua-duanya negatif.

$$\Delta A \approx (f(x) - g(x))\Delta x$$

Sehingga luas luasannya dinyatakan dengan:

$$A(R) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

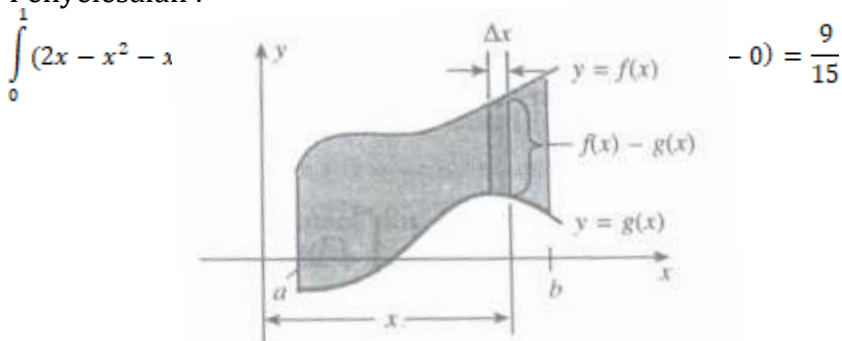
Rumus di atas berlaku untuk luasan di atas sumbu x, jika luasannya disebelah kanan sumbu y, maka luas luasan yang dibatasi oleh dua kurva dinyatakan dengan

$$A(R) = \int_c^d (f(y) - g(y))dy$$

Contoh 1 :

Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$ dengan $x = 0$ dan $x = 1$

Penyelesaian :



Contoh 2 :

(Irisan datar) Tentukan luas daerah R antara parabola $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$

Penyelesaian :

Kita akan memerlukan titik potong dua kurva ini. Koordinat y dari titik-titik ini dapat diperoleh dengan menuliskan persamaan kedua sebagai $4x = 3y + 4$, dan kemudian menyamakan kedua persamaan untuk $4x$.

$$y^2 = 3y + 4$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

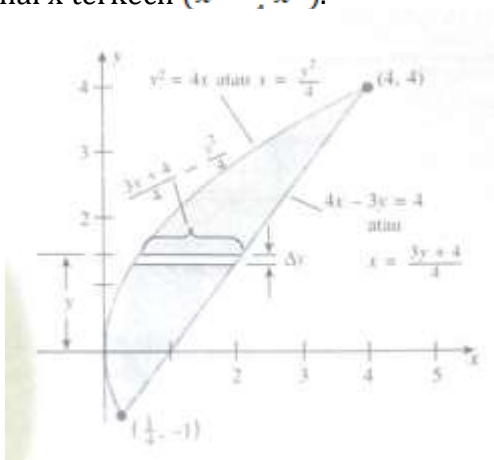
$$(y - 4)(y + 1) = 0$$

$$y = 4 \text{ atau } y = -1$$

Dari sini kita menyimpulkan bahwa titik-titik potongnya adalah $(4,4)$ dan $(\frac{1}{4}, -1)$.

Sekarang bayangkan mengiris bayangan ini secara tegak. Kita menghadapi masalah. Ada kesulitan sedikit, karena batas bawah terdiri atas dua kurva yang berbeda. Potongan paling kiri merentang dari cabang bawah parabola hingga cabang atasnya. Untuk daerah sisanya irisan-irisan merentang dari garis ke parabola. Untuk mengerjakan soal ini dengan irisan tegak pertama kita perlu memisahkan daerah menjadi dua bagian, kemudian menghitung kedua integral.

Pendekatan yang jauh lebih baik ialah mengiris daerah secara mendatar, seperti diperlihatkan pada Gambar 10, kemudian menggunakan y sebagai peubah integral ketimbang x . Perhatikan bahwa irisan-irisan datar itu selalu bermula pada parabola (disebalah kiri) dan berakhir pada garis (disebalah kanan). Lebar irisan yang demikian adalah nilai x terbesar ($x = \frac{1}{4}(3y + 4)$) dikurangi nilai x terkecil ($x = \frac{1}{4}y^2$).



$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^4 \left[\frac{3y + 4 - y^2}{4} \right] dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^4 (3y + 4 - y^2) \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^4 \\
 \Delta A &= \left[\frac{3y + 4}{4} - \frac{y^2}{4} \right] \Delta y \\
 A &= \int_{-1}^4 \left[\frac{3y + 4}{4} - \frac{y^2}{4} \right] dy \\
 \frac{1}{4} \left[\left(24 + 16 - \frac{64}{3} \right) - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3} \right) \right] &= \frac{125}{24} = 5,21
 \end{aligned}$$

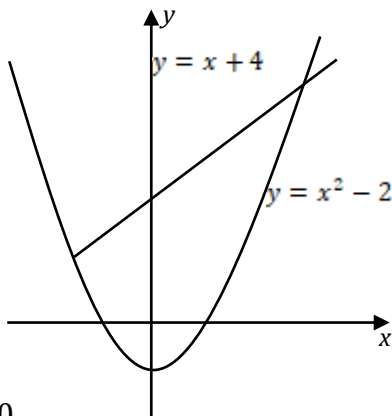
Ada dua hal yang harus diperhatikan yaitu : 1) Integral yang dihasilkan dari pengirisan mendatar mengandung peubah y , bukan x ; 2) Untuk memperoleh integral, selesai dua persamaan tersebut untuk x dan kurangkan nilai x yang lebih kecil dari nilai x yang lebih besar.

Uji Kompetensi

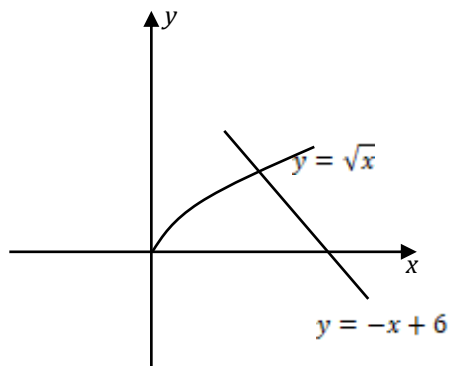
Kerjakan soal latihan berikut pada ruang kosong di *Lembar Kerja* Anda!

Gunakan prosedur tiga langkah (iris, hampiri, integrasikan) untuk menyusun integral (atau integral-integral) untuk daerah yang ditunjukkan!

a.



b.



Kesimpulan

Setelah mengerjakan soal-soal diatas, bagaimana menurut Anda mengenai materi daerah antara 2 kurva? Apa yang dapat Anda kemukakan minimal 2 simpulan berdasarkan materi ini ?

DAFTAR PUSTAKA

- Purcell, J. Edwin., dkk. *Kalkulus Jilid 1 Edisi Kedelapan*, Jakarta :
Penerbit Erlangga
- Bartle, G. Robert., *Introduction To Real Analysis*, New York, 1991

BAB 7

VOLUME BENDA DALAM RUANG

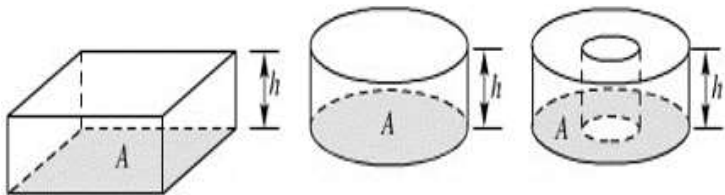
Oleh Ardiana Fatma Dewi

7.1 Volume

Integral merupakan sebuah konsep matematika yang sering digunakan dalam ilmu Kalkulus. Integral dapat dihitung secara *indefinite* atau *definite* pada interval tertentu. Integral tentu dapat dihitung secara sederhana menggunakan berbagai pendekatan di mana area integrasi pada interval tersebut dibagi menjadi beberapa partisi dan penjumlahan luas partisi tersebut dapat diaproksimasi sebagai hasil integrasi dari sebuah fungsi (Edwin J, Dale and Steven E, 2011).

Integral tertentu (*definite*) dapat digunakan untuk menghitung beberapa hal. Salah satu aplikasi dari integral adalah untuk menghitung volume benda dalam ruang. Volume benda dalam ruang yang dimaksudkan disini merupakan volume benda pejal yang dibatasi oleh suatu kurva tertentu dan berputar mengelilingi sumbu X ataupun sumbu Y.

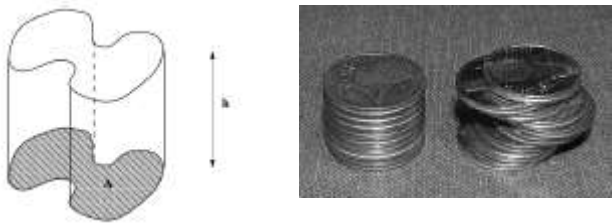
Apa itu volume? Jumlah ruang yang dapat menampung suatu objek disebut volume. Objek dapat berupa benda yang beraturan ataupun tidak beraturan. Benda beraturan seperti kubus, balok, silinder, limas, kerucut, dan bola. Benda yang tidak beraturan misalnya batu yang ditemukan di jalan.



Gambar 7.1. Ilustrasi Volume Benda Beraturan

Gambar 7.1 diatas menunjukan benda-benda sederhana

yang bervolume, terdapat balok, tabung, dan tabung berongga. Secara sederhana dalam menghitung volume benda dapat diperoleh dengan cara menghitung luas penampang benda (A) dikalikan dengan tinggi benda (h). Sehingga diperoleh rumus $\text{Volume} = A \times h$, seperti ilustrasi pada Gambar 7.1.

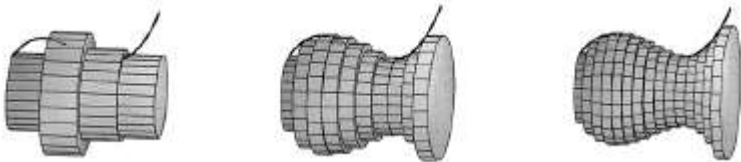


Gambar 7.2. Ilustrasi Volume Benda Tidak Beraturan

Jika terdapat suatu benda yang memiliki volume dengan bentuk yang tidak dapat di definisikan atau tidak beraturan. Seperti hal nya pada Gambar 7.2 diatas, maka untuk menghitung volume kita memerlukan pendekatan matematika dengan cara membagi setiap segmen lalu menjumlahkannya (Jungic and Mulholland, 2023).



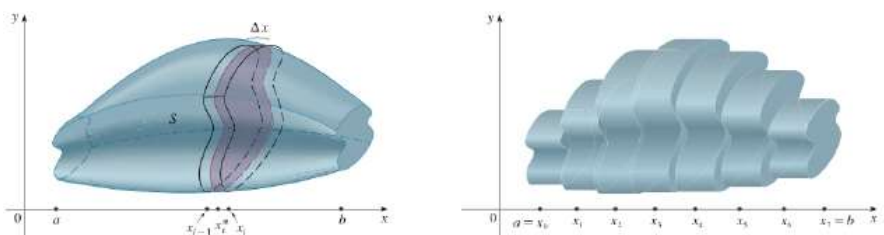
Gambar 7.3. Benda Bervolume Tidak beraturan



Gambar 7.4. Partisi dari Benda Bervolume Tidak Beraturan

Berdasarkan Gambar 7.3 dan Gambar 7.4 dapat dilihat bahwa ketika kita memiliki suatu benda dengan bentuk yang

tidak dapat di definisikan, maka dengan aturan matematika kita dapat membaginya dengan beberapa potong seperti ilustrasi pada Gambar 7.4. Pada Gambar 7.4 disajikan beberapa partisi, bisa dibagi menjadi 4 bagian tabung, 10 bagian tabung, ataupun 15 bagian tabung. Volume satu lempengan tersebut dianggap sebagai volume tabung. Menurut prinsip Cavalieri “irisan luas” penampang ini dapat disusun ulang dan tetap memberikan volume total yang sama (Jed Herman and Strang, 2016). Volume (V) benda dapat diaproksimasi dengan jumlah Riemann sebagai berikut.



Gambar 7.5. Ilustrasi Penjumlahan Riemann

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Definisi Volume berdasarkan Gambar 5. Misalkan S adalah suatu benda padat yang terletak di antara $x = a$ dan $x = b$. Jika luas penampang S pada bidang Px , melalui x dan tegak lurus sumbu x , adalah $A(x)$, dimana A adalah fungsi kontinu, maka volume S adalah.

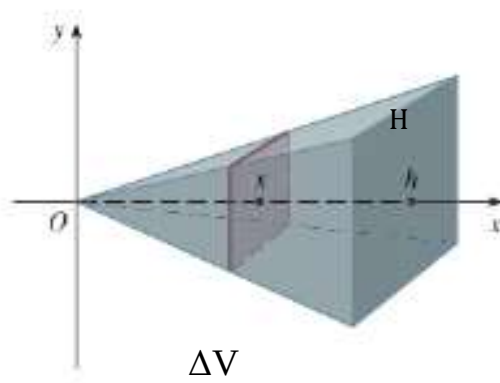
$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Disinilah peran integral diperlukan ketika menghitung volume benda yang sedemikian rupa. Sehingga secara umum volume benda padat dapat dihitung menggunakan integral seperti rumus diatas. Tidak disarankan menggunakan rumus secara hafalan saat menghitung volume benda. Namun, harus memahami proses yang digunakan untuk menemukan rumus tersebut. Kita bisa menyebut proses itu pemotongan, aproksimasi, dan pengintegralan. Berikut dijelaskan berbagai

macam metode pendekatan dalam menghitung volume benda padat.

7.2 Metode Lempengan (Penampang Diketahui)

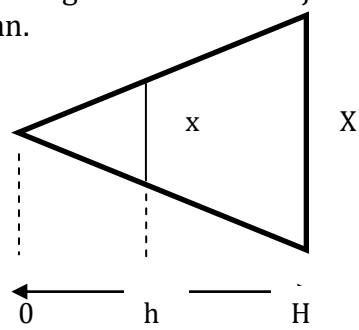
Metode Lempengan biasanya digunakan ketika penampang tegaknya berbentuk bujur sangkar atau segitiga seperti ilustrasi gambar berikut ini.



Gambar 7.6. Ilustrasi Volume Metode Lempengan

Gambar 7.6 menunjukkan bangun ruang limas segi empat. Kita tahu bahwa untuk menghitung volume bangun ruang tersebut dengan cara mengalikan luas alas (A) dengan tinggi limas (h).

Perhatikan Gambar 6, jika menghitung volume benda dengan metode lempengan maka caranya dengan menjumlahkan lempengan dengan panjang sisi x dengan batas 0 sampai dengan. Jika disebutkan suatu lempengan maka memiliki ketebalan tertentu, misalkan sebut saja dengan ΔV . Perhatikan ilustrasi limas persegi dibawah ini jika dilihat secara dua dimensi dari depan.



Langkah pertama yaitu membuat perbandingan nilai x untuk dapat menentukan luas penampang.

$$\frac{x}{h} = \frac{X}{H}$$

$$x = \frac{X}{H} h$$

Ingat ulang, bahwa rumus untuk mencari volume benda ruang secara umum menggunakan integral adalah sebagai berikut:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Karena penampang berbentuk persegi, maka luasnya $A(x)$ adalah:

$$A(x) = x^2 = \left(\frac{X}{H} h \right)^2 = \frac{X^2}{H^2} h^2$$

Substitusikan kedalam rumus volume dengan batas 0 sampai dengan H .

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x) dx \\ &= \int_0^H \frac{X^2}{H^2} h^2 dx, \text{ dengan } 0 < h < H \\ &= \frac{X^2}{H^2} \left(\frac{h^3}{3} \right) \Big|_0^H \\ &= \frac{X^2}{H^2} \left(\frac{H^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= \frac{X^2}{H^2} \frac{H^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} X^2 H \end{aligned}$$

Sehingga dapat diketahui bahwa volume limas persegi diatas adalah:

$$V = \frac{1}{3} X^2 H$$

Hal tersebut sesuai dengan teori klasik yang sering kita jumpai pada rumus untuk mencari volume benda ruang khususnya limas persegi.

Jika diketahui panjang sisi adalah x dan berbentuk persegi, maka luasan nya (A) adalah x^2 , untuk tingginya misalkan dibatasi dari 0 sampai dengan $H=3$. Maka kita dapat menghitung volume benda diatas dengan menggunakan rumus sebagai berikut ini.

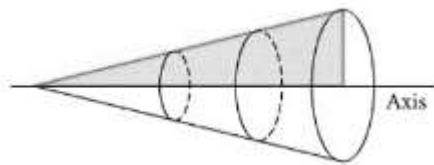
$$V = \int_a^b A(x)dx$$

$$V = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 27$$

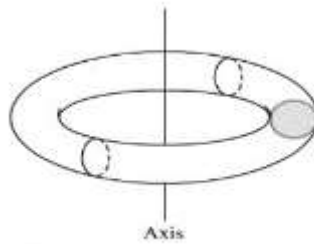
Sehingga dapat diketahui volume limas adalah 27. Untuk bentuk penampang lain bisa menyesuaikan dengan rumus integral diatas dengan batas tertentu.

7.3 Metode Cakram

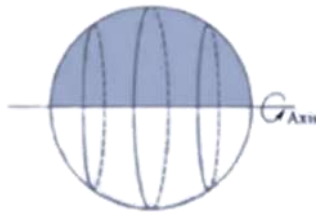
Dalam rangka mencari volume benda pejal, selain menggunakan metode lempengan juga terdapat metode lain yaitu metode cakram. Jika suatu bidang datar yang seluruhnya terletak pada salah satu sisi garis tetap pada bidangnya, berputar terhadap garis tersebut, maka bidang tersebut akan membentuk benda yang berputar. Coba perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 7.7. Ilustrasi Benda Putar Kerucut

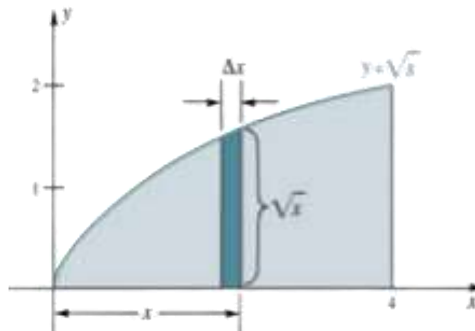


Gambar 7.8. Ilustrasi Benda Putar Ban

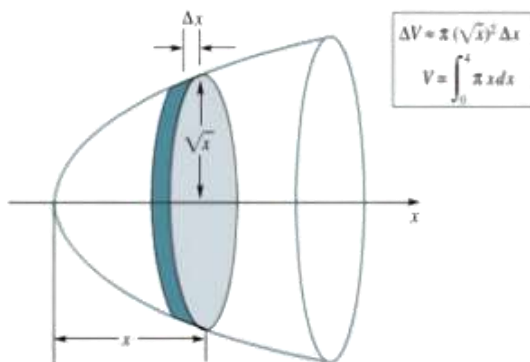


Gambar 7.9. Ilustrasi Benda Putar Bola

Dari beberapa ilustrasi gambar diatas dapat diketahui bahwa pada Gambar 7.7 jika awalnya dibentuk suatu daerah berbentuk segitiga dan diputar mengelilingi sumbu x , maka akan membentuk suatu daerah yaitu sebuah kerucut. Pada Gambar 8, jika dibentuk sebuah lingkaran dan diputar mengelilingi suatu garis yaitu sumbu y maka akan membentuk sebuah torus atau bentuk seperti ban. Gambar 7.9 mengilustrasikan jika kita membentuk setengah lingkaran, dan diputar mengelilingi sumbu x maka akan membentuk suatu bola. Pada beberapa kasus, volume benda dapat disajikan sebagai suatu integral tertentu seperti contoh dibawah ini.



Pada gambar diatas, misalnya jika diketahui suatu kurva yaitu $y = \sqrt{x}$ diputar mengelilingi sumbu x dengan batas $x=4$. Coba perhatikan gambar dibawah ini untuk ilustrasi nya.



Pada gambar diatas kita bisa lihat bahwa ketika daerah yang dibatasi oleh kurva tersebut diputar mengelilingi sumbu x maka akan membentuk suatu benda putar dan membentuk sebuah cakram. Dimisalkan pada bagian tersebut memiliki suatu volume sebesar ΔV .

Untuk mencari volume benda putar tersebut dapat diaproksimasikan dengan volume sebuah tabung yang memiliki tinggi Δx . Jari-jari alas nya yaitu sesuai dengan kurva yang diketahui di awal $\sqrt{x}$. Sehingga untuk mencari volume dari sebuah cakram yang berbentuk seperti tabung adalah:

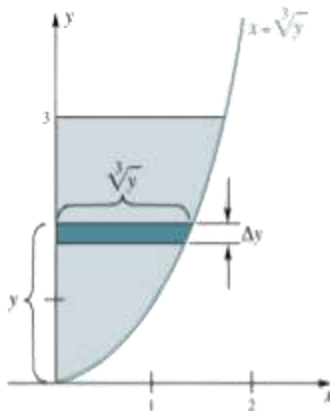
$$\begin{aligned}\Delta V &\approx \pi r^2 t \\ &\approx \pi (\sqrt{x})^2 \Delta x \\ &\approx \pi x \Delta x\end{aligned}$$

Apabila volume dari tabung tersebut kita jumlahkan sesuai dengan batas yang diminta yaitu $x=4$, maka untuk mencari volume benda putar dapat menggunakan aturan rumus sebagai berikut.

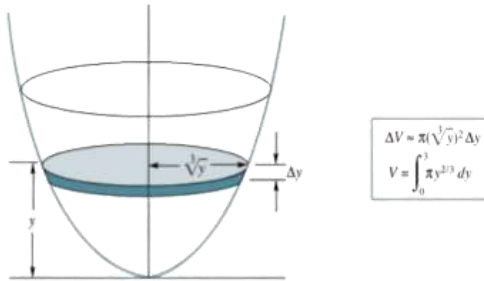
$$\begin{aligned}
 V &= \int_a^b \Delta V dx \\
 &= \int_0^4 \pi x dx \\
 &= \pi \int_0^4 x dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\
 &= \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{0}{2} \right) \\
 &= 8\pi
 \end{aligned}$$

Sehingga volume dari kurva $y = \sqrt{x}$ diputar mengelilingi sumbu x dengan batas $x=4$ sebesar 8π satuan volume.

VContoh diatas menunjukkan volume benda ketika diputar mengelilingi sumbu x. Selanjutnya akan diberikan contoh apabila benda diputar mengelilingi sumbu y seperti dibawah ini.



Pada gambar diatas, misalnya jika diketahui suatu kurva yaitu $x = \sqrt[3]{y}$ diputar mengelilingi sumbu y dengan batas $y=3$. Coba perhatikan gambar dibawah ini untuk ilustrasi benda putar nya.



Untuk mencari volume benda putar tersebut dapat diaproksimasikan dengan volume sebuah tabung yang memiliki tinggi Δy_i jari-jari alas nya $V =$. Sehingga untuk mencari volume dari sebuah cakram yang berbentuk seperti tabung adalah:

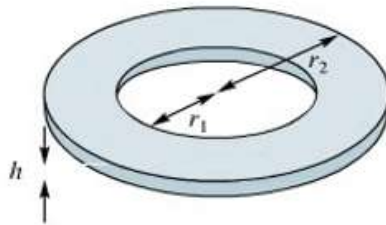
$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \pi r^2 t \\ &\approx \pi (\sqrt{y})^2 \Delta y \\ &\approx \pi y^{2/3} \Delta y \end{aligned}$$

Volume dari tabung tersebut kita jumlahkan sesuai dengan batas yang diminta yaitu $y=3$. Karena diputar terhadap sumbu y , maka perhitungan integral juga harus disesuaikan terhadap y , seperti berikut.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_a^b \Delta V dy \\
 &= \int_0^3 \pi y^{2/3} dy \\
 &= \pi \int_0^3 y^{2/3} dy \\
 &= \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^3 \\
 &= \pi \left(\frac{9^3 \sqrt[3]{9}}{5} - 0 \right) \\
 &= \frac{9^3 \sqrt[3]{9}}{5} \pi
 \end{aligned}$$

7.4 Metode Cincin

Terdapat banyak macam metode dalam mencari volume benda pejal, tergantung pada bentuk bendanya. Terdapat suatu metode yang disebut dengan metode cincin. Metode ini digunakan ketika benda yang terbentuk seperti metode sebelumnya yaitu cakram, tetapi ditengahnya terdapat suatu lubang. Sehingga jika dilihat akan membentuk seperti cincin, oleh karena itu disebut dengan metode cincin. Untuk lebih jelasnya perhatikan

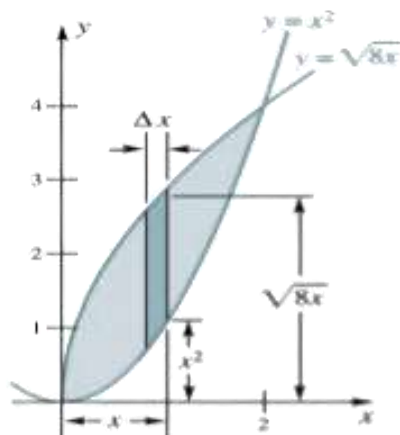


Untuk mencari volume benda seperti pada gambar diatas kita dapat menggunakan rumus:

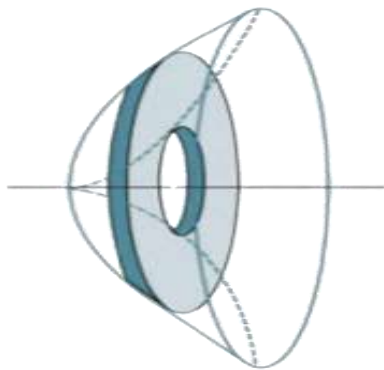
$$\begin{aligned}
 V &= A.h \\
 &= \pi(r_2^2 - r_1^2)h
 \end{aligned}$$

Jika suatu benda berbentuk cincin dan diputar mengelilingi sumbu x , dengan batas kurva yaitu

$y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ tentukan volumenya. Coba perhatikan ilustrasi dibawah ini.



Pada gambar diatas menunjukkan ilustrasi jika terdapat dua kurva yang dibentuk, ketika diputar mengelilingi sumbu x akan membentuk suatu benda putar seperti gambar dibawah berikut ini.



Untuk menghitung volume maka kita perlu menggunakan aproksimasi bentuk cincin dengan volume sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx \pi(r_2^2 - r_1^2)\Delta x \\ &\approx \pi((\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2)\Delta x \\ &\approx \pi(8x - x^4)\Delta x\end{aligned}$$

Sebelum menghitung volume benda putar, maka kita perlu mengetahui batas integral tentunya. Langkah pertama kita harus tau dimana perpotongan antar kedua kurva tersebut sebagai berikut.

$$\begin{aligned}y &= y \\ \sqrt{8x} &= x^2 \\ 8x &= x^4 \\ x(x^3 - 8) &= 0 \\ x = 0 \text{ dan } x &= 2\end{aligned}$$

Setelah kita mengetahui batasnya dengan menggunakan titik potong, selanjutnya dapat digunakan untuk menghitung volume benda putar sebagai berikut.

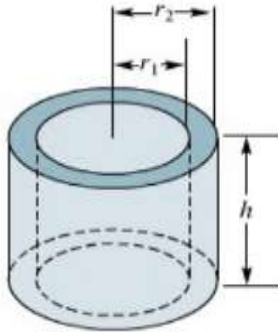
$$\begin{aligned}V &= \int_a^b V(x)dx \\ &= \int_0^2 \pi(8x - x^4)dx \\ &= \pi \int_0^2 (8x - x^4)dx \\ &= \pi \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 \\ &= \frac{48}{5} \pi\end{aligned}$$

Jadi volume benda yang dibatasi dengan dua kurva yaitu $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ dan diputar mengelilingi sumbu x , maka besar volumenya adalah $\frac{48}{5} \pi$.

7.5 Metode Kulit Tabung

Selain beberapa metode yang telah disebutkan diatas, ternyata terdapat satu metode lagi yaitu yang disebut metode kulit tabung. Jika dilihat, maka akan lebih mirip dengan metode cincin, tetapi pada metode kulit tabung akan cenderung lebih

tinggi bentuknya dan mirip-mirip seperti tabung karena sumbu simetrinya berimpit. Untuk lebih jelasnya, maka perhatikan gambar dibawah ini.



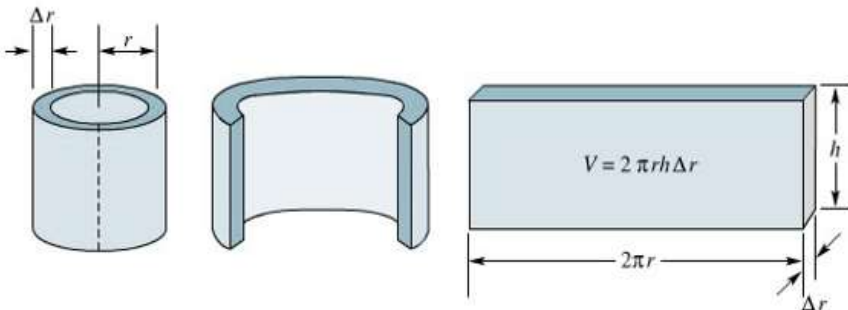
Dari ilustrasi gambar diatas dapat diketahui jika jari-jari tabung dalam didefinisikan sebagai r_1 dan jari-jari tabung luar di definisikan sebagai r_2 dan tinggi dari tabung adalah h , maka volume kulit tabung secara sederhana dapat dicari menggunakan rumus berikut.

$$\begin{aligned} V &= A.h \\ &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)h \\ &= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

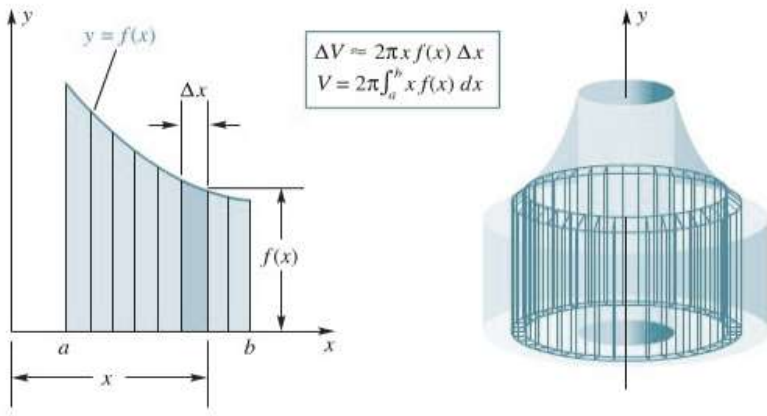
Sehingga akan diperoleh hubungan:

$$V = 2\pi rh\Delta r$$

Dimana r adalah rata-rata dari jari-jari, dan Δr adalah ketebalan dari kulit tabung. Untuk lebih jelasnya maka perhatikan gambar dibawah ini.



Perhatikan bahwa ketika kulit tabung dipotong sepanjang garis yang sejajar sumbu simetri dan kemudian membukanya, maka akan diperoleh selembar persegi-panjang yang memiliki ketebalan. Sehingga volume benda yang berbentuk lempeng ini dapat kita hitung dengan mudah. Untuk lebih jelasnya maka perhatikan contoh kasus dibawah ini.



Misalkan terdapat sebuah daerah yang dibatasi dengan kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sumbu x dengan garis $x=1$ dan $x=4$ dan diputar mengelilingi sumbu y . maka volume yang terbentuk yaitu pertama dengan cara membuat potongan-potongan terlebih dahulu dengan aproksimasi sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx 2\pi x f(x) \Delta x \\ &\approx 2\pi x \frac{1}{\sqrt{x}} \Delta x\end{aligned}$$

Untuk mencari volume benda putar dengan batas $x=1$ sampai dengan $x=4$, maka dapat dicari menggunakan rumus integral berikut.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_a^b \Delta V dx \\
 &= \int_1^4 2\pi x \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= 2\pi \int_1^4 x^{1/2} dx \\
 V &= 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^4 \\
 &= 2\pi \left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3} \right) \\
 &= \frac{28}{3} \pi
 \end{aligned}$$

Jadi volume benda yang dibatasi dengan kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sumbu x dengan garis $x=1$ dan $x=4$ dan diputar mengelilingi sumbu y adalah sebesar $\frac{28}{3} \pi$.

DAFTAR PUSTAKA

- Edwin J, P., Dale, V. and Steven E, R. 2011. *Kalkulus*. 9th edn. Jakarta: Erlangga.
- Jed Herman, E. and Strang, G. 2016. *Calculus Volume 2*. Houston, Texas: Openstax.
- Jungic, V. and Mulholland, J. 2023. *Calculus II*. Canada: Department. of Mathematics, SFU.

BAB 8

LUAS PERMUKAAN PUTAR

Oleh Karyadi, S.T., M.T.

8.1 Pendahuluan

Luas permukaan benda putar adalah ukuran dari total area permukaan benda tiga dimensi yang dibentuk saat benda tersebut berputar sekitar sumbu tertentu (F. M. Dewadi, 2021e). Benda putar ini sering kali merupakan benda tiga dimensi seperti bola, silinder, kerucut, atau bentuk lainnya yang mengalami rotasi (Khoirudin et al., 2021a). Luas permukaan benda putar dapat dihitung sesuai dengan bentuk dan properti benda tersebut (Nanda, Dewadi, et al., 2023). Luas permukaan bola adalah $4\pi r^2$, di mana r adalah jari-jari bola (F. M. Dewadi, Kristiana, et al., 2023). Untuk luas permukaan silinder tertutup yaitu $2\pi r.(r + h)$, di mana r adalah jari-jari lingkaran dasar silinder dan h adalah tinggi silinder (F. Dewadi et al., 2023). Untuk luas permukaan silinder terbuka yaitu $2\pi r.(r + h) + 2\pi r^2$, di mana r adalah jari-jari lingkaran dasar silinder dan h adalah tinggi silinder (Dahri et al., 2023).

Luas permukaan kerucut adalah $\pi r(r + l)$, di mana r adalah jari-jari lingkaran dasar kerucut dan l adalah garis pelukis atau sisi miring kerucut (F. M. Dewadi, Milasari, et al., 2023). Untuk benda-benda dengan bentuk yang lebih kompleks, luas permukaan dapat dihitung dengan berbagai metode matematis seperti integral, tetapi ini lebih rumit dan memerlukan pengetahuan matematika yang lebih mendalam (F. M. Dewadi, Wibowo, et al., 2023).

Penting untuk memahami unit pengukuran yang digunakan dalam rumus-rumus tersebut (Santosa et al., 2022). Misalnya, jika jari-jari dinyatakan dalam satuan meter, maka luas permukaan juga akan dalam satuan meter persegi (F. M. Dewadi, n.d.).

Luas permukaan hemisfer adalah $2\pi r^2$, di mana r adalah jari-jari lingkaran dasar hemisfer (Nanda, Supriyanto, et al., 2023). Luas permukaan kapsul adalah $2\pi r^2 + \pi rh$, di mana r adalah jari-jari bola dalam kapsul dan h adalah tinggi silinder dalam kapsul (F. M. Dewadi, Nanda, et al., 2023).

Luas permukaan kerucut terpotong adalah $\pi r^2 + \pi(R + r)l$, di mana r adalah jari-jari lingkaran dasar yang lebih kecil, R adalah jari-jari lingkaran dasar yang lebih besar, dan l adalah garis pelukis (Mubina & Amir, 2022). Luas permukaan tabung adalah $4\pi^2 Rr$ di mana R adalah jari-jari lingkaran bagian luar dan r adalah jari-jari lingkaran bagian dalam tabung (Nanda, Karyadi, et al., 2023). Penting untuk memahami bentuk benda dan menyesuaikan rumus dengan parameter yang sesuai seperti jari-jari, tinggi, garis pelukis, dan sebagainya (F. M. Dewadi, 2021d). Pastikan juga untuk menggunakan unit pengukuran yang konsisten saat menghitung luas permukaan benda putar sesuai kebutuhan (Kusmiwardhana et al., 2023).

Misalnya $y = f(x)$, yang akan diputar sekitar sumbu x atau y (F. M. Dewadi, 2023b). Luas permukaan benda putar dalam hal ini dapat dihitung dengan menggunakan integral tentu (Nanda & Dewadi, 2023). Terdapat dua rumus yang umum digunakan yaitu rumus luas permukaan pemutar horizontal dan rumus luas permukaan pemutar vertikal (F. M. Dewadi et al., 2022).

Luas permukaan pemutar horizontal (sekitar sumbu x)
 $= \int[a, b] 2\pi y * \sqrt{(1 + (f'(x))^2)} dx$ (Muhammad et al., n.d.). Luas permukaan pemutar vertikal (sekitar sumbu y) $= \int[c, d] 2\pi x * \sqrt{(1 + (f'(y))^2)} dy$ (F. M. Dewadi, 2021c).

8.2 Silinder Terpotong

Silinder terpotong adalah benda tiga dimensi yang merupakan sebagian dari silinder yang lebih besar (F. M. Dewadi, Bachtiar, et al., 2023). Benda ini memiliki dua bidang lingkaran sebagai dasar yang sejajar dan dipisahkan oleh suatu sisi lengkung (Wibowo & Dewadi, 2022).

Silinder Terpotong Datar (*Truncated Cylinder*) adalah silinder terpotong yang dibatasi oleh dua lingkaran dengan radius yang berbeda dan satu sisi lengkung yang datar (F. M. Dewadi, 2021b). Dalam hal ini, luas permukaan silinder terpotong datar dapat dihitung dengan rumus luas Permukaan = Luas Permukaan Lingkaran Besar - Luas Permukaan Lingkaran Kecil + Luas Sisi Lengkung (Ma'arof et al., n.d.).

Silinder Terpotong Lengkung (*Frustrum of a Cone*) adalah silinder terpotong yang dibatasi oleh dua lingkaran dengan radius yang berbeda dan satu sisi lengkung yang melengkung (F. M. Dewadi, 2023a). Dalam hal ini, luas permukaan silinder terpotong lengkung dapat dihitung dengan rumus yang sedikit lebih kompleks yaitu luas permukaan = $\pi(R + r) * \sqrt{(R^2 + r^2)} + \pi R^2 + \pi r^2$ (Suhendra et al., 2021). R adalah radius lingkaran besar, r adalah radius lingkaran kecil, dan $\sqrt{(R^2 + r^2)}$ adalah garis pelukis sisi lengkung (Nanda, Karyadi, et al., 2022).

Untuk menghitung luas permukaan silinder terpotong dalam kasus umum, perlu memahami properti dasar bentuknya, seperti jari-jari lingkaran dasar besar (R), jari-jari lingkaran dasar kecil (r), dan garis pelukis sisi lengkung (Wibowo, Dewadi, et al., 2021).

8.3 Perbandingan Luas Permukaan

Perbandingan luas permukaan benda putar dapat bervariasi tergantung pada bentuk benda dan parameter yang digunakan dalam perhitungan (Dimiyati et al., 2021). Luas permukaan silinder dengan tinggi (h) dan jari-jari (r) adalah: $2\pi r(r + h)$ (Abbas et al., 2021).

Luas permukaan kerucut dengan tinggi (h) dan jari-jari dasar (r) adalah $\pi r(r + l)$, di mana l adalah garis pelukis (Wibowo, Setiawan, et al., 2021). Perbandingan luas permukaan kerucut selalu lebih kecil daripada luas permukaan silinder dengan jari-jari dan tinggi yang sama (F. M. Dewadi et al., 2019).

Luas permukaan silinder dengan tinggi (h) dan jari-jari (r) adalah: $2\pi r(r + h)$ (Lulut Alfaris et al., 2022). Luas permukaan hemisfer dengan jari-jari (r) adalah $2\pi r^2$ (Della et al., 2022). Perbandingan luas permukaan silinder lebih besar

daripada luas permukaan hemisfer dengan jari-jari yang sama (Jakariya et al., 2023).

Luas permukaan silinder dengan tinggi (h) dan jari-jari (r) adalah $2\pi r(r + h)$ (Nanda & Dewadi, 2022). Luas permukaan kapsul dengan jari-jari bola dalam (r) dan tinggi silinder dalam (h) adalah $2\pi r^2 + \pi rh$ (F. M. Dewadi & Sigalingging, 2021). Perbandingan luas permukaan kapsul biasanya lebih kecil daripada luas permukaan silinder dengan jari-jari yang sama (F. M. Dewadi, 2023c).

Luas permukaan bola dengan jari-jari (r) adalah: $4\pi r^2$ (Fathan et al., 2022). Luas permukaan silinder dengan tinggi (h) dan jari-jari (r) adalah $2\pi r(r + h)$ (Suhara, Dewadi, & Hamdani, 2023). Perbandingan luas permukaan bola selalu lebih besar daripada luas permukaan silinder dengan jari-jari yang sama (F. M. Dewadi & Supriyanto, 2021).

8.4 Soal-Soal Latihan

1. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = x^2$ dari $x = 0$ hingga $x = 2$ sekitar sumbu x (F. M. Dewadi, Sriwahyuni, et al., 2023)!
2. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = \sqrt{x}$ dari $x = 1$ hingga $x = 4$ sekitar sumbu x (Alfianto et al., 2023)!
3. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = e^x$ dari $x = 0$ hingga $x = 1$ sekitar sumbu x (Murtalim et al., 2020)!
4. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = \sin(x)$ dari $x = 0$ hingga $x = \pi$ sekitar sumbu x (Farahdiansari et al., 2021)!
5. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = \ln(x)$ dari $x = 1$ hingga $x = 2$ sekitar sumbu x (Mulyadi & Dewadi, 2021)!
6. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = x^3$ dari $x = 0$ hingga $x = 1$ sekitar sumbu y (Khoirudin et al., 2021b)!
7. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar

kurva $y = 1/x$ dari $x = 1$ hingga $x = 2$ sekitar sumbu x (Nanda, Supriyono, et al., 2022)!

8. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = \sqrt{x}$ dari $x = 0$ hingga $x = 4$ sekitar sumbu (Suhara, Dewadi, & Febrian, 2023)!
9. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = \ln(x)$ dari $x = 1$ hingga $x = 3$ sekitar sumbu y (F. M. Dewadi, 2021a)!
10. Hitunglah luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = x^2$ dari $x = 0$ hingga $x = 3$ sekitar sumbu y (Khoirudin et al., 2021c)!

DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, A., Prayitno, P., Nurkim, N., Prumanto, D., Dewadi, F. M., Hidayati, N., & Windarto, A. P. 2021. Implementation of clustering unsupervised learning using K-Means mapping techniques. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1088(1), 012004.
- Alfianto, E., Nurmalasari, N. P. Y., Sa'diyah, A., Fatkhulloh, A., Anwar, B., & Wibowo, C. 2023. *KONSEP PESAWAT TERBANG*. Get Press Indonesia.
- Dahri, A. T., Sa'diyah, A., Nurherdiana, S. D., Wibowo, R., Winardi, B., Satriawan, D., Dewadi, F. M., Santoso, H., & Novita, Y. 2023. *Konversi Energi Dan Sistem Pembangkit*. Global Eksekutif Teknologi.
- Della, R. H., Nugroho, B. S., Agustawan, A., Simarmata, N., Fitriyani, E., Dewadi, F. M., Musfirah, M., & Sitorus, E. 2022. *Kesehatan dan Keselamatan Kerja Era Society 5.0*.
- Dewadi, F., Kusmiwardhana, D., Hakim, F., & Tsabitha, N. 2023. Optimasi Rangka Electric Bike dengan Menitikberatkan Nilai Keamanan pada Tiap Titik Beban dengan Aplikasi Inventor. *Jurnal Mekanik Terapan*, 4(2), 103–107.
- Dewadi, F. M. (n.d.). *PERAN KARANG TARUNA DALAM PENGEMBANGAN SDM DI ERA MILENIAL*.
- Dewadi, F. M. (2021a). Analisis Efektivitas Liquid Section Heat Exchanger dengan Tube in Tube Heat Exchanger dari Sisi Aplikatif. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 2(1), 28–36.
- Dewadi, F. M. 2021b. Efisiensi Pada Sepeda Listrik Dengan Dinamo Sepeda Sebagai Generator. *Praxis: Jurnal Sains, Teknologi, Masyarakat Dan Jejaring*, 4(1), 13–23.
- Dewadi, F. M. 2021c. Implementasi Inovasi Pendidikan SDM dalam Karang Taruna Lintas Generasi Era Milenial. *Jurnal Informatika Dan Teknologi Pendidikan*, 1(1), 47–54.
- Dewadi, F. M. 2021d. Pengaruh Analisis Manajemen Stres Kinerja Perusahaan terhadap Pencapaian Kinerja Karyawan Optimal berdasarkan Pengalaman Pemuda Kreatif Kavling Rawa Bunga, Tangerang Selatan. *Bukit*

Tinggi, IAIN Bukit Tinggi.

- Dewadi, F. M. (2021e). Pengembangan Sistem Homeschooling Dalam Inovasi Pendidikan Di Era Revolusi Industri 5.0. *Jurnal Informatika Dan Teknologi Pendidikan*, 1(1), 1–8.
- Dewadi, F. M. (2023a). BAB 3 GEJALA KERADIOAKTIFAN UNSUR-UNSUR TIDAK STABIL. *Kimia Dasar II*, 47.
- Dewadi, F. M. (2023b). PELATIHAN MASYARAKAT DESA KEDUNG JERUK DALAM PEMILIHAN JENIS MATERIAL KAYU DAN PEMBUATAN MEDEL RUMAH TANGGA UNTUK MENINGKATKAN UMKM DESA. *PROSIDING KONFERENSI NASIONAL PENELITIAN DAN PENGABDIAN UNIVERSITAS BUANA PERJUANGAN KARAWANG*, 3(1), 1429–1438.
- Dewadi, F. M. (2023c). PENGARUH PEMANASAN BBM CAMPURAN DENGAN PARAMETER PEMANASAN SUHU TERHADAP DENSITAS BAHAN BAKAR. *PROSIDING KONFERENSI NASIONAL PENELITIAN DAN PENGABDIAN UNIVERSITAS BUANA PERJUANGAN KARAWANG*, 3(1), 105–113.
- Dewadi, F. M., Bachtiar, E., Alyah, R., Satriawan, D., Annisa, F., Pasaribu, J. S., Randjawali, E., Afrida, J., & Rochyani, N. (2023). *Fisika Dasar I (Mekanika Dan Panas)*. Global Eksekutif Teknologi.
- Dewadi, F. M., Dahlan, D., & Maulana, E. (2019). *JOJAPS*.
- Dewadi, F. M., Kiswanto, L. Y., & Ghifary, A. M. (2022). KKN dengan Mode Hybrid di Wilayah Kavling Rawa Bunga, Tangerang Selatan. *Journal of Entrepreneurship and Community Innovations (JECI)*, 1(1), 1–8.
- Dewadi, F. M., Kristiana, R., La Ola, M. N., Setiawan, A. M., Rachim, F., Widiati, I. R., Yasin, A., Masgode, M. B., & Hamdi, F. (2023). *STATIKA TEKNIK*. Get Press Indonesia.
- Dewadi, F. M., Milasari, L. A., Hermila, A., Wibowo, C., Suprayitno, A., Alfaris, L., Saputra, A. A., & Gobel, F. F. (2023). *DESAIN PENELITIAN BIDANG TEKNIK*. Get Press Indonesia.
- Dewadi, F. M., Nanda, R. A., & Wibowo, C. (2023). Understanding of Machinery Technology in Understanding Renewable Energy Towards Indonesia Go Green. *International*

- Conference on Elementary Education*, 5(1), 206–210.
- Dewadi, F. M., & Sigalingging, W. S. (2021). PENGARUH PARAMETER TEMPERATUR QUENCHING TERHADAP SIFAT MEKANIK DAN STRUKTUR MIKRO REAR HUB SPINDLES. *Buana Ilmu*, 5(2), 101–118.
- Dewadi, F. M., Sriwahyuni, E., Edahwati, L., Komara, I., Mulyadi, D., Fajri, H., Sukardin, M. S., & Wibowo, L. A. (2023). *STATIKA STRUKTUR*. Get Press Indonesia.
- Dewadi, F. M., & Supriyanto, A. (2021). PENGARUH PENAHANAN SUHU REAKTOR PADA PENGUJIAN LDPE DENGAN DEBIT AIR 46 L/MIN. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 2(1), 19–27.
- Dewadi, F. M., Wibowo, C., Mulyadi, D., Dahlan, M., & Nanda, R. A. (2023). *PROSES PRODUKSI MANUFAKTUR*. Get Press Indonesia.
- Dimiyati, D., Ashiedieque, A. D., Sukarman, S., Dewadi, F. M., Rahdiana, N., Rahardja, I. B., Ramadhan, A. I., & Suropto, H. (2021). Evaluasi Kekuatan Resistance Spot Welding Pada Proses Tailor Welded Blankss Menggunakan Mill-Steel Beda Ketebalan. *Borobudur Engineering Review*, 1(2), 96–105.
- Farahdiansari, A. P., Dewadi, F. M., & Rahdiana, N. (2021). Analisis Unjuk Kerja BBM dengan Eco-Racing sebagai Campuran BBM yang Ekonomis. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 2(1), 1–5.
- Fathan, F. M. D., Jati, R. R., & Sofiyanti, B. (2022). Pengenalan Material Yang Digunakan Dalam Proses Pengelasan Berdasarkan Spesifikasi Material. *Empowerment: Jurnal Pengabdian Masyarakat*, 1(3), 300–305.
- Jakariya, J., Setiawan, D., & Dewadi, F. (2023). Pemakaian Peralatan K3 (Keselamatan Kesehatan Kerja) agar Tidak Terjadinya Kecelakaan Kerja. *Jurnal Pengabdian Masyarakat Indonesia*, 3(2).
- Khoirudin, K., Sukarman, S., Murtalim, M., Dewadi, F. M., Rahdiana, N., Rais, A., Abdulah, A., Anwar, C., & Abbas, A. (2021a). A report on metal forming technology transfer from expert to industry for improving production

- efficiency. *Mechanical Engineering for Society and Industry*, 1(2), 96–103.
- Khoirudin, K., Sukarman, S., Murtalim, M., Dewadi, F. M., Rahdiana, N., Rais, A., Abdulah, A., Anwar, C., & Abbas, A. (2021b). A report on metal forming technology transfer from expert to industry for improving production efficiency. *Mechanical Engineering for Society and Industry*, 1(2), 96–103.
- Khoirudin, Sukarman, Murtalim, Dewadi, F. M., Rahdiana, N., Rais, A., Abdulah, A., Anwar, C., & Abbas, A. (2021c). A Report on Metal Forming Technology Transfer from Expert to Industry for Improving Production Efficiency. *Mechanical Engineering for Society and Industry*, 1(2). <https://doi.org/10.31603/mesi.5613>
- Kusmiwardhana, D., Dewadi, F. M., Soeprapto, A. C., Abdur, Y. A., & Bramantyo, R. (2023). Pemanfaatan membuat Civitas Akademika Politeknik Negeri Jakarta PSDKU Pekalongan Prodi Manufaktur di Museum Batik Pekalongan. *Jurnal Pengabdian Masyarakat Mandiri (JPMM)*, 1(02), 94–101.
- Lulut Alfaris, S. T., Dewadi, F. M., Abdul Munim, S. E., Taba, H. T., Khasanah, S. P., Kom, M., Maing, C. M. M., PFis, M., Susano, A., & Kom, S. (2022). *MATRIKS DAN RUANG VEKTOR*. Cendikia Mulia Mandiri.
- Ma'arof, R. A. R., Saputra, O. A., Dewadi, F. M., & Noor, A. (n.d.). *Engaging Students: Blending Class Activities with Industry-linked Teaching Approach in Occupational Safety and Health Course Delivery*.
- Mubina, F., & Amir, A. (2022). Perancangan Mesin Roll Plat Listrik sebagai Peningkatan Efisiensi Kerja di Industri Manufaktur. *Jurnal Mekanik Terapan*, 3(1), 18–25.
- Muhammad, A. C., Santoso, H., Purnama, Y. A., Parenden, D., Dewadi, F. M., Dewi, R. P., Winardi, B., & Lillahulhaq, Z. (n.d.). *KONVERSI ENERGI*.
- Mulyadi, D., & Dewadi, F. M. (2021). ANALISIS RANCANGAN SEL SURYA UNTUK KEBUTUHAN CADANGAN ENERGI LISTRIK DI KOLAM WILAYAH GRAHA RAYA BINTARO, TANGERANG SELATAN. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical*

Xplore, 2(1), 6–12.

- Murtalim, M., Dewadi, F. M., & Sunandar, S. (2020). ANALISIS UNJUK KERJA ECO RACING SEBAGAI SUPLEMEN PENGHEMAT BAHAN BAKAR. *Conference on Innovation and Application of Science and Technology (CIASTECH)*, 3(1), 335–340.
- Nanda, R. A., & Dewadi, F. M. (2022). Pemanfaatan Aquaponic di Wilayah Kavling Rawa Bunga, Tangerang Selatan. *Journal of Entrepreneurship and Community Innovations (JECI)*, 1(1), 16–21.
- Nanda, R. A., & Dewadi, F. M. (2023). PELATIHAN MASYARAKAT DESA KEDUNG JERUK DALAM PEMILIHAN JENIS MATERIAL KAYU DAN PEMBUATAN MEDEL RUMAH TANGGA UNTUK MENINGKATKAN UMKM DESA. *JURNAL BUANA PENGABDIAN*, 5(1), 55–64.
- Nanda, R. A., Dewadi, F. M., Nugroho, A. A., & Ramadhan, G. A. (2023). Pelatihan Pembacaan Gambar Teknik Dalam Proses Pengelasan Bagi Pemuda Desa Tegal Sawah. *Journal of Entrepreneurship and Community Innovations (JECI)*, 2(1), 17–25.
- Nanda, R. A., Karyadi, K., Dewadi, F. M., Amir, A., & Rizkiyanto, M. (2022). Archimedes' Principle Applied to Buoy Design for Measuring Purposes in Offshore Illumination Conditions. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 3(1), 40–48.
- Nanda, R. A., Karyadi, K., Dewadi, F. M., & Rizki, M. N. (2023). Perancangan dan Pembuatan JIG FOG Lamp Mobil Dengan Material Aluminium. *Jurnal Mekanik Terapan*, 4(1), 9–14.
- Nanda, R. A., Supriyanto, A., & Dewadi, F. M. (2023). Using the MPX5500DP Sensor for Monitoring Microcontroller-Based HVAC Systems and IOT. *REM (Rekayasa Energi Manufaktur) Jurnal*, 8(1), 1–8.
- Nanda, R. A., Supriyono, T., Ma'arof, R. A. R., & Dewadi, F. M. (2022). Analisis Chassis Mobil Robot Penanaman Bibit Kangkung Menggunakan Metode Elemen Hingga. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 2(2), 1–8.

- Santosa, I., Firdaus, A., Hidayat, R., Rusnoto, R., Wibowo, A., & Dewadi, F. M. (2022). The Optimization of Vapor Compression Type for Desalination of Seawater Using the DFMA Method. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 3(1), 1–8.
- Suhara, A., Dewadi, F. M., & Febrian, R. (2023). ANALISAPENGARUHPELUMASTERHADAPGESEKAN MENGGUNAKANMETODETINKEN LOAD. *PROSIDING KONFERENSI NASIONAL PENELITIAN DAN PENGABDIAN UNIVERSITAS BUANA PERJUANGAN KARAWANG*, 3(1), 14–24.
- Suhara, A., Dewadi, F. M., & Hamdani, M. H. (2023). PENGARUH TEMPERATUR SUHU PADA PENGASAPAN TELUR BEBEK DI DESA KARYA BAKTI KECAMATAN BATUJAYA KABUPATEN KARAWANG. *PROSIDING KONFERENSI NASIONAL PENELITIAN DAN PENGABDIAN UNIVERSITAS BUANA PERJUANGAN KARAWANG*, 3(1), 2511–2519.
- Suhendra, S., Aisyah, S., & Dewadi, F. M. (2021). APPLICATION OF AUGMENTED REALITY TECHNOLOGY IN THE ANIMATION OF THE KANCIL CHILDREN'S STORYBOOK. *Jurnal Riset Informatika*, 4(1), 45–50.
- Wibowo, C., & Dewadi, F. M. (2022). DESIGN PRESSURE REDUCTION SYSTEM (PRS) UNTUK COMPRESSED NATURAL GAS (CNG) KAPASITAS 30 NM³/H DALAM SISI TEKNIS DAN EKONOMIS. *TEKINFO*, 2(2 Juni), 60–65.
- Wibowo, C., Dewadi, F. M., & Al-Afgani, A. (2021). Implementasi Material Titanium Pada Sepeda Listrik Sebagai Rangka Yang Efisien. *Jurnal Teknik Mesin Mechanical Xplore*, 2(1), 13–18.
- Wibowo, C., Setiawan, D., & Dewadi, F. M. (2021). IMPROVEMENT OF DRAINAGE AS ONE OF THE SOLUTIONS FOR FLOOD CONTROL IN RT 12 RW 06 CAKUNG PENGKILINGAN EAST JAKARTA. *International Journal of Engagement and Empowerment*, 1(3), 174–183.

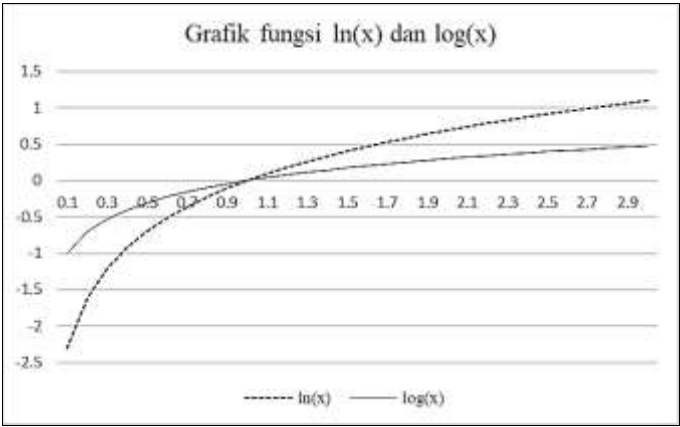
BAB 9

FUNGSI LOGARITMA ASLI

Oleh Novrianti

9.1 Pendahuluan

Fungsi logaritma adalah kebalikan dari fungsi eksponensial. Seperti halnya dengan fungsi eksponensial yang memiliki berbagai bilangan pokok (basis), logaritma memiliki berbagai jenis basis pula. Salah satunya adalah bilangan Euler. jika logaritma memiliki basis bilangan Euler ($e = 2,7182818...$) maka logaritma tersebut disebut sebagai suatu logaritm asli (natural) [RapidTables, 2023]. yang banyak diterapkan guna mendapatkan turunan dari perkalian, pembagian, ataupun perpangkatan fungsi – fungsi.



Gambar 9.1. Perbedaan grafik fungsi $\ln(x)$ dan $\log(x)$

9.2 Logaritma Asli

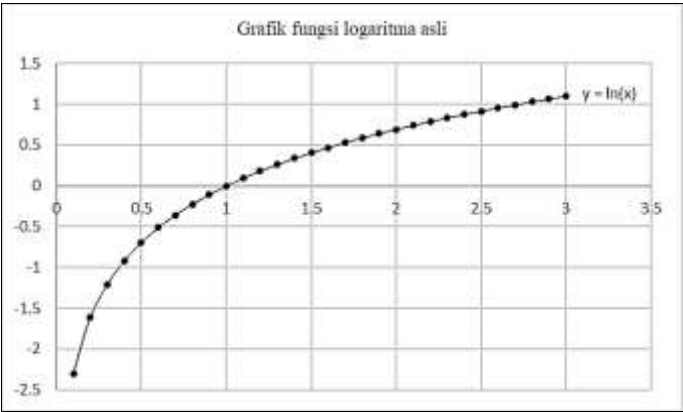
Suatu bentuk logaritma $f(x) = \log_a x$ dikatakan sebagai suatu fungsi logaritma, dengan a disebut sebagai basis dari logaritma, dan x disebut dengan numerus dari logaritma tersebut. Pada umumnya fungsi logaritma memiliki basis 10.

Dan secara umum, suatu fungsi logaritma yang berbasis 10 dapat dituliskan dengan $\log x$ saja, tanpa menuliskan basisnya. Hal ini berarti $\log_{10} b = \log b$.

Akan tetapi, Jika basis dari suatu bentuk logaritma diganti dengan bilangan Euler (e), maka fungsi logaritma akan dikatakan sebagai suatu fungsi khusus, yaitu fungsi logaritma asli atau logaritma natural yang dituliskan dengan $\log_e x = \ln x$. Suatu fungsi logaritma natural didefinisikan sebagai [Guichard, 2023]

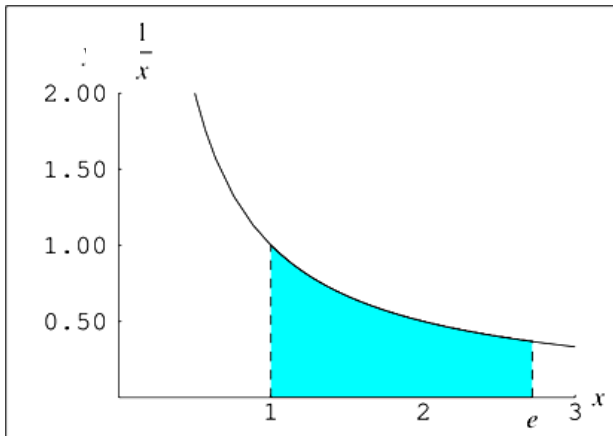
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt ; x > 0. \dots (1)$$

Untuk suatu $x \in (0,3)$, representasi grafis dari $f(x) = \ln(x)$ dapat dilihat pada Gambar 9.2.



Gambar 9.2. Grafik fungsi $\ln(x)$ untuk $x \in (0, 3)$.

Akan tetapi, secara grafis ruas kanan dari persamaan (1) untuk suatu $x = e$, maka $\ln(x)$ akan bernilai 1. Hal ini dikarenakan hasil integrasi sisi kanan dari persamaan (1) memberikan nilai $\ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$ [Weisstein, 2023].



Gambar 9.3. Representasi grafis persamaan (1) untuk $x = e$.

9.2.1 Sifat – sifat logaritma asli

Sifat – sifat yang berlaku pada logaritma asli pada umumnya adalah sama dengan sifat yang berlaku pada logaritma, yakni (Britannica, 2023):

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln(e) = 1$.
3. $\ln x^a = a \ln x$.
4. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
5. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.
6. $e^{\ln(x)} = x$.
7. $x^{\ln(y)} = y^{\ln(x)}$.

Sifat dari logaritma asli di atas merupakan gabungan dari fundamental teori dan sifat – sifat yang diperoleh dari turunan teori – teori dasar kalkulus lainnya, dengan rincian pembuktiannya dijabarkan di bawah ini.

1. **$\ln 1 = 0$** (teori fundamental).
2. **$\ln(e) = 1$.**

Bukti: $\ln(e) = \log_e e = 1$. ■

3. **$\ln x^a = a \ln x$.**

Bukti:

$$\ln x^a \Rightarrow \frac{d(\ln x^a)}{dx} = \frac{1}{x^a} \cdot a \cdot x^{a-1} = \frac{a}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(\ln x^a)}{dx} dx = \int \frac{a}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \ln x^a = a \ln(x). \quad \blacksquare$$

4. $\ln(xy) = \ln x + \ln y.$

Bukti:

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt$$

Pada pengintegralan suku kedua, akan diselesaikan dengan menggunakan substitusi integrasi.

Misalkan $u = \frac{t}{x} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = x du$. Demikian pula batas atas dan bawah pengintegralan, tentu juga akan berubah mengikuti pengasumsian $u = \frac{t}{x}$.

Batas bawah: $t = x \Rightarrow u = 1$.

Batas atas : $t = xy \Rightarrow u = y$

Sehingga

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^x + \int_1^y \frac{1}{ux} x du$$

$$\Leftrightarrow \ln t \Big|_1^x + \int_1^y \frac{1}{u} du$$

$$\Leftrightarrow (\ln x - \ln 1) + \ln u \Big|_1^y$$

$$\Leftrightarrow (\ln x - 0) + (\ln y - \ln 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln x + (\ln y - 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \ln y. \quad \blacksquare$$

5. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$

Bukti:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(xy^{-1})$$

Dengan menggunakan sifat 4 dan 3, maka

$$\ln(xy^{-1}) = \ln x + \ln y^{-1} = \ln x + (-1) \ln y = \ln x - \ln y. \quad \blacksquare$$

6. $e^{\ln(x)} = x.$

Bukti:

$$\begin{aligned}
 e^{\ln(x)} &= p \Leftrightarrow \log(e^{\log_e x}) = \log p \\
 &\Leftrightarrow \log_e x \cdot \log e = \log p \\
 &\Leftrightarrow \log e \cdot \log_e x = \log p \\
 &\Leftrightarrow \log x = \log p \Leftrightarrow x = p. \blacksquare
 \end{aligned}$$

7. $x^{\ln y} = y^{\ln x}$.

Bukti:

$$x^{\ln y} = p \Leftrightarrow \ln x^{\ln(y)} = \ln p$$

Dengan menggunakan sifat 3, maka

$$\Leftrightarrow \ln(y) \cdot \ln x = \ln p$$

$$\Leftrightarrow \ln x \cdot \ln(y) = \ln p$$

$$\Leftrightarrow \ln y^{\ln x} = \ln p \Leftrightarrow y^{\ln x} = p. \blacksquare$$

VPerhatikan contoh – contoh dalam penggunaan sifat logaritma asli di bawah ini:

1. Tentukan nilai dari $2 + \ln(e^3)$.

Penyelesaian:

a. Dengan menggunakan sifat no 3, maka $\ln(e^3)$ dapat dituliskan menjadi $\rightarrow 3 \cdot \ln(e)$.

b. Dengan menggunakan sifat no 2, maka $\rightarrow 3 \cdot \ln(e) = 3 \cdot 1 = 3$.

Maka, nilai dari $2 + \ln(e^3) = 2 + 3 = 5$.

2. Tentukan nilai x pada persamaan $11e^{0.5x} = 33$, jika diketahui $\ln 3 = 1.0986$.

Penyelesaian:

a. Kalikan kedua ruas persoalan dengan $\frac{1}{11}$, sehingga diperoleh $\rightarrow e^{0.5x} = 3$.

b. Selanjutnya, tarik nilai $\ln$ dikedua ruas persamaan sehingga menjadi $\rightarrow \ln e^{0.5x} = \ln 3$.

c. Dengan menggunakan sifat no 3, maka akan menjadi suatu persamaan berikut $\rightarrow 0.5 x \ln e = \ln 3$.

d. Selanjutnya gunakan sifat no 2, dan juga gunakan informasi pada soal, yakni $\ln 3 = 1.0986$, sehingga diperoleh $\rightarrow 0.5 x \ln e = \ln 3 \Rightarrow 0.5 x (1) = 1.0986$.

e. Maka nilai $x = 2.1972$.

[Britannica Encyclopaedia, 2023].

9.2.2 Turunan dari fungsi logaritma asli

Perhatikan persamaan (1) dengan cara saksama, terlihat bahwasanya fungsi logaritma adalah integral dari fungsi $\frac{1}{x}$. Oleh karena itu, dengan memanfaatkan informasi ini, kita dapat menurunkan suatu fungsi logaritma asli sebagai berikut:

$$\ln x = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{d\left(\int \frac{1}{x} dx\right)}{dx} = \frac{1}{x} \dots (2)$$

Untuk proses lebih lanjut, maka untuk dapat menentukan rumusan turunan dari fungsi logaritma asli, adalah sama dengan konsep turunan pada umumnya. Akan tetapi dalam hal ini, aturan turunan yang akan sering dipakai adalah aturan rantai (*chain rule*).

Perhatikan contoh – contoh penurunan fungsi logaritma asli di bawah ini dengan cermat!

1. Carilah turunan dari $\ln(x^2)$.

Penyelesaian:

a. Misalkan $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$.

b. Misalkan $y = \ln(u) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{d(\ln(u))}{du} = \frac{1}{u}$.

- c. Maka, jika $y = f(x) = \ln(x^2)$, turunan dari y dituliskan menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

2. Dapatkan nilai $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui $y = \ln(x^2 - 3x - 5)$.

Penyelesaian:

a. Misalkan $u = x^2 - 3x - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 3$.

b. Misalkan $y = \ln(u) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{d(\ln(u))}{du} = \frac{1}{u}$.

- c. Maka, jika $y = f(x) = \ln(x^2 - 3x - 5)$, turunan dari y dituliskan menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (2x - 3) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x - 5}.$$

3. Tentukan turunan dari $g(x) = \ln(\sin x)$.

Penyelesaian:

- Misalkan $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$.
- Misalkan $y = \ln(u) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{d(\ln(u))}{du} = \frac{1}{u}$.
- Maka, jika $y = g(x) = \ln(\sin x)$, turunan dari y dituliskan menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

9.2.3 Integrasi fungsi logaritma asli

Sebagaimana proses penyelesaian persoalan turunan dari logaritma asli, jika kita menemukan persoalan integrasi, maka fungsi logaritma asli yang ditemukan adalah berasal dari proses pengintegralan dengan menggunakan aturan pangkat yang diperumum atau integral substitusi. Untuk memudahkan dalam memahaminya, kita akan membalikkan 3 contoh persoalan di atas. Perhatikan dengan seksama uraian penyelesaiannya.

Tentukan nilai dari integrasi dibawah ini!

- $\int \frac{2}{x} dx$
- $\int \frac{2x-3}{x^2-3x-5} dx$
- $\int \cot x dx$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan ketiga persoalan di atas, kita membutuhkan informasi pada persamaan (1), (2), dan pengetahuan tentang integral substitusi.

- $\int \frac{2}{x} dx = \int 2 \left(\frac{1}{x} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x} dx = 2 \ln x + C = \ln x^2 + C.$

Dengan mengasumsikan $C = 0$, maka

$$\int \frac{2}{x} dx = \ln x^2.$$

- $\int \frac{2x-3}{x^2-3x-5} dx$. Untuk menyelesaikan persoalan ini, kita butuh untuk memisalkan salah satu pembilang atau penyebut, yang mana turunannya ada di dalam persoalan tersebut.

- Misalkan $u = x^2 - 3x - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x-3}$.
- Substitusikan informasi tersebut ke persoalan yang dimiliki, sehingga dimiliki

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x-5} dx = \int \frac{2x-3}{u} \frac{du}{2x-3} \Rightarrow \int \frac{1}{u} du \\ = \ln u + C$$

- c. Dengan mengasumsikan $C = 0$, dan mengembalikan nilai dari $u = x^2 - 3x - 5$, maka

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x-5} dx = \ln(x^2 - 3x - 5).$$

3. $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$. Untuk menyelesaikan persoalan ini, gunakan metode integral substitusi.

- a. Misalkan $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow du = \cos x \, dx$.

- b. Substitusikan informasi yang dimiliki ke persoalan integral, sehingga diperoleh

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{1}{u} \, du = \ln u + C$$

- c. Dengan mengasumsikan nilai dari $C = 0$, dan mengembalikan nilai $u = \sin x$, maka

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln(\sin x).$$

9.3 Penerapan Logaritma Asli

Dalam suatu fungsi perkalian, pembagian, ataupun pemangkatan, untuk dapat menentukan nilai differensiasinya adalah dengan memanfaatkan fungsi logaritma asli dan sifat – sifatnya. Hal ini dikenal dengan nama **logarithmic differentiation**.

Contoh:

Tentukanlah turunan dari

1. $y = f(x) \cdot g(x)$
2. $y = \frac{f(x)}{g(x)}$
3. $y = a^{f(x)}$

Penyelesaian:

1. $y = f(x) \cdot g(x)$
 $\Leftrightarrow \ln y = \ln(f(x) \cdot g(x)) = \ln f(x) + \ln g(x)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d(\ln f(x) + \ln g(x))}{dx} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{y} y' = \frac{1}{f(x)} f'(x) + \frac{1}{g(x)} g'(x) \\
&\Leftrightarrow y' = y \left(\frac{1}{f(x)} f'(x) + \frac{1}{g(x)} g'(x) \right) \\
&\quad = (f(x) \cdot g(x)) \left(\frac{1}{f(x)} f'(x) + \frac{1}{g(x)} g'(x) \right) \\
&\Leftrightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad y &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
&\Leftrightarrow \ln y = \ln \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \ln f(x) - \ln g(x) \\
&\Leftrightarrow \frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d(\ln f(x) - \ln g(x))}{dx} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{y} y' = \frac{1}{f(x)} f'(x) - \frac{1}{g(x)} g'(x) \\
&\Leftrightarrow y' = y \left(\frac{1}{f(x)} f'(x) - \frac{1}{g(x)} g'(x) \right) \\
&\quad = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \left(\frac{1}{f(x)} f'(x) - \frac{1}{g(x)} g'(x) \right) \\
&\quad = \left(\frac{1}{g(x)} f'(x) - \frac{f(x)}{g^2(x)} g'(x) \right) \\
&\Leftrightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad y &= a^{f(x)} \\
&\Leftrightarrow \ln y = \ln a^{f(x)} = f(x) \cdot \ln a \\
&\Leftrightarrow \frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d(f(x) \cdot \ln a)}{dx} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{y} y' = f'(x) \cdot \ln a \\
&\Leftrightarrow y' = y(f'(x) \cdot \ln a) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a
\end{aligned}$$

Soal - Soal Latihan Logaritma Natural

Dengan menggunakan aturan, sifat, metode yang ada pada logaritma berbasis bilangan Euler, selesaikan persoalan

dibawah ini:

- Carilah nilai $\frac{dy}{dx}$ dari:
 - $y = \ln \sqrt{x + x^2}$
 - $y = 3x + \ln \sqrt{x\sqrt{x}}$
 - $y + 1 = 2x^{\sqrt{2x}}$
- Hitunglah nilai dari operasi – operasi berikut, jika diketahui nilai dari **$\ln 5 = 1.609438$** .
 - $\ln 25$
 - $\ln \sqrt{5}$
 - $\ln \frac{1}{5}$

Penyelesaian

- $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln \sqrt{x + x^2})}{dx} = \frac{d(\ln(x + x^2)^{1/2})}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x + x^2}} \cdot \frac{1}{2}(x + x^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + 2x) = \frac{1 + 2x}{2(x + x^2)}$$
 - $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(3x + \ln \sqrt{x\sqrt{x}})}{dx} = \frac{3}{4x} + 3.$$
 - $$\ln(y + 1) = \ln(2x^{\sqrt{2x}}) = \ln 2 + \sqrt{2x} \ln x$$

$$\frac{d(\ln(y + 1))}{dx} = \frac{d(\ln 2 + \sqrt{2x} \ln x)}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y + 1} = \frac{\ln x}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{2x}}{x} \Leftrightarrow y' = (2x^{\sqrt{2x}} + 1) \left(\frac{\ln x}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{2x}}{x} \right)$$
- Diketahui **$\ln 5 = 1.609438$** . Maka:
 - $\ln 25 = \ln 5^2 = 2 \ln 5 = 2 (1.609438) = 3.218876.$
 - $\ln \sqrt{5} = \ln 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} (1.609438) = 0.804719.$
 - $\ln \frac{1}{5} = \ln 5^{-1} = -\ln 5 = -1.609438.$

DAFTAR PUSTAKA

- RapidTables, Math, Algebra. Online pada Oktober 2023.
<https://www.rapidtables.com/math/algebra/Ln.html>
- Guichard, David.,et.al. Calculus: *late transcendentals*. Department of Mathematics at Whitman College. Online pada Oktober 2023.
https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_late_online/section09.02.html
- Weisstein, Eric W. "*Natural Logarithm*." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. Online pada Oktober 2023.
<https://mathworld.wolfram.com/NaturalLogarithm.html>
- Britannica Encyclopaedia, 2023. *Natural logarithm*, access :Oct 15 at <https://www.britannica.com/print/article/406311>.

BAB 10

FUNGSI TRANSENDEN

Oleh Kurnia Ahadiyah

Fungsi transenden merupakan fungsi yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk berhingga dengan operasi aljabar pada fungsi konstanta $y = k$ dan fungsi satuan $y = x$. Saat SMA, fungsi transenden dikenal dengan fungsi trigonometri yang meliputi fungsi sinus, kosinus, tangen, cotangen, garis potong, dan cosecan. Pada kalkulus integral akan dipelajari fungsi transenden lainnya, khususnya fungsi logaritma dan eksponennya (invers), fungsi trigonometri invers, fungsi hiperbolik dan fungsi hiperbolik invers.

Fungsi transenden ini mempunyai pengaruh yang besar terhadap teknik integrasi, misalnya siswa diminta untuk memecahkan masalah berikut: $\int \sqrt{x^3} - 4 \, dx$ atau $\int x^{10} - 2 \, dx$, tanpa mempelajari fungsi transenden siswa tidak dapat menyelesaikannya. Jika siswa tidak mempelajari fungsi transenden, mereka tidak dapat mempelajari semua teknik integrasi. Sehingga dapat dikatakan bahwa fungsi transenden sebagai salah satu fundamental dalam penyelesaian integral. (Hanifah, 2018)

10.1 Fungsi Logaritma Natural

Logaritma natural merupakan logaritma yang berbasis e , dimana e adalah sebuah bilangan yaitu 2.718281828459.... Logaritma natural didefinisikan untuk semua bilangan real positif x dan juga dapat didefinisikan untuk bilangan kompleks selain nol. Aturan pangkat tidak dapat menyediakan fungsi yang antiturunannya adalah $\frac{1}{x}$. Namun dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus, kita dapat mendefinisikan fungsi integral yang turunannya $\frac{1}{x}$. Kita menyebut fungsi ini sebagai logaritma natural dari x , dilambangkan dengan $\ln x$.

Definisi

Fungsi Logaritma natural, dinyatakan oleh $\ln$ dan didefinisikan sebagai

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

Dimana daerah asalnya merupakan himpunan bilangan real positif.

Adapun sifat-sifat logaritma natural sebagai berikut:

1. $\ln ab = \ln a + \ln b$
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
3. $\ln 1 = 0$
4. $\ln a^r = r \ln a$

Contoh soal:

Hitunglah nilai $\frac{dq}{dp}$ jika $q = \ln \sqrt{\frac{p-1}{p^3}}, p > 1$

Peyelesaian:

Kita bisa gunakan sifat logaritma natural agar dapat menyederhanakan nilai q .

$$\begin{aligned} q &= \ln \left(\frac{p-1}{p^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p-1}{p^3} \right) \\ &= \frac{1}{2} [\ln(p-1) - \ln p^3] \\ &= \frac{1}{2} [\ln(p-1) - 3 \ln p] \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-1} - \frac{3}{p} \right] = \frac{2-p}{3p^2-3p}$$

10.2 Fungsi Invers

Agar dapat membentuk sebuah fungsi baru dimana untuk membangun fungsi baru dari fungsi yang sudah ada adalah dengan “membalik” (membalikkan) fungsi tersebut. Fungsi f mengambil nilai x dari domain asal D dan memetakannya ke nilai y dari domain hasil R .

Dalil

Jika f monoton murni di titik asal, maka f mempunyai invers.

Bukti

Misalkan p_1 dan p_2 merupakan dua bilangan pada domain f , dengan $p_1 < p_2$. Karena f monoton, $f(p_1) < f(p_2)$ atau $f(p_1) > f(p_2)$. Namun $f(p_1) \neq f(p_2)$. Jadi $p_1 \neq p_2$ artinya $f(p_1) \neq f(p_2)$ yang artinya f adalah fungsi satu-satu sehingga mempunyai fungsi invers.

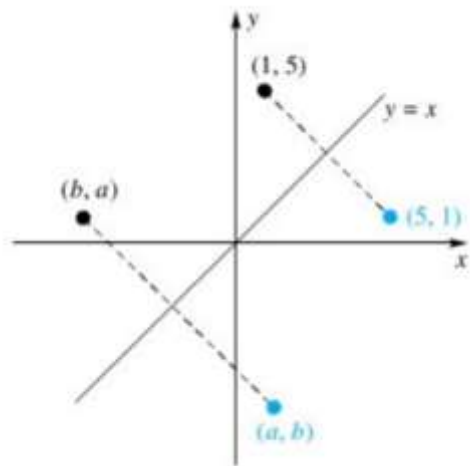
Berdasarkan dalil sebelumnya, kita punya cara yang sederhana untuk menentukan apakah suatu fungsi f monoton atau tidak, yaitu dengan memeriksa f' pada tandanya, dan perlu membatasi titik asal fungsi tersebut agar fungsi tersebut monoton murni pada daerah tersebut sehingga pada daerah tersebut terdapat fungsi inversnya. Ada cara untuk membuat suatu fungsi memiliki invers dari suatu fungsi awal yang tidak memiliki invers pada daerah awalnya karena bersifat nonmonotonic. Kita hanya perlu membatasi daerah asal menjadi suatu himpunan sedemikian rupa sehingga fungsi pada daerah awal yang baru berkurang atau hanya bertambah (secara monoton). Misalnya, dengan $y = f(x) = x^2$ kita dapat membatasinya pada daerah asal $x \geq 0$ atau $x \leq 0$ sedangkan dengan $y = g(x) = \sin x$, kita dapat membatasinya pada daerah $[-\pi/2, \pi/2]$.

Misalkan f adalah kebalikannya, maka

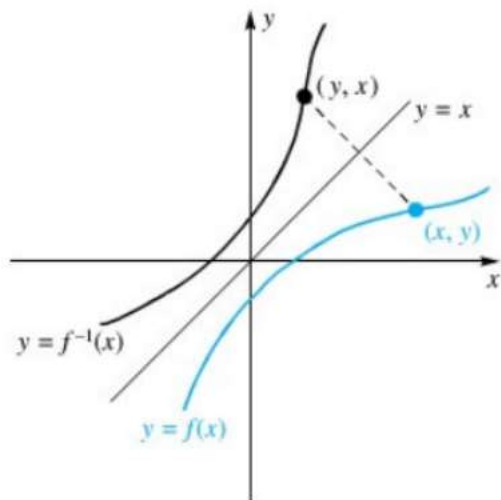
$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

Oleh karena itu $y = f(x)$ dan $x = f^{-1}(y)$ mendefinisikan pasangan yang sama (x, y) , sehingga keduanya mempunyai

grafik yang identik. Dapat kita bayangkan bahwa pertukaran peranan x dan y pada suatu grafik tidak lebih dari hasil grafik yang mencerminkan garis $y = x$. Oleh karena itu, grafik $y = f^{-1}(x)$ merupakan bayangan cermin dari grafik $y = f(x)$ terhadap garis $y = x$. Hal ini ditunjukkan pada Gambar 10.1 dan 10.2.



Gambar 10.1. Grafik Fungsi $y = x$



Gambar 10.2. Grafik Fungsi $y = x$ dan inversnya

Dari $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, aturan fungsi invers dapat ditentukan dalam tiga langkah berikut

1. Selesaikan persamaan $y = f(x)$ dengan x sebagai fungsi dari y .
2. Gunakan $f^{-1}(y)$ untuk memberi nama ekpresi yang diperoleh di y .
3. Gantikan y dengan x untuk mendapatkan rumus untuk $f^{-1}(x)$

Perhatikan bahwa ketika $y = f(x) = x^2$, kita mendapatkan $x = \pm\sqrt{y}$, yang langsung menunjukkan bahwa f^{-1} tidak ada, kecuali tentu saja kita membatasi wilayah daerah asalnya untuk menghapus salah satu tanda (+) atau (-).

Dalil Fungsi Invers

Misalkan f adalah fungsi monoton dan terdiferensiasi pada interval I . Jika $f'(x) \neq 0$ di suatu x tertentu dalam I , maka f^{-1} dapat diturunkan di titik yang berpadanan $y = f(x)$ dalam daerah hasil f dan

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Contoh Soal:

Perlihatkan bahwa $f(x) = 5x + 2$ mempunyai invers, cari rumus untuk $f^{-1}(y)$ dan periksa kebenaran hasil-hasil $f^{-1}(f(x)) = x$ dan $f(f^{-1}(y)) = y$!

Penyelesaian:

Karena f fungsi naik, maka mempunyai invers. Untuk mencari $f^{-1}(y)$, kita selesaikan $y = 5x + 2$, yang memberikan $x = \frac{y-2}{5} = f^{-1}(y)$. Sekarang kita perhatikan bahwa,

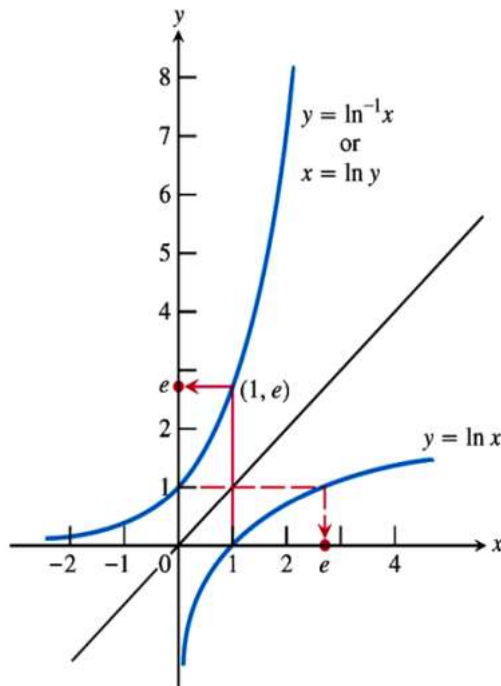
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(5x + 2) = \frac{(5x + 2) - 2}{5} = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-2}{5}\right) = 5\left(\frac{y-2}{5}\right) + 2 = y$$

Sehingga, benar bahwa $f^{-1}(f(x)) = x$ dan $f(f^{-1}(y)) = y$

10.3 Fungsi Eksponen Natural

Fungsi eksponensial natural, $y = \exp(x)$, adalah kebalikan dari logaritma natural. $x = \exp(y) \Leftrightarrow y = \ln x$. Bilangan dasar fungsi ini, ditulis $e = \exp(1)$ jadi $\ln e = 1$. Ekspansi desimal bilangan ini adalah $e \approx 2,71828182845 \dots$



Gambar 10.3. Grafik Fungsi $\ln$ dan Inversnya

Oleh karena itu, $\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$

Dari definisi tersebut langsung diperoleh bahwa

1. $\exp(\ln x) = x$, jika $x > 0$
2. $\ln(\exp(x)) = x$

Perlu diperhatikan, bahwa e adalah bilangan transenden (dibuktikan dengan Euler), artinya tidak ada polinomial $p(x)$ sehingga $p(e) = 0$. Kita dapat memastikan (untuk bilangan rasional r), bahwa $y = \exp(x)$ adalah fungsi eksponensial. $er = \exp(\ln er) = \exp(r \ln e) = \exp(r)$ Sejauh ini kita telah menentukan eksponen rasionalnya. Untuk x irasional, kita kembali ke definisi fungsi eksponensial (Varberg, Dale ; Purcell, 2001), yaitu :

$$e^x = \exp(x)$$

Turunan Eksponen Asli e^x

Andaikan $y = e^x$, maka

$$x = \ln y$$

Turunkan kedua ruas berdasarkan x , sehingga diperoleh

$$1 = \frac{1}{y} D_x y$$

$$D_x y = y = e^x$$

Dari pernyataan diatas, terbukti bahwa turunan dari e^x adalah :

$$D_x e^x = e^x$$

Contoh soal:

Tentukan nilai $D_x e^{x^3 \ln x}$!

Penyelesaian:

$$D_x e^{x^3 \ln x} = e^{x^3 \ln x} D_x (x^3 \ln x)$$

$$= e^{x^3 \ln x} \left(x^3 \cdot \frac{1}{x} + 3x^2 \ln x \right)$$

$$= x^2 e^{x^2 \ln x} (1 + 3 \ln x)$$

10.4 Fungsi Eksponen Umum dan Fungsi Logaritma Umum

Kita telah berhasil menentukan e^x untuk sebarang bilangan real x , termasuk e^π . Tapi bagaimana dengan π^e ? Kita akan menggunakan hubungan $x = \exp(\ln x)$.

Definisi

Jika $a > 0$ dan $a \neq 1$ adalah sebarang bilangan real, maka

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Dengan demikian, kita peroleh bahwa

$$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a$$

Catatan: definisi di atas memungkinkan kita untuk memperluas aturan $\ln(a^r) = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$ yang sebelumnya hanya diterapkan pada r rasional.

Sifat-sifat fungsi eksponen diberikan oleh $a > 0, b > 0$, dan x, y adalah sebarang bilangan real.

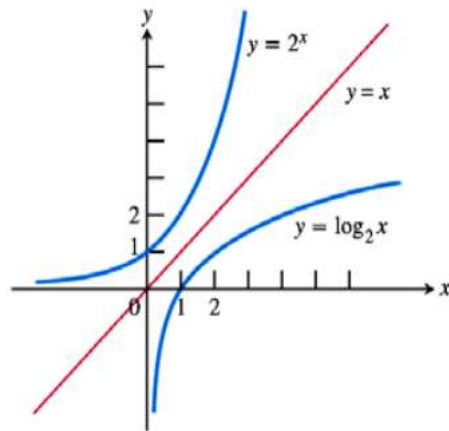
1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
4. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$

Pada bagian ini, kita akan membuat Fungsi Logaritma dengan basis bilangan positif $a \neq 1, \log_a x$. Fungsi ini didefinisikan sebagai invers dari fungsi eksponensial a^x .

Definisi

Misalkan $a > 0, a \neq 1$, maka $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

Catatan: $\ln = \log_e x$ dengan logaritma biasa dapat diperoleh secara berikut. Misalkan $y = \log_a x$ sehingga $x = a^y$.



Gambar 10.4. Fungsi Logaritma secara Umum dan Inversnya

$$\ln x = \ln a^y = y \cdot \ln a \text{ sehingga } \log_a x = \frac{\ln a}{\ln x}$$

Contoh Soal:

Jika $y = \log_{10}(x^3 + 4)$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$!

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^3 + 4$ dan terapkan aturan rantai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^3 + 4) \ln 10} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{(x^3 + 4) \ln 10}$$

10.5 Fungsi Trigonometri Balikan

Dalam pembahasan ini, kita akan menjelaskan notasi invers untuk fungsi trigonometri dengan membatasi domain (daerah asalnya).

Invers Sinus dan Cosinus

Grafik invers dari fungsi sinus dan invers dari fungsi cosinus diperoleh dengan merefleksikannya pada garis $y = x$. Namun, pertama-tama kita perlu menentukan domain mana yang berlaku untuk setiap fungsi sinus dan cosinus untuk mendapatkan inversnya (Dewadi *et al.*, 2023). Untuk sinus, batasan domain dilakukan pada $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sedangkan batasan domain untuk cosinus dilakukan pada $[0, \pi]$

Definisi

Secara formal, invers dari sinus dan cosinus dituangkan dalam definisi berikut

Batasan domain dari masing-masing invers fungsi sinus dan cosinus adalah $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dan $[0, \pi]$, sedemikian sehingga

$$x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos^{-1} y \Leftrightarrow y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$$

Notasi arcsin umumnya digunakan untuk $\sin^{-1}$ dan arccos umumnya digunakan untuk $\cos^{-1}$. $x = \arcsin y$ artinya "besar busur atau sudut x sedemikian rupa sehingga sinus dari x bernilai y ".

Invers Tangent dan Secant

Definisi

Untuk mendapatkan invers untuk tangent dan secant, kita batasi domain untuk invers tangen pada $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sedangkan batasan domain untuk invers secant adalah $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, sedemikian sehingga

$$x = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$x = \sec^{-1} y \Leftrightarrow y = \sec x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$$

Agar memudahkan dalam mengingat rumus invers secant, kita lihat bahwa $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, sehingga didapatkan

$$\sec^{-1} y = \cos^{-1} \left(\frac{1}{y} \right)$$

Adapun beberapa Identitas Trigonometri diberikan sebagai berikut:

1. $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$
2. $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

$$3. \sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$$

$$4. \tan(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & \text{untuk } x \geq 1; \\ -\sqrt{x^2 - 1}, & \text{untuk } x \leq -1 \end{cases}$$

Contoh Soal :

Hitunglah nilai dari $\sin[2 \cos^{-1}(\frac{1}{3})]$!

Penyelesaian:

Ingat kesamaan sudut ganda $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} \sin[2 \cos^{-1}(\frac{1}{3})] &= 2 \sin[\cos^{-1}(\frac{1}{3})] \cos[\cos^{-1}(\frac{1}{3})] \\ &= 2 \cdot \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{9} \end{aligned}$$

10.6 Turunan Fungsi Trigonometri

Dalam materi pada Matematika Dasar I, kita mempelajari turunan dari 6 fungsi trigonometri, yaitu

$$D_x \sin x = \cos x$$

$$D_x \tan x = \sec^2 x$$

$$D_x \sec x = \sec x \tan x$$

$$D_x = -\sin x$$

$$D_x \cot x = -\csc^2 x$$

$$D_x \csc x = -\csc x \cot x$$

Sekarang kita bisa menggabungkannya dengan aturan rantai. Misalkan $u = f(x)$ adalah fungsi yang terdiferensiasi, maka

$$D_x \sin u = \cos u \cdot D_x u$$

Berdasarkan Dalil Fungsi Invers, kita dapat menyimpulkan bahwa $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, dan $\sec^{-1}$ merupakan fungsi-fungsi yang terdiferensiasi. Tujuan kita adalah untuk mendapatkan rumus turunan dari fungsi-fungsi tersebut.

Adapun turunan dari 4 fungsi invers trigonometri

disajikan dalam Dalil berikut.

Dalil

Turunan dari empat fungsi trigonometri

$$1. D_x \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$$

$$2. D_x \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$$

$$3. D_x \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4. D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x| > 1$$

Contoh Soal:

Carilah nilai D_x dari $\sin^{-1}(x+1)$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} D_x \sin^{-1}(x+1) &= \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}} D_x(x+1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}} \end{aligned}$$

10.7 Fungsi Hiperbolik dan Balikannya

Definisi

Sinus hiperbolik, cosinus hiperbolik, dan keempat hubungan lainnya didefinisikan sebagai berikut:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Dari pengertian fungsi hiperbolik, kita dapat memperoleh beberapa sifat sebagai berikut :

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. Persamaan parametrik $x = \cosh t$ dan $y = \sinh t$ menggambarkan hiperbola satuan $x^2 - y^2 = 1$
3. Fungsi sinus hiperbolik merupakan fungsi ganjil, $\sinh(-x) = -\sinh x$, sedangkan cosinus hiperbolik merupakan fungsi genap, $\cosh(-x) = \cosh x$
4. Tanah adalah fungsi ganjil, dan sech adalah fungsi genap

Turunan fungsi hiperbolik disajikan pada dalil berikut:

Dalil

$$D_x \sinh x = \cosh x$$

$$D_x \cosh x = \sinh x$$

$$D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$D_x \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Karena sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik sama-sama mempunyai turunan yang positif, maka keduanya meningkatkan fungsi dan memiliki invers. Untuk mendapatkan invers dari cosinus hiperbolik dan secant hiperbolik, kita perlu membatasi domainnya hingga $x \geq 0$

$$x = \sinh^{-1} y \Leftrightarrow y = \sinh x$$

$$x = \cosh^{-1} y \Leftrightarrow y = \cosh x \text{ dan } x \geq 0$$

$$x = \tanh^{-1} y \Leftrightarrow y = \tanh x$$

$$x = \operatorname{sech}^{-1} y \Leftrightarrow y = \operatorname{sech} x \text{ dan } x \geq 0$$

Karena fungsi hiperbolik didefinisikan dalam bentuk e^x dan e^{-x} , invers dari fungsi hiperbolik juga ditulis dalam logaritma natural. Himpunan $y = \cosh x$ untuk $x \geq 0$, kita bisa menuliskannya sebagai

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \geq 0$$

Tujuan kita adalah mendapatkan fungsi untuk x , yang akan membawa kita terhadap $\cosh^{-1} y$. Dengan cara mengalikan kedua sisi dengan $2e^x$, maka kita bisa mendapatkan $2ye^x = e^{2x} + 1$, atau

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0, x \geq 0$$

Atau dapat kita tulis,

$$e^x = \frac{2y + \sqrt{(2y)^2 - 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

Sehingga,

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Dari pernyataan diatas, kita bisa dapatkan invers fungsi hiperbolik sebagai berikut:

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

Sehingga, turunan fungsi invers hiperbolik adalah sebagai berikut:

$$D_x \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D_x \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$$

$$D_x \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1$$

$$D_x \operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}, \quad 0 < x < 1$$

Contoh soal:

Tentukan nilai dari $D_x \cosh^2(2x + 1)$!

Penyelesaian:

Kita gunakan aturan rantai dua kali sebagai berikut:

$$D_x \cosh^2(2x + 1) = 2 \cosh(2x + 1) D_x \cosh(2x + 1)$$

$$= 2 \cosh(2x + 1) \sinh(2x + 1) D_x(2x + 1)$$

$$= 4 \cosh(2x + 1) \sinh(2x + 1)$$

DAFTAR PUSTAKA

- Dewadi, F. *et al.* 2023. *Matematika Terapan Ii*.
- Hanifah. 2018. 'Implementation Of Work Sheet Based On Apos Model On Integral', 16(2), pp. 72–79.
- Varberg, Dale ; Purcell, E.J. 2001. *Calculus I (Ninth Edition)*. Ninth.

BAB 11

TURUNAN

Oleh Sedyanto

11.1 Pendahuluan

Pada dasarnya, konsep turunan merupakan pilar utama dalam kalkulus yang memungkinkan kita memahami dan mengukur perubahan suatu fungsi terhadap variabelnya (Ji et al., 2020). Turunan memberikan wawasan mendalam tentang bagaimana suatu fungsi berfluktuasi pada tingkat lokal, memungkinkan kita melihat "kecepatan" atau "gradien" perubahan pada setiap titik dalam kurva (Bolte & Pauwels, 2021). Dengan kata lain, turunan memungkinkan kita melihat dinamika suatu fenomena matematika dan fisika dengan cara yang lebih terperinci (Montoya et al., 2023). Notasi turunan, seperti $f'(x)$, menjadi kunci dalam menjelaskan laju perubahan ini, dan aturan turunan memberikan alat matematis untuk menghitungnya (Upadhyaya, 2020). Dalam perjalanan kita menjelajahi konsep ini, kita akan merambah aturan-aturan turunan, teknik-teknik khusus, dan penerapannya dalam memecahkan berbagai masalah riil di berbagai bidang ilmu. Dengan demikian, pemahaman terhadap turunan menjadi fondasi yang kokoh dalam eksplorasi matematika yang lebih lanjut. Selain dari sisi konsep matematis, turunan memiliki relevansi luas dalam berbagai disiplin ilmu (Bunin Yelets State University & Shcherbatykh, 2021). Dalam fisika, turunan digunakan untuk menggambarkan pergerakan objek, kecepatan, dan percepatan. Di bidang ekonomi, turunan membantu menganalisis tingkat perubahan fungsi-fungsi yang menggambarkan kesejahteraan ekonomi (Luo et al., 2018). Dalam ilmu komputer, turunan terlibat dalam pengembangan algoritma dan pemrosesan sinyal (J. Wang, 2021). Oleh karena itu, pemahaman konsep dasar turunan membuka pintu bagi pemecahan masalah di berbagai bidang dengan pendekatan

matematis yang kuat (Atangana, 2021). Aturan turunan menjadi pedoman kritis dalam menghitung turunan fungsi-fungsi yang lebih kompleks. Aturan Pangkat, Aturan Perkalian, Aturan Pembagian, dan Aturan Rantai adalah beberapa aturan turunan yang mendasar (Ye et al., 2019). Memahami dan menguasai aturan-aturan ini menjadi keterampilan yang krusial dalam menjelajahi kalkulus lebih lanjut dan dalam menerapkan konsep turunan pada berbagai permasalahan dunia nyata (Hu et al., 2023). Sebagai kesimpulan, pendahuluan turunan memberikan landasan penting untuk memahami kalkulus dan penerapannya di berbagai bidang. Dengan pemahaman konsep turunan dan aturan-aturan turunan, seseorang dapat menjelajahi aspek-aspek lebih lanjut dari matematika dan menerapkan kalkulus secara efektif dalam berbagai konteks ilmiah dan praktis.

11.2 Aturan Turunan

Aturan turunan adalah seperangkat pedoman matematis yang mempermudah perhitungan turunan fungsi (Porebski, 2022).

Aturan-aturan ini menjadi kunci dalam kalkulus yang memungkinkan kita menghitung turunan berbagai jenis fungsi dengan lebih efisien. Salah satu aturan dasar adalah Aturan Pangkat, yang menyatakan bahwa turunan dari x^n (dengan n sebagai konstanta) adalah $nx^{(n-1)}$. Aturan ini sangat berguna ketika kita berhadapan dengan fungsi polinomial. Aturan lainnya termasuk Aturan Perkalian, Aturan Pembagian, dan Aturan Rantai, yang memberikan pedoman untuk menghitung turunan fungsi-fungsi yang lebih kompleks melibatkan operasi-operasi tersebut. Misalnya, Aturan Perkalian mengajarkan cara menghitung turunan dari hasil perkalian dua fungsi, sementara Aturan Rantai memandu kita dalam menangani fungsi-fungsi yang tergantung satu sama lain (Raskin & Sira, 2020). Selain menghitung turunan, aturan turunan juga membantu dalam mengidentifikasi titik kritis dan nilai maksimum atau minimum fungsi (Skurnick & Roethel, 2020). Dengan menggunakan aturan-aturan ini, kita dapat menganalisis grafik fungsi dengan lebih mendalam dan memahami perilaku matematis dari berbagai

model. Pemahaman aturan turunan juga menjadi dasar untuk teknik-teknik lanjutan dalam kalkulus, seperti integral(Hare & Jarry-Bolduc, 2020). Penting untuk diingat bahwa penerapan aturan turunan sering kali memerlukan kecermatan dan pemahaman konsep-konsep dasar kalkulus. Dalam konteks pengajaran dan pembelajaran, aturan turunan sering diakui sebagai alat yang kuat untuk memperkenalkan mahasiswa pada konsep-konsep kalkulus dengan pendekatan yang lebih konkrit(Madeira et al., 2019). Dengan memahami dan menguasai aturan turunan, seseorang dapat membuka pintu ke dunia yang lebih luas dalam matematika dan aplikasinya di berbagai bidang. Ada beberapa aturan turunan dasar yang digunakan dalam kalkulus untuk menghitung turunan suatu fungsi(Jleli et al., 2019). Berikut adalah beberapa aturan turunan yang paling mendasar :

1. Aturan Pangkat

Turunan dari x^n (dengan n sebagai konstanta) adalah $nx^{(n-1)}$.

Contoh : Turunan dari x^3 adalah $3x^2$.

2. Aturan Konstanta

Turunan dari konstanta c adalah 0

Contoh : $f(x) = 5$, maka $f'(x) = 0$

3. Aturan Penjumlahan

Turunan dari jumlah dua fungsi adalah jumlah turunan keduanya.

Contoh : $f(x) = g(x) + h(x)$, maka $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

4. Aturan Perkalian

Turunan dari hasil perkalian dua fungsi adalah turunan pertama kali fungsi kedua ditambah turunan kedua kali fungsi pertama.

Contoh : $f(x) = g(x) \cdot h(x)$,
maka $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

5. Aturan Pembagian

Turunan dari hasil pembagian dua fungsi adalah (turunan pertama kali fungsi kedua dikurangkan turunan kedua kali fungsi pertama) dibagi oleh fungsi kedua yang dikuadratkan.

Contoh : $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, maka $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$

6. Aturan Rantai (*Chain Rule*)

Turunan dari fungsi bersarang adalah turunan fungsi luar kali turunan fungsi dalam.

Contoh : $f(x) = g(h(x))$, maka $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

7. Aturan Turunan Eksponensial

Turunan dari e^x adalah e^x

Contoh : Turunan dari a^x (dengan a konstanta positif) adalah $a^x \cdot \ln(a)$

8. Aturan Turunan Logaritmik

Turunan dari $\ln(x)$ adalah $\frac{1}{x}$

Turunan dari $\log_a(x)$ (dengan a konstanta positif) adalah $\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

11.3 Metode Turunan

Metode turunan merupakan serangkaian teknik matematika yang digunakan untuk menghitung turunan dari berbagai jenis fungsi (Ali et al., 2020). Salah satu metode umum yang digunakan adalah metode aturan turunan, yang melibatkan aturan-aturan matematis yang memandu kita dalam menghitung turunan fungsi. Aturan-aturan tersebut termasuk Aturan Pangkat, Aturan Perkalian, Aturan Pembagian, dan Aturan Rantai. Dengan menggunakan aturan-aturan ini, kita dapat menguraikan fungsi-fungsi kompleks menjadi bagian-bagian yang lebih sederhana, sehingga memudahkan proses perhitungan turunan. Selain aturan turunan, terdapat juga metode lain yang sering digunakan, seperti metode substitusi dan metode penjumlahan atau pengurangan (Lotfy et al., 2020). Metode substitusi melibatkan penggantian variabel dengan ekspresi baru untuk menyederhanakan fungsi sebelum dihitung turunannya (Shi et al., 2022). Metode ini sering digunakan ketika kita memiliki fungsi-fungsi yang kompleks atau lebih sulit diakses dengan menggunakan aturan turunan langsung. Metode penjumlahan atau pengurangan, di sisi lain, dapat membantu kita merangkai fungsi-fungsi menjadi bentuk yang lebih mudah

untuk dihitung turunannya. Penting untuk dicatat bahwa pemilihan metode turunan sering tergantung pada kompleksitas fungsi dan preferensi pribadi. Dalam kalkulus, kemampuan untuk memilih dan menerapkan metode turunan yang tepat adalah keterampilan yang sangat berharga. Pemahaman yang mendalam terhadap aturan turunan dan penguasaan terhadap berbagai metode turunan memungkinkan para matematikawan dan ilmuwan untuk menghadapi berbagai tantangan dalam analisis matematis, pemodelan fenomena alam, dan pengembangan teori-teori baru dalam berbagai disiplin ilmu (Lange, 2022).

Salah satu contoh penerapan metode turunan adalah dalam optimisasi. Misalkan kita memiliki fungsi matematis yang menggambarkan suatu masalah, dan kita ingin menemukan nilai minimum atau maksimum dari fungsi tersebut. Dalam hal ini, turunan dapat membantu kita menemukan titik kritis atau nilai ekstrim (T. Wang et al., 2023).

Contoh sederhana adalah fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana a , b , c konstanta. Untuk menemukan titik minimum atau maksimum dari fungsi ini, kita dapat menggunakan turunan. Turunan pertama dari fungsi kuadrat ini adalah $f'(x) = 2ax + b$

Dalam mencari nilai minimum atau maksimum, kita mencari titik di mana turunan pertama sama dengan nol

11.4 Aplikasi Turunan

Turunan, sebagai konsep utama dalam kalkulus, memiliki aplikasi yang meluas di berbagai bidang kehidupan dan ilmu pengetahuan. Salah satu aplikasi yang paling terkenal adalah dalam fisika, di mana turunan digunakan untuk menggambarkan konsep perubahan dan laju perubahan. Misalnya, turunan fungsi posisi terhadap waktu memberikan kita kecepatan objek, sedangkan turunan kedua memberikan percepatan. Ini sangat penting dalam pemodelan gerakan benda dan analisis sistem dinamis (Djilali & Ghanbari, 2021). Dalam ekonomi, turunan digunakan untuk menganalisis perubahan dan kebijakan ekonomi. Turunan dari fungsi keuntungan terhadap jumlah

produksi memberikan informasi tentang seberapa efektif suatu perusahaan dapat menghasilkan keuntungan. Pemahaman terhadap turunan memainkan peran krusial dalam pengambilan keputusan ekonomi dan merancang strategi bisnis(Kondratenko & Volkova, 2021). Dalam dunia teknologi informasi, turunan digunakan dalam pengolahan sinyal dan analisis data(Lu et al., 2020). Misalnya, dalam pengenalan suara atau gambar, turunan dapat digunakan untuk mengidentifikasi pola dan karakteristik kunci. Turunan juga digunakan dalam algoritma optimisasi untuk meminimalkan atau memaksimalkan fungsi tujuan, yang penting dalam desain algoritma dan kecerdasan buatan. Selain itu, turunan memiliki peran penting dalam ilmu biologi dan ilmu kedokteran. Dalam studi perubahan populasi, turunan digunakan untuk memahami laju pertumbuhan dan faktor-faktor yang memengaruhinya. Dalam konteks kedokteran, turunan sering digunakan untuk menganalisis data medis, seperti mengidentifikasi perubahan dalam fungsi tubuh dan mengembangkan model matematika untuk penyakit dan respons terhadap pengobatan(Qu et al., 2021). Dengan demikian, pemahaman dan penerapan turunan tidak hanya menjadi kunci dalam matematika murni tetapi juga memberikan landasan untuk solusi praktis dalam berbagai bidang kehidupan sehari-hari dan ilmu pengetahuan.

DAFTAR PUSTAKA

- Ali, A., Seadawy, A. R., & Baleanu, D. 2020. Computational solutions of conformable space-time derivatives dynamical wave equations: Analytical mathematical techniques. *Results in Physics*, 19, 103419. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103419>
- Atangana, A. 2021. Mathematical model of survival of fractional calculus, critics and their impact: How singular is our world? *Advances in Difference Equations*, 2021(1), 403. <https://doi.org/10.1186/s13662-021-03494-7>
- Bolte, J., & Pauwels, E. 2021. Conservative set valued fields, automatic differentiation, stochastic gradient methods and deep learning. *Mathematical Programming*, 188(1), 19–51. <https://doi.org/10.1007/s10107-020-01501-5>
- Bunin Yelets State University, & Shcherbatykh, V. E. 2021. On Foundations Of Studying “Mathematical Analysis” At Universities. *Educational Psychology in Polycultural Space*, 53(1), 126–135. <https://doi.org/10.24888/2073-8439-2021-53-1-126-135>
- Djilali, S., & Ghanbari, B. 2021. Dynamical behavior of two predators–one prey model with generalized functional response and time-fractional derivative. *Advances in Difference Equations*, 2021(1), 235. <https://doi.org/10.1186/s13662-021-03395-9>
- Hare, W., & Jarry-Bolduc, G. 2020. Calculus Identities for Generalized Simplex Gradients: Rules and Applications. *SIAM Journal on Optimization*, 30(1), 853–884. <https://doi.org/10.1137/18M1215864>
- Hu, T., Lan, K., Lin, H., & Wu, S. 2023. The Application of Complex Variables Function and Residue Theorem. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 38, 805–811. <https://doi.org/10.54097/hset.v38i.5955>
- Ji, F.-Y., He, C.-H., Zhang, J.-J., & He, J.-H. 2020. A fractal Boussinesq equation for nonlinear transverse vibration of a nanofiber-reinforced concrete pillar. *Applied Mathematical Modelling*, 82, 437–448. <https://doi.org/>

10.1016/j.apm.2020.01.027

- Jleli, M., Kirane, M., & Samet, B. 2019. A derivative concept with respect to an arbitrary kernel and applications to fractional calculus. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(1), 137–160. <https://doi.org/10.1002/mma.5329>
- Kondratenko, N., & Volkova, M. 2021. Features And Conditions Of Making Management Decisions At The Enterprise. *Scientific Notes of Ostroh Academy National University, "Economics" Series*, 1(23(51)), 47–53. [https://doi.org/10.25264/2311-5149-2021-23\(51\)-47-53](https://doi.org/10.25264/2311-5149-2021-23(51)-47-53)
- Lange, M. 2022. Inference to the best explanation as supporting the expansion of mathematicians' ontological commitments. *Synthese*, 200(2), 146. <https://doi.org/10.1007/s11229-022-03656-4>
- Lotfy, H. M., Fayez, Y. M., Michael, A. M., & Nessim, C. K. 2020. Evaluation of the Efficiency of Smart Stability-Indicating Spectrophotometric Methods Based on Mathematical and Statistical Processing of the Obtained Results Via Different Manipulating Pathways. *Current Pharmaceutical Analysis*, 16(2), 186–200. <https://doi.org/10.2174/1573412914666181017144323>
- Lu, H., Xiaoyu, Y., Haodong, W., Jin, L., Xuejiao, M., & Caihong, Z. 2020. Research on Application of Digital Signal Processing Technology in Communication. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 799(1), 012026. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/799/1/012026>
- Luo, D., Wang, J. R., & Fečkan, M. 2018. Applying Fractional Calculus to Analyze Economic Growth Modelling. *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 14(1), 25–36. <https://doi.org/10.2478/jamsi-2018-0003>
- Madeira, V. R., De Souza, A. L. L., Peixoto, A., & Da Gama Afonso, H. C. A. 2019. A Calculus Project to Support Students that Enter Engineering Courses. *2019 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)*, 1224–1227. <https://doi.org/10.1109/EDUCON47531.2019.9052000>

org/10.1109/EDUCON.2019.8725142

- Montoya, F. G., Prado, X., Arrabal-Campos, F. M., Alcayde, A., & Mira, J. 2023. New mathematical model based on geometric algebra for physical power flow in theoretical two-dimensional multi-phase power circuits. *Scientific Reports*, 13(1), 1128. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-28052-x>
- Porebski, S. 2022. Evaluation of fuzzy membership functions for linguistic rule-based classifier focused on explainability, interpretability and reliability. *Expert Systems with Applications*, 199, 117116. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.117116>
- Qu, J., Sumali, B., Lee, H., Terai, H., Ishii, M., Fukunaga, K., Mitsukura, Y., & Nishimura, T. 2021. Finding of the factors affecting the severity of COVID-19 based on mathematical models. *Scientific Reports*, 11(1), 24224. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-03632-x>
- Raskin, L., & Sira, O. 2020. Execution of arithmetic operations involving the second-order fuzzy numbers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(4 (106)), 14–20. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.210103>
- Shi, Y., Chang, J., Wang, Y., Zhao, X., Zhang, Q., & Yang, L. 2022. Gas Leakage Detection and Pressure Difference Identification by Asymmetric Differential Pressure Method. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 35(1), 44. <https://doi.org/10.1186/s10033-022-00697-1>
- Skurnick, R., & Roethel, C. 2020. A more conclusive and more inclusive second derivative test. *The Mathematical Gazette*, 104(560), 247–254. <https://doi.org/10.1017/mag.2020.47>
- Upadhyaya, Y. M. 2020. Mathematical Analysis in Static Equilibrium of Economics: As Support to Microeconomics Course. *Interdisciplinary Journal of Management and Social Sciences*, 1(1), 135–148. <https://doi.org/10.3126/ijmss.v1i1.34618>

- Wang, J. 2021. Research Status and Future Development of Endpoint Detection Algorithms Based on Computer Science Language Signals. *Journal of Physics: Conference Series*, 1744(3), 032128. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1744/3/032128>
- Wang, T., Fan, W., Ang, A. H.-S., & Li, Z. 2023. Application of generalised equivalent extreme-value event in structural system reliability analysis. *Structure and Infrastructure Engineering*, 19(7), 921–931. <https://doi.org/10.1080/15732479.2021.1993935>
- Ye, J., Ai, Z., & Xu, Z. 2019. Single variable differential calculus under q -rung orthopair fuzzy environment: Limit, derivative, chain rules, and its application. *International Journal of Intelligent Systems*, 34(7), 1387–1415. <https://doi.org/10.1002/int.22100>

BIODATA PENULIS



Fathan Mubina Dewadi
Dosen Politeknik Negeri Jakarta

Fathan Mubina Dewadi merupakan pria yang berusia 30 tahun sudah tertarik dengan bidang Pendidikan tinggi sejak tahun 2015. Sejak lulus jurusan Teknik mesin program pascasarjana Universitas Pancasila. Kini penulis sedang bekerja sebagai dosen tetap program studi Teknik mesin di Politeknik Negeri Jakarta. Kini kesibukan penulis ialah lebih menghabiskan waktu untuk mengajar dan menulis. Karya-karya yang telah dibuat dimuat di media *online*, jurnal nasional, jurnal internasional dan jurnal nasional bereputasi. Sudah lebih dari 50 karya yang telah dibuat dan sedang proses untuk pembuatan buku dan bab buku. Jurnal yang telah ditulis bekerjasama dengan para pakar di luar negara dan dalam negeri.

BIODATA PENULIS



Sari Puspita, S.Si, M.Si

Dosen Program Studi Sistem Informasi
Universitas Metamedia

Penulis lahir di Padang pada tanggal 28 Juni 1985. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sistem Informasi, Universitas Metamedia. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 Jurusan Matematika di Universitas Andalas dan melanjutkan pendidikan S2 Jurusan Matematika juga di Universitas Andalas.

BIODATA PENULIS



Rini Yunita, S.Si, M.Sc

Dosen LLDIKTI Wilayah X

Pada Sekolah Tinggi Teknologi Payakumbuh

Penulis lahir di Padang pada tanggal 16 Juni 1984. Penulis saat ini mengajar pada Program Studi Teknik Komputer dan Teknik Sipil pada Sekolah Tinggi Teknologi Payakumbuh. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 Jurusan Matematika di Universitas Negeri Padang kemudian melanjutkan pendidikan S2 Jurusan Matematika di Universitas Gajah Mada.

Penulis merupakan dosen aktif di Sekolah Tinggi Teknologi Payakumbuh. Penulis mengampu mata kuliah Matematika Dasar, Aljabar Linear, Statistika, Matematika I dan II, dan Matematika Teknik.

BIODATA PENULIS



Prof. Dr. Ir. Erniati. ST., MT.

Dosen Program Studi Teknik Sipil
Fakultas Teknik Universitas Fajar

Penulis lahir di Watampone, 06 Oktober 1977. Penulis anak ke dua dari pasangan Drs. H. Bachtiar Rasyid (Alm) dan Hj. Hatijah Nur. Penulis menikah dengan Dr. Nur Zaman, SP., M.Si pada tahun 2006 dan Penulis telah memiliki 1 putra 2 putri yaitu Fitrah Alif Firmasnyah, Fadhilah Dwi Fatimah dan Faiqah Fauziah. Penulis menyelesaikan studinya S1–Sarjana Teknik (S.T) pada Jurusan Teknik Sipil Universitas Muslim Indonesia (UMI) tahun 2000, S2 –Magister Teknik (M.T) Jurusan Teknik Sipil Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 2003, S3–Program Doktor (Dr) Program studi ilmu Teknik sipil Universitas Hasanuddin (UNHAS) tahun 2015. Mengikuti Program Profesi Insinyur (PPI) di UNHAS tahun 2019 dan telah peroleh gelar Insinyur (Ir) Tahun 2020. Bergabung jadi Dosen Tetap pada Universitas Fajar sejak tahun 2008 - sekarang. Penulis telah meraih Guru Besar menjelang umur 45 tahun tepatnya pada tanggal 1 Oktober 2022 di bidang Teknik Struktur dan Material. Penulis merupakan Guru Besar Pertama di Prodi Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Fajar. Penulis mengampuh mata kuliah Kalkulus, Teknologi Bahan, Statika, Konstruksi Beton 1 dan 2, Topik Khusus Struktur, Teknologi Bahan lanjut. Penulis sangat tertarik tentang penelitian tentang Self Compacting Concrete (SCC), Beton Geopolimer dengan Bahan Dasar Limbah

136

Fly Ash, Beton Ringan dengan Agregat Buatan dari Limbah Plastik. Penulis telah menulis beberapa jurnal nasional dan internasional dan buku. Penulis sebagai Ketua Lembaga Pengembangan dan Penjaminan Mutu Internal LP2MI (2015-2019), Dekan FT (2019-sekarang), asesor BKD dan Verifikator Sinta serta Ketua Tim PAK pada Universitas Fajar. SINTA ID: 5975589; Scopus ID:56568222900, email: erni@unifa.ac.id. HP/wa: 081354937610.

BIODATA PENULIS

Rahmi Wahyuni, M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Almuslim

Penulis lahir di Bireuen tanggal 20 Desember 1987. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Al MUslim. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Prodi Pendidikan Matematika Universitas Syiah Kuala dan melanjutkan S2 pada Prodi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan. Semoga karya ini dapat bermanfaat untuk khalayak ramai dan memperkaya pengetahuan kita.

BIODATA PENULIS



Dr. Ariyani Muljo, M.Pd

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Pendidikan

Ariyani Muljo., Lahir di Dumai, 19 Agustus 1985, menghabiskan masa studi SD sampai SMA di kampung halaman di Dumai. Kemudian melanjutkan Pendidikan S1 di UIN Suska Riau lulus 2007, Pendidikan S2 di UNP Padang lulus 2009 dan Pendidikan S3 di UM Malang lulus 2022. Saat ini aktif sebagai dosen Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan di IAIN Langsa. Selain itu aktif menulis buku dan artiker jurnal.

Email: ariyanimulyo41@gmail.com dan Hp. 0895414542572.

BIODATA PENULIS



Ardiana Fatma Dewi, S.tat., M.Stat
Dosen Program Studi Tadris Matematika
Fakultas Tarbiyah
Institut Agama Islam Negeri (IAIN) Kediri

Penulis lahir di Kediri pada tanggal 23 Desember 1996. Anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Kediri. Menyelesaikan pendidikan S1 Jurusan Statistika di Universitas Brawijaya (UB) Malang pada tahun 2019. Penulis melanjutkan S2 pada Jurusan Statistika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya menyelesaikan studi pada tahun 2021.

Penulis aktif menjadi dosen sejak tahun 2022, dan awal mula berkarir di IAIN Kediri dengan beberapa mata kuliah statistika dan matematika yang diampu. Berawal dari bangku kuliah yang dipercaya dosen menjadi asisten mata kuliah *Time Series* sehingga membawa peneliti memilih berkarir menjadi seperti yang sekarang ini menjadi seorang pengajar. Penulis menekuni bidang meneliti dan menulis dalam berbagai bidang statistika dan matematika. Buku ini merupakan karya pertamanya. Penulis dapat dihubungi melalui *e-mail* berikut ardianafatmadewi@iainkediri.ac.id

BIODATA PENULIS



Karyadi, S.T., M.T.

Dosen Program Studi Teknik Mesin
Fakultas Teknik Universitas Buana Perjuangan Karawang

Penulis lahir di Karawang 09 Februari 1990 Provinsi Jawa Barat. Penulis merupakan dosen tetap Universitas Buana Perjuangan Karawang Prodi Teknik Mesin Fakultas Teknik. Penulis menyelesaikan S1 pada Program Studi Teknik Mesin DI Universitas Singaperbangsa Karawang dan Melanjutkan S2 Magister Teknik Mesin Universitas Pancasila Jakarta dengan keahlian Bidang proses Pproduksi Manufaktur.

BIODATA PENULIS



Novrianti, S.Si., M.Si., Ph.D.

Dosen Program Studi Teknik Mesin
Sekolah Tinggi Teknologi Nasional (STITEKNAS) Jambi

Penulis lahir di Jambi, 27 November 1989. Penulis merupakan dosen LLDIKTI X yang ditempatkan di STITEKNAS Jambi sejak April 2015. Menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas. Kemudian pada tahun 2018 melanjutkan pendidikan S3 di *Gifu University*, Jepang. Kelompok keahlian penulis adalah Matematika Terapan, dan sedang melanjutkan penelitian dalam berbagai bidang terkait. Disamping sebagai seorang Dosen, penulis juga merupakan guru lepas (*freelance tutor*) pada lembaga bimbingan belajar Nurul Fikri di Padang (2011 – 2015), dan melanjutkan di Nurul Fikri Jambi (2015 – sekarang).

BIODATA PENULIS



Kurnia Ahadiyah, S. Si., M. Si.

Dosen Program Studi Tadris Matematika
Fakultas Tarbiyah Institut Agama Islam Negeri Kediri

Penulis lahir di Sidoarjo tanggal 11 Februari 1992. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah, Institut Agama Islam Negeri Kediri. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika di Universitas Jember dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika di Universitas Jember.

Penulis aktif menjadi dosen sejak tahun 2018, tepat 1 tahun setelah kelulusan S2. Awal mula penulis berkarir di IAIN Kediri dengan mengajar beberapa mat kuliah, diantaranya adalah Kalkulus Integral, Kalkulus Lanjut, dan Statistika dan Ilmu Peluang. Selain ilmu matematika murni, penulis juga menekui ilmu statistika selama menempuh Pendidikan S1 sampai saat ini.

BIODATA PENULIS



Sedyanto, S.T., M.M.

Penulis adalah salah satu dosen di Universitas Mercu Buana. Ia menyelesaikan Pendidikan sarjana program studi teknik kimia di Institut Teknologi Sepuluh Nopember tahun 1995. Program Magister Manajemen diselesaikannya di Universitas Budi Luhur tahun 2008. Penulis sudah menulis beberapa artikel ilmiah yang telah diterbitkan dalam jurnal nasional.