

MATRIKULASI MATEMATIKA DASAR

Yenny Anggreini Sarumaha

Hartina Husain

Eni Defitriani

Beatric Videlia Remme'

Rifka Agustianti

Hersiyati Palayukan

Irmayani

Yusem Ba'ru

A. Ika Putriani

Inelsi Palengka

Lita Lovia

Evy Lalan Langi'

Afnaria



GET PRESS INDONESIA

MATRIKULASI MATEMATIKA DASAR

Penulis :

Yenny Anggreini Sarumaha
Hartina Husain
Eni Defitriani
Beatric Videlia Remme'
Rifka Agustianti
Hersiyati Palayukan
Irmayani
Yusem Ba'ru
A. Ika Putriani
Inelsi Palengka
Lita Lovia
Evy Lalan Langi'
Afnaria

ISBN :

Editor : Dr. Neila Sulung, S.Pd., Ns., M.Kes.

Penyunting : Tri Putri Wahyuni, S.Pd

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd

Penerbit : GET PRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :

Jln. Palarik Air Pacah No 26 Kel. Air Pacah
Kec. Koto Tangah Kota Padang Sumatera Barat
Website : www.getpress.co.id
Email : adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, Desember 2023

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan
dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Segala Puji dan syukur atas kehadiran Allah SWT dalam segala kesempatan. Sholawat beriring salam dan doa kita sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW. Alhamdulillah atas Rahmat dan Karunia-Nya penulis telah menyelesaikan Buku Matrikulasi Matematika Dasar ini.

Buku ini membahas Bilangan Bulat, Bilangan Pecahan, Desimal, Persamaan Linear, Persentase dan Rasio, Geometri Dasar, Volume dan Luas, Sistem Koordinat, Fungsi dan Grafik, Teori Peluang, Statistik Dasar, Trigonometri Dasar, Permutasi dan Kombinasi.

Proses penulisan buku ini berhasil diselesaikan atas kerjasama tim penulis. Demi kualitas yang lebih baik dan kepuasan para pembaca, saran dan masukan yang membangun dari pembaca sangat kami harapkan.

Penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung dalam penyelesaian buku ini. Terutama pihak yang telah membantu terbitnya buku ini dan telah mempercayakan mendorong, dan menginisiasi terbitnya buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi masyarakat Indonesia.

Padang, Desember 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	
DAFTAR TABEL	
BAB 1 BILANGAN BULAT	1
1.1 Pendahuluan.....	1
1.2 Sifat-sifat Bilangan Bulat.....	2
1.3 Bilangan Bulat dan Pangkat Rasional	3
1.3.1 Notasi Pangkat.....	3
1.3.2 Aturan Hasil Kali untuk Perpangkatan.....	3
1.3.3 Aturan Pangkat untuk Eksponen.....	4
1.3.4 Aturan Pangkat Negatif dan Hasil Bagi.....	5
1.3.5 Ekspresi $a1n$	7
1.3.6 Ekspresi amn	7
1.4 Radikal	8
1.4.1 Ekspresi radikal dan perpangkatan.....	9
1.4.2 Evaluasi nan	10
1.5 Fungsi Bilangan Bulat Terbesar	11
1.6 Notasi Saintifik.....	12
1.7 Penggunaan Bilangan Bulat	13
DAFTAR PUSTAKA	15
BAB 2 BILANGAN PECAHAN	17
2.1 Pendahuluan.....	17
2.2 Jenis Jenis Pecahan.....	17
2.2.1 Pecahan Biasa.....	17
2.2.2 Pecahan Desimal	18
2.2.3 Pecahan Bentuk Persen	18
2.2.4 Pecahan Campuran	18
2.3 Operasi Pecahan	19
2.3.1 Penjumlahan dan Pengurangan Pecahan	19
2.3.2 Perkalian Pecahan.....	19
2.3.3 Pembagian Pecahan.....	19
2.4 Menyederhanakan, Membandingkan, dan Mengurutkan Pecahan.....	20
2.4.1 Menyederhanakan Pecahan	20

2.4.2 Membandingkan Pecahan.....	21
2.4.3 Mengurutkan Pecahan.....	21
2.5 Mengubah Bentuk Pecahan.....	22
2.5.1 Mengubah pecahan biasa ke desimal.....	22
2.5.2 Mengubah pecahan biasa ke persen.....	22
2.5.3 Mengubah pecahan biasa ke campuran.....	22
2.5.4 Mengubah desimal ke pecahan biasa.....	23
2.5.5 Mengubah desimal ke persen.....	23
2.5.6 Mengubah desimal ke campuran.....	23
2.5.7 Mengubah persen ke pecahan biasa.....	24
2.5.8 Mengubah persen ke desimal.....	24
2.6 Pembulatan dan Penaksiran.....	24
2.6.1 Pembulatan.....	24
2.6.2 Penaksiran.....	25
DAFTAR PUSTAKA.....	28
BAB 3 DESIMAL.....	29
3.1 Pendahuluan.....	29
3.2 Notasi Desimal.....	30
3.3 Mengubah Bilangan Desimal.....	31
3.3.1 Mengubah Pecahan Biasa ke Pecahan Desimal.....	31
3.3.2 Mengubah Pecahan Desimal ke Pecahan Biasa.....	34
3.4 Perbandingan Bilangan Desimal.....	34
3.5 Pembulatan Bilangan Desimal.....	35
3.6 Operasi Hitung Bilangan Desimal.....	36
3.6.1 Penjumlahan dan Pengurangan.....	36
3.6.2 Perkalian dan Pembagian.....	37
DAFTAR PUSTAKA.....	39
BAB 4 PERSAMAAN LINEAR.....	41
4.1 Pendahuluan.....	41
4.2 Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linear.....	42
4.2.1 Operasi Baris Elementer.....	44
4.2.2 Metode Invers Matriks.....	46
DAFTAR PUSTAKA.....	49
BAB 5 PERSENTASE DAN RASIO.....	51
5.1 Definisi Pecahan.....	51
5.1.1 Bentuk-bentuk pecahan.....	53
5.1.2 Operasi pada pecahan.....	53

5.2 Definisi Rasio	54
5.2.1 Rasio Dua Besaran Satuannya Serupa	55
5.2.2 Rasio Dua Besaran dengan Satuan Berbeda.....	56
DAFTAR PUSTAKA	58
BAB 6 GEOMETRI DASAR	59
6.1 Pengertian Geometri	59
6.2 Titik, Garis, Bidang	60
6.2.1 Titik (Point).....	61
6.2.2 Garis (Lane).....	62
6.2.3 Bidang	62
6.2.4 Ruang.....	63
6.3 Sudut.....	64
6.3.1 Definisi sudut.....	64
6.3.2 Ukuran Sudut dalam Derajat.....	65
6.3.3 Ukuran Sudut dalam Radian	66
6.4 Hubungan antara titik, garis dan bidang dalam ruang	67
6.4.1 Hubungan titik dengan garis dan bidang.....	67
6.4.2 Hubungan garis dengan garis.....	67
6.4.3 Hubungan garis dengan bidang.....	68
6.5 Jarak titik, garis dan bidang dalam ruang	69
6.5.1 Jarak antara titik dengan garis.....	69
6.5.2 Jarak antara titik dengan bidang	69
6.5.3 Jarak antara titik dengan bidang	70
6.5.4 Jarak antara bidang dengan bidang	70
6.6 Sudut antara garis dan bidang	71
6.6.1 Sudut antara garis yang saling bersilangan	71
6.6.2 Sudut antara bidang dan bidang	71
DAFTAR PUSTAKA	73
BAB 7 VOLUME DAN LUAS	75
7.1 Pendahuluan.....	75
7.2 Luas Permukaan	75
7.2.1 Kubus.....	75
7.2.2 Balok.....	76
7.2.3 Prisma	77
7.2.4 Limas.....	78
7.2.5 Tabung.....	80
7.2.6 Kerucut.....	80

7.3 Volume	82
7.3.1 Kubus.....	82
7.3.2 Balok.....	83
7.3.3 Prisma	83
7.3.4 Limas.....	85
7.3.5 Kerucut.....	87
DAFTAR PUSTAKA	88
BAB 8 SISTEM KOORDINAT	89
8.1 Sistem Koordinat Kartesian	89
8.1.1 Titik Dalam Koordinat Kartesius.....	92
8.1.2 Jarak Titik Dengan Titik.....	93
8.1.3 Koordinat Titik Pada Suatu Garis.....	95
8.2 Sistem Koordinat Kutub.....	98
DAFTAR PUSTAKA	103
BAB 9 FUNGSI DAN GRAFIK.....	105
9.1 Fungsi	105
9.1.1 Definisi Fungsi.....	105
9.1.2 Fungsi Surjektif, Fungsi Injektif, dan Fungsi Bijektif	108
9.1.3 Operasi pada Fungsi	110
9.1.4 Fungsi Invers.....	111
9.1.5 Fungsi Komposisi.....	113
9.2 Grafik Fungsi.....	115
9.2.1 Fungsi Konstan.....	115
9.2.2 Fungsi Linier	116
9.2.3 Fungsi Kuadrat	117
9.2.4 Fungsi Kubik.....	118
DAFTAR PUSTAKA	121
BAB 10 TEORI PELUANG	123
10.1 Pendahuluan.....	123
10.2 Pengertian Teori Peluang	123
10.3 Sejarah Teori Peluang.....	125
10.4 Tokoh Teori Peluang.....	127
10.5 Dasar-Dasar Teori Peluang.....	129
10.5.1 Ruang Sampel.....	129
10.5.2 Titik Sampel.....	129
10.5.3 Kejadian.....	129
10.6 Permutasi.....	130

10.7 Kombinasi.....	130
10.8 Jenis-Jenis Peluang.....	131
10.8.1 Peluang Bersyarat.....	131
10.8.2 Peluang Tidak Bersyarat.....	131
10.9 Penerapan Teori Peluang dalam Kehidupan	
Sehari-hari.....	133
10.9.1 Penerapan Teori' Peluang dalam 'Berbisnis	133
10.9.2 Penerapan Peluang' dalam Mengambil'	
Keputusan	133
10.9.3 Penerapan Peluang' pada Ramalan' Cuaca.....	133
DAFTAR PUSTAKA.....	135
BAB 11 STATISTIK DASAR.....	137
11.1 Pendahuluan	137
11.2 Beberapa Pengertian dasar dalam Statistika	137
11.2.1 Statistik dan Statistika.....	137
11.2.2 Populasi dan Sampel	138
11.2.3 Pengertian Dantum dan Data	138
11.2.4 Jenis-jenis Data.....	138
11.2.5 Pengumpulan, Pembulatan, dan Pemeriksaan	
data.....	139
11.3 Distribusi Frekuensi	139
11.3.1 Distribusi Frekuensi Data Tunggal.....	140
11.3.2 Distribusi Frekuensi Data Berkelompok	141
11.4 Penyajian Data	143
11.4.1 Penyajian Data dalam Bentuk Tabel	143
11.4.2 Penyajian Data dalam Bentuk Diagram	
Lingkaran.....	143
11.4.2 Penyajian Data dalam Bentuk Diagram Batang	144
11.4.3 Penyajian Data dalam Bentuk Histogram	145
11.5 Ukuran Pemusatan	146
11.5.1 Data Tunggal	146
11.5.2 Data Berkelompok.....	147
11.6 Ukuran Letak.....	149
11.6.1 Kuartil	149
11.6.3 Desil	152
11.6.4 Persentil	153
11.7 Ukuran Penyebaran.....	154

11.7.1 Range/jangkauan/wilayah	154
11.7.2 Simpangan Rata-rata (Deviasi Rata-rata).....	154
11.7.3 Ragam dan simpangan Baku (Deviasi Standar)	155
DAFTAR PUSTAKA	156
BAB 12 TRIGONOMETRI DASAR	157
12.1 Pendahuluan.....	157
12.2 Sudut dan Ukuran Sudut	157
12.3 Fungsi Trigonometri dari Suatu Sudut	159
12.3.1 Sudut Dalam Posisi Standar	159
12.3.2 Fungsi Trigonometri dari Suatu Sudut Umum	159
12.4 Fungsi Trigonometri dari Dua Sudut	162
12.5 Reduksi ke Fungsi-fungsi dari Sudut Lancip Positif.....	165
DAFTAR PUSTAKA	169
BAB 13 PERMUTASI DAN KOMBINASI.....	171
13.1 Pendahuluan.....	171
13.2 Aturan Perkalian.....	171
13.3 Permutasi.....	174
13.4 Permutasi Siklis.....	177
13.5 Kombinasi.....	178
DAFTAR PUSTAKA	181
BIODATA PENULIS	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. Garis bilangan	1
Gambar 1.2. Fungsi Bilangan Bulat Terbesar	12
Gambar 4.1. Garis Penyelesaian Sistem Persamaan Linear	42
Gambar 6.1. Titik A.....	62
Gambar 6.2. Garis AB.....	62
Gambar 6.3. Bidang ABCD	63
Gambar 6.4. Ruang.....	64
Gambar 6.5. Sudut berdasarkan arah putaran.....	64
Gambar 6.6. Sudut sebagai Jarak Putar	65
Gambar 6.7. Ukuran Sudut dalam Radian.....	67
Gambar 6.8. Hubungan garis dengan Bidang.....	68
Gambar 6.9. Jarak antara titik dengan Garis	69
Gambar 6.10. Proyeksi Titik pada Bidang	69
Gambar 6.11. Jarak garis dengan garis	70
Gambar 6.12. Jarak Bidang dengan Bidang	71
Gambar 6.13. Sudut antara garis dengan garis.....	71
Gambar 6.14. Sudut antar Bidang dengan bidang.....	72
Gambar 7.1. Kubus.....	76
Gambar 7.2. Balok.....	77
Gambar 7.3. Prisma.....	78
Gambar 7.4. Prisma.....	79
Gambar 7.5. Prisma.....	80
Gambar 7.6. Prisma.....	81
Gambar 7.7. Prisma.....	81
Gambar 7.8. Kubus	82
Gambar 7.9. Kubus.....	82
Gambar 7.10. Balok.....	83
Gambar 7.11. Prisma.....	84
Gambar 7.12. Prisma.....	84
Gambar 7.13. Limas	85
Gambar 7.14. Prisma.....	85
Gambar 7.15. Tabung.....	86
Gambar 7.16. Tabung.....	87
Gambar 8.1. Rene Descartes.	89

Gambar 8.2. Pembagian kuadran.....	91
Gambar 8.3. Letak Titik dalam Koordinat Kartesius	93
Gambar 8.4. Jarak titik dalam koordinat kartesius.....	94
Gambar 8.5. Jarak Titik Dalam Koordinat Kartesius	95
Gambar 8.6. Letak Titik Koordinat Dalam Ruas Garis Jika Diketahui Perbandingannya.....	96
Gambar 8.7. Koordinat Kutub	99
Gambar 8.8. Koordinat Kutub Dengan Perputaran 310° Berlawanan Jarum Jam	99
Gambar 8.9. Koordinat Kutub Dengan Perputaran 110° Berlawanan Jarum Jam.....	99
Gambar 8.10. Koordinat Kutub Dengan Perputaran 50° searah Jarum Jam	100
Gambar 8.11. Hubungan Antara Koordinat Kutub Dengan Koordinat Kartesius	100
Gambar 9.1. Pemetaan fungsi.....	106
Gambar 9.2. Diagram yang mengilustrasikan fungsi dan bukan fungsi	107
Gambar 9.3. (a) Fungsi Surjektif (b) Bukan Fungsi Surjektif.....	109
Gambar 9.4. (a) Fungsi Injektif (b) Bukan Fungsi Injektif	109
Gambar 9.5. (a) Fungsi Bijektif (b) Bukan Fungsi Bijektif	110
Gambar 9.6. Fungsi Komposisi $g \circ f$	113
Gambar 9.7. Grafik Fungsi Konstan	116
Gambar 9.8. Grafik Fungsi Linier	117
Gambar 9.10. Grafik Fungsi Kuadrat	118
Gambar 9.11. Grafik Fungsi Kubik.....	119
Gambar 12.1. Sudut Bidang XOP	157
Gambar 12.2. Arah Rotasi Garis	158
Gambar 12.3. Sudut Satu Radian	158
Gambar 12.4. Sudut θ Dalam Posisi Standar	160
Gambar 12.5. Tanda Fungsi Trigonometri di Berbagai Kuadran	161
Gambar 12.6. Segitiga Siku-siku ABC	163
Gambar 12.7. Segitiga ABC pada Sistem Koordinat	163

Gambar 12.8. Sudut Negatif.....165

Gambar 12.9. Segitiga Siku-siku ABC 166

Gambar 12.10. Sudut di Kuadran II.....167

Gambar 3.1. Diagram Pohon173

DAFTAR TABEL

Tabel 11.1. Tabel distribusi Frekuensi data tunggal	141
Tabel 11.2. Tabel distribusi Frekuensi data kelompok	142
Tabel 11.3. Jumlah Akte Kelahiran yang Diterbitkan Menurut Kecamatan (dokumen)	143
Tabel 12.1. Fungsi Trigonometri dari Sudut Kuadrantal	162

BAB 1

BILANGAN BULAT

Oleh Yenny Anggreini Sarumaha

1.1 Pendahuluan

Bilangan asli dapat dinyatakan sebagai himpunan dengan notasi $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Jika dalam himpunan tersebut ditambahkan 0, notasinya menjadi $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ atau yang biasa dikenal sebagai bilangan cacah (Lial, Salzman and Hestwood, 2014). Jika himpunan bilangan cacah ini ditambahkan dengan bilangan negatif dari bilangan asli, maka akan diperoleh himpunan bilangan bulat, yang dinotasikan sebagai $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (McKeague, 2010; Aufmann, Barker and Nation, 2011; Stewart, Redlin and Watson, 2016; Sullivan, 2020; Lial *et al.*, 2021; Davidson and Satriano, 2023). Bilangan bulat terdiri dari 0, bilangan asli, dan kebalikan dari bilangan asli (Martin-Gay, 2019). Bilangan bulat dapat digambarkan dalam garis bilangan sebagai berikut :



Gambar 1.1. Garis bilangan
(Sumber: (Martin-Gay, 2019))

Pada Gambar 1.1 dapat dilihat bahwa setiap bilangan berkorespondensi dengan satu dan hanya satu titik pada garis bilangan. Begitu pula sebaliknya, setiap titik berkorespondensi dengan satu dan hanya satu bilangan. Bilangan yang berasosiasi dengan titik yang dimilikinya dapat disebut sebagai koordinat dari titik tersebut (Lial *et al.*, 2021). Korespondensi yang terjadi ini membentuk sistem koordinat.

Hasil pembagian dari dua bilangan bulat (dengan penyebut selain 0) adalah bilangan rasional atau pecahan. Bilangan rasional adalah himpunan yang dapat didefinisikan sebagai (Larson, 2016)

$\left\{\frac{p}{q} \mid p \text{ dan } q \text{ adalah bilangan bulat dan } q \neq 0\right\}$.

Beberapa bilangan nyata juga dapat direpresentasikan sebagai hasil bagi dari bilangan bulat. Bilangan ini dikenal dengan bilangan irasional.

1.2 Sifat-sifat Bilangan Bulat

Bilangan bulat yang dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$ adalah sebuah himpunan dengan subset yang tidak kosong $\mathbb{P} \subset \mathbb{Z}$ (yang dikenal dengan sebagai bilangan bulat positif, dan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian yang dilambangkan dengan $+$ dan $\cdot$, memenuhi sifat-sifat berikut (Davidson and Satriano, 2023)

1. Bilangan bulat terdiri dari sebuah himpunan $\mathbb{Z}$ bersama dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan ($+$) dan perkalian ($\cdot$).
2. Komutatif. Untuk seluruh bilangan bulat a, b , berlaku $a + b = b + a$ dan $a \cdot b = b \cdot a$
3. Asosiatif. Untuk seluruh bilangan bulat a, b, c , berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. Distributif. Untuk seluruh bilangan bulat a, b, c , berlaku $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
5. Identitas. Terdapat bilangan bulat 0 dan 1 , sedemikian sehingga untuk seluruh bilangan bulat a , berlaku $a + 0 = a$ dan $a \cdot 1 = a$
6. Invers penjumlahan. Untuk setiap bilangan bulat a , terdapat sebuah bilangan bulat $-a$ sehingga $a + (-a) = 0$
7. Penjelasan untuk $\mathbb{P}$. Jika a, b adalah bilangan bulat positif, maka $a + b$ dan $a \cdot b$ adalah bilangan bulat positif.
8. Trikotomi. Untuk setiap bilangan bulat a , terdapat satu dari tiga kemungkinan berikut: a adalah bilangan bulat positif, atau $a = 0$, atau $-a$ adalah bilangan bulat positif.
9. Urutan. Setiap subset tidak kosong dari bilangan bulat positif memiliki sebuah elemen terkecil.

Untuk sifat urutan, elemen terkecil yang dimaksud belum bisa didefinisikan, sehingga dengan kata lain secara formal ditulis: jika S adalah himpunan tak kosong dari bilangan bulat positif, maka S memuat sebuah elemen a sedemikian sehingga untuk setiap b dalam S yang tidak sama dengan a , diperoleh $b - a$ adalah sebuah bilangan bulat positif.

Dalam hal ini, pengurangan tidak didefinisikan karena dianggap cukup termasuk di dalam invers penjumlahan. Dapat ditulis $a - b$ adalah penulisan singkat dari $a + (-b)$. Sifat-sifat di atas dipenuhi oleh bilangan bulat begitu pula dengan beberapa himpunan matematika yang lainnya. Misalnya himpunan $\mathbb{R}$ dari bilangan nyata dan $\mathbb{Q}$ himpunan bilangan rasional (pecahan). Begitu pula dengan himpunan $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, dengan operasi yang memenuhi keseluruhan sifat-sifat tersebut.

1.3 Bilangan Bulat dan Pangkat Rasional

1.3.1 Notasi Pangkat

Bilangan bulat juga digunakan dalam penulisan pangkat (Lial *et al.*, 2021; Davidson and Satriano, 2023). Jika n adalah bilangan bulat positif dan a adalah bilangan nyata, maka pangkat ke n dari a dapat ditulis menggunakan notasi eksponensial sebagai berikut (Larson, 2016)

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

Dengan kata lain a^n (di mana n adalah sebuah bilangan bulat positif dan a adalah bilangan riil) berarti bahwa a dikalikan sebanyak n kali (Larson, 2016).

Contoh

- $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$
- $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
- $-3^3 = -(3 \cdot 3 \cdot 3) = -27$

1.3.2 Aturan Hasil Kali untuk Perpangkatan

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dan a adalah bilangan riil

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Atau, ketika mengalikan pangkat seperti halnya basis, dengan basis yang sama dan pangkatnya ditambahkan.

Contoh: menggunakan aturan hasil kali
Sederhanakan ekspresi berikut

- $y^3 \cdot y^5$
- $(2z^5)(5z^3)(3z)$

Solusi

- $y^3 \cdot y^5 = y^{3+5} = y^8$
- $$(2z^5)(5z^3)(3z)$$

$$= (2 \cdot 5 \cdot 3) \cdot (z^5 z^3 z^1)$$

$$= 30z^{5+3+1}$$

$$= 30z^9$$

Kita juga dapat menyederhanakan bentuk seperti $(5^3)^2$ sebagai berikut:

$$(5^3)^2 = 5^3 \cdot 5^3 = 5^{3+3} = 5^6$$

Perhatikan bahwa $3 \cdot 2 = 6$. Contoh ini kemudian dituangkan dalam Aturan Pangkat untuk Eksponen.

1.3.3 Aturan Pangkat untuk Eksponen

Untuk seluruh bilangan bulat m dan n dan seluruh bilangan nyata a dan b , aturan berikut adalah benar.

Aturan	Contoh	Keterangan
Aturan Pangkat 1 $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^5)^3 = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5$ $= 2^{5+5+5}$ $= 2^{5 \cdot 3}$ $= 2^{15}$	Untuk memangkatkan sebuah pangkat, kalikan eksponen nya
Aturan Pangkat 2 $(ab)^m = a^m b^m$	$(3x)^2 = (3x)(3x)$ $= (3 \cdot 3)(x \cdot x)$ $= 3^2 x^2$	Untuk memperoleh hasil perkalian pangkat, setiap faktor diapangkatkan.
Aturan Pangkat 3 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ($b \neq 0$)	$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{5}{7}\right)$ $= \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 7}$	Untuk memperoleh hasil bagi berpangkat, pembilang dan penyebut masing-

$$= \frac{5^2}{7^2} \quad \text{masing dipangkatkan}$$

Contoh penggunaan aturan pangkat

Sederhanakan. Asumsikan seluruh variabel yang ada adalah bilangan nyata bukan nol.

a. $(7^2)^3$ b. $(3^2 x^4)^3$ c. $\left(\frac{2^3}{a^2}\right)^4$ d. $\left(-\frac{3y^5}{n^2 m}\right)^3$

Solusi

a. $(7^2)^3 = 7^{2(3)} = 7^6$
b. $(3^2 x^4)^3 = (3^2)^3 (x^4)^3 = 3^{2(3)} x^{4(3)} = 3^6 x^{12}$
c. $\left(\frac{2^3}{a^2}\right)^4 = \frac{(2^3)^4}{(a^2)^4} = \frac{2^{12}}{a^8}$
d. $\left(-\frac{3y^5}{n^2 m}\right)^3 = \frac{(-3y^5)^3}{(n^2 m)^3} = \frac{(-3)^3 (y^5)^3}{(n^2)^3 m^3} = -\frac{27y^{15}}{n^6 m^3}$

Perlu diperhatikan bahwa ekspresi mn^2 dan $(mn)^2$ tidak ekuivalen. Ekspresi kedua dapat disederhanakan menggunakan aturan pangkat kedua, sehingga $(mn)^2 = m^2 n^2$.

1.3.4 Aturan Pangkat Negatif dan Hasil Bagi

Misalkan n adalah sebuah bilangan bulat positif dan a^{-n} didefinisikan sehingga konsisten dengan palikasi dari aturan pangkat. Perhatikan hasil kali $a^n \cdot a^{-n}$, dan aplikasikan aturan.

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$$

Ekspresi a^{-n} merupakan kebalikan dari a^n , yang dapat ditulis sebagai $\frac{1}{a^n}$, sehingga kedua ekspresi ini ekuivalen.

1. Pangkat Negatif

Misalkan a adalah bilangan nyata tak nol dan n adalah sebuah bilangan bulat.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Contoh penggunaan definisi dari pangkat negatif

Tuliskan setiap ekspresi tanpa pangkat negatif. Asumsikan seluruh variabel merepresentasikan bilangan nyata tak nol.

$$\text{a. } 3^{-2} \quad \text{b. } -3^{-2} \quad \text{c. } \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} \quad \text{d. } (mn)^{-2} \quad \text{e. } mn^{-2}$$

Solusi

$$\begin{aligned} \text{a. } 3^{-2} &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \\ \text{b. } -3^{-2} &= -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9} \\ \text{c. } \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} &= \frac{1}{\left(\frac{2}{7}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{343}} = 1 \div \frac{8}{343} = 1 \cdot \frac{343}{8} = \frac{343}{8} \\ \text{d. } (mn)^{-2} &= \frac{1}{(mn)^2} = \frac{1}{m^2 n^2} \\ \text{e. } mn^{-2} &= m \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m}{n^2} \end{aligned}$$

Perlu diperhatikan bahwa pangkat negatif menunjukkan kebalikan bukan pertukaran tanda dari suatu ekspresi. Pada contoh c terlihat bahwa $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \frac{343}{8} = \left(\frac{7}{2}\right)^3$, Jika dibuatkan generalisasinya. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, maka untuk bilangan bulat n , pernyataan berikut terbukti benar.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

b. Hasil Bagi

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dan a adalah bilangan nyata bukan nol.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Terlihat bahwa, ketika membagi pangkat dengan bilangan dasar yang sama, bilangan dasar tetap dijaga (tidak berubah) dan pangkat pembilang dikurangi pangkat penyebut.

Contoh penggunaan aturan hasil bagi

Sederhanakan setiap ekspresi berikut. Asumsikan seluruh variabel merepresentasikan bilangan nyata bukan nol.

$$\text{a. } \frac{14^7}{14^3} \quad \text{b. } \frac{c^3}{c^{-5}} \quad \text{c. } \frac{8t^{-6}}{16t^{11}} \quad \text{d. } \frac{35k^9z^7}{20k^{11}z}$$

Solusi

$$\text{a. } \frac{14^7}{14^3} = 14^{7-3} \quad \text{b. } \frac{c^3}{c^{-5}} = c^{3-(-5)} = c^8$$

$$\text{c. } \frac{8t^{-6}}{16t^{11}} = \frac{8}{16} \cdot t^{-6-11} = \frac{1}{2} t^{-17} = \frac{1}{2t^{17}}$$

$$\text{d. } \frac{35k^9z^7}{20k^{11}z} = \frac{35}{20} \cdot \frac{k^9}{k^{11}} \cdot \frac{z^7}{z} = \frac{7}{4} k^{9-11} z^{7-1} = \frac{7}{4} k^{-2} z^6 = \frac{7z^6}{4k^2}$$

1.3.5 Ekspresi $a^{\frac{1}{n}}$

Kita dapat mengidentifikasi dua kemungkinan untuk ekspresi $a^{\frac{1}{n}}$, sebagai berikut

$a^{\frac{1}{n}}, n$ genap Jika n adalah bilangan bulat genap positif, dan jika $a > 0$, maka $a^{\frac{1}{n}}$ adalah bilangan nyata positif yang pangkat ke- n nya adalah a . Sehingga, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

(Dalam kasus ini, $a^{\frac{1}{n}}$ adalah akar ke n dari a).

$a^{\frac{1}{n}}, n$ ganjil Jika n adalah bilangan bulat positif ganjil, dan a adalah bilangan nyata bukan nol, maka $a^{\frac{1}{n}}$ adalah bilangan nyata positif atau negatif yang pangkat ke- n nya adalah a . Sehingga $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

Untuk seluruh bilangan bulat positif n , $0^{\frac{1}{n}} = 0$.

Menggunakan definisi $a^{\frac{1}{2}}$

Evaluasi setiap ekspresi berikut

$$\text{a. } 49^{\frac{1}{2}} \quad \text{b. } -(225)^{\frac{1}{2}} \quad \text{c. } -1296^{\frac{1}{4}} \quad \text{d. } (-27)^{\frac{1}{3}}$$

Solusi

$$\text{a. } 49^{\frac{1}{2}} = 7 \text{ karena } 7^2 = 49.$$

$$\text{b. } -(225)^{\frac{1}{2}} = -15$$

$$\text{c. } -1296^{\frac{1}{4}} = -6$$

$$\text{d. } (-27)^{\frac{1}{3}} = -3$$

1.3.6 Ekspresi $a^{\frac{m}{n}}$

Misalkan m adalah sembarang bilangan bulat. n adalah bilangan bulat positif, dan a adalah bilangan nyata di mana $a^{\frac{1}{n}}$ adalah bilangan nyata.

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Menggunakan definisi $a^{\frac{m}{n}}$

Evaluasi tiap ekspresi berikut

a. $27^{\frac{2}{3}}$ b. $-81^{\frac{3}{2}}$ c. $16^{-\frac{3}{4}}$ d. $(-2)^{\frac{3}{2}}$

Solusi

a. $27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9$

b. $\left(-81^{\frac{3}{2}}\right) = -\left(81^{\frac{1}{2}}\right)^3 = -9^3 = -729$

c. $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

d. $(-2)^{\frac{3}{2}}$ bukanlah bilangan nyata. Hal ini karena $(-2)^{\frac{1}{2}}$ bukanlah bilangan nyata.

Perhatikan bahwa untuk seluruh bilangan nyata a , bilangan bulat m , dan bilangan bulat positif n di mana $a^{\frac{1}{n}}$ adalah bilangan nyata, $a^{\frac{m}{n}}$ dapat diinterpretasikan sebagai berikut

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \text{ atau } a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Sehingga $a^{\frac{m}{n}}$ bisa dievaluasi menjadi $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ atau sebagai $(a^m)^{\frac{1}{n}}$.

$$8^{\frac{4}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 2^4 = 16 \text{ atau } 8^{\frac{4}{3}} = (8^4)^{\frac{1}{3}} = 4096^{\frac{1}{3}} = 16.$$

1.4 Radikal

Kita mengetahui makna dari 2^n ketika n adalah bilangan bulat. Untuk memberikan makna kepada pangkat, seperti $2^{\frac{3}{4}}$, di mana pangkatnya adalah bilangan rasional, kita perlu mendiskusikan tentang radikal (Stewart, Redlin and Watson, 2016). Simbol $\sqrt{}$ bermakna sebagai “akar positif dari”, sehingga $\sqrt{a} = b$ berarti $b^2 = a$ dan $b \geq 0$

Karena $a = b^2 \geq 0$, simbol $\sqrt{a}$ akan memiliki makna ketika $a \geq 0$. Sebagai contoh $\sqrt{4} = 2$ karena $2^2 = 4$ dan $2 \geq 0$. Akar kuadrat adalah kasus khusus dari akar pangkat n .

1.4.1 Ekspresi radikal dan perpangkatan

1. Notasi Radikal untuk $a^{\frac{1}{n}}$

Misalkan a adalah bilangan nyata, n adalah bilangan bulat positif, dan $a^{\frac{1}{n}}$ adalah bilangan nyata (Larson, 2016)

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

2. Notasi Radikal untuk $a^{\frac{m}{n}}$

Misalkan a adalah bilangan nyata, m adalah bilangan bulat, n adalah bilangan bulat positif, dan $\sqrt[n]{a}$ adalah bilangan nyata.

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Mengubah pangkat rasional ke dalam pangkat radikal

Ubahlah ke dalam bentuk radikal dan selesaikan jika memungkinkan. Asumsikan seluruh ekspresi dari variabel menunjukkan bilangan nyata positif.

a. $64^{\frac{2}{3}}$ b. $-16^{\frac{3}{4}}$ c. $2y^{\frac{2}{3}}$ d. $(k + 5l)^{\frac{1}{4}}$

Solusi

a. $64^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{64})^2 = 16^2 = 256$

b. $-16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = -(2)^3 = -8$

c. $2y^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{y^2}$

d. $(k + 5l)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{k + 5l}$

Mengubah pangkat radikal ke dalam pangkat rasional

Ubahlah ke dalam bentuk eksponen. Asumsikan seluruh ekspresi dari variabel menunjukkan bilangan nyata positif.

a. $\sqrt[5]{x^3}$ b. $8(\sqrt[3]{y})^2$ c. $7\sqrt[3]{(3z^4)^5}$ d. $\sqrt{a^2 + b}$

Solusi

a. $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$

b. $8(\sqrt[3]{y})^2 = 8y^{\frac{2}{3}}$

c. $7\sqrt[3]{(3z^4)^5} = 7(3z^4)^{\frac{5}{3}} = 7 \cdot 3^{\frac{5}{3}} z^{\frac{20}{3}}$

d. $\sqrt{a^2 + b} = (a^2 + b)^{\frac{1}{2}}$

1.4.2 Evaluasi $\sqrt[n]{a^n}$

Jika n adalah bilangan bulat positif genap, maka $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Jika n adalah bilangan bulat positif ganjil, maka $\sqrt[n]{a^n} = a$

Menggunakan nilai mutlak untuk menentukan akar

Tentukan tiap akar

a. $\sqrt{a^2}$ b. $\sqrt{b^4}$ c. $\sqrt{16k^8l^6}$ d. $\sqrt{y^2 - 4y + 4}$

Solusi

a. $\sqrt{a^2} = |a|$

b. $\sqrt{b^4} = \sqrt{(b^2)^2} = |b^2| = b^2$

c. $\sqrt{16k^8l^6} = |4k^4l^3| = 4k^4|l^3|$

d. $\sqrt{y^2 - 4y + 4} = \sqrt{(y - 2)^2} = |y - 2|$

Aturan untuk Radikal

Misalkan a dan b merepresentasikan bilangan nyata, dan m dan n merepresentasikan bilangan bulat positif yang akar-akarnya adalah bilangan nyata.

Aturan

Deskripsi

Aturan Hasil Kali

Hasil kali dua bentuk akar adalah akar dari hasil kali.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Aturan Hasil Bagi

Akar dari hasil bagi adalah hasil bagi dari akar-akar.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0$$

Aturan Pangkat

Indeks akar dari akar adalah hasil kali dari indeksnya.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Menggunakan aturan untuk radikal

Gunakan aturan untuk radikal untuk menunjukkan operasi yang diinginkan. Asumsikan seluruh ekspresi variabel merepresentasikan bilangan nyata positif.

a. $\sqrt{18} \cdot \sqrt{32}$

b. $\sqrt[5]{n} \cdot \sqrt[5]{n^4}$

c. $\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}$

d. $\sqrt[7]{\sqrt[5]{3}}$

e. $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

Solusi

a. $\sqrt{18} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{18 \cdot 32} = \sqrt{576} = 24$

b. $\sqrt[5]{n} \cdot \sqrt[5]{n^4} = \sqrt[5]{n^5} = n$

c. $\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{b}$

d. $\sqrt[7]{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[35]{3}$

e. $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2}$ Hasil kali ini tidak dapat ditentukan menggunakan aturan perkalian untuk radikal karena indeks pangkatnya berbeda.

1.5 Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

Fungsi bilangan bulat terbesar $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ memasangkan setiap bilangan nyata x dengan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x (Sullivan and Sullivan III, 2015; Sullivan, 2020).

Sebagai contoh, $\llbracket 8,4 \rrbracket = 8$, $\llbracket -5 \rrbracket = -5$, $\llbracket \pi \rrbracket = 3$, $\llbracket -6,9 \rrbracket = -7$, $\llbracket 0,002 \rrbracket = 0$, $\llbracket -0,5 \rrbracket = -1$.

Grafik dari $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ ditunjukkan pada gambar 3.1. Secara umum, jika $f(x) = \llbracket x \rrbracket$, maka

untuk $-2 \leq x < -1$, $f(x) = -2$,

untuk $-1 \leq x < 0$, $f(x) = -1$,

untuk $0 \leq x < 1$, $f(x) = 0$,

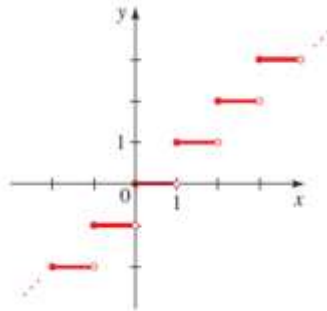
untuk $1 \leq x < 2$, $f(x) = 1$,

untuk $2 \leq x < 3$, $f(x) = 2$, dan seterusnya.

Domain: $(-\infty, \infty)$

Range: $\{y|y \text{ adalah bilangan bulat}\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

x	$\lceil x \rceil$
$\vdots$	$\vdots$
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$



Gambar 1.2. Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

(Sumber : (Stewart, Redlin and Watson, 2016; Lial *et al.*, 2021))

1. Tabel sebelah kiri pada gambar menunjukkan nilai dari f untuk beberapa nilai x .
2. Bulatan-bulatan pada grafik menunjukkan bahwa grafik tersebut berlanjut ke tak hingga dengan pola yang sama.
3. $f(x) = \lceil x \rceil$ adalah konstanta dalam interval terbuka $\dots, (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots$
4. Grafik tersebut diskontinu untuk seluruh nilai bilangan bulat pada domainnya $(-\infty, \infty)$.
5. Fungsi bilangan bulat terbesar adalah salah satu contoh dari fungsi langkah, di mana grafik fungsi membentuk serangkaian langkah.

1.6 Notasi Saintifik

Notasi eksponensial digunakan oleh para ilmuwan sebagai salah satu cara menulis bilangan yang sangat besar atau sangat kecil. Sebagai contoh, untuk menyatakan jarak terdekat bintang Proxima Centauri diperkirakan sejauh 40.000.000.000.000 km. Masa atom Hidrogen adalah sekitar 0,000000000000000000000000000000166 gr. Bilangan tersebut sulit untuk dibaca dan ditulis, sehingga para ilmuwan biasanya menyatakannya dalam notasi saintifik (Larson, 2016).

Sebuah bilangan positif x dikatakan dapat ditulis dalam notasi saintifik jika diekspresikan sebagai berikut (Stewart, Redlin and Watson, 2016)

$x = a \times 10^n$ di mana $1 \leq a < 10$ dan n adalah bilangan bulat (Aufmann, Barker and Nation, 2011).

Ketika kita menyatakan jarak bintang Proxima Centauri adalah 4×10^{13} km, pangkat positif 13 mengindikasikan bahwa nilai tempatnya adalah sebanyak 13 tempat ke sebelah kanan. Sedangkan untuk masa atom Hidrogen adalah $1,66 \times 10^{-24}$ g, pangkat -24 menunjukkan bahwa titik desimal berada sejauh 24 tempat ke sebelah kiri.

Mengubah dari notasi desimal ke dalam notasi saintifik

Tuliskan setiap bilangan ke dalam notasi saintifik

a. 34.750

b. 0,000082

Solusi

a. $34,750 = 3,475 \times 10^4$

b. $0,000082 = 8,2 \times 10^{-5}$

Mengubah dari notasi saintifik ke notasi desimal

a. $2,64 \times 10^9$

b. $3,2617 \times 10^{-6}$

Solusi

a. $2,64 \times 10^9 = 2.640.000.000$

b. $3,2617 \times 10^{-6} = 0,0000032617$

1.7 Penggunaan Bilangan Bulat

Sebuah monomial adalah ekspresi dalam bentuk ax^k , di mana a adalah sebuah bilangan nyata dan k adalah bilangan bulat tak negatif. Sedangkan sebuah binomial adalah jumlah dari dua monomial dan trinomial adalah jumlah dari tiga monomial. Secara umum, jumlah dari monomial disebut sebagai polinomial.

Sebuah polinomial dengan variabel x adalah ekspresi dalam bentuk

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$$

Di mana $a_0, a_1, \dots, a_n$ adalah bilangan nyata dan n adalah bilangan bulat tak negatif. Jika $a_n \neq 0$, maka polinomial memiliki derajat n (Sullivan and Sullivan III, 2015). Monomial $a_k x^k$ yang membentuk polinomial disebut sebagai istilah dari polinomial.

Bilangan bulat juga ditemukan dalam Teorema Nol Rasional, di mana dikatakan bahwa+

Jika polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ memiliki koefisien bilangan bulat (di mana $a_n \neq 0$ dan $a_0 \neq 0$), maka setiap nol rasional dari P dalam bentuk $\frac{p}{q}$ di mana p dan q adalah bilangan bulat dan p adalah faktor dari koefisien konstanta dari a_0 dan q adalah faktor dari koefisien di depan a_n .

Bilangan bulat juga digunakan dalam fungsi trigonometri. Misalkan dalem menentukan domain fungsi $\tan, \sec, \cot$, dan $\csc$. Untuk fungsi $\tan$ dan $\sec$, domainnya adalah seluruh bilangan nyata selain $\frac{\pi}{2} + n\pi$ untuk setiap bilangan bulat n . Sedangkan untuk fungsi $\cot$ dan $\csc$, domainnya terdiri dari seluruh bilangan nyata selain $n\pi$ untuk sembarang bilangan bulat, n .

DAFTAR PUSTAKA

- Aufmann, R.N., Barker, V.C. and Nation, R.D. 2011. *College Algebra and Trigonometry*. Seventh. Belmont: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Davidson, K.R. and Satriano, M. 2023. *Integer and Polynomial Algebra Polynomial Algebra*. Mathematic. Rhode Island: American Mathematical Society.
- Larson, R. 2016. *Algebra and Trigonometry*. Seventh Ed. Boston: Cengage Learning.
- Lial, M.L. et al. 2021. *College Algebra & Trigonometry*. Seventh. New Jersey: Pearson Education Inc.
- Lial, M.L., Salzman, S.A. and Hestwood, D.L. 2014. *Basic College Mathematics Edition*. Ninth. Boston: Pearson Education Inc.
- Martin-Gay, E. 2019. *Basic College Mathematics*. Sixth. Pearson Education Inc.
- McKeague, C.P. 2010. *Basic Mathematics*. Seventh. Belmont: Brooks/Cole.
- Stewart, J., Redlin, L. and Watson, S. 2016. *Algebra and Trigonometry*. Fourth. Boston: Cengage Learning.
- Sullivan, M. 2020. *Algebra & Trigonometry*. Eleventh. Pearson Education Inc.
- Sullivan, M. and Sullivan III, M. 2015. *Precalculus Concept Through Functions, A Unit Circle Approach to Trigonometry*. Third. New Jersey: Pearson Education Inc.

BAB 2

BILANGAN PECAHAN

Oleh Hartina Husain

2.1 Pendahuluan

Pecahan berasal dari bahasa inggris *fraction* dan bahasa latin *fractio* yang berarti memecah. Dengan demikian, istilah bilangan pecahan dapat diartikan sebagai bilangan yang terdiri atas dua bagian utama yakni pembilang (a) dan penyebut (b) yang dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ (Kristanto, 2016). Pembilang merupakan bagian atas pecahan yang menunjukkan berapa banyak bagian yang diambil. Sementara penyebut diartikan sebagai bagian bawah pecahan yang menunjukkan berapa banyak secara keseluruhan.

Konsep pecahan seringkali digunakan dalam menggambarkan porsi/bagian dari suatu kuantitas atau objek tertentu yang dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh penggunaan pecahan yaitu Andi memiliki sebuah kue dan ingin membaginya kepada empat orang temannya. Agar setiap orang mendapatkan bagian yang sama, maka Andi membaginya menjadi $\frac{1}{4}$ bagian untuk setiap temannya. Contoh lainnya yaitu dalam menyebutkan waktu seringkali dinyatakan dalam bentuk pecahan, seperti 30 menit dapat juga dituliskan dengan $\frac{1}{2}$ jam.

2.2 Jenis Jenis Pecahan

Terdapat empat jenis bilangan pecahan antara lain bilangan pecahan biasa, pecahan bentuk desimal, pecahan bentuk persen, dan pecahan campuran (Abarca, 2021).

2.2.1 Pecahan Biasa

Bilangan pecahan biasa merupakan bilangan pecahan yang hanya terdiri atas pembilangan dan penyebut. Ada pula yang dinamakan pecahan murni dan pecahan tidak murni.

1. Pecahan murni yakni pecahan yang memiliki penyebut lebih besar dibandingkan dengan pembilangnya.

Contoh : $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{6}{11}, \frac{7}{9}$.

2. Pecahan tidak murni yakni pecahan yang memiliki penyebut lebih kecil dibandingkan dengan pembilangnya.

Contoh : $\frac{7}{5}, \frac{4}{3}, \frac{13}{11}, \frac{10}{9}$

2.2.2 Pecahan Desimal

Bilangan pecahan desimal merupakan bilangan pecahan yang didapatkan dari hasil pembagian antara suatu bilangan dengan bilangan pecahan persepuluh, perseratusan, perseribuan, dan seterusnya. Dengan kata lain, bilangan pecahan desimal memiliki penyebut sepuluh, seratus, seribu, sepuluh ribu, dan seterusnya.

Contoh : $\frac{3}{10}, \frac{17}{100}, \frac{123}{1000}$

Pecahan $\frac{123}{1000}$ memiliki nilai sama dengan 0,123 yang merupakan bentuk pecahan desimal dengan 3 angka dibelakang koma. Angka 1 berada pada tempat persepuluhan, angka 2 berada pada tempat perseratusan, dan angka 3 berada pada tempat perseribuan.

2.2.3 Pecahan Bentuk Persen

Bilangan pecahan bentuk persen merupakan bilangan pecahan yang memiliki penyebut perseratus.

Contoh : $15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$.

2.2.4 Pecahan Campuran

Bilangan pecahan campuran merupakan bilangan pecahan yang terdiri atas bilangan bulat dan bilangan pecahan. Pecahan campuran diperoleh dari membagi pembilang dengan penyebutnya pada pecahan biasa. Hal ini terjadi apabila nilai pembilang lebih besar dibandingkan dengan penyebutnya, sehingga ketika dilakukan pembagian dapat dihasilkan pecahan campuran.

Contoh : $\frac{10}{3}$ jika dibagi menghasilkan 3 sisa 1. Dengan demikian $\frac{10}{3}$ dapat dituliskan dalam pecahan campuran menjadi $3\frac{1}{3}$.

2.3 Operasi Pecahan

2.3.1 Penjumlahan dan Pengurangan Pecahan

Operasi penjumlahan dan pengurangan pecahan hanya bisa dilakukan secara langsung apabila nilai penyebut kedua pecahan sama. Apabila nilai penyebutnya berbeda, maka dilakukan dengan menyamakan penyebut terlebih dahulu. Berikut ini sifat-sifat yang dapat digunakan dalam operasi penjumlahan dan pengurangan pecahan :

1. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
2. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$
4. $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$

Contoh :

1. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$
2. $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3 - 1 \times 5}{5 \times 3} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$

2.3.2 Perkalian Pecahan

Operasi perkalian dilakukan dengan mengalikan pembilang pecahan pertama dan pembilang pecahan kedua. Begitupun pada penyebutnya dilakukan dengan mengalikan penyebut pecahan pertama dan penyebut pecahan kedua. Dapat dituliskan sifat pada operasi perkalian pecahan sebagai berikut :

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

Contoh :

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

2.3.3 Pembagian Pecahan

Operasi pembagian pecahan menggunakan operasi perkalian dalam pengerjaannya. Proses pembagian dilakukan dengan mengubahnya menjadi perkalian dengan mengambil

kebalikan dari pecahan kedua (Saputri, 2021). Dapat dituliskan sifat dari operasi pembagian pecahan sebagai berikut :

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{ad}{cb}$$

Contoh :

$$\frac{3}{5} : \frac{7}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$$

Namun untuk pembagian pecahan dengan bilangan bulat maka dilakukan dengan mengubah bilangan bulat tersebut menjadi pecahan. Misalnya $\frac{3}{5} : 2$, maka angka 2 diubah menjadi $\frac{2}{1}$ sehingga menjadi :

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

2.4 Menyederhanakan, Membandingkan, dan Mengurutkan Pecahan

2.4.1 Menyederhanakan Pecahan

Menyederhanakan pecahan dilakukan dengan mengubah bentuk pecahan terkecil melalui pembagian pembilang dan penyebut dengan bilangan yang sama sehingga tidak bisa dibagi lagi (Abarca, 2021).

Contoh :

Pecahan $\frac{30}{40}$ dapat disederhanakan dengan membagi pembilang dan penyebut dengan 2, atau dapat dituliskan :

$$\frac{30}{40} : \frac{2}{2} = \frac{15}{20}$$

Oleh karena pecahan $\frac{15}{20}$ masih bisa dibagi lagi dengan 5 maka bisa disederhanakan lagi menjadi :

$$\frac{15}{20} : \frac{5}{5} = \frac{3}{4}$$

Dengan demikian, bentuk pecahan yang paling sederhana dari $\frac{30}{40}$ yaitu $\frac{3}{4}$.

2.4.2 Membandingkan Pecahan

Perbandingan dua pecahan yang memiliki penyebut sama dapat dilakukan dengan membandingkan nilai dari masing-masing pembilangnya. Sementara ketika penyebut kedua pecahan berbeda, dapat dilakukan dengan menyamakan terlebih dahulu nilai penyebutnya yang kemudian dibandingkan melalui nilai pembilang. Contoh :

1. Bandingkan nilai dari $\frac{2}{5}$ dan $\frac{3}{5}$

Oleh karena $\frac{2}{5}$ dan $\frac{3}{5}$ memiliki penyebut yang sama, sementara nilai $2 < 3$ sehingga $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$.

2. Bandingkan nilai dari $\frac{2}{3}$ dan $\frac{4}{7}$.

Pecahan tersebut memiliki nilai penyebut yang berbeda, sehingga penyebutnya disamakan terlebih dahulu :

Pada $\frac{2}{3}$ dan $\frac{4}{7}$, nilai Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dari 3 dan 7 yaitu 21. Sehingga nilainya masing-masing setara dengan $\frac{14}{21}$ dan $\frac{12}{21}$. Dengan demikian, diperoleh $\frac{14}{21} > \frac{12}{21}$ atau $\frac{2}{3} > \frac{4}{7}$.

2.4.3 Mengurutkan Pecahan

Pengurutan pecahan dapat dilakukan dari bilangan terkecil ke terbesar ataupun sebaliknya. Pengurutan ini dapat dilakukan setelah dilakukan perbandingan pecahan terlebih dahulu.

Contoh :

Urutkan pecahan $\frac{2}{5}, \frac{3}{15}, \frac{3}{2}$ dari terbesar ke terkecil .

Nilai KPK dari 5, 15, dan 2 yaitu 30 sehingga dapat dituliskan nilai pecahan diatas menjadi :

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{15}, \frac{3}{2} = \frac{12}{30}, \frac{6}{30}, \frac{45}{30}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\frac{45}{30} > \frac{12}{30} > \frac{6}{30} = \frac{3}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{15}$$

2.5 Mengubah Bentuk Pecahan

Pecahan dapat diubah bentuknya dari suatu bentuk pecahan ke bentuk pecahan lainnya.

2.5.1 Mengubah pecahan biasa ke desimal

Untuk mengubah pecahan biasa menjadi desimal dilakukan dengan membagi pembilang dengan penyebut.

Contoh :

Mengubah $\frac{3}{5}$ menjadi desimal

Dengan melakukan pembagian 3 dibagi 5 diperoleh 0,6.

2.5.2 Mengubah pecahan biasa ke persen

Mengubah pecahan biasa menjadi persen dapat dilakukan dengan 2 langkah berikut ini :

1. Membagi pembilang dengan penyebut
2. Mengalikan hasil baginya dengan 100

Contoh:

Mengubah $\frac{7}{11}$ menjadi persen

Dengan membagi 7 dengan 11 diperoleh 0,64. Selanjutnya dikalikan dengan 100 sehingga hasilnya $0,64 \times 100 = 64\%$.

2.5.3 Mengubah pecahan biasa ke campuran

Untuk mengubah pecahan biasa menjadi pecahan campuran dilakukan dengan dua langkah yaitu pertama membagi pembilang pecahan dengan penyebutnya. Langkah berikutnya yaitu sisa pembagian akan menjadi pembilang baru, dengan penyebut tetap seperti nilai awalnya. Pecahan yang memenuhi untuk diubah ke campuran yaitu memiliki pembilang yang nilainya lebih besar dibandingkan dengan penyebut.

Contoh :

Mengubah $\frac{11}{7}$ menjadi pecahan campuran.

Hasil pembagian dari $\frac{11}{7}$ yaitu hasil bagiannya 1 dan sisa bagi 4.

Dengan demikian, pecahan $\frac{11}{7}$ dapat dituliskan $1\frac{4}{7}$.

2.5.4 Mengubah desimal ke pecahan biasa

Untuk mengubah desimal ke pecahan biasa, dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut ini:

1. Mengidentifikasi tempat desimal
Pada tahap ini ditinjau desimal dan identifikasi tempat desimalnya
2. Menentukan pembilang dan penyebut
Penyebut ditentukan berdasarkan jumlah digit setelah tempat desimal. Apabila tempat desimal terletak setelah digit desimal, maka angka itu menjadi pembilangnya
3. Menyederhanakan pecahan
Apabila memungkinkan untuk menyederhanakan pecahan, maka bagi pembilang dan penyebut dengan faktor persekutuan terbesar.

Contoh :

Bilangan desimal 0,852 memiliki tempat desimal yang terletak setelah tiga digit. Oleh karena itu, pembilangnya adalah 852 dan penyebutnya 1000 (karena tiga digit desimal). Kemudian pecahan $\frac{852}{1000}$ dapat disederhanakan menjadi $\frac{213}{250}$.

2.5.5 Mengubah desimal ke persen

Mengubah bilangan desimal menjadi persen dilakukan dengan mengalikan 100 pada desimal.

Contoh :

Mengubah 0,18 dan 0,7 menjadi persen .

0,18 dapat diubah menjadi persen dengan mengalikan 100 yaitu $0,18 \times 100 = 18\%$ dan 0,7 dikalikan 100 menjadi $0,7 \times 100 = 70\%$.

2.5.6 Mengubah desimal ke campuran

Sebelum mengubah desimal ke bilangan pecahan campuran, terlebih dahulu desimal diubah ke pecahan biasa. Setelah itu, barulah diubah menjadi bilangan pecahan campuran.

Contoh :

Bilangan desimal 2,28 akan diubah menjadi pecahan campuran. Terlebih dahulu 2,28 diubah ke pecahan biasa menjadi $\frac{228}{100}$ atau disederhanakan menjadi $\frac{57}{25}$. Selanjutnya 57 dibagi dengan 25 menghasilkan hasil bagi 2 sisa 7. Dengan demikian, 2,28 dapat dituliskan menjadi $2\frac{7}{25}$.

2.5.7 Mengubah persen ke pecahan biasa

Persen secara harfiah ini berarti perseratus atau dibagi dengan seratus. Dengan demikian, dalam mengubah persen menjadi pecahan biasa dilakukan dengan menuliskan persen sebagai per seratus atau penyebut 100. Sederhanakanlah pecahan tersebut apabila masih memungkinkan

Contoh :

Bilangan 72% diubah menjadi pecahan biasa dituliskan sebagai $\frac{72}{100}$. Selanjutnya, $\frac{72}{100}$ dapat disederhanakan menjadi $\frac{18}{25}$.

2.5.8 Mengubah persen ke desimal

Dalam mengubah persen menjadi desimal dilakukan dengan mengubah terlebih dahulu persen menjadi pecahan biasa. Kemudian, pecahan biasa tersebut dinyatakan dalam bentuk desimal dengan membagi pembilang dengan penyebut.

Contoh :

Bilangan 25% ingin dinyatakan dalam bentuk desimal maka diubah dahulu menjadi $\frac{25}{100}$ kemudian bisa dinyatakan 0,25.

2.6 Pembulatan dan Penaksiran

2.6.1 Pembulatan

Pembulatan keatas dilakukan apabila angka pada persepuluhan lebih atau sama dengan 5, sedangkan pembulatan kebawah terjadi apabila angka pada persepuluhan bernilai kurang dari 5.

1. Pembulatan bilangan ke satuan terdekat
8,9 dibulatkan menjadi 9 karena satuan lebih dari 5.
2. Pembulatan bilangan ke puluhan terdekat

- 7,62 dibulatkan menjadi 60 karena satuan kurang dari 5.
3. Pembulatan bilangan ke ratusan terdekat
6,612 dibulatkan menjadi 610 karena satuan kurang dari 50.

2.6.2 Penaksiran

Penaksiran dapat diartikan sebagai memperkirakan atau memberikan perkiraan nilai dari suatu operasi matematika. Operasi penaksiran pada pecahan melibatkan beberapa kondisi antara lain :

1. Penaksiran hasil operasi hitung pecahan biasa dan campuran.

Untuk menaksir hasil penjumlahan atau pengurangan pecahan biasa dan campuran, kita bisa menggunakan pendekatan bilangan bulat terdekat dan membandingkannya dengan pecahan yang diberikan.

Contoh :

$$\begin{aligned} & 3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3} + \frac{7}{8} \times 6\frac{7}{10} \\ &= 4 - 1 + 1 \times 7 \\ &= 4 - 1 + 7 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Hal ini karena nilai $3\frac{3}{4}$ lebih dekat ke 4, $1\frac{1}{3}$ lebih dekat ke 1, $\frac{7}{8}$ lebih dekat ke 1 dan $6\frac{7}{10}$ lebih dekat ke 7.

2. Penaksiran hasil operasi hitung pecahan desimal

Dalam operasi hitung dengan pecahan desimal, kita dapat menggunakan pendekatan pembulatan untuk memperkirakan hasil.

Contoh :

$$\begin{aligned} & 0,63 + 0,78 \\ &= 0,6 + 0,8 \\ &= 1,4 \end{aligned}$$

Hal ini karena nilai 0,63 lebih dekat ke 0,6 (pembulatan ke bawah) dan 0,78 lebih dekat ke 0,8 (pembulatan ke atas).

3. Penaksiran hasil operasi hitung persen

Dalam operasi penaksiran persen, dapat diperkirakan hasilnya dengan mengonversi persen menjadi pecahan atau desimal.

Contoh :

$$36\% + 74\% = 0,36 + 0,74$$

$$= 0,4 + 0,7$$

$$= 1,1$$

Hal ini karena nilai 0,36 lebih dekat ke 0,4 (pembulatan keatas) dan 0,74 lebih dekat ke 0,7 (pembulatan ke bawah).

Penggunaan teknik penaksiran ini dapat mempermudah perhitungan dan memungkinkan untuk mendapatkan hasil perkiraan yang cukup akurat secara cepat. Hal ini pun membantu dalam situasi dimana hasil yang persis tidak diperlukan, melainkan perkiraan yang cepat cukup memadai.

LATIHAN SOAL

1. Tentukanlah hasil operasi pecahan berikut

a. $\frac{4}{7} - 3\frac{2}{7}$

b. $2\frac{3}{5} + 1\frac{2}{3} - 20\%$

c. $\frac{6}{7} \times 0,12$

d. $2 + 3\frac{1}{2} - 15\%$

2. Urutkanlah dari yang terkecil ke yang terbesar bilangan berikut

a. $\frac{1}{4}$; $5\frac{3}{5}$; 27% ; 0,182

b. $6\frac{2}{5}$; 65% ; $\frac{1}{2}$; 1,34

c. $\frac{14}{4}$; $\frac{3}{7}$; 12% ; 0,32

d. $\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{9}$; 0,15; 35%

3. Dengan menggunakan konsep penaksiran, hitunglah hasil dari :

a. $1\frac{4}{5} - 3\frac{1}{3}$

- b. $0,79 + 0,13$
- c. $29\% + 41\%$

DAFTAR PUSTAKA

- Abarca, R. M. 2021. Analisis Mata Pelajaran Matematika Materi Pecahan. *Nuevos Sistemas de Comunicación e Información*, 2013–2015.
- Kristanto, Y. D. 2016. Modul Pecahan. *Encyclopedia of Educational Reform and Dissent*, 1–11.
- Saputri, M. E. E. 2021. Analisis Miskonsepsi Siswa Kelas Vi Sd Negeri Gunung Pasir Jaya Pada Materi Pecahan. *Jurnal Pendidikan Matematika Universitas Lampung*, 9(2), 211–222. <https://doi.org/10.23960/mtk/v9i2.pp211-222>

BAB 3

DESIMAL

Oleh Eni Defitriani

3.1 Pendahuluan

Sistem bilangan desimal, atau lebih dikenal dengan sistem bilangan basis sepuluh dan *denary* atau *decanary*. Sistem bilangan ini merupakan pengembangan dari sistem bilangan Hindu-Arab. Sistem bilangan ini digunakan untuk merepresentasikan bilangan bulat dan bukan bilangan bulat. Cara merepresentasikan bilangan desimal sebagai sistem bilangan desimal disebut *notasi desimal*.

Simbol yang digunakan untuk memisahkan bilangan bulat dan bukan bilangan bulat, pada sistem bilangan desimal disebut *decimal point* (*titik desimal*). Titik desimal biasanya dilambangkan dengan tanda titik “.” atau tanda koma “,”. Lambang ini berbeda di setiap Negara. Pemilihan simbol ini, disesuaikan dengan simbol yang digunakan sebagai pemisah ribuan. Contoh: 4.6543 atau 3,14. Dibaca: “empat koma enam lima empat tiga” atau “tiga koma satu empat”. Frasa seperti “3.14 adalah perkiraan π hingga dua desimal” menggambarkan bagaimana istilah “desimal” juga dapat merujuk secara khusus pada angka-angka yang muncul setelah pemisah desimal.

Bilangan yang dapat direpresentasikan dalam sistem desimal adalah pecahan $\frac{a}{10^n}$, dimana a adalah bilangan bulat positif, dan n adalah bilangan bulat tak negative, dan an adalah bilangan bulat. Selain itu, pecahan desimal diperoleh dengan menambahkan bilangan bulat dan komponen pecahan; jumlah yang diperoleh kadang-kadang disebut sebagai bilangan pecahan.

Setelah pemisah desimal, desimal biasanya terdiri dari sejumlah digit terbatas. Namun demikian, dengan menambahkan rangkaian digit tak terbatas setelah pemisah desimal, sistem desimal telah diperluas untuk mewakili desimal

tak terbatas untuk bilangan real apa pun. Dalam pengertian ini, desimal standar kadang-kadang disebut sebagai desimal terminasi karena desimal tersebut mempunyai jumlah digit bukan nol yang terbatas setelah pemisah desimal.

Desimal tak terhingga yang mengulang kumpulan digit yang sama selamanya setelah titik tertentu dikenal sebagai desimal berulang (misalnya, $5.123144144144144\dots = 5.123144$). Jika dan hanya jika desimal tak terhingga adalah desimal berulang atau berisi desimal terbatas jumlah digit bukan nol, ini mewakili bilangan rasional, hasil bagi dua bilangan bulat.

3.2 Notasi Desimal

Untuk penulisan bilangan, sistem desimal menggunakan sepuluh angka desimal, tanda desimal, dan untuk bilangan negatif, tanda minus "-". Digit desimalnya adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; pemisah desimalnya adalah titik "." atau koma ",". Untuk menyatakan bilangan non-negatif, bilangan desimal terdiri dari:

1. Salah satu rangkaian digit (terbatas), seperti "2023", yang seluruh rangkaiannya mewakili bilangan bulat:

$$a_m a_{m-1} \dots a_0$$

2. Atau tanda desimal yang memisahkan dua rangkaian angka (misalnya "20.232023").

$$a_m a_{m-1} \dots a_0 . b_1 b_2 \dots b_n$$

Secara umum diyakini bahwa digit pertama, a_m bukan nol. Jika $m > 0$, yaitu jika barisan pertama terdiri dari paling sedikit dua digit. Nol atau banyak angka nol di sebelah kiri dapat berguna dalam situasi tertentu; ini tidak mengubah nilai yang diwakili oleh desimal. Misalnya, $3,14 = 03,14 = 003,14$. Demikian pula, angka nol di belakang dapat ditempatkan setelah tanda desimal tanpa mengubah angka yang diwakili; misalnya $17 = 17,0 = 17,00^*$ dan $3,4 = 3,40 = 3,400$. Alternatifnya, jika digit terakhir di sebelah kanan tanda desimal adalah nol, yaitu jika $b_n = 0$ dapat dihilangkan.

*) Terkadang, angka nol tambahan digunakan untuk menunjukkan keakuratan suatu pengukuran. Misalnya, "17,00 m" dapat menunjukkan bahwa kesalahan pengukuran kurang dari satu sentimeter (0,01 m), sedangkan "15 m" dapat berarti bahwa panjangnya kira-kira lima belas meter dan kesalahan tersebut dapat melebihi 10 sentimeter.

Untuk menyatakan bilangan negatif, tanda minus ditempatkan sebelum a_m . Angka $a_m a_{m-1} \dots a_0 \cdot b_1 b_2 \dots b_n$ melambangkan bilangan

$$a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_0 10^0 + \frac{b_1}{10^1} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n}$$

Bagian bilangan bulat atau bagian integral suatu bilangan desimal adalah bilangan bulat yang ditulis di sebelah kiri pemisah desimal. Untuk bilangan desimal non-negatif, itu adalah bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar dari desimal. Bagian dari pemisah desimal di sebelah kanan adalah bagian pecahan, yang sama dengan selisih antara bagian angka dan bagian bilangan bulatnya.

Jika bagian integral suatu bilangan adalah nol, hal ini mungkin terjadi, biasanya dalam komputasi, bagian bilangan bulat tidak ditulis (misalnya, 0,1234, bukan 0,1234). Dalam penulisan normal, hal ini umumnya dihindari, karena risiko kebingungan antara tanda desimal dan tanda baca lainnya.

Singkatnya, kontribusi setiap digit terhadap nilai suatu bilangan bergantung pada posisinya dalam bilangan tersebut. Artinya, sistem desimal adalah sistem angka posisional.

3.3 Mengubah Bilangan Desimal

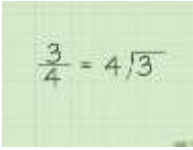
3.3.1 Mengubah Pecahan Biasa ke Pecahan Desimal

Untuk mengubah pecahan biasa menjadi pecahan desimal, ada beberapa cara yang dapat dilakukan, diantaranya:

1. Pembagian bersusun panjang

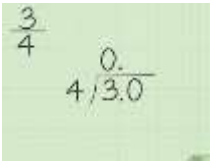
Misalnya, kita ingin mengubah pecahan biasa $\frac{3}{4}$ menjadi pecahan desimal. Langkah yang dapat dilakukan dengan metode ini adalah :

- a. Tulislah bilangan $\frac{3}{4}$ seperti pada gambar.



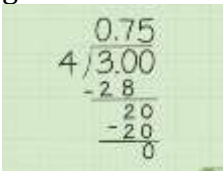
$$\frac{3}{4} = 4/3$$

- b. Karena yang dihitung adalah pecahan, hasilnya pasti lebih kecil dari satu. Oleh sebab itu, diatas lambang pembagi tulis 0, kemudian tanda desimal “,”. Kemudian, dalam lambang pembagi, setelah angka 3 dapat kita tulis tanda desimal “,” lalu tulis “0”. Lihat gambar dibawah.



$$\begin{array}{r} 3 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0. \\ 4/3.0 \end{array}$$

- c. Hitunglah jawaban dari pembagian tersebut dengan cara pembagian bersusun panjang seperti yang terlihat pada gambar.

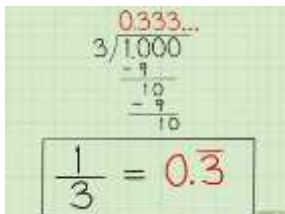


$$\begin{array}{r} 0.75 \\ 4/3.00 \\ -2.8 \\ \hline 2.0 \\ -2.0 \\ \hline 0 \end{array}$$

- d. Jadi, hasil dari 3 dibagi 4 adalah 0,75

2. Pecahan yang menghasilkan desimal berulang

Kerjakanlah langkah 1 sampai 3 pada metode (a), untuk menyelesaikan soal $\frac{1}{3}$. Karena hasil pembagiannya adalah desimal berulang 0,333... maka hasil akhirnya dapat ditulis seperti dibawah ini.



$$\begin{array}{r} 0.333... \\ 3/1.000 \\ -9 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\boxed{\frac{1}{3} = 0.\overline{3}}$$

3. Metode perkalian

Untuk mengubah pecahan biasa menjadi desimal dengan metode perkalian, dapat dilakukan langkah berikut.

- a. Temukan bilangan yang dapat dikalikan dengan penyebut pecahan sehingga hasilnya adalah bilangan basis 10 (10,100,1000, ...). Contoh :

1) $3/5$. $10/5 = 2$. 2 merupakan bilangan bulat. 2 dapat dikalikan dengan 5 untuk menghasilkan 10. Jadi, 2 dapat digunakan.

2) $3/4$. $10/4 = 2,5$. 2,5 bukan bilangan bulat. $100/4 = 25$. 25 merupakan bilangan bulat. 25 dapat dikalikan dengan 4 untuk menghasilkan 100. Jadi, 25 dapat digunakan.

3) $5/16$. $10/16 = 0,625$, $100/16 = 6,25$, $1.000/16 = 62,5$, $10.000/16 = 625$. 625 merupakan bilangan bulat yang pertama kali diperoleh. 625 dapat dikalikan dengan 16 untuk menghasilkan 10.000. Jadi, 625 dapat digunakan.

- b. Kalikan pembilang dan penyebut pecahan dengan bilangan bulat yang diperoleh pada langkah 1. Contoh :

1) $3/5 \times 2/2 = 6/10$

2) $3/4 \times 25/25 = 75/100$

3) $5/16 \times 625/625 = 3.125/10.000$

- c. Tuliskan hasil akhirnya. Jawabannya yaitu pembilang yang diberi tanda desimal sesuai dengan jumlah angka 0 yang ada di penyebut. Hitung saja berapa banyak 0 yang ada di penyebut. Jika hanya ada 1 angka 0 di penyebut, geser tanda desimal ke kiri sejauh 1 angka, dan seterusnya. Contoh:

1) $3/5 = 6/10 = 0,6$

2) $3/4 = 75/100 = 0,75$

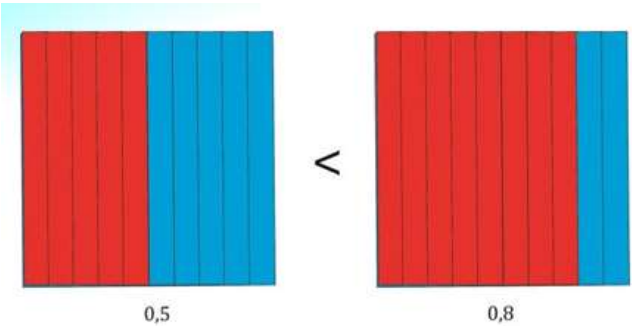
3) $5/16 = 3.125/10.000 = 0,3125$

3.3.2 Mengubah Pecahan Desimal ke Pecahan Biasa

Untuk mengubah pecahan desimal menjadi pecahan biasa, caranya cukup mudah yaitu perhatikan contoh soal berikut.

1. $0,2 = \frac{2:2}{10:2} = \frac{1}{5}$
2. $0,75 = \frac{75:5}{100:5} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$
3. $2,25 = \frac{225:5}{100:5} = \frac{45:5}{20:5} = \frac{9}{4} = 1\frac{1}{4}$
4. $1,121212\dots$
Misal, $n = 1,121212\dots$
 $100n = 112,121212\dots$
 $\underline{n = 1,121212\dots}$
 $99n = 111$
 $n = \frac{111}{99}$

3.4 Perbandingan Bilangan Desimal



Cara yang dilakukan untuk membandingkan dua buah bilangan desimal adalah dengan mengubahkan ke bentuk pecahan biasa kemudian menyamakan penyebutnya dalam kelipatan 10.

Contoh:
Bandingkan bilangan desimal 0,5 dan 0,15 dengan memberi tanda lebih besar (>) atau lebih kecil (<).

Jawab:
 $0,5 = \frac{5}{10}$

$$\begin{array}{r}
 0,15 = \frac{15}{100} \\
 \frac{5}{10} \dots \frac{15}{100} \\
 \frac{50}{100} > \frac{15}{100}
 \end{array}$$

Contoh:

Urutkan dari bilangan yang terkecil sampai yang terbesar: 0,3; 0,54 dan 0,04

Jawab:

$$\begin{array}{l}
 0,3 = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} \\
 0,54 = \frac{54}{100} \\
 0,04 = \frac{4}{100}
 \end{array}$$

Urutan bilangan dari yang terkecil adalah 0,04; 0,3; 0,54;

3.5 Pembulatan Bilangan Desimal

Bilangan desimal, biasanya ditulis dengan banyak angka dibelakang notasi desimal. Misalnya;

1. 2,4 (bilangan pecahan satu desimal)
2. 3,57 (bilangan pecahan dua desimal)
3. 7,989 (bilangan pecahan tiga desimal)

Untuk pembulatan bilangan desimal, ada beberapa aturan yang harus dipatuhi, yaitu:

1. Jika angka yang mengalami pembulatan ≥ 5 , maka angka didepannya ditambahkan satu. Misalnya:
 - $2,67 \simeq 2,7$ (dibulatkan menjadi satu tempat desimal)
 - $3,5678 \simeq 3,568$ (dibulatkan menjadi tiga tempat desimal)
2. Jika angka yang mengalami pembulatan < 5 , maka angka tersebut dihilangkan. Misalnya:
 - $2,764 \simeq 2,76$ (dibulatkan menjadi dua tempat desimal)
 - $3,12 \simeq 3,1$ (dibulatkan menjadi satu tempat desimal)

3.6 Operasi Hitung Bilangan Desimal

3.6.1 Penjumlahan dan Pengurangan

Operasi hitung penjumlahan dan pengurangan pada bilangan desimal, memperhatikan nilai tempat bilangan tersebut. Untuk lebih jelasnya, perhatikan langkah penjumlahan berikut,

Contoh

Hitunglah $0,412 + 0,543 =$

Jawab:

Cara 1

$$\begin{array}{r} 0,412 = 0 + 0,4 + 0,01 + 0,002 \\ 0,543 = 0 + 0,5 + 0,04 + 0,003 \\ \hline = 0 + 0,9 + 0,05 + 0,005 \\ = 0 + 0,900 + 0,050 + 0,005 \\ = 0,955 \end{array}$$

Cara 2

$$\begin{array}{r} 0,412 \\ 0,543 \\ \hline 0,955 \end{array}$$

Contoh

Hitunglah $0,786 - 0,564 =$

Jawab:

Cara 1

$$\begin{array}{r} 0,786 = 0 + 0,7 + 0,08 + 0,006 \\ 0,564 = 0 + 0,5 + 0,06 + 0,004 \\ \hline = 0 + 0,2 + 0,02 + 0,002 \\ = 0,222 \end{array}$$

Sehingga, $0,786 - 0,564 = 0,222$

Cara 2

$$\begin{array}{r} 0,786 \\ 0,564 \\ \hline 0,222 \end{array}$$

Sehingga, $0,786 - 0,564 = 0,222$

3.6.2 Perkalian dan Pembagian

Operasi hitung perkalian dan pembagian pada bilangan desimal pada dasarnya dilakukan sama seperti operasi hitung perkalian dan pembagian pada bilangan bulat. Namun, ada beberapa aturan yang diterapkan, yaitu :

1. Perkalian dua bilangan desimal, dilakukan dengan cara perkalian biasa (dengan tanda koma), kemudian banyak angka dibelakang koma pada hasil perkalian disamakan dengan banyak angkat dibelakang koma dari dua bilangan yang dikalikan.
2. Hasil perkalian desimal dengan angka 10,100, 1000, dst, hasilnya ditentukan dengan menggeser tanda koma ke kanan sesuai dengan banyaknya angka nol.
3. Pembagian dua bilangan desimal, dilakukan dengan cara pembagian biasa (tanpa memperhatikan tanda koma), kemudian letak tanda koma pada pembilang ditentukan oleh hasil pengurangan banyak angka dibelakang koma pada penyebutnya.
 - a. Jika hasil pengurangannya positif, berarti tanda komanya maju, sedangkan jika hasil pengurangannya negatif, tanda komanya mundur.
 - b. Jika tanda komanya mundur dan mentok, tambahkan bilangan nol dibelakangnya
 - c. Untuk bilangan desimal dengan bilangan berulang dibelakangnya, bilangan berulang tersebut dianggap sebagai banyak angka dibelakang koma.

Contoh

Hitunglah $1,2 \times 0,5 = \dots$

Jawab:

Perkalian $12 \times 5 = 60$. Karena ada dua angka dibelakang koma, jadi hasil perkaliannya adalah 0,60. Angka nol dibelakang tanda koma dapat dihilangkan, sehingga ditulis 0,6.

Contoh

Hitunglah $0,5 \div 5 = \dots$

Jawab:

$$0,5 \div 5 = \frac{5}{10} \div \frac{5}{1} = \frac{5}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

Atau dapat dilakukan dengan cara berikut:

1. $0,5 : 5 = \dots$

Cara I

$$0,5 : 5 = \frac{5}{10} : 5 = \frac{5}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Cara II

$$\begin{array}{r} 5 \overline{)0,5} \longrightarrow 50 \overline{)5} \begin{array}{r} 0,1 \\ 0 \\ \hline 50 \\ 50 \\ \hline 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} (5 \times 10 = 50; \\ 0,5 \times 10 = 5) \\ \text{Bilangan yang dibagi} \\ \text{dan pembagi dikalikan} \\ \text{dengan 10.} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{)0,5} \longrightarrow 50 \overline{)5} \begin{array}{r} 0,1 \\ 0 \\ \hline 50 \\ 50 \\ \hline 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} (5 \times 10 = 50; \\ 0,5 \times 10 = 5) \\ \text{Bilangan yang dibagi} \\ \text{dan pembagi dikalikan} \\ \text{dengan 10.} \end{array} \end{array}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Yong, Lam Lay; Se, Ang Tian (April 2004). *Fleeting Footsteps*. World Scientific. 268. doi:10.1142/5425. ISBN 978-981-238-696-0. Archived from the original on April 1, 2023. Retrieved March 17, 2022.
- Decimal. (27 Oct 2023). Di wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Decimal>
- Cara Mengubah Pecahan Biasa Menjadi Desimal. (<https://id.wikihow.com/Mengubah-Pecahan-Biasa-Menjadi-Desimal>)
- Saiful dkk. 2014. *Modul Bilangan Pecahan*. <https://berbagiilmupendidikan.files.wordpress.com/2015/03/modul-pecahan-desimal1.pdf>

BAB 4

PERSAMAAN LINEAR

Oleh Beatric Videlia Remme'

4.1 Pendahuluan

Untuk memulai pembahasan ini, kita akan awali pembahasan mengenai persamaan. Persamaan adalah kalimat matematika yang menunjukkan bahwa ada dua ekspresi nilai yang sama. Persamaan selalu mengandung tanda sama dengan (=) (Setiawati, E, dkk, 2020). Persamaan linear adalah persamaan dimana variabelnya memiliki pangkat tertinggi satu. Persamaan linear adalah konsep matematika yang mendasar dan seringkali digunakan dalam berbagai bidang ilmu dan aplikasi. Persamaan ini merupakan representasi matematika dari hubungan antara variabel-variabel dalam bentuk linear. Persamaan linear sering digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel yang memiliki tingkat ketergantungan linear satu sama lain.

Persamaan linear adalah suatu bentuk persamaan matematika yang melibatkan variabel-variabel yang hanya memiliki pangkat satu. Persamaan linear dapat dituliskan dalam bentuk umum:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Di sini $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel-variabel, $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah koefisien-koefisien, dan b adalah konstanta. Setiap suku dalam persamaan ini hanya memiliki variabel dengan pangkat satu. Jumlah dari pangkat variabel ini disebut derajat persamaan linear.

Contoh persamaan linear dalam dua variabel:

$$3x + 4y = 5$$

Ini adalah persamaan linear karena setiap variabel x dan y hanya muncul dengan pangkat satu. Jika dinyatakan dalam bentuk grafik, bentuk grafik persamaan linear adalah garis lurus.

Persamaan linear juga dapat dituliskan dalam bentuk matriks, yaitu $[A]\{x\} = \{b\}$, dari persamaan tersebut A disebut matriks koefisien, x disebut variabel, dan b disebut konstanta.

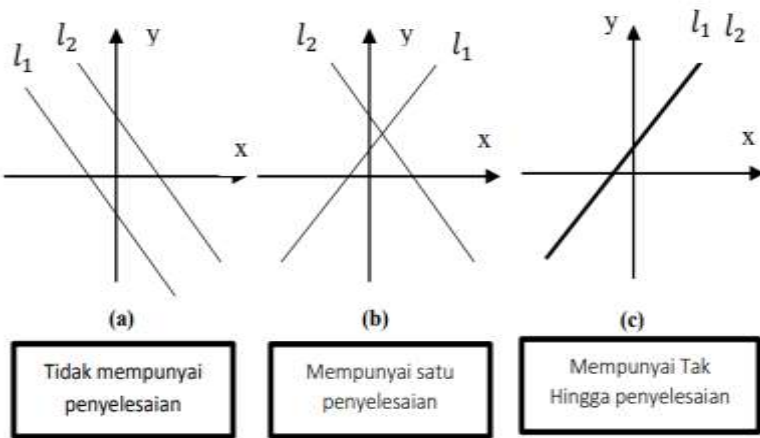
4.2 Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linear

Jika ada beberapa persamaan linear maka gabungan dari beberapa persamaan linear itu disebut sistem persamaan linear. Suatu solusi dari suatu SPL adalah beberapa pasangan bilangan, jika bilangan tersebut memenuhi kebenaran masing-masing persamaan dari SPL tersebut. (Azizah, L, N.& Ariyanti, N., 2020).

Sistem persamaan linear yang terdiri dari m buah persamaan linear dengan n buah variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ mempunyai bentuk umum yang dapat ditulis sebagai berikut :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$
 $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$
.....
 $a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$

Solusi dari sebuah SPL paling tidak memenuhi salah satu ketentuan di bawah ini: (Anton, 2015)



Gambar 4.1. Garis Penyelesaian Sistem Persamaan Linear

Sebuah SPL disebut konsisten (*consistent system*) jika penyelesaiannya ada, Penyelesaiannya dapat berbentuk Tunggal, maupun tak hingga. Sebaliknya untuk SPL yang tidak mempunyai

penyelesaian, maka sistem persamaan linear tersebut dikatakan inkonsisten (inconsistent system).

Sistem Persamaan Linear dengan Satu Solusi

Contoh 1: Tentukan Solusi sistem persamaan linear berikut

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

Solusi: Kita dapat melakukan eliminasi x dari kedua persamaan

$$\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - y = 1 \quad - \\ \hline 2y = 4 \quad \longrightarrow y = 2 \end{array}$$

Untuk $y = 2$ di substitusi ke salah satu persamaan sehingga didapatkan nilai $x = 3$. Hal ini berarti bahwa, SPL tersebut memiliki satu penyelesaian, yaitu: $x = 3$, $y = 2$. Secara geometris, hal ini berarti bahwa garis yang merepresentasikan persamaan dalam sistem beririsan di titik $(3, 2)$.

Sistem Persamaan Linear Tanpa Solusi

Contoh 2: Tentukan solusi sistem persamaan linear berikut

$$x + y = 4$$

$$3x + 3y = 6$$

Solusi: Langkah pertama yaitu mengeliminasi x dari kedua persamaan

$$\begin{array}{r} x + y = 4 \quad \times 3 \quad \longrightarrow \quad 3x + 3y = 12 \\ 3x + 3y = 6 \quad \longrightarrow \quad 3x + 3y = 6 \quad - \\ \hline 0 = 6 \end{array}$$

Solusi atau himpunan penyelesaian persamaan di atas, memperlihatkan bahwa persamaan kedua inkonsisten, yang berarti bahwa sistem yang diberikan tidak memiliki himpunan penyelesaian. Secara geometris, hal tersebut berarti bahwa garis yang berkorespondensi dengan persamaan dalam sistem sebenarnya adalah paralel dan berjauhan.

Sebuah sistem persamaan dengan m persamaan dan n peubah dapat dituliskan kedalam susunan angka suatu matriks dalam bentuk segiempat :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Matriks di atas disebut matriks perluasan. Adapun contoh matriks perluasan untuk sistem persamaan berikut:

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = -15$$

$$3x_1 + 6x_2 - x_3 = -11$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3$$

Adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -15 \\ 3 & 6 & -1 & -11 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

4.2.1 Operasi Baris Elementer

Operasi baris elementer dapat digunakan pada matriks yang diperluas sampai terbentuk matriks eselon baris atau matriks eselon baris tereduksi. Matriks augmented adalah representasi matriks yang digunakan dalam konteks sistem persamaan linear. Matriks ini menggabungkan matriks koefisien dan matriks kolom yang berisi konstanta-nya. Tiga operasi baris elementer terhadap matriks augmented yang dapat dilakukan antara lain:

1. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol
2. Menukarkan letak dua buah garis
3. Menambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya.

Disebut eliminasi gauss jika prosesnya berhenti pada matriks eselon baris, dan jika berhenti pada matriks eselon baris tereduksi disebut metode eliminasi Gauss Jordan.

Suatu matriks bentuk eselon memiliki ciri sebagai berikut:

1. Semua elemen di bawah elemen pivot pada setiap kolom adalah nol.
2. Jika ada baris yang sepenuhnya terdiri dari nol, baris-baris ini ditempatkan di bagian bawah.

3. Elemen pemimpin pertama pada baris pertama, elemen pemimpin kedua pada baris kedua, dan seterusnya.
4. Semua elemen pivot bernilai 1 selain itu semuanya bernilai 0

Suatu matriks yang memiliki ciri 1-3 disebut bentuk eselon baris, sedangkan matriks yang memiliki ciri 1-4 disebut bentuk eselon baris tereduksi.

Contoh:

Tentukan solusi sistem persamaan di bawah ini:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$

$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 10$$

Jawaban:

Persamaan di atas diubah dalam bentuk matriks, sbb:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

Langkah 1: Buat nilai 3 pada baris 2 menjadi 0

Dengan operasi baris 2 - 3 baris 1 atau $b_2 - 3b_1$, hanya berlaku untuk semua elemen baris 2 sehingga persamaan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

Langkah 2: Buat nilai 2 pada baris 3 menjadi 0.

Dengan operasi baris 3 - 2 baris 1 atau $b_3 - 2b_1$, hanya berlaku untuk semua elemen baris 3, sehingga persamaan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Langkah 3: Buat nilai 6 pada baris 3 menjadi 0.

Dengan operasi baris 3 + 3 baris 2 atau $b_3 + 3b_2$, hanya berlaku untuk semua elemen baris 3, sehingga persamaan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -6 \\ -14 \end{Bmatrix}$$

Langkah 4: Buat nilai 6 pada baris 3 menjadi 0.

Dengan operasi baris 3 + 3 baris 2 atau $b_3 + 3b_2$, hanya berlaku untuk semua elemen baris 3, sehingga persamaan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -6 \\ -14 \end{Bmatrix}$$

Persamaan sudah terbentuk matriks segitiga bawah, sehingga dapat dilakukan back solving:

$$\begin{aligned} -7x_3 &= -14 && \dots\dots\dots(1) \\ -2x_2 - 3x_3 &= -6 && \dots\dots\dots(2) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 && \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

Dari persamaan 1 diperoleh nilai $x_3 = 2$ (subtitusi nilai $x_3 = 2$ pada pers 2) sehingga diperoleh nilai $x_2 = 0$ (subtitusi nilai $x_3 = 2$ dan $x_2 = 0$ pada pers 3) sehingga diperoleh nilai $x_1 = 1$
 Jadi penyelesaian persamaan di atas adalah:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2$$

Metode ini juga disebut sebagai eliminasi Gauss, dan jika Langkah 4 dilanjutkan pada matriks eselon baris tereduksi disebut metode eliminasi Gauss Jordan.

4.2.2 Metode Invers Matriks

Metode invers matriks adalah salah satu cara yang dapat dilakukan untuk menentukan himpunan penyelesaian suatu SPL. Namun, perlu diingat bahwa menggunakan matriks balikan untuk menyelesaikan SPL tidak selalu efisien, terutama untuk sistem persamaan yang besar dan kompleks.

Pertama-tama kita perlu memahami bagaimana cara mencari invers (balikan) dari suatu matriks. Untuk matriks $M_{2 \times 2}$, invers dapat dicari dengan cara

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Jika determinan sebuah matriks bernilai 0, maka matriks tersebut dikatakan matriks singular, dan tidak mempunyai invers. Invers matriks berordo $n \times n$, dapat diperoleh dengan metode eliminasi Gauss, sebagai berikut:

$$\begin{array}{c}
 [A | I] \xrightarrow{\text{eliminasi Gauss}} [I | A^{-1}] \\
 \left[\begin{array}{cccc|ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{eliminasi Gauss}} \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccccc}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\
 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\
 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Contoh: Tentukan balikan (invers) dari matriks A di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1
 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1
 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 / (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1
 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 - 9R_3 \\ R_2 + 3R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\
 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\
 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Jadi matriks balikan dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Misalkan A^{-1} adalah matriks balikan dari A. Sistem persamaan linier $Ax = b$ dapat diselesaikan sbb:

$$Ax = b$$

$$A^{-1} Ax = A^{-1} b$$

$$Ix = A^{-1} b$$

$$x = A^{-1} b$$

Cara penyelesaian dengan mengalikan matriks A^{-1} dengan b dinamakan metode matriks balikan.

Contoh: Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan metode matriks balikan

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 21 \\x_1 + 8x_3 &= 25\end{aligned}$$

Penyelesaian:

Persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sbb:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari matriks invers (telah didapat pada contoh sebelumnya)

$$\begin{aligned}A^{-1} Ax &= A^{-1} b \\ \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ 25 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ 25 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -560 + 336 + 225 \\ 182 - 105 - 75 \\ 70 - 42 - 25 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Jadi Solusi dari persamaan linear di atas adalah $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

DAFTAR PUSTAKA

- Wahyuningtyas, T, D. 2016. PEMBELAJARAN BILANGAN UNTUK PGSD. Malang: Penerbit Ediiide Infografika.
- Soenarjo, R, J. 2008. Matematika 5: SD dan MI Kelas 5. Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendiidikan Nasional.
- Azizah, L, N.& Ariyanti, N., 2020. Dasar – Dasar Aljabar Linier. Sidoarjo: UMSIDA Press

BAB 5

PERSENTASE DAN RASIO

Oleh Rifka Agustianti

5.1 Definisi Pecahan

Pecahan merupakan bilangan rasional atau bilangan yang elemennya bisa dinotasikan melalui $\frac{p}{q}$ yang mana p serta q sembarang bilangan bulat serta $q \neq 0$. Pecahan merupakan angka yang mendeskripsikan komponen dari suatu keseluruhan, komponen sebuah benda ataupun komponen dari sebuah himpunan.

Formula pecahan = $\frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}}$

Misal $\rightarrow \frac{2}{7}$, 2 merupakan pembilang dan 7 merupakan penyebut.

Menurut simbolis pecahan bisa dinotasikan sebagai bagian dari pecahan biasa, pecahan desimal, pecahan persen ataupun pecahan campuran. Selain itu, pecahan juga bisa dinotasikan berdasarkan klasifikasi ekuivalensi yang tak hingga jumlahnya. Pecahan biasa merupakan simbol angka yang digunakan dalam melambangkan bilangan pecah serta rasio (perbandingan). Maksud dari bilangan pecah bisa timbul dari kondisi-kondisi seperti:

1. Pecahan sebagai elemen yang berukuran serupa dari yang utuh ataupun seluruh.

Pecahan biasa bisa dipergunakan dalam menggambarkan maksud pada masing-masing komponen dari yang utuh. Jika seorang guru memiliki sebuah apel yang akan diberi pada 3 orang siswanya, serta setiap siswa wajib mempereoleh bagian yang sama, maka setiap siswa akan mendapatkan $\frac{1}{3}$ bagian dari keseluruhan apel tersebut. Pecahan $\frac{1}{3}$ menginterpretasikan bagian dari setiap potong apel. Bagian tersebut dari suatu pecahan biasa menggambarkan esensi kondisi yang mana simbol angka tersebut tampak. Dalam

simbol angka $\frac{1}{3}$, angka 3 menggambarkan jumlah bagian-bagian yang sama dari keseluruhan serta dinamakan sebagai penyebut. Sementara itu, jumlah bagian yang menjadi fokus ketika waktu tertentu dinamakan pembilang.

2. Pecahan sebagai bagian dari kumpulan-kumpulan yang memiliki jumlah anggota yang sama, ataupun dinotasikan sebagai pembagian. Jika sekelompok obyek dikelompokkan menjadi bagian yang memiliki jumlah anggota yang sama, maka kondisinya pasti berkaitan dengan pembagian. Kondisi yang mana sekelompok objek yang memiliki anggota 15, dibagi menjadi 3 kelompok yang memiliki anggota sama banyaknya, maka memiliki model matematika $15 : 3 = 5$ atau $\frac{1}{3} \times 15 = 5$.

Dengan demikian, untuk memperoleh $\frac{1}{3}$ dari 15, peserta didik mesti memerhatikan 15 objek yang dikumpulkan menjadi 3 bagian yang memiliki jumlah anggota yang sama. Jumlah anggota setiap kelompok berkaitan dengan jumlah obyek asal. Sama seperti jika selembar dengan 5 meter dipotong menjadi 7 bagian dengan ukuran sama, menggambarkan kondisi pada kalimat pecahan $5 : 7$ ataupun $\frac{5}{7}$.

3. Pecahan sebagai rasio

Sebuah pecahan yang menyatakan rasio tak serupa maknanya dengan pecahan yang menyatakan bagian dari keseluruhan. Jika pecahan biasa dipergunakan dalam membuktikan rasio maka akan memiliki interpretasi tak sama jika diperbandingkan pada pecahan sebagai salah satu unsur dari yang menyeluruh. Seperti halnya, pembilang dari suatu pecahan sebagai rasio memungkinkan pembuktian banyaknya obyek terhadap kelompok obyek.

Hubungan antara satu pasang bilangan seringkali disimpulkan sebagai suatu rasio. Berikut diberikan berbagai contoh kondisi yang biasanya menampilkan rasio.

- a. Dalam kelompok 7 kursi tersedia 2 kursi berwarna kuning. Rasio kursi berwarna kuning terhadap keseluruhan kursi ialah $2 : 7$ ataupun kursi yang berwarna kuning $\frac{2}{7}$ keseluruhan kursi.
- b. Seutas tali R dengan panjang 8 m dibandingkan tali Q dengan panjang 24 m. Rasio panjang tali R terhadap tali Q tersebut ialah $8 : 24$ ataupun $\frac{8}{24}$ ataupun $\frac{1}{3}$ panjang tali R terhadap tali Q.

5.1.1 Bentuk-bentuk pecahan

Bentuk-bentuk pecahan terdiri dari (Prabawanto, 2015) :

1. Pecahan biasa yakni bilangan pecah yang hanya terbentuk atas pembilang serta penyebut, dengan penyebut tidak sama dengan nol, misalnya $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \dots$
2. Pecahan campuran merupakan bilangan pecah yang terbentuk atas bilangan bulat dan bilangan pecah biasa. Pecahan campuran berbentuk, dengan p bilangan bulat, q pembilang, serta r penyebut tidak sama dengan nol, misalnya $3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{3}, 2\frac{3}{5}, \dots$
3. Pecahan desimal adalah pecahan persepuluh, perseratus, perseribu, dan sebagainya yang dituliskan dengan memakai tanda koma (,).
4. Persen artinya Persen artinya per seratus. Dilambangkan dengan %, misalnya 10%, 20%, ...
5. Pecahan murni atau pecahan sejati merupakan pecahan paling sederhana
6. Pecahan senama yakni bilangan pecah yang mempunyai penyebut serupa
7. Pecahan senilai yakni bilangan pecah yang memiliki nilai yang persis serupa

5.1.2 Operasi pada pecahan

1. Penjumlahan
 - a. Penjumlahan pecahan dengan penyebut sama, diselesaikan melalui penjumlahan pembilang-

pembilangnya saja, sedangkan penyebutnya tidak berubah

- b. Penjumlahan pecahan dengan penyebut tak sama, dapat diselesaikan dengan formula berikut :

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$$

2. Pengurangan

Dapat diselesaikan seperti proses penjumlahan, hanya saja menggunakan operasi pengurangan

3. Perkalian, dapat diselesaikan dengan formula berikut :

$$\begin{aligned} p \times \frac{1}{q} &= \frac{p}{q} \\ \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} &= \frac{1}{pq} \\ \frac{v}{p} \times \frac{w}{q} &= \frac{vw}{pq} \end{aligned}$$

4. Pembagian, dapat diselesaikan dengan cara :

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} : r &= \frac{p}{qr} \\ \frac{p}{r} : \frac{q}{r} &= \frac{p}{q} \\ \frac{p}{q} : \frac{r}{s} &= \frac{ps}{qr} \end{aligned}$$

5.2 Definisi Rasio

Dalam keseharian, kita sering menjumpai beragam masalah serta pengambilan keputusan yang memerlukan rasio. Persoalan rasio pasti kerap dijumpai yang erat kaitannya dengan keseharian

Perbandingan biasa dinamakan rasio. Rasio antar dua satuan ataupun lebih dinamakan rasio. Rasio ekivalen dengan bilangan pecah, sementara rasio tak akan berubah bila dikalikan ataupun dibagi dengan bilangan lainnya. Tak hanya itu, rasio dapat dibagi dengan membagi suku kesatu ataupun mengalikan suku kedua. Rasio pun dapat dikalikan dengan sebuah bilangan melalui proses

perkalian bilangan pertama dengan bilangan tersebut juga kebalikannya pada suku kedua.

Terdapat 3 teknik dalam menyatakan sebuah rasio, yakni :

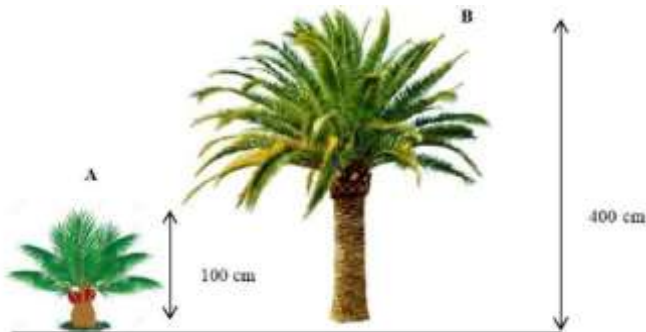
1. Pecahan, misalnya $\frac{q}{r} = \frac{2}{3}$
2. Dua bilangan yang dipisahkan dengan titik dua (:), contohnya 2 : 3
3. Dua bilangan yang dipisahkan dengan kata "dari", contohnya 2 dari 3

Sebuah rasio bisa disederhanakan melalui proses pembagian berbagai bilangan yang dibandingkan dengan faktor persekutuan terbesar (FPB). Oleh sebabnya, penting untuk mengingat kembali proses menentukan FPB atas dua bilangan. Lalu menyederhanakan rasio tersebut dengan membaginya melalui proses FPB.

5.2.1 Rasio Dua Besaran Satuannya Serupa

Rasio dua besaran satuannya sama, yakni rasio dengan besaran dan satuannya serupa. Misal, rasio berat badan dengan karung beras merupakan dua besaran yang sejenis, karena keduanya mempunyai satuan serupa, yakni kilogram. Sama halnya dengan rasio tinggi sebuah gedung dengan tiang bendera merupakan dua besaran yang sejenis, karena keduanya mempunyai satuan yang sama, dapat dinotasikan dengan meter ataupun inci. (Susanto, 2022)

Simaklah ilustrasi berikut !



Sumber : <https://www.dreamstime.com/>

Dari ilustrasi tersebut, bisa diartikan bahwa rasio dengan satuan yang serupa ialah membandingkan dua obyek atau lebih yang mempunyai ukuran satuan yang serupa

Untuk lebih memahami, jawablah beberapa pertanyaan berikut!

1. Berdasarkan ilustrasi di atas, tumbuhan mana yang paling tinggi?
2. Tumbuhan manakah yang paling rendah?
3. Jelaskan rasio yang paling sederhana antara tinggi tumbuhan A dengan tumbuhan B ?

Jawab:

- a. Tumbuhan yang paling tinggi yakni tumbuhan B
- b. Tumbuhan yang paling rendah yakni tumbuhan A
- c. Rasio tinggi tumbuhan tersebut yakni

Tinggi Pohon Sawit A : Tinggi Pohon Sawit B	100 cm : 400 cm	Satuan cm
	100 : 400	Satuan hilangkan
	1 : 4	Disederhanakan

Dari masalah di atas, dapat ditemukan rasio dua besaran yang serupa dengan satuan yang serupa pula, yakni tinggi dua tumbuhan yang berbeda. Dua tumbuhan A serta tumbuhan B yang mempunyai besaran tinggi serta satuannya serupa, yakni centimeter.

5.2.2 Rasio Dua Besaran dengan Satuan Berbeda

Rasio dua besaran dengan satuan yang berbeda merupakan perbandingan dengan besaran yang sama namun satuannya beda. Simaklah contoh rasio dua besaran dengan satuan yang beda

Contoh

Sederhanakan beberapa rasio berikut :

1. 8 m : 80 cm → Besaran panjang dengan satuan meter dengan centimeter

2. 3 kg : 9 ons → Besaran massa dengan satuan kilogram dengan ons
3. 4 tahun : 2 dasawarsa → Besaran waktu dengan satuan tahun dengan dasawarsa
4. 4 buah : 1 kodi → Besaran kuantitas benda dengan satuan buah dengan kodi

Jawab :

- a. 8 m : 80 cm

8 m	:	80 cm
800 cm	:	80 cm
10	:	1
- b. 3 kg : 9 ons

3 kg	:	9 ons
30 ons	:	9 ons
10	:	3
- c. 4 tahun : 2 dasawarsa

4 tahun	:	2 dasawarsa
4 tahun	:	20 tahun
1	:	5
- d. 60 buah : 5 kodi

60 buah	:	2 kodi
60 buah	:	100 buah
3	:	5

Dalam menyederhanakan rasio tersebut, mesti disamakan dulu jenis satuannya. Setelah satuannya sama, lalu berikutnya menyederhanakan bentuk rasio bilangan tersebut.

Komponen utama yang wajib diingat dalam menyederhanakan rasio dua besaran yang satuannya tak sama ialah menyamakan satuan besaran yang tak sama tersebut, selanjutnya mencari nilai faktor persekutuan terbesarnya (FPB). Sehingga rasio tersebut mampu diselesaikan melalui proses hasil bagi dengan nilai FPB dari dua bilangan tersebut

DAFTAR PUSTAKA

- Prabawanto, H. S. 2015. 'Pembelajaran bilangan pecahan', (1993), pp. 1–39.
- Susanto, D. 2022. *Buku Panduan Guru Matematika*. Pusat Perbukuan Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.

BAB 6

GEOMETRI DASAR

Oleh Hersiyati Palayukan

6.1 Pengertian Geometri

Istilah "geometri" berasal dari bahasa Yunani yang berarti "ukuran bumi," merujuk pada konsep yang mencakup semua hal yang ada di bumi (Smorynski, 2007). Geometri kuno pertama kali dimulai sebagai kegiatan praktis yang bersifat empiris, termasuk pengukuran yang diterapkan dalam pertanian oleh masyarakat Babylonia dan Mesir. Dari sana, perkembangan geometri melibatkan perhitungan panjang garis, luas, dan volume. Konsep dasar dalam geometri adalah titik, dari mana konsep-konsep geometri lainnya dapat dikembangkan (Hartshorne, 2000).

Geometri adalah cabang matematika yang mempelajari sifat-sifat dan hubungan antar objek ruang dan bentuk, seperti titik, garis, bidang, dan benda-benda tiga dimensi. Geometri merupakan disiplin matematika yang memfokuskan kajiannya pada sifat-sifat dan karakteristik-karakteristik ruang dan bentuk. Dalam bidang ini, konsep-konsep mendasar seperti titik, garis, bidang, sudut, dan bentuk-bentuk geometris menjadi pusat perhatian. Geometri berperan penting dalam memungkinkan kita memahami interaksi antara berbagai objek dalam ruang dan cara untuk mengukur, menganalisis, serta menggambarkannya (Ahmad, Helsa and Ariani, 2020).

Obyek-obyek dalam geometri, seperti titik, garis, segitiga, lingkaran, dan sebagainya, adalah entitas-abstrak yang menjadi bagian integral dari matematika (Stewart and Tall, 2015). Dalam ruang berdimensi satu (R), objek-objek geometri seperti titik, garis, sinar garis, dan himpunan titik, yang disebut sebagai "sinar garis tanpa titik akhir/titik pangkal," dapat ditemukan di antara bilangan real (Smorynski, 2007).

Geometri, seperti cabang matematika lainnya, memiliki dasar aksiomatik-deduktif yang ketat (Stewart and Tall, 2015), yang

telah mengalami perkembangan pesat sepanjang sejarahnya. Namun, dalam proses pembelajaran, geometri bisa diajarkan melalui berbagai pendekatan, termasuk pendekatan kontekstual, empiris-induktif, dan informal. Di tingkat pendidikan yang lebih tinggi, metode deduktif aksiomatis digunakan untuk membuktikan teorema-teorema geometri (Hartshorne, 2000).

Selain geometri Euclides yang paling dikenal, ada juga geometri elliptik, geometri hiperbolik, geometri fraktal, dan perkembangan geometri lain yang terus berlangsung (Smorynski, 2007). Dalam konteks perkuliahan ini, perhatian utamanya adalah pada Geometri Euclides dalam ruang berdimensi satu dan dua (Stewart and Tall, 2015).

Sejarah geometri memiliki akar yang kuat dalam peradaban kuno. Salah satu tonggak utama dalam perkembangan geometri adalah "Elements" karya matematikawan Yunani Euclid pada abad ke-3 SM. Karya ini dikenal sebagai buku teks geometri paling berpengaruh sepanjang sejarah. Euclid memperkenalkan definisi, aksioma, dan teorema yang membentuk dasar geometri Euclidean. Karya Euclid menjadi landasan geometri selama berabad-abad, bahkan setelah perkembangan geometri non-Euclidean pada abad ke-19 oleh matematikawan seperti Lobachevsky dan Riemann (Boyer and Merzbach, 2011).

6.2 Titik, Garis, Bidang

Dalam buku "*Elements*" karya Euclid, terdapat istilah yang merujuk kepada konsep-konsep dasar yang dikenal sebagai "primitif." Konsep-konsep primitif ini mencakup ide-ide geometris yang sederhana dan intuitif namun sulit untuk didefinisikan secara tuntas. Seiring perkembangan ilmu geometri, para ahli geometri modern memasukkan konsep-konsep tersebut ke dalam kategori "tidak didefinisikan" (*undefined*). Kategori ini, yang sering disebut sebagai "pengertian pangkal," mencakup konsep-konsep primitif seperti titik, garis, dan bidang. Mencoba memberikan definisi yang ketat untuk unsur-unsur primitif ini dapat berisiko menyebabkan kerancuan dan inkonsistensi dalam kerangka kerja geometri (Smorynski, 2007).

6.2.1 Titik (Point)

Dalam geometri, titik adalah entitas dasar yang tidak memiliki dimensi, artinya tidak memiliki panjang, lebar, atau tinggi. Titik hanya memiliki lokasi atau koordinat dalam ruang. Ini adalah elemen terkecil dalam geometri.

Dalam geometri, titik adalah entitas dasar yang digunakan untuk menggambarkan lokasi atau posisi dalam ruang. Titik adalah konsep yang tidak memiliki dimensi fisik, yang berarti tidak memiliki panjang, lebar, atau tinggi. Sebaliknya, titik hanya memiliki koordinat atau posisi relatif terhadap suatu sistem referensi yang dapat diberikan oleh koordinat kartesian, seperti (x, y) dalam geometri dua dimensi atau (x, y, z) dalam geometri tiga dimensi.

Konsep titik sangat penting dalam geometri, karena semua objek geometris lainnya dapat dibentuk dengan menggabungkan atau menghubungkan titik-titik ini. Misalnya, garis adalah himpunan tak terbatas dari titik-titik yang membentuk lintasan yang tak memiliki lebar. Begitu juga dengan bidang, yang terbentuk oleh himpunan tak terbatas dari garis-garis yang membentuknya.

Dalam "Elements" oleh Euclid, definisi titik diberikan sebagai "*A point is that which has no part.*" Ini artinya titik adalah elemen paling sederhana dalam geometri, yang tidak bisa dibagi menjadi bagian lebih kecil. Ini adalah konsep dasar yang menjadi dasar untuk pemahaman geometri dan matematika secara umum.

Titik juga digunakan sebagai dasar untuk membentuk objek geometris yang lebih kompleks, seperti segitiga, lingkaran, kubus, dan banyak objek lainnya. Oleh karena itu, pemahaman yang kuat tentang konsep titik sangat penting dalam studi geometri dan matematika pada umumnya.

Secara umum, titik adalah simbol yang mencerminkan suatu posisi tertentu dan biasanya digambarkan sebagai sebuah lingkaran kecil berwarna (*Oxford Dictionary*). Dalam matematika, konsep titik mengacu pada suatu lokasi yang tidak memiliki dimensi seperti panjang, lebar, atau tinggi, dan sering diwakili oleh tanda titik (dot). Dalam konteks geometri, titik dapat diidentifikasi dengan menggunakan huruf tertentu seperti A, B, dan sebagainya.



Gambar 6.1. Titik A

6.2.2 Garis (Lane)

Garis adalah himpunan tak terhingga dari titik-titik yang membentuk lintasan yang tidak memiliki lebar atau ketebalan. Dengan kata lain, garis adalah entitas matematis yang terdiri dari sejumlah tak terbatas titik yang sejajar satu sama lain dan membentuk suatu jalur yang tidak memiliki lebar.

Garis adalah salah satu elemen paling dasar dalam geometri dan digunakan sebagai dasar untuk membentuk objek geometris lainnya. Dalam pemahaman geometri, garis sering digambarkan sebagai sekumpulan titik-titik yang menggambarkan suatu jalur atau lintasan yang tampaknya tak berujung. Dengan sifatnya yang tidak memiliki lebar, garis hanya memiliki dua arah, dan panjangnya tidak terbatas. Garis juga merupakan konsep yang penting dalam matematika, fisika, dan banyak bidang ilmu lainnya.



Gambar 6.2. Garis AB

6.2.3 Bidang

Bidang adalah permukaan datar yang terbentuk oleh garis-garis yang membentuknya. Sebuah bidang tidak memiliki ketebalan dan membentang tak terbatas dalam dua dimensi. Dalam arti lain, bidang adalah himpunan titik-titik yang membentuk permukaan datar yang tidak memiliki ketebalan. Setiap dua titik yang diambil dari bidang tersebut akan membentuk garis lurus yang seluruhnya terletak pada permukaan bidang tersebut.

Sebuah bidang datar dapat diibaratkan sebagai lapisan tipis yang bisa kita potong. Bidang ini bersifat tak terbatas, terus-menerus meluas dalam semua arah, dan tidak memiliki ketebalan.

Bidang merupakan sebuah konsep atau entitas abstrak yang hanya dapat dipahami secara konseptual. Karena sifatnya yang tidak dapat dijelaskan dengan cara konvensional, bidang termasuk ke dalam kategori konsep tak terdefinisi (Hartshorne, 2000; Smorynski, 2007).

Bidang adalah salah satu konsep dasar dalam geometri, dan pemahaman tentangnya adalah kunci untuk pemahaman berbagai objek geometris. Dalam geometri dua dimensi, kita sering mengasumsikan bahwa bidang adalah permukaan datar yang tak terbatas, dan ini membantu kita untuk memahami hubungan dan sifat antara titik, garis, dan objek geometris lainnya. Dalam matematika dan fisika, konsep bidang juga digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena dalam dunia nyata, seperti permukaan datar dalam ilmu optik, bidang koordinat dalam matematika, dan banyak aplikasi lainnya.



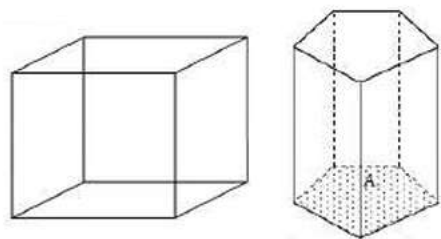
Gambar 6.3. Bidang ABCD

6.2.4 Ruang

Ruang adalah himpunan semua titik yang ada dalam dimensi tiga. Ini mencakup semua titik yang dapat ditempatkan dalam tiga dimensi, baik itu dalam konteks matematika atau representasi objek fisik dalam dunia nyata. Objek-objek geometri seperti garis, bidang, dan bangun tiga dimensi seperti kubus, bola, atau prisma, semuanya terdapat dalam suatu bidang atau lebih dalam ruang tiga dimensi. Ruang adalah tempat di mana objek-objek ini dapat ada dan berinteraksi.

Ruang memiliki tiga dimensi: panjang, lebar, dan tinggi. Panjang mengacu pada dimensi horizontal, lebar mengacu pada dimensi vertikal, dan tinggi mengacu pada dimensi kedalaman. Ini memungkinkan kita untuk merepresentasikan objek dalam tiga

dimensi dan memahami interaksi mereka dalam ruang. Ruang dalam geometri dimensi-3 diartikan sebagai unsur geometri yang terus berkembang tanpa batas. Ini berarti tidak ada batasan pada jarak atau ukuran dalam ruang tiga dimensi, dan ruang tersebut dapat diperluas tanpa henti.



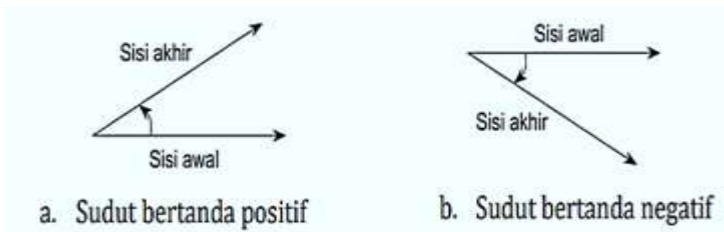
Gambar 6.4. Ruang

6.3 Sudut

6.3.1 Definisi sudut

Definisi

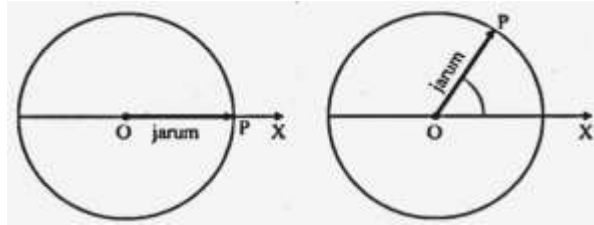
Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (initial side) ke sisi akhir (terminal side). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda “positif” jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda “negatif” jika arah putarannya searah dengan jarum jam. Arah putaran untuk membentuk sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.



Gambar 6.5. Sudut berdasarkan arah putaran

6.3.2 Ukuran Sudut dalam Derajat

Ukuran derajat adalah ukuran yang dapat dibentuk pada bidang datar dengan satuan ($^{\circ}$) menggambarkan $1/360$ dari putaran penuh. Besar suatu sudut dalam ukuran derajat dapat dijelaskan dengan menggunakan konsep sudut sebagai jarak putar.



Gambar 6.6. Sudut sebagai Jarak Putar

Definisi

Satu derajat (1°) didefinisikan sebagai ukuran besar sudut yang disapu oleh jari-jari lingkaran dalam jarak putar sejauh $\frac{1}{360}$ putaran atau dapat ditulis sebagai $1^{\circ} = \frac{1}{360}$.

Berdasarkan definisi tersebut, jelas bahwa 1 putaran = 360° dan untuk sudut-sudut yang kurang dari satu putaran dapat ditentukan besar sudutnya jika diketahui seperberapa jarak putarannya terhadap satu kali putaran penuh.

Sebagai contoh:

Setengah putaran = $\frac{1}{2} \times 360^{\circ} = 180^{\circ}$ disebut *sudut lurus*

Seperempat putaran = $\frac{1}{4} \times 360^{\circ} = 90^{\circ}$ disebut *sudut siku-siku*,

Seperlima putaran = $\frac{1}{5} \times 360^{\circ} = 72^{\circ}$, dan seterusnya.

1 derajat = 60 menit, ditulis $1^{\circ} = 60'$
atau

1 menit = $\frac{1}{60}$ derajat, ditulis $1' = \left[\frac{1}{60}\right]^{\circ}$

1 menit = 60 detik, ditulis $1' = 60''$ atau

1 detik = $\frac{1}{60}$ menit, ditulis $1'' = \left[\frac{1}{60}\right]'$

Selain itu, ada ukuran-ukuran yang lebih kecil dari ukuran derajat. Ukuran-ukuran tersebut adalah ukuran menit dan ukuran detik. Ukuran sudut dalam menit dilambangkan dengan ' dan ukuran sudut dalam detik dilambangkan dengan ''.

6.3.3 Ukuran Sudut dalam Radian

Definisi

Satu radian (ditulis: 1 rad) didefinisikan sebagai ukuran sudut pada bidang datar yang berada di antara dua jari-jari lingkaran dengan panjang busur sama dengan panjang jari-jari lingkaran tersebut.

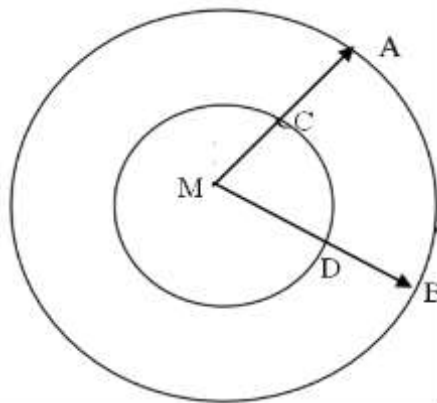
Konsep pengukuran sudut dalam radian dapat diilustrasikan melalui Gambar 6.6. Pada gambar tersebut, titik M menunjukkan pusat dari kedua lingkaran. MD dan MB masing-masing menunjukkan jari-jari lingkaran kecil dan besar. Dari gambar, terlihat bahwa juring atau sektor BMA dapat diperoleh dari juring DMC melalui perbesaran (dilatasi) yang berpusat di M. Oleh karena itu, juring DMC dan juring BMA adalah sebangun. Hubungan ini terbentuk karena kesebangunan antara keduanya. Kesebangunan ini memberikan hubungan:

$$\frac{\text{panjang busur } DC}{MD} = \frac{\text{panjang busur } BA}{MB}$$

Hubungan ini menunjukkan bahwa perbandingan bahwa perbandingan tersebut tidak dipengaruhi oleh panjang jari-jari lingkaran, tetapi semata-mata oleh besarnya $\angle DMC$. Nilai perbandingan $= \frac{\text{panjang busur } DC}{MD}$ merupakan ukuran sudut DMC yang dinyatakan dalam ukuran radian.

Jika $MA = MB = r$ maka nilai perbandingan:

$$\frac{\text{panjang busur } AB}{MB} = \frac{r}{r} = 1$$



Gambar 6.7. Ukuran Sudut dalam Radian

6.4 Hubungan antara titik, garis dan bidang dalam ruang

Garis, bidang, dan ruang memiliki keterkaitan yang signifikan dengan sistem koordinat kartesian. Identifikasi titik pada garis dapat dilakukan dengan menggunakan satu komponen, sementara bidang terkait dengan dua komponen, yaitu sumbu x dan y dengan koordinat (x, y) . Lebih lanjut, konsep ruang melibatkan tiga komponen, yaitu sumbu x, sumbu y, dan sumbu z, dengan koordinat (x, y, z) (Hulek, 2003)

6.4.1 Hubungan titik dengan garis dan bidang

Diberikan titik A, garis g, dan bidang α , kemungkinan yang terjadi adalah:

$A \in g$ (A terletak pada g) atau $A \notin g$ (A terletak diluar g), dan

$A \in \alpha$ (A terletak pada α) atau $A \notin \alpha$ (A terletak diluar α)

6.4.2 Hubungan garis dengan garis

Diberikan garis g dan garis h didalam ruang, garis g dan h ditentukan paling sedikit oleh dua titik yang berlainan.

Hubungan antara g dan h kemungkinan akan terjadi adalah:

1. Garis g dan m berimpit, $g \cap h = g = h \neq \emptyset$
2. Garis g dan m berpotongan, $g \cap h = P \neq \emptyset$, P merupakan titik persekutuan
3. Garis g dan m sejajar, $g \cap h = \emptyset$
4. Garis g dan m bersilangan, $g \cap h = \emptyset$

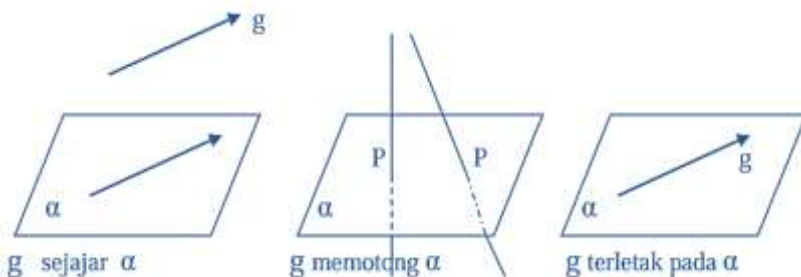
6.4.3 Hubungan garis dengan bidang

Diberikan garis g dan bidang α dalam suatu ruang, maka kemungkinan yang dapat terjadi adalah:

1. garis g sejajar dengan bidang α , $g \cap \alpha = \emptyset$
2. garis g memotong bidang α , $g \cap \alpha = \{P\}$
3. garis g terletak pada bidang α , $g \cap \alpha = g$

ketentuan:

1. garis g dikatakan sejajar dengan bidang α bila garis sejajar dengan suatu garis yang terletak pada α , $g \parallel \alpha \Leftrightarrow \exists h \text{ pada } \alpha \ni g \parallel h$
2. garis g dikatakan tegak lurus terhadap bidang α bila garis g tegak lurus pada setiap garis yang terletak pada α . $g \perp \alpha \Leftrightarrow g \perp h \text{ pada } \alpha$
3. Suatu bidang datar ditentukan oleh: 1) tiga buah titik yang tidak segaris, 2) satu buah titik dan satu buah garis yang tidak melalui titik tersebut, 3) dua buah garis yang berpotongan atau sejajar.



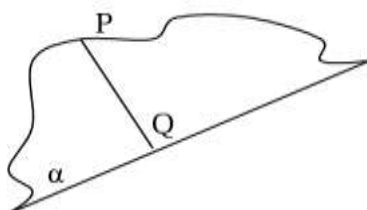
Gambar 6.8. Hubungan garis dengan Bidang

6.5 Jarak titik, garis dan bidang dalam ruang

6.5.1 Jarak antara titik dengan garis

Apabila titik P tidak terletak pada garis m , akan ditentukan jarak antara titik P dan garis g bila $P \notin m$.

Dengan mengambil titik P dan garis m sebagai acuan, dapat dibentuk bidang α . Di dalam bidang α , konstruksikan garis yang berjalan melalui titik P dan bersilang tegak lurus dengan garis m , sehingga garis tersebut memotong garis m di titik Q . Dengan demikian, panjang PQ dapat dianggap sebagai jarak antara titik P dan garis m .



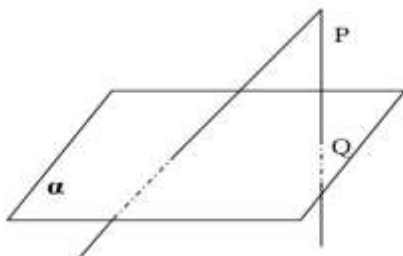
α = bidang (P, m)

PQ = jarak (P, m)

Gambar 6.9. Jarak antara titik dengan Garis

6.5.2 Jarak antara titik dengan bidang

Jika diketahui titik P dan bidang α dengan $P \notin \alpha$, akan digunakan jarak antara titik P kebidang α . Dari titik P , dapat dihasilkan garis-garis yang tak terhingga banyaknya yang memotong bidang α , dan salah satunya akan memotong bidang tersebut secara tegak lurus di Q . Garis PQ , yang bersifat tegak lurus terhadap bidang α , dianggap sebagai jarak antara titik P dan bidang α .



Q = Proyeksi P pada α

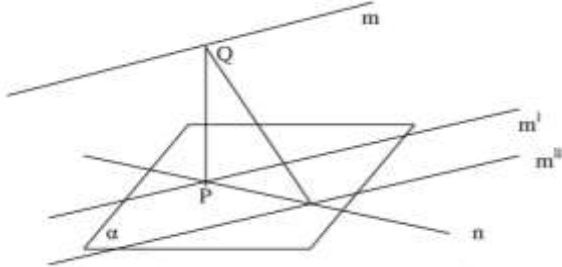
$PQ \perp \alpha$

PQ = jarak (P, α)

Gambar 6.10. Proyeksi Titik pada Bidang

6.5.3 Jarak antara titik dengan bidang

jika diketahuidua buah garis yaitu garis m dan garis n, maka garis m dan garis n akan memiliki jarak nol jika garis m memotong garis n atau jika garis m berimpit dengan garis n.



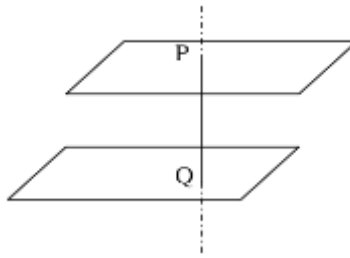
Gambar 6.11. Jarak garis dengan garis

misalkan m bersilangan dengan n, maka akan dapat dibuaat tak hingga garis m^I yang sejajar dan memotong. Lalu buatlah bidang α yang dibentuk oleh garis-garis m^I dan n. Garis m akan sejajar dengan bidang α , karena m sejajaar dengan m^I , dengan m^I pada bidang α . Proyeksikan m pada bidang α maka akan terbentuk garis m^{II} pada α sehingga akan berlaku bahwa m sejajar dengan m^I dan sejajar jugaa dengan m^{II} seperti pada gambar diatas.

Melalui titik P dapat dibuat garis yang tegak lurus bidang α dan memotong m di Q. Garis PQ merupakan garis yang tegak lurus persekutuan dari garis m dan garis n. Garis PQ merupakan jarak dari garis m ke garis n.

6.5.4 Jarak antara bidang dengan bidang

Amati bidang α dan β untuk menentukan jarak di antara keduanya. Jika bidang α dan β berimpit atau berpotongan, maka jarak antara keduanya adalah nol. Jika keduanya sejajar, dan terdapat titik P pada bidang α serta titik Q pada bidang β , maka jarak diukur dengan panjang garis PQ sebagai jarak antara kedua bidang tersebut.

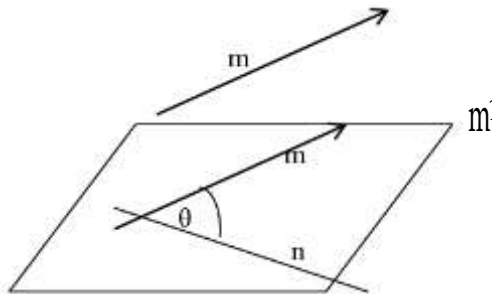


Gambar 6.12. Jarak Bidang dengan Bidang

6.6 Sudut antara garis dan bidang

6.6.1 Sudut antara garis yang saling bersilangan

Amati garis m dan n yang bersilangan, dan tujuan kita adalah menemukan sudut di antara keduanya. Langkah pertama adalah membuat garis m^1 yang sejajar dengan m , sehingga m^1 memotong garis n . Selanjutnya, konstruksikan bidang α yang melalui garis m^1 dan garis n . Sudut antara m^1 dan n , dinotasikan sebagai $\theta = \angle(m^1, n)$, mewakili sudut antara garis m dan n dengan batasan $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.

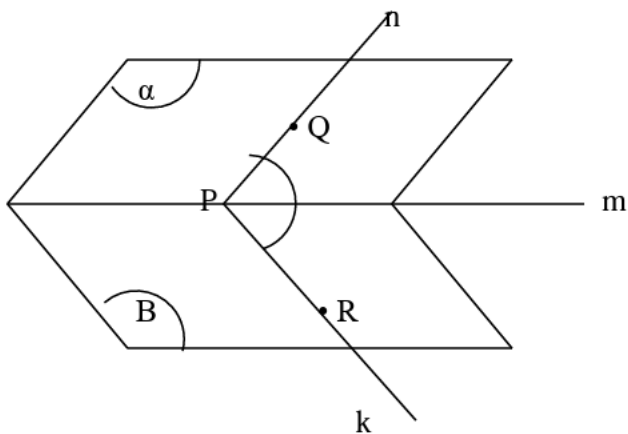


Gambar 6.13. Sudut antara garis dengan garis

6.6.2 Sudut antara bidang dan bidang

Pertimbangkan dua bidang, α dan β , dan kita akan menentukan sudut antara keduanya. Jika bidang α sejajar atau berimpit dengan bidang β , maka sudut antara keduanya adalah nol, dinyatakan sebagai $\angle(\alpha, \beta) = 0$. Jika bidang α memotong bidang β melalui garis m , pilih titik P pada garis tersebut. Dengan titik P sebagai acuan, buatlah garis n pada bidang α dan garis k pada bidang β , keduanya tegak lurus terhadap garis m . Pilih titik Q pada garis n dan titik R pada garis k . Maka, $\angle QPR$ dianggap sebagai sudut

antara bidang α dan β . Sudut ini umumnya dikenal sebagai sudut tumpuan antara bidang α dan β .



Gambar 6.14. Sudut antar Bidang dengan bidang

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, S., Helsa, Y. and Ariani, Y. 2020. *Pendekatan Realistik Dan Teori Van Hiele*. Deepublish.
- Boyer, C.B. and Merzbach, U.C. 2011. *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.
- Hartshorne, R. 2000. 'Teaching geometry according to Euclid', *Notices of the AMS*, 47(4).
- Hulek, K. 2003. *Elementary algebraic geometry*. American Mathematical Soc.
- Smorynski, C. 2007. *History of Mathematics: A supplement*. Springer Science & Business Media.
- Stewart, I. and Tall, D. 2015. *The foundations of mathematics*. OUP Oxford.

BAB 7

VOLUME DAN LUAS

Oleh Irmayani

7.1 Pendahuluan

Pada bagian ke-tujuh ini, topik pembahasan berikutnya tentang bangun ruang khusus seperti kubus, balok, prisma, limas, tabung dan kerucut. Bagian lain akan membahas mengenai luas permukaan dan volume dari bangun ruang. Memahami pengukuran bangun ruang merupakan hal yang sangat penting karena dalam kehidupan sehari-hari kita sering menghadapi situasi yang melibatkan luas permukaan dan volume suatu objek (Susanti, 2022).

Dalam memperdalam pemahaman tentang bangun ruang, penting bagi kita untuk memahami komponen-komponen khusus dari setiap bangun ruang tersebut, seperti memahami luas permukaan dan volume bangun ruang. Pemahaman akan luas permukaan dan volume bangun ruang ini sangat penting karena dalam kehidupan sehari-hari kita sering menemui situasi di mana kita membutuhkan kemasan dari bahan karton yang perlu dihitung dengan cermat agar perencanaannya tepat. Begitu juga dengan pemahaman terhadap volume bangun ruang yang juga krusial, seperti dalam kasus seorang pembuat kue yang menerima pesanan 100 biji kue, sehingga harus menghitung setiap cetakan kue secara akurat. Untuk lebih memperjelas, mari kita eksplorasi sifat-sifat dari bangun ruang tersebut.

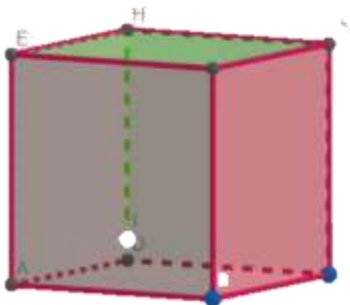
7.2 Luas Permukaan

7.2.1 Kubus

Dalam menghitung luas permukaan kubus harus dipahami dahulu luas bangun persegi. Konsep perhitungan luas permukaan kubus adalah jumlah seluruh permukaan bidang kubus. Bidang kubus yang terdiri dari sisi kubus yang merupakan gabungan

bidang persegi. Luas permukaan kubus dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut:

$$\text{luas permukaan} = 6 \times \text{luas persegi}$$



Gambar 7.1. Kubus

Dalam menghitung luas permukaan kubus harus dipahami dahulu luas bangun persegi. Konsep perhitungan luas sisi kubus adalah jumlah seluruh permukaan bidang kubus. Bidang kubus yang terdiri dari sisi kubus yang merupakan gabungan bidang persegi.

Contoh 1.

Hitunglah luas permukaan kubus dengan panjang rusuk 6 cm

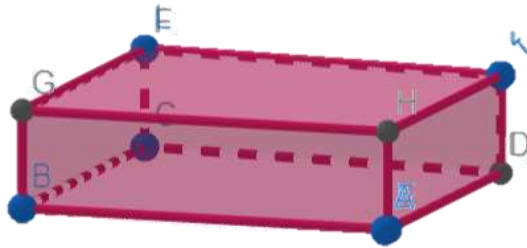
Jawab :

$$\begin{aligned}\text{luas permukaan} &= 6 \times \text{luas persegi} \\ &= 6 \times s \times s \\ &= 6 \times 6 \times 6 \\ &= 216 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Jadi luas permukaan kubus adalah 216 cm^2

7.2.2 Balok

Perhitungan luas permukaan balok hampir sama dengan kubus. Luas permukaan balok adalah jumlah total dari luas semua bidang yang membentuk permukaannya. Ketika sisi-sisi balok direbahkan, mereka membentuk jaring-jaring balok yang saat dijumlahkan memberikan luas permukaan balok. Jadi, menghitung luas jaring-jaring balok adalah cara untuk mendapatkan luas permukaan total dari balok tersebut (Purwatiningsi,2013).



Gambar 7.2. Balok

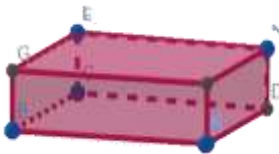
$$\begin{aligned} \text{luas permukaan} &= 2 \times p + 2 \times l + 2 \times t \\ &= 2 (p + l + t) \end{aligned}$$

Contoh 2.

Balok dengan ukuran panjang 12 cm, lebar 10 cm, dan tinggi 8 cm. Hitunglah luas permukaan balok itu

Jawab

$$\text{luas permukaan} = 2 \times p + 2 \times l + 2 \times t$$

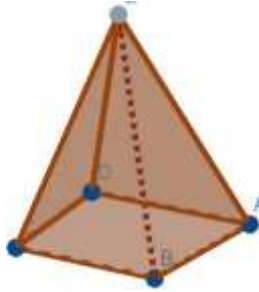


$$\begin{aligned} &= 2 (p + l + t) \\ &= 2 (12 + 10 + 8) \\ &= 2 (30) = 60 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Jadi luas permukaan balok adalah 60 cm^2

7.2.3 Prisma

Menghitung luas permukaan prisma melibatkan merebahkan jaring-jaring yang membentuk sisi prisma. Luas jaring-jaring prisma tersebutlah yang menjadi luas permukaan dari prisma. Metode ini sangat tergantung pada bentuk alas dari prisma tersebut, karena luas permukaan prisma akan berbeda tergantung pada bentuk dan ukuran alasnya (Aisah dan Yulianti, 2016).



Gambar 7.3. Prisma

Berdasarkan gambar di atas luas permukaan prisma merupakan luas alas dan tutup ditambah luas sisi tegak dari prisma. Maka luas permukaan prisma di atas adalah

$$\begin{aligned}
 \text{luas permukaan} &= \text{luas alas} + \text{luas tutup} + \text{luas bidang tegak} \\
 &= (2 \times \text{luas alas}) + (a \times t + b \times t + c \times t) \\
 &= (2 \times \text{luas alas}) + (a + b + c) t \\
 &= (2 \times \text{luas alas}) + \text{keliling alas} \times t
 \end{aligned}$$

Contoh 3.

Diketahui alas sebuah prisma yang memiliki alas dan tutup berbentuk segitiga siku- siku dengan panjang alas 15 cm, 20 cm dan 25 cm. Dan tinggi 5 cm. Hitunglah luas permukaan prisma.

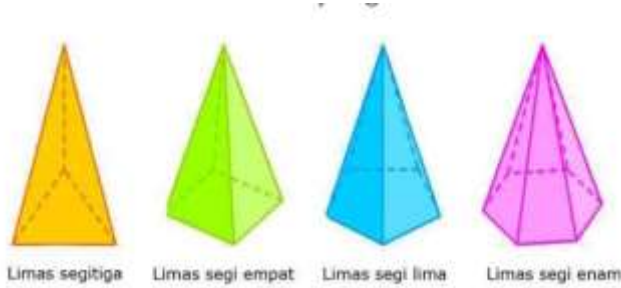
Jawab :

$$\begin{aligned}
 \text{luas permukaan prisma} &= \text{luas alas} + \text{luas tutup} + \text{luas bidang tegak} \\
 &= (2 \times 9 \times 12) + (a \times t + b \times t + c \times t) \\
 &= (2 \times 0.5 \times 15 \times 20) + (15 + 20 + 25)5 \\
 &= 600 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Jadi luas permukaan prisma segitiga adalah 60 cm^2

7.2.4 Limas

Limas merupakan bentuk tiga dimensi yang memiliki dasar berupa poligon dengan sisi-sisi tegak yang membentuk segitiga, sementara puncaknya berupa titik. Limas memiliki variasi bentuk dasar yang bisa berbeda, mulai dari segitiga, segiempat, segilima, hingga segienam.



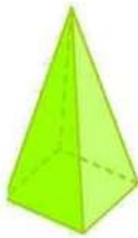
Gambar 7.4. Prisma
Sumber : popma.com

Berdasarkan luas bangun di atas adalah luas bangun alas ditambah luas seluruh segitiga sisi-sisinya
Luas sisi Limas = luas alas + luas sisi tegak

Contoh 4.

Jika diketahui sebuah limas beralas berbentuk persegi dengan panjang sisi 12 cm dan panjang rusuk tegaknya 10 cm. Hitunglah limas tersebut.

Jawab :



segitiga AEF siku-siku di F, maka

$$\begin{aligned} EF^2 &= AF^2 - EF^2 \\ &= 10^2 - 6^2 \end{aligned}$$

Sumber : popma.com Panjang EF = 8 cm^2

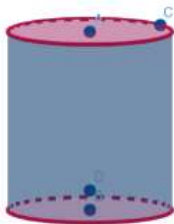
Luas permukaan limas adalah

$$\begin{aligned} EF^2 &= \text{luas } ABCD + (4 \times \text{luas } \triangle AEF) \\ &= 12 \times 12 + (4 \times (\frac{1}{2} \times 12 \times 8)) \\ &= 144 + (4 \times 48) \\ &= 336 \text{ } cm^2 \end{aligned}$$

Luas permukaan limas segiempat adalah 336 cm^2

7.2.5 Tabung

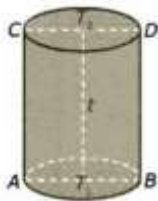
Tabung adalah suatu bentuk ruang yang memiliki dua penutup di kedua ujungnya dengan dinding yang melengkung menghubunginya. Tabung ini tergolong sebagai bangun dimensi tiga (prisma) yang memiliki alas berbentuk lingkaran.



Gambar 7.5. Prisma

$$\begin{aligned} L_{permukaan\ tabung} &= 2 \times \text{luas alas} + \text{luas selimut tabung} \\ L_{permukaan\ tabung} &= 2 \times \pi \times r^2 + 2 \times \pi \times r \times t \\ L_{permukaan\ tabung} &= 2 \times \pi \times r \times (r + t) \end{aligned}$$

Contoh
Sebuah tabung memiliki jari- jari 10,5 cm dan tinggi 10 cm. Tentukan luas permukaan tabung !
Jawab:



- Luas alas tabung
$$\begin{aligned} L_{lpermukaan\ tabung} &= 2 \times \pi \times r \times (r + t) \\ L_{lpermukaan\ tabung} &= 2 \times \frac{22}{7} \times 10,5 (10,5 + 10) \\ &= 1353\ cm^2 \end{aligned}$$

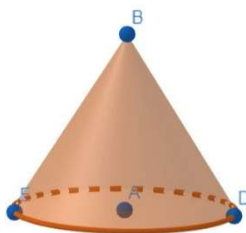
Jadi luas permukaan tabung adalah 1353 cm²

7.2.6 Kerucut

Kerucut adalah jenis limas yang memiliki alas berbentuk lingkaran dan memiliki satu titik di luar lingkaran tersebut. Kerucut memiliki dua sisi yaitu dinding melengkung yang membentuk permukaan lengkung dan alasnya yang berbentuk lingkaran. Di samping itu, kerucut memiliki satu rusuk (atau tepi) yang

menghubungkan tepi lingkaran alas dengan puncak kerucut, serta satu titik sudut di puncaknya.

Jarak dari bagian tengah alas (pusat lingkaran) ke bagian paling atas kerucut disebut tinggi kerucut. Ini adalah jarak vertikal yang mengukur tinggi atau ketinggian dari alas hingga puncak kerucut.



Gambar 7.6. Prisma

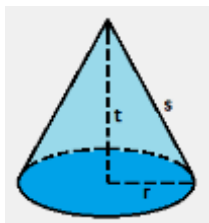
$$L_{permukaan_{kerucut}} = \text{luas alas} + \text{luas selimut kerucut}$$

$$\begin{aligned} L_{permukaan_{kerucut}} &= \pi x r^2 + \frac{1}{2} x 2 x \pi x r x s \\ &= \pi x r^2 + \pi x r x s \\ &= \pi x r x (r + s) \end{aligned}$$

Contoh

Diketahui sebuah kerucut berdiameter 28 cm. Jika tingginya 6 cm. Tentukanlah luas permukaan kerucut!

Jawab:



Sumber : popma.com

Gambar 7.7. Prisma

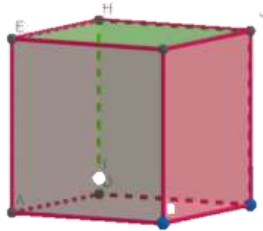
$$\begin{aligned}
 L_{\text{permukaan}_{\text{kerucut}}} &= \frac{22}{7} \times 14 \times (14 + \sqrt{14^2 + 6^2}) \\
 &= \frac{22}{7} \times 14 \times (14 + 15,2) \\
 &= 2788,64 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Jadi luas permukaan kerucut adalah $2788,64 \text{ cm}^2$

7.3 Volume

7.3.1 Kubus

Untuk menyatakan ukuran dari suatu bangun ruang, kita menggunakan konsep isi. sebuah bangun ruang diukur dengan membandingkannya terhadap satuan volume yang digunakan sebagai acuan.



Gambar 7.8. Kubus

Untuk memperoleh volume kubus dapat menggunakan rumus di bawah ini :

$$V_{\text{kubus}} = s \times s \times s$$

Contoh:

Jika luas sis kubus 486 cm^2 . Hitunglah volume kubus tersebut.

Jawab : luas isi kubus 486 cm^2 , maka panjang sisi



$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{\frac{\text{Luas permukaan}}{6}} \\
 &= \sqrt{\frac{486}{6}} = \sqrt{81} \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

Gambar 7.9. Kubus

Sumber: orami.co.id

Panjang sisi kubus = 9 cm^2

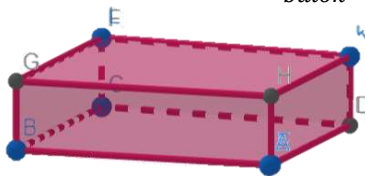
Volume kubus adalah

7.3.2 Balok

Balok termasuk dalam kelompok prisma dalam geometri. Prisma sendiri merupakan bangun ruang dengan dua alas yang berhadapan memiliki bentuk dan ukuran yang sama atau identik.

Untuk mendapatkan volume balok, langkahnya adalah mengalikan luas alas dengan tingginya. Alas balok yang membentuk persegi panjang, jadi luasnya diperoleh dengan mengalikan panjang dan lebarnya akan memberikan rumus volume balok:

$$V_{\text{balok}} = p \times l \times t$$



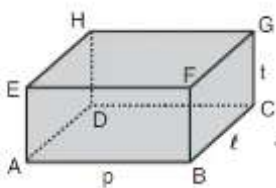
Gambar 7.10. Balok

$$\begin{aligned} V &= s \times s \times s \\ &= 9 \times 9 \times 9 \\ &= 729 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Contoh :

Hitunglah isi balok yang memiliki panjang 7, lebar 6 dan tinggi 12 cm.

Jawab:



$$\begin{aligned} V_{\text{balok}} &= p \times l \times t \\ V_{\text{balok}} &= 7 \times 6 \times 12 \\ V_{\text{balok}} &= 502 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

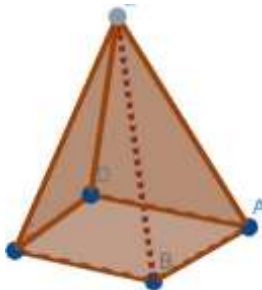
Jadi volume balok = 502 cm^3

7.3.3 Prisma

Prisma merupakan bentuk geometri tiga dimensi yang memiliki bidang datar di setiap sisinya. Prisma memiliki dua sisi berhadapan yang memiliki bentuk dan ukuran yang sama. Selain itu, prisma memiliki garis diagonal yang, jika dipotong secara horizontal, akan menghasilkan bangun datar dengan bentuk yang

serupa. Jenis-jenis prisma yang sering dipelajari meliputi prisma segitiga, prisma persegi, prisma persegi panjang, prisma segi lima, dan prisma trapesium.

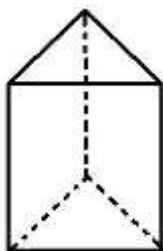
$$V_{prisma} = \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$



Gambar 7.11. Prisma

Contoh :

Bangun prisma dengan beralas seperti segitiga yang membentuk segitiga siku- siku dengan panjang sisi-sisinya 12 cm , 16 cm dan 20 cm dengan tinggi 9 cm. Tentukan isi prisma tersebut.



Gambar 7.12. Prisma
Sumber:bobo.grid.id

Jawab:

- Luas alas prisma berbentuk segitiga

Luas segitiga

$$L_{\Delta} = \frac{1}{2} \times b \times t$$

$$L_{\Delta} = \frac{1}{2} \times 12 \times 16$$

$$L_{\Delta} = 96 \text{ cm}^2$$

▪ Volume Prisma

$$V_{prisma} = L_{\Delta} \times t_{prisma}$$

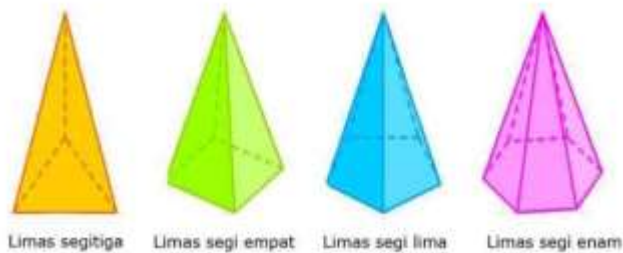
$$V_{prisma} = 96 \times 9 = 864 \text{ cm}^3$$

$$\text{Jadi volume prisma segitiga} = 864 \text{ cm}^3$$

7.3.4 Limas

Limas merupakan suatu objek tiga dimensi yang memiliki dasar berbentuk poligon, yang dapat berupa segitiga, persegi, atau pentagon. Sisi-sisinya terdiri dari segitiga dan memiliki puncak. Penamaan bangun ruang ini didasarkan pada bentuk alasnya. Limas memiliki rumus sebagai berikut:

$$V_{limas} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$



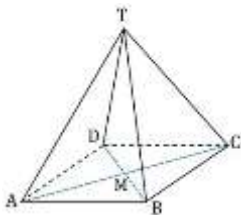
Gambar 7.13. Limas

Sumber : popma.com

Contoh :

Tentukan isi limas yang memiliki alas berbentuk persegi panjang sisi-sisinya 11 cm dengan tinggi limas 9 cm.

$$\text{Jawab: } V_{limas} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$



Gambar 7.14. Prisma

Sumber: bobo.grid.id

- Luas alas yang berbentuk persegi

$$L_{\text{alas limas}} = s \times s$$

$$L_{\text{alas limas}} = 11 \times 11 = 121 \text{ cm}^2$$

$$V_{limas} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

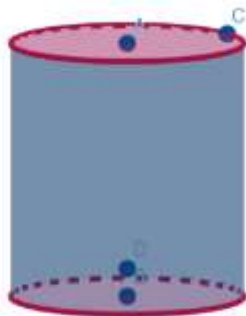
$$V_{limas} = \frac{1}{3} \times 121 \times 9$$

$$= 363 \text{ cm}^3$$

Jadi volume limas persegi = 864 cm^3

7.3.1 Tabung

Bangun ruang yang terdiri dari dua lingkaran (alas dan tutup) yang terhubung oleh dinding melengkung. Tabung tidak memiliki rusuk, sudut, atau bidang diagonal. Secara umum, tinggi tabung diukur dari alas ke tutupnya, yaitu jarak vertikal antara titik pusat lingkaran alas dan lingkaran atas. Sebagai tambahan, sisi-sisinya terdiri dari dua lingkaran dan sebuah bidang melingkar yang membentuk permukaan silinder. Rumus volume tabung.



Gambar 7.15. Tabung

$$V_{\text{tabung}} = \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

Contoh:

Hitunglah volume tabung yang berjari-jari 6 cm dan tinggi tabung 12 cm.

Jawab :

- luas alas tabung
- $L_{\text{lingkaran}} = \pi \times r^2$

$$V_{\text{tabung}} = \pi \times r^2 \times t$$

$$= 3,14 \times 6^2 \times 12$$

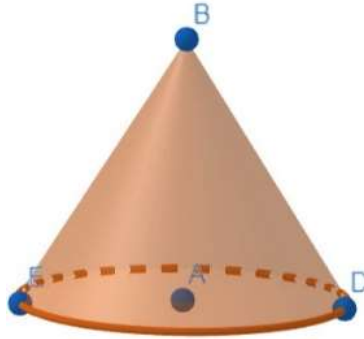
$$= 1305,86 \text{ cm}^3$$

$$\text{Jadi volume tabung} = 1305,86 \text{ cm}^3$$

7.3.5 Kerucut

Sebuah sisi lengkung yang melengkung ke atas dari sebuah alas berbentuk lingkaran membentuk bangun kerucut. Sisi lengkung tersebut memanjang dari tepi lingkaran alas menuju puncak kerucut.

$$V_{\text{kerucut}} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

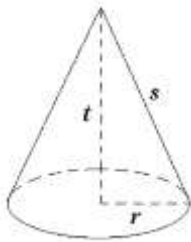


Gambar 7.16. Tabung

Contoh:

Hitunglah isi kerucut yang berdiameter 14 cm dan tinggi tabung 9 cm.

Jawab:



luas alas kerucut

$$\begin{aligned} L_{\text{lingkaran}} &= \pi \times r^2 \\ &= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \\ &= 154 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$V_{\text{kerucut}} = \frac{1}{3} \times 154 \times 9 = 462 \text{ cm}^3$$

Jadi volume kerucut = 462 cm³

DAFTAR PUSTAKA

- Aisah, L. S., & Yulianti, K. 2016. Desain didaktis konsep luas permukaan dan volume prisma dalam pembelajaran matematika SMP. *Mathline: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 1(1), 14-22.
- Purwatiningsi, S. 2013. Penerapan metode penemuan terbimbing untuk meningkatkan hasil belajar siswa pada materi luas permukaan dan volume balok. *Jurnal elektronik pendidikan matematika tadulako*, 1(1).
- Susanti, E. D., & Sholihah, U. 2021. Pengembangan e-modul berbasis flip pdf corporate pada materi luas dan volume bola. *RANGE: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(1), 37-46.
- Satiti, W. S., Istiqomah, I. N., & Khotimah, K. 2022. LKPD Berbasis Discovery-Learning Pada Materi Luas Permukaan dan Volume Prisma dan Limas. *JoEMS (Journal of Education and Management Studies)*, 5(3), 15-21

BAB 8

SISTEM KOORDINAT

Oleh Yusem Ba'ru

Sistem koordinat digunakan sebagai acuan atau kerangka referensi untuk menunjukkan posisi titik atau oleh objek dalam suatu bidang atau ruang. Pada umumnya, ada dua sistem koordinat yaitu sistem koordinat kartesius dan sistem koordinat kutub. Kedua sistem ini digunakan paling banyak dalam matematika karena dibangun dengan beberapa ordinat yang saling berpotongan pada suatu titik. Dalam kedua sistem koordinat ini, representasi titik yang dimaksud sama-sama mewakili posisi titik dalam dua dimensi. Untuk mengetahui posisi titik, gunakan koordinat kartesius untuk menghitung jarak horizontal (x) dan vertikal (y) dari titik awal $(0,0)$.

8.1 Sistem Koordinat Kartesian

Kartesian atau cartesius mengacu pada seorang ahli matematika asal Prancis bernama Rene Descartes pada abad ke-17 menemukan suatu konsep matematika yaitu sistem koordinat



Gambar 8.1. Rene Descartes.

Sumber:

<https://kumparan.com/potongan-nostalgia/rene-descartes-bapak-ilmu-filsafat-modern-1uzqF0fS22r&ie=UTF-8#vhid=JtA-NhWHrneiFM&vssid=l>

kartesius. Penemuannya ini sangat berpengaruh dalam berbagai bidang kehidupan manusia, seperti geometri, kalkulus, dan kartografi, karena penemuannya yang sangat berjasa ini, maka untuk menghargainya diberi nama

“cartesius”. Selanjutnya, dikatakan bahwa Descartes pertama kali mendefinisikan sistem koordinat kartesius sebagai dua garis lurus yang disebut sumbu. Sumbu horizontal ditunjukkan dengan

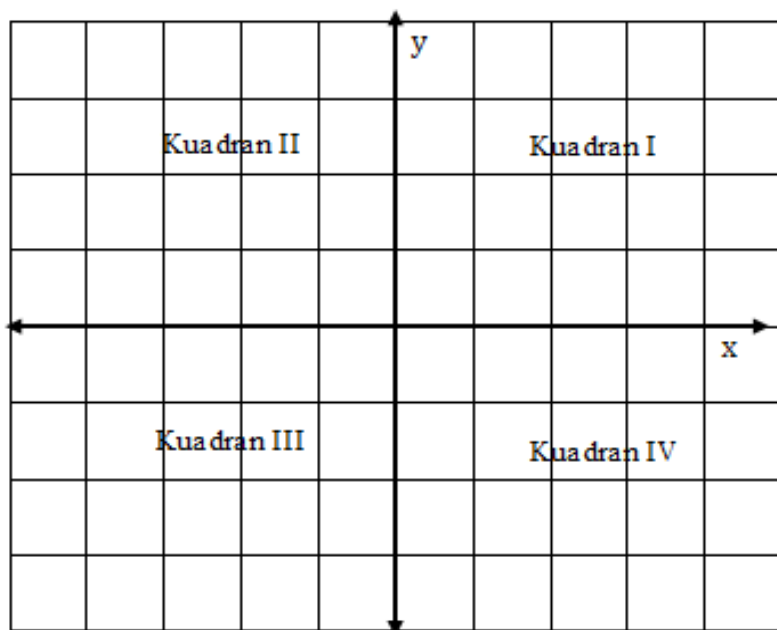
X dan sumbu vertical dengan Y, dan titik perpotongan antara dua sumbu disebut titik pusat atau titik asal.

Sistem koordinat Kartesian, biasa juga sistem koordinat ortogonal, adalah salah satu sistem koordinat yang paling umum digunakan dalam matematika dan ilmu terapan. Digunakan untuk menentukan tiap titik dalam bidang dengan menggunakan dua bilangan yang biasa disebut koordinat x (absis) dan koordinat y (ordinat) dari titik tersebut (Chaeruddin et al., 2021:68). Sistem ini menggambarkan titik-titik dalam dua dimensi dengan menggunakan sumbu-sumbu yang saling tegak lurus. Dua garis yang saling tegak lurus (selanjutnya disebut sumbu) dan berpotongan di titik O (0, 0) yang disebut titik asal. Jadi dengan menggunakan koordinat kartesius kita dapat dengan jelas mengidentifikasi posisi setiap titik dalam bidang dua dimensi.

Berikut ini adalah beberapa bagian utama sistem koordinat Kartesius:

1. Sumbu X adalah sumbu horizontal yang ditemukan dalam sistem koordinat. Nilai bergerak ke kanan dan ke kiri dari titik awal.
2. Sumbu Y adalah sumbu vertikal dalam sistem koordinat yang nilainya meningkat ke atas dari titik awal dan berkurang ke bawah.
3. Titik Asal adalah titik di mana sumbu x dan y bersilangan. Koordinat suatu titik dapat ditentukan dengan menggunakan titik ini sebagai referensi.
4. Koordinat: Sepasang angka (x, y) menunjukkan posisi suatu titik dalam sistem koordinat. Nilai pada sumbu x dan y masing-masing diwakili oleh angka pertama dan kedua.

Selanjutnya bahwa kedua sumbu yang saling tegak lurus tersebut membagi bidang datar menjadi empat bagian, seperti hambar dibawah ini :



Gambar 8.2. Pembagian kuadran

Berdasarkan gambar 1 diatas, Pembagian kuadran ini biasanya menggunakan titik pusat $(0,0)$ sebagai pusatnya dan empat kuadran dibuat disekitarnya. Berikut adalah cara umum membagi kuadran ini:

1. Titik-titik dalam kuadran I memiliki koordinat x positif dan koordinat y positif.
2. Kuadran II: Ini adalah kuadran yang terletak di sebelah kiri atas pusat $(0,0)$. Titik-titik dalam kuadran II memiliki koordinat x negatif dan koordinat y positif.
3. Kuadran III: Ini adalah kuadran yang terletak di sebelah kiri bawah pusat $(0,0)$. Titik-titik dalam kuadran III memiliki koordinat x negatif dan koordinat y negatif.
4. Kuadran IV: Ini adalah kuadran yang terletak di sebelah kanan bawah pusat $(0,0)$. Titik-titik dalam kuadran IV memiliki koordinat x positif dan koordinat y negatif.

8.1.1 Titik Dalam Koordinat Kartesius

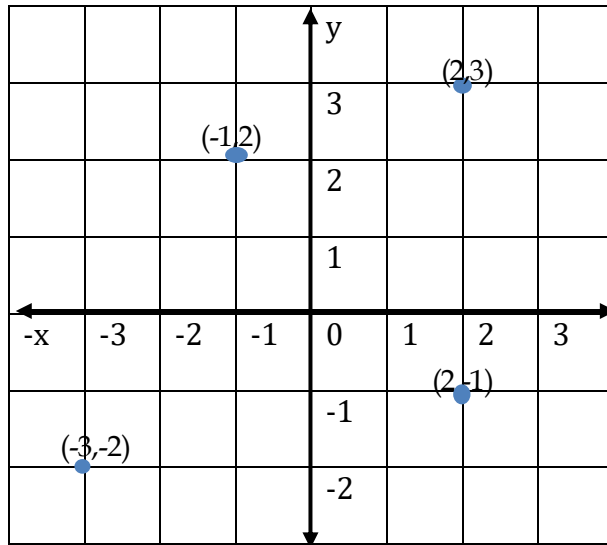
Seperti sudah disinggung sebelumnya bahwa titik dalam koordinat kartesius adalah representasi posisi suatu objek atau titik dalam ruang dua dimensi. Setiap titik ini dapat diidentifikasi dengan sepasang koordinat (x, y) yang menunjukkan posisi relatifnya terhadap sumbu x dan sumbu y dalam sistem koordinat Kartesius dengan penjelasan sebagai berikut:

1. x adalah koordinat horizontal yang mengukur posisi titik sepanjang sumbu x (garis horizontal)
2. y adalah koordinat vertikal yang mengukur posisi titik sepanjang sumbu y (garis vertikal).
3. Titik $(0,0)$ adalah titik pusat koordinat dan terletak di pertemuan sumbu x dan sumbu y . Titik ini biasanya dianggap sebagai titik referensi dalam koordinat kartesius.

Contoh titik dalam koordinat kartesius:

- $(2, 3)$: Ini berarti titik terletak di 2 satuan dari sumbu x dan 3 satuan dari sumbu y .
- $(-1, 2)$: Ini berarti titik terletak di 1 satuan ke kiri dari titik pusat pada sumbu x dan 2 satuan ke atas dari sumbu y
- $(-3, -2)$: Ini berarti titik terletak di 3 satuan ke kiri dari titik pusat pada sumbu x dan 2 satuan ke bawah dari sumbu y
- $(2, -2)$: Ini berarti titik terletak di 2 satuan ke kanan dari titik pusat pada sumbu x dan 1 satuan ke bawah dari sumbu y

Berikut letak titik dalam koordinat kartesius:



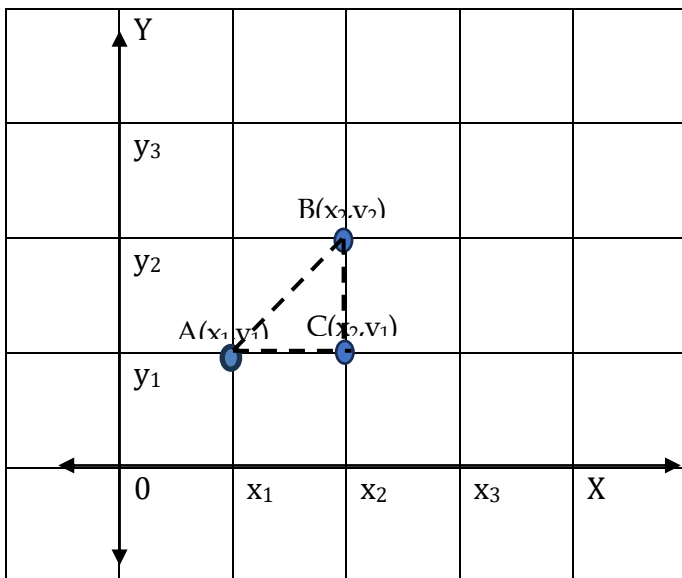
Gambar 8.3. Letak Titik dalam Koordinat Kartesius

Selanjutnya berdasarkan gambar 8.3 diatas, titik-titik tersebut dinyatakan dalam kuadran, maka dapat dikatakan bahwa:

1. Titik (2,3) berada pada kuadran I (satu)
2. Titik (-1,2) berada pada kuadran II (kedua)
3. Titik (-3,-2) berada pada kuadran III (ketiga)
4. Titik (2,-1) berada pada kuadran IV (keempat)

8.1.2 Jarak Titik Dengan Titik

Dalam matematika, anda biasanya dapat menghitung jarak antara dua titik dengan menggunakan formula jarak Euclidean dalam sistem koordinat dua atau tiga dimensi. Jarak antar dua titik dapat dijelaskan dengan pendekatan teorema phytagoras. Misalkan diketahui titik A (x_1, y_1) dan titik B (x_2, y_2) dan C ((x_2, y_1)), seperti gambar di bawa ini.



Gambar 8.4. Jarak titik dalam koordinat kartesius

Berdasarkan gambar 8.4 diatas, dapat dilihat bahwa jarak titik $A(x_1, y_1)$ ke titik $B(x_2, y_2)$ dapat ditentukan dengan formula sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 |A - B|^2 &= |A - C|^2 + |B - C|^2 \\
 |A - B|^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\
 |A - B|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
 |A - B| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}
 \end{aligned}$$

Contoh:

Tentukanlah jarak antara titik P (2,1) dengan titik Q (4,3)

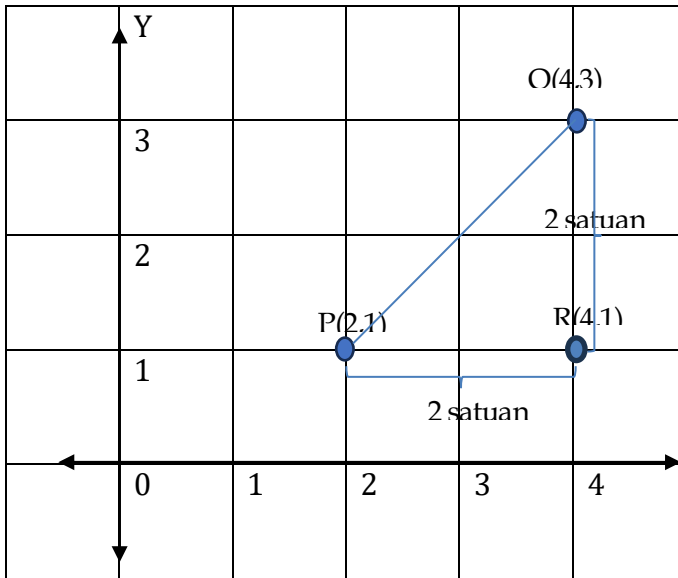
Pembahasan:

$$\begin{aligned}
 |P - Q| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 |P - Q| &= \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - 1)^2} \\
 |P - Q| &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2} \\
 |P - Q| &= \sqrt{4 + 4} \\
 |P - Q| &= \sqrt{8}
 \end{aligned}$$

$$|P - Q| = 2\sqrt{2}$$

Jika digambarkan dalam koordinat kartesius akan didapatkan gambar sebagai berikut:

Misalkan siku-siku di titik R, maka dengan menggunakan konsep pythagoras, jarak titik P ke titik Q dapat ditentukan.



Gambar 8.5. Jarak Titik Dalam Koordinat Kartesius

Sehingga serupa dengan penyelesaian diatas didapatkan bahwa panjang ruas garis PQ adalah sebagai berikut:

$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (QR)^2$$

$$(PQ)^2 = (2)^2 + (2)^2$$

$$(PQ)^2 = 4 + 4$$

$$(PQ)^2 = 8$$

$$PQ = \sqrt{8}$$

$$PQ = 2\sqrt{2}$$

8.1.3 Koordinat Titik Pada Suatu Garis

Nilai (x, y) yang menunjukkan lokasi titik pada garis dalam ruang kartesian adalah representasi koordinat titik pada garis. Nilai persamaan yang dapat digunakan untuk

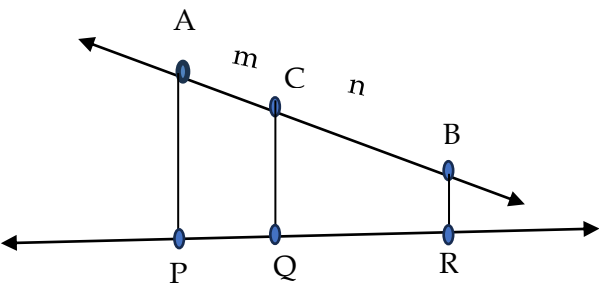
menunjukkan lokasi titik pada garis bervariasi, dan metode yang digunakan untuk menentukan koordinat titik pada garis berbeda-beda.

Misalkan persamaan garis tersebut dalam bentuk persamaan linear yang fungsi implisit seperti $y=mx+b$, di mana m adalah kemiringan (slope) dan b adalah *intercept* (potong sumbu y), memungkinkan kita untuk menemukan koordinat titik pada garis dengan menyubstitusi nilai x ke dalam persamaan dan menemukan nilai y yang sesuai.

Dalam contoh, jika persamaannya $y=2x+3$, dan kita ingin mengetahui koordinat titik pada garis yang memiliki nilai $x=4$, maka kita harus mengubah nilai $x=4$ ke dalam persamaan berikut $y=2(4)+3=8+3=11$. Jadi, titik pada garis yang memiliki nilai $x=4$ memiliki koordinat $(4, 11)$.

Selanjutnya bahwa jika persamaan garis itu dalam bentuk persamaan umum garis adalah $Ax+By=C$, di mana A , B , dan C adalah konstanta. Jika persamaan ini diberikan, kita dapat menemukan koordinat titik pada garis dengan memberikan nilai x atau y dan menemukan nilai yang sesuai.

Masalah selanjutnya adalah jika suatu titik koordinat yang terletak pada suatu ruas garis dengan perbandingan tertentu. Misalkan suatu titik C yang terletak pada suatu ruas garis BC dengan perbandingan $m:n$ maka dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 8.6. Letak Titik Koordinat Dalam Ruas Garis Jika Diketahui Perbandingannya

Berdasarkan gambar 8.6 diatas, titik P,Q dan R merupakan hasil proyeksi secara tegak lurus titik A (x_a, y_a) , B (x_b, y_b) dan C (x_c, y_c) . Sehingga berdasarkan konsep kesebangunan akan berlaku:

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} &= \frac{AC}{BC} \\ \frac{m}{n} &= \frac{x_a - x_c}{x_c - x_b} \\ m(x_c - x_b) &= n(x_a - x_c) \\ mx_c - mx_b &= nx_a - nx_c \\ mx_c + nx_c &= nx_a + mx_b \\ (m+n)x_c &= nx_a + mx_b \\ x_c &= \frac{nx_a + mx_b}{m+n}\end{aligned}$$

Untuk menentukan y_c ; dianalogikan dengan $y_c = \frac{ny_a + my_b}{m+n}$,

Sehingga jika koordinat titik C berada ditengah-tengah ruas garis A dan B, maka koordinat titik C adalah:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{1}{2}(x_a + x_b) \\ y_c &= \frac{1}{2}(y_a + y_b)\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan titik tengah dari ruas garis , kita hanya menghitung rata-rata masing-masing koordinat x dan y dari titik yang diberikan. (*Modul Geometri II(Geometri Analitik Dan Transformasi).Docx.Pdf*, n.d.)

Contoh:

1. Diketahui titik C(3,4) dan titik D (-5,2). Tentukanlah koordinat titik E yang terletak pada ruas garis CD dengan perbandingan CE:DE= 1:2.

Jawab:

$$\begin{aligned}x_e &= \frac{nx_c + mx_d}{m+n} \\ x_e &= \frac{2.3 + 1.(-5)}{1+2} \\ x_e &= \frac{6-5}{3} \\ x_e &= \frac{1}{3} \\ y_e &= \frac{ny_c + my_d}{m+n}\end{aligned}$$

$$y_e = \frac{2.4+1.2}{1+2}$$

$$y_e = \frac{8+2}{3}$$

$$y_e = \frac{10}{3}$$

2. Diketahui dua titik A(3, 5) dan B(7, 9). Tentukan koordinat titik tengah ruas garis AB.

Jawab:

$$x_c = \frac{1}{2}(x_a + x_b)$$

$$x_c = \frac{1}{2}(3 + 7)$$

$$x_c = \frac{1}{2}(10)$$

$$x_c = 5$$

$$y_c = \frac{1}{2}(5+9)$$

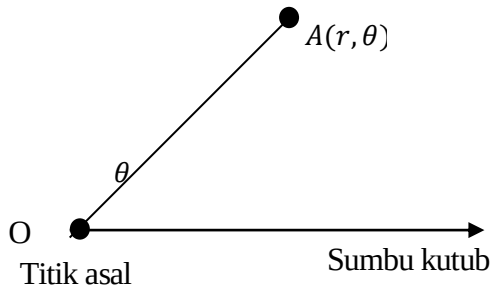
$$y_c = \frac{1}{2}(14)$$

$$y_c = 7$$

Jadi koordinat titik tengah yang berada pada ruas garis A dan B adalah (5,7)

8.2 Sistem Koordinat Kutub

Sistem koordinat kutub biasa juga disebut sistem koordinat polar. Dalam kordinat polar atau kutub sebuah titik pada bidang ditentukan oleh pasangan antara jarak dan sudut. Dalam sistem koordinat kutub, titik asal (juga disebut titik kutub) dan garis berarah (juga disebut sumbu kutub) yang bermula dari titik asal (Yulia, dkk:2023). Misalkan titik yang dimaksud adalah titik A, setiap titik A dalam koordinat kutub diwakili dalam pasangan (r, θ) , di mana r adalah jarak titik A ke titik awal, dan θ adalah sudut dari sumbu kutub ke garis OA. Bilangan r dikenal sebagai koordinat radial, dan q dikenal sebagai koordinat angular atau sudut kutub dari P. Jika diukur berlawanan jarum jam, sudut ditunjukkan dengan angka positif, sedangkan jika diukur searah jarum jam, sudut ditunjukkan dengan angka negatif.



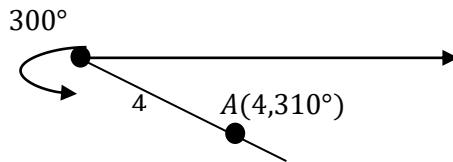
Gambar 8.7. Koordinat Kutub

r = panjang ruas garis OA

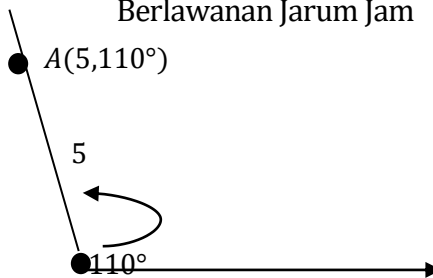
θ = sudut yang dibentuk oleh ruas garis OA terhadap sumbu kutub.

Jadi jika sebuah titik A yang berjarak 6 satuan dari titik asal dengan sudut 80° diputar berlawanan arah jarum jam maka dalam koordinat kutub dapat ditulis $A(6,80^\circ)$.

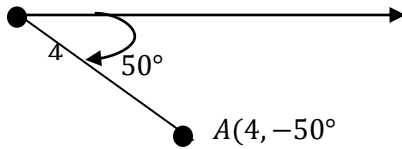
Berikut beberapa contoh koordinat kutub:



Gambar 8.8. Koordinat Kutub Dengan Perputaran 310° Berlawanan Jarum Jam



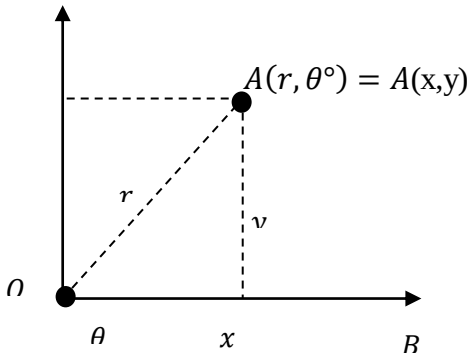
Gambar 8.9. Koordinat Kutub Dengan Perputaran 110° Berlawanan Jarum Jam



Gambar 8.10. Koordinat Kutub Dengan Perputaran 50° searah Jarum Jam

Hubungan Antara Koordinat Kutub Dengan Koordinat Kartesius

Hubungan antara koordinat kutub dan koordinat Cartesius dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 8.11. Hubungan Antara Koordinat Kutub Dengan Koordinat Kartesius

Untuk menyatakan koordinat Cartesius dalam koordinat kutub dapat digunakan persamaan trigonometri yaitu:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \text{ itu artinya } y = r \cdot \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \text{ itu artinya } x = r \cdot \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Selanjutnya dengan memperhatikan segitiga siku-siku di B yang terbentuk pada gambar 10 diatas, maka didapatkan persamaan yaitu:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Persamaan-persamaan inilah yang membantu kita untuk menyatakan koordinat kutub kedalam koordinat kartesius atau begitu sebaliknya.

Contoh:

Ubahlah titik-titik berikut kedalam koordinat kartesius dan koordinat kutub sesuai dengan yang diketahui dan gambarkan juga hubungannya!

a. $K(3,120^\circ)$

b. $M(3,4)$

Jawab:

a. $K(3,120^\circ)$

Diketahui $r = 3$

$\theta = 120^\circ$

$x = r \cos 120^\circ$

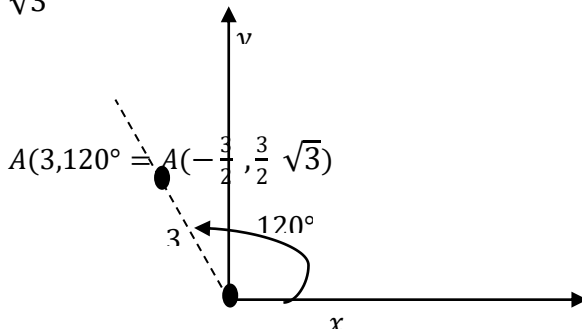
$x = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x = -\frac{3}{2}$

$y = r \sin 120^\circ$

$y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$y = \frac{3}{2}\sqrt{3}$



b. $M(3,4)$

Diketahui $x = 3$

$y = 4$

$r^2 = x^2 + y^2$

$r^2 = 3^2 + 4^2$

$r^2 = 9 + 16$

$r^2 = 25$

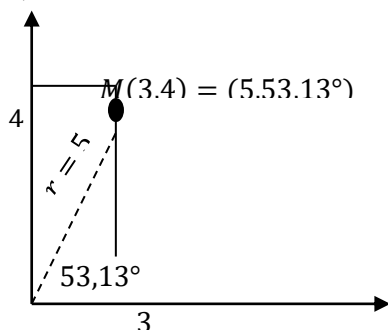
$$r = 5$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\theta = \arctan \frac{4}{3}$$

$$\theta = 53,13^\circ$$



DAFTAR PUSTAKA

- Chaeruddin, A. S., Ali, E. P., Nurvia, M., & Harahap, E. 2021. Aplikasi Penunjuk Sistem Koordinat Kartesius Berbasis Microsoft Excel. *Matematika: Jurnal Teori Dan Terapan Matematika*, 20(1), Article 1
- Johnson, A. 2018. Understanding Cartesian Coordinates in Geometry. *Journal of Mathematics Education*, 20(3), 45-62.
- Smith, R. 2015. *Polar Coordinates Demystified*. Publisher B.
- Imaniyah, A. 2019, December. Pembuktian Rumus Keliling Lingkaran dengan Integral Polar. In SENANDIKA 2019.
- Lumbantoruan, J. H. 2021. *Geometri Analitik*.
- Jazuli, A. 2019. *Geometri analitik bidang*. UM Purwokerto Press.
- Chaeruddin, A. S., Ali, E. P., Nurvia, M., & Harahap, E. 2021. Aplikasi Penunjuk Sistem Koordinat Kartesius Berbasis Microsoft Excel. *Matematika: Jurnal Teori Dan Terapan Matematika*, 20(1), Article 1.
- Modul Geometri II (Geometri Analitik dan Transformasi).docx.pdf*. (n.d.). Retrieved November 13, 2023, from <http://repository.uki.ac.id/1634/1/Modul%20Geometri%20II%28Geometri%20Analitik%20dan%20Transformasi%29.docx.pdf>

BAB 9

FUNGSI DAN GRAFIK

Oleh A. Ika Putriani

9.1 Fungsi

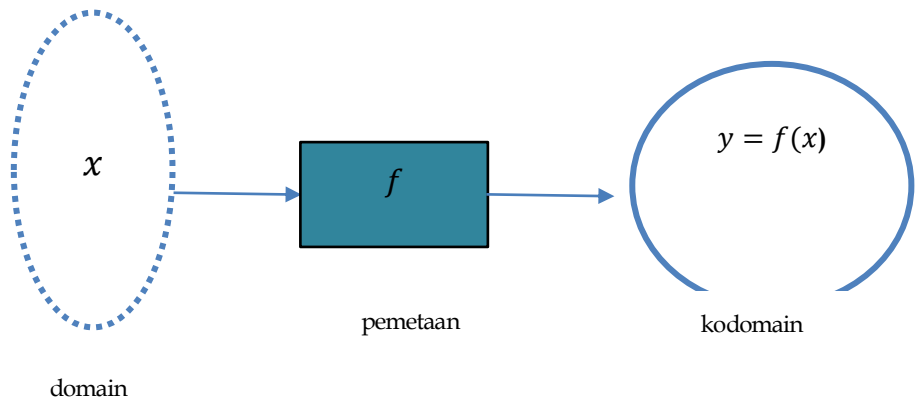
Fungsi memiliki konsep dasar yang penting untuk banyak bidang. Pada bidang-bidang tersebut, fungsi diterapkan dalam problem solving dalam bidang teknis, keuangan, dan bidang lainnya. Dalam hal ini bidang tersebut mempelajari pengaruh antar variabel satu dan variabel lainnya. Terkhusus pada bidang matematika, yang isinya mengkaji peristiwa dunia nyata yang dibentuk dalam fungsi matematika. Dan hasil dari pengkajian tersebut diterapkan dalam kehidupan sehari-hari.

9.1.1 Definisi Fungsi

Variabel bebas dan variabel terikat merupakan dua variabel yang kita kenal pada materi fungsi. Nilai variabel yang dapat diambil secara bebas pada daerah asal (domain) yang diberikan disebut variabel bebas, sedangkan nilai variabel yang bergantung pada variabel bebas yang telah ditentukan disebut variabel terikat. Sebagai ilustrasi pada luas persegi yaitu dengan rumus $L = s^2$, dimana s merupakan variabel bebas dan L merupakan variabel terikat. Penulisan rumus secara eksplisit menunjukkan bergantungnya luas pada sisi dinotasikan dalam rumus $L(s) = s^2$. Contoh kasus lainnya yaitu keliling persegi panjang bergantung pada panjang dan lebar sisi persegi panjang yang dinotasikan dalam rumus $K(p, l) = 2p + 2l$, dimana p dan l merupakan variabel bebas dan K merupakan variabel terikat.

Definisi 9.1. Aturan pengawanan setiap anggota domain (daerah asal) tepat satu anggota pada kodomain (daerah kawan) disebut fungsi. Misal dinotasikan $x \in A \rightarrow y = f(x) \in B$, dimana x domain A dipetakan ke y pada kodomain B sesuai fungsi f . Dan

disederhanakan dengan notasi $f:A \rightarrow B$, dengan A merupakan daerah asal dan B merupakan daerah kawan (Hernadi, 2021).

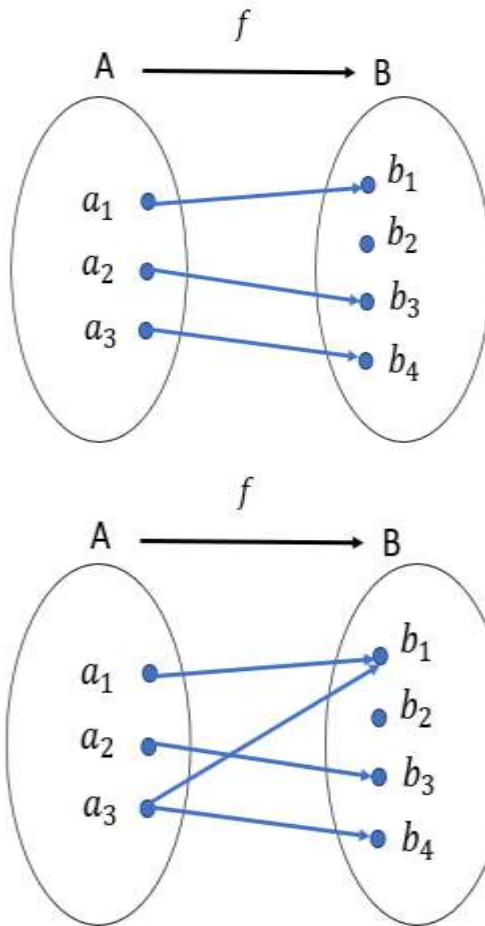


Gambar 9.1. Pemetaan fungsi

Diberikan pemetaan fungsi yang dapat dilihat pada Gambar 9.1. Pada gambar ini terdapat variabel x sebagai domain variabel bebas berasal dan y sebagai kodomain variabel terikat berada. Formula $y = f(x)$ merupakan aturan yang memasangkan x dan y melalui f . Selanjutnya, semua elemen daerah asal harus habis berpasangan sedangkan daerah kawan tidak harus habis. Range dari $f(R_f)$ merupakan himpunan bagian daerah kawan yang berpasangan dengan elemen daerah asal. Daerah asal (domain) f dinotasikan D_f .

$$D_f = \{x \in R: f(x)\}$$

Selain itu, setiap elemen daerah asal berpasangan tepat satu pada daerah kawannya, sedangkan elemen daerah hasil R_f bisa jadi berpasangan lebih dari satu pada daerah asal. Untuk lebih memahami akan diberikan contoh sebagai berikut:



Gambar 9.2. Diagram yang mengilustrasikan fungsi dan bukan fungsi

Sumber : Data Diolah

1. Syarat fungsi terpenuhi pada pemetaan diagram (1) dan dinotasikan

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_3, f(a_3) = b_4$$
2. Syarat fungsi tidak terpenuhi pada pemetaan diagram (2), karena terdapat elemen D_f (domain) yang mempunyai pasangan dua atau lebih. Sehingga (2) bukan fungsi.

Contoh 9.1.1

Penyelesaian

$$D_f = \{x \in R: x + 3 \neq 0\} = R - \{-3\}$$

Contoh 9.1.2

a. $g(-2)$ b. $g(x - 1)$

Penyelesaian

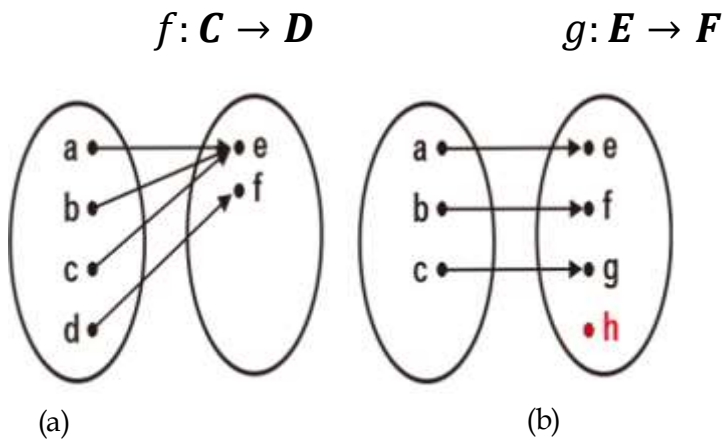
a. $g(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + \left(\frac{2}{-2+3}\right) = -32.$

b. $g(x-1) = 2(x-1)^3 + \frac{2}{x+3} = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + \frac{2}{x+3}.$

9.1.2 Fungsi Surjektif, Fungsi Injektif, dan Fungsi Bijektif

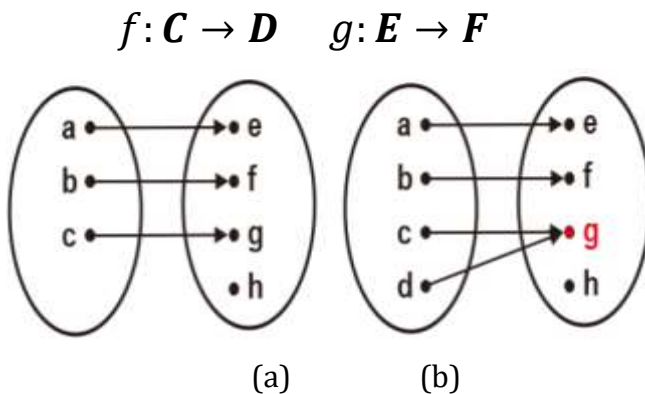
Diberikan suatu fungsi $f: C \rightarrow D$ dan $g: E \rightarrow F$ yang dibagi menjadi beberapa bentuk sesuai syarat-syarat yang memenuhi.

1. Fungsi surjektif (fungsi pada/onto), dikatakan syarat fungsi f terpenuhi jika setiap elemen himpunan D memiliki pasangan di elemen himpunan C , seperti yang ditunjukkan pada gambar 9.3 bagian (a). Pemetaan fungsi g tidak terpenuhi karena elemen kodomain di himpunan F yaitu h tidak memiliki pasangan pada domain di himpunan E , ditunjukkan pada gambar 9.3 bagian (b).



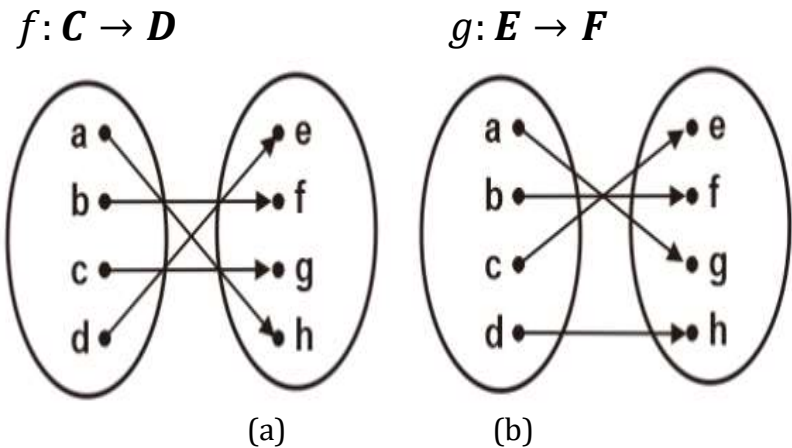
Gambar 9.3. (a) Fungsi Surjektif (b) Bukan Fungsi Surjektif
 Sumber : advernesia

2. Fungsi injektif (fungsi into), dikatakan syarat fungsi f terpenuhi jika setiap elemen himpunan D memiliki pasangan di himpunan C , pasangannya tunggal, seperti yang ditunjukkan pada gambar 9.4 bagian (a). Pemetaan fungsi g tidak terpenuhi karena elemen kodomain di himpunan F yaitu g memiliki dua pasangan pada domain di himpunan E , yaitu c dan d , ditunjukkan pada gambar 2.1.4 bagian (b).



Gambar 9.4. (a) Fungsi Injektif (b) Bukan Fungsi Injektif
 Sumber : advernesia

3. Fungsi bijektif (fungsi korespondensi 1-1), dikatakan syarat fungsi f terpenuhi apabila setiap elemen himpunan D memiliki tepat satu pasangan di elemen himpunan C . Sama halnya dengan pemetaan himpunan E ke himpunan F juga merupakan fungsi bijektif. Fungsi bijektif iasa juga disebut fungsi surjektif - injektif.



Gambar 9.5. (a) Fungsi Bijektif (b) Bukan Fungsi Bijektif
Sumber : advernesia

9.1.3 Operasi pada Fungsi

Operasi pada fungsi terbagi menjadi 5 dan didefenisikan sebagai berikut :

1. Jumlahan

: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. Selisih

: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. Hasil kali skalar

: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$
4. Hasil kali

: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
5. Hasil bagi

: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, syarat $g(x) \neq 0$

dengan α skalar real dan f dan g merupakan fungsi. Domain setiap hasil operasi fungsi ialah irisan domain dari $f \cap g$, selain $\frac{f}{g}$, dimana

$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$

Contoh 9.1.3

Diberikan $f(x) = \sqrt{11x^3}$ dan $g(x) = \frac{3}{x+7}$. Tentukan nilai $f - g$, dan $f \cdot g$ beserta domainnya.

Penyelesaian

$$(f - g)(x) = \sqrt{11x^3} - \frac{3}{x+7}$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{3\sqrt{11x^3}}{x+7}$$

Sehingga diperoleh $D_f = [0, \infty)$ dan $D_g = R - \{-7\}$, maka $f - g$, dan $\frac{f}{g}$ masing-masing mempunyai domain : $[0, \infty)$.

9.1.4 Fungsi Invers

Jika $f: X \rightarrow Y$, maka fungsi f^{-1} dari Y ke X merupakan invers fungsi f dan dinotasikan sebagai berikut:

$$y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Contoh 9.1.4

Diberikan fungsi $g(x) = \frac{3-x}{2x-1} - 2$, tentukan invers g !

Penyelesaian

$$y = f(x) = \frac{3-x}{2x-1} - 2$$
$$2 - y = \frac{3-x}{2x-1}$$

$$(2 - y)(2x - 1) = 3 - x$$

$$4x - 2 - 2xy + y = 3 - x$$

$$5x - 2xy = -y + 5$$

$$x = \frac{-2y + 5}{5 - y} = f^{-1}(y)$$

$$\text{Jadi, } f^{-1}(x) = \frac{-2y+5}{5-y}.$$

Contoh 9.1.5

Diberikan fungsi sebagai berikut

$$j(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ -1 & , \quad x = 0 \\ \frac{-1}{x+1} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Penyelesaian:

1. Jika $x < 0, y = j(x) = -x > 0$, maka :

$$x = -y = j^{-1}(y) \quad , \quad y > 0$$
2. Jika $x = 0, j(0) = -1$, maka diperoleh : $0 = j^{-1}(-1)$.
3. Jika $x > 0$,

$$y = j(x) = \frac{-1}{x+1} < \frac{-1}{0+1} = -1$$

atau:

$$x = \frac{-1}{y} - 1 = \frac{-1-y}{y} = j^{-1}(y) \quad , \quad y < -1$$

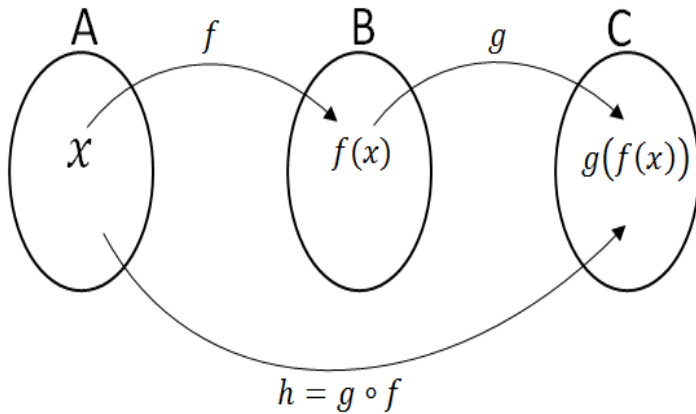
Setelah 1, 2, dan 3 diperoleh :

$$j^{-1}(x) = \begin{cases} -x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = -1 \\ \frac{-1-x}{x} & , \quad x < -1 \end{cases}$$

9.1.5 Fungsi Komposisi

Misal diberikan fungsi $y = (\sqrt{x} + 3x)^3$, jika dituliskan $y = f(v) = v^3$ dimana $v = g(x) = \sqrt{x} + 3x$, maka diperoleh $y = f(v) = f(g(x)) = (\sqrt{x} + 3x)^3$ melalui proses pensubtitusian, proses demikian disebut *komposisi*.

Definisi 9.2 $g \circ f$ merupakan notasi dari fungsi komposisi g dan f , dan dituliskan sebagai berikut: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, dimana domain $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$.



Gambar 9.6. Fungsi Komposisi $g \circ f$
Sumber : AkuPintar

Contoh 9.1.6

Diberikan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $f \circ g$, $g \circ f$, dan masing-masing domainnya.

Penyelesaian :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in R : g(x) \in R\}$$

$$D_{f \circ g} = R$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in R : f(x) \in R\}$$

$$D_{g \circ f} = R$$

Contoh 9.1.7

Diberikan

$$j(x) = \begin{cases} 2 + x & , \quad x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} \frac{2x}{2x-3} & , \quad x > 2 \\ 4x - 2 & , \quad x \leq 2 \end{cases}$$

Tentukan $j \circ k$!

1. Jika $x > 2$, $k(x) = \frac{2x}{2x-3} = \frac{2x-6+6}{2x-3} = 2 + \frac{6}{2x-3} > 2 > 0$, maka :

$$(j \circ k)(x) = j(k(x)) = 2 + k(x) = 2 + \frac{2x}{2x-3}$$

2. Jika $x \leq 2$, $k(x) = 4x - 2 \leq 4 - 2 = 2$. Disebabkan, $k(x) \leq 2$, sehingga bisa dibagi jadi dua bagian yaitu $0 \leq k(x) \leq 2$ dan $k(x) < 0$.

- a. $0 \leq k(x) \leq 2$ jika $0 \leq 4x - 2 \leq 2$. Sehingga diperoleh $\frac{2}{4} \leq x \leq 2$,

$$(j \circ k)(x) = j(k(x)) = 2 + k(x) = 2 + (4x - 2) = 4x$$

- b. $k(x) < 0$ jika $4x - 2 \leq 0$. Sehingga diperoleh $x < \frac{2}{4}$,

$$(j \circ k)(x) = j(k(x)) = \frac{1}{k(x)} = \frac{1}{(4x-2)}$$

Dari 1 dan 2, diperoleh:

$$j^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{2x-3}, & x > 2 \\ 4x, & \frac{2}{4} \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{4x-2}, & x < \frac{2}{4} \end{cases}$$

9.2 Grafik Fungsi

Grafik fungsi f didefinisikan sebagai himpunan $\{(x, y): y = f(x), x \in D_f\}$, dimana f suatu fungsi.

Suatu fungsi dikatakan fungsi suku banyak bila memiliki derajat n dengan persamaan sebagai berikut

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

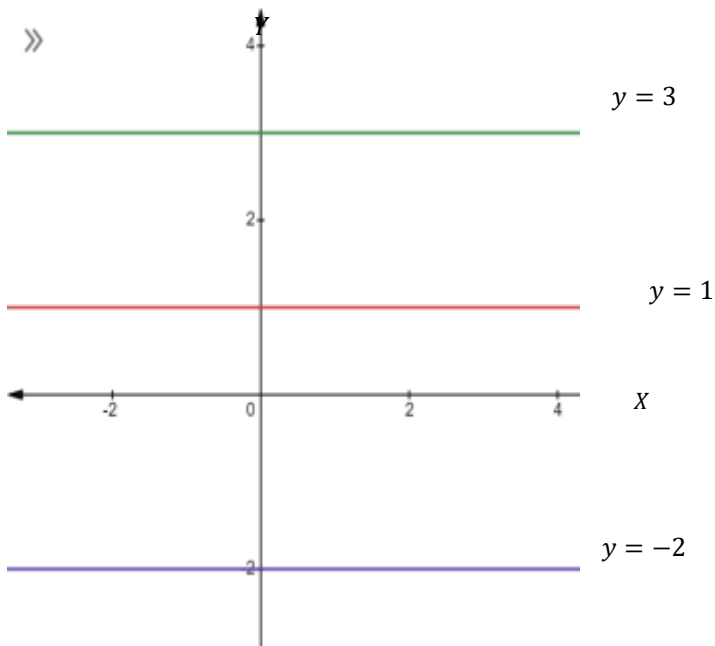
dimana n bilangan bulat tak negatif, $a_1, a_2, \dots, a_n$ bilangan-bilangan real dan $a_n \neq 0$.

9.2.1 Fungsi Konstan

Fungsi konstan didefenisikan :

$$f(x) = c$$

Fungsi konstan digambarkan sejajar dengan sumbu X .



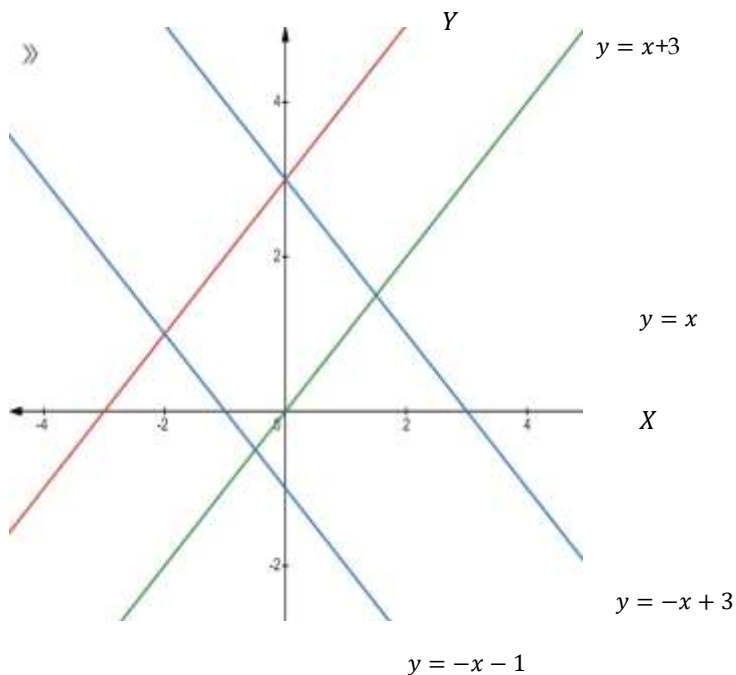
Gambar 9.7. Grafik Fungsi Konstan
Sumber : Data Diolah

9.2.2 Fungsi Linier

Fungsi linier didefinisikan :

$$f(x) = mx + n$$

Grafik fungsi linier digambarkan berupa garis lurus yang memiliki kemiringan gradien m .



Gambar 9.8. Grafik Fungsi Linier
Sumber : Data Diolah

9.2.3 Fungsi Kuadrat

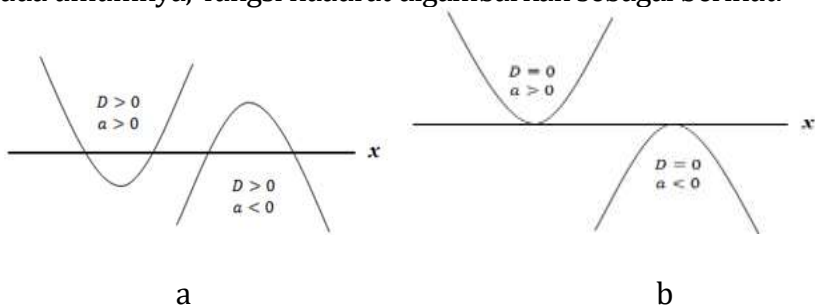
Fungsi linier didefenisikan :

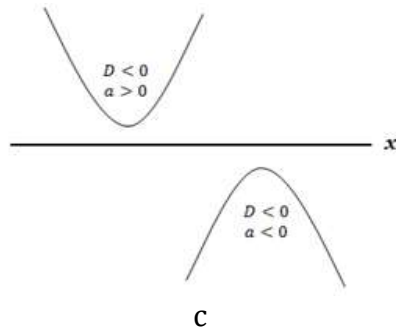
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dengan $a \neq 0$.

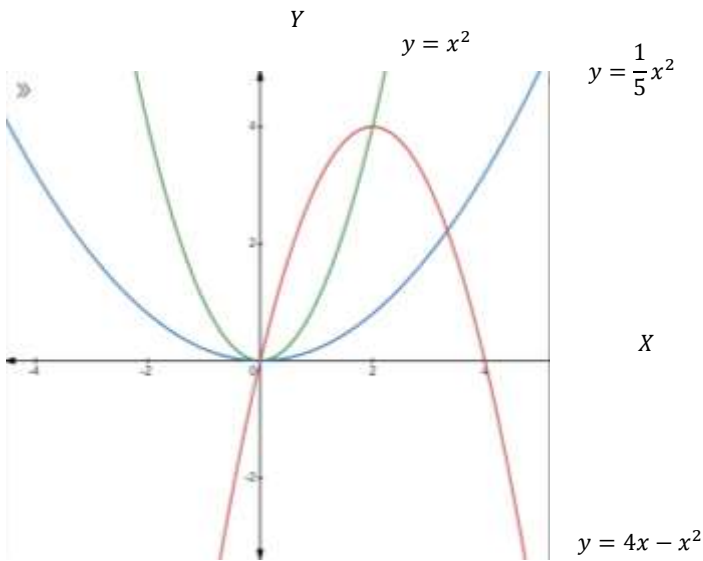
Fungsi kuadrat digambarkan berupa parabola. Setiap fungsi kuadrat memiliki diskriminan dan diperoleh dengan rumus :
 $D = b^2 - 4ac$

Pada umumnya, fungsi kuadrat digambarkan sebagai berikut:





Dapat juga dilihat gambar fungsi kuadrat berikut :



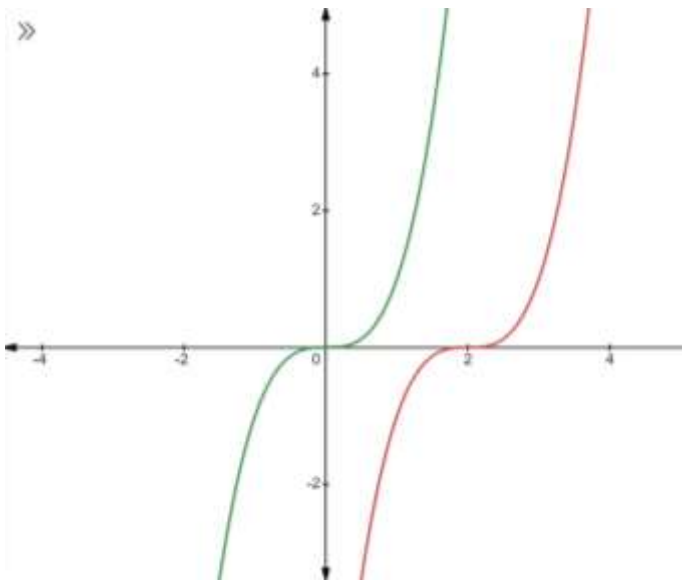
Gambar 9.10. Grafik Fungsi Kuadrat
Sumber : Data Diolah

9.2.4 Fungsi Kubik

Fungsi kubik didefinisikan :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3 \neq 0.$$

Secara umum, fungsi kubik digambarkan sebagai berikut:



Gambar 9.11. Grafik Fungsi Kubik
Sumber : Data Diolah

LATIHAN

- Diberikan fungsi $j(x)$, tentukan domain dari :
 - $j(x) = x^2 - 9$
 - $j(x) = x^2 - 3x - 18$
 - $j(x) = \frac{7}{7x-3}$
 - $j(x) = \sqrt{3x-4}$
 - $j(x) = \frac{5}{\sqrt{3x-4}}$
- Tentukan $j(-3), j(0), j(7), j(x-2)$, dan $j(3x^2-5)$ dari nomor 1!
- Diberikan $v(x)$ dan $w(x)$ sebagai berikut :
 - $v(x) = 11x^3$ dan $w(x) = 7x^3 + 4x^2 - 3$
 - $v(x) = 3x^2 - 5$ dan $w(x) = \sqrt{4x^2 - 3}$
 - $v(x) = \sqrt{5x^3 - 2}$ dan $w(x) = \frac{5x}{x+3}$
 - $v(x) = 6x^2 - 1$ dan $w(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}$

Tentukan $v + w, v - w, \frac{v}{w}$, dan $v \cdot w$!

4. Tentukan fungsi invers dari hasil nomor 3 !
5. Diketahui $v(x)$ dan $w(x)$ nomor 3 bagian a,b,c,dan d.
Tentukan $v \circ w$ dan $w \circ v$, serta domainnya !
6. Diketahui

$$j(x) = \begin{cases} 1 + x & , \quad x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & , \quad x > 1 \\ 2x - 1 & , \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Tentukan $j \circ k$!

7. Diberikan fungsi sebagai berikut:

a. $k(x) = 4x^2 - 5x - 2$

b. $k(x) = 7x^3 - 11x^2 - 5$

c. $k(x) = \frac{7x-5}{7x^3-6x-5}$

Tentukan gambar dari grafik $k(x)$ di atas !

DAFTAR PUSTAKA

- Hernadi, Julan. 2021. *Buku Seri Kuliah Ringkas Kalkulus 1*. Surabaya: Erlangga
- Advernesia. 2021. Sifat-Sifat Fungsi | Injektif, Surjektif, dan Bijektif. Diakses pada 27 November 2023 dari <https://www.advernesia.com/blog/matematika/sifat-sifat-fungsi-injektif-surjektif-dan-bijektif/>
- Aku pintar. 2023. Diakses pada 27 November 2023 dari <https://akupintar.id/belajar/online/materi/modul/11/matematika-wajib/fungsi/fungsi-komposisi-dan-fungsi-invers/98253477>
- Mulyanto, Alwin. 2022. Fungsi Kuadrat. Diakses pada 28 November 2023 dari <https://www.studiobelajar.com/fungsi-kuadrat/>

BAB 10

TEORI PELUANG

Oleh Inelsi Palengka'

10.1 Pendahuluan

Peluang adalah ukuran yang mencerminkan seberapa besar kemungkinan suatu peristiwa terjadi di antara semua peristiwa yang mungkin terjadi. Hasil dari banyak penyelidikan ilmiah pada dasarnya tidak dapat diprediksi. Ketika sebuah eksperimen diulang dalam kondisi yang sama, hasilnya selalu sama.

Setiap hari orang terbiasa mendengar prediksi hujan yang dituliskan dalam bentuk probabilitas, baik secara kualitatif (seperti "kemungkinan hujan besok kecil") atau kuantitatif (seperti "kemungkinan hujan besok sekitar 30%"). Dalam metode ini, hasil prediksi tidak akan diterima. Gejala seperti ini tidak dapat dilihat dari satu sisi saja, melainkan dari berbagai variabel yang berkaitan dengan kejadian tersebut. Oleh karena itu, pengetahuan tentang probabilitas yang didasarkan pada teori probabilitas diperlukan untuk membantu mereka yang membutuhkan kepastian.

10.2 Pengertian Teori Peluang

Teori peluang adalah disiplin ilmu matematika yang berasal dari abad ke-17 dan berakar dari aktivitas perjudian. Teori probabilitas didalilkan oleh sejumlah ilmuwan terkemuka, termasuk Blaise Pascal dan Pierre de Fermat, yang melakukan analisis probabilitas keberhasilan Chevalier de Mere dalam permainan judi. Penelitian ini dikembangkan lebih lanjut oleh Gauss dan Laplace (Julie, 2017). Dalam kehidupan sehari-hari, kita secara tidak sengaja menggunakan prinsip-prinsip teori peluang, seperti yang dicontohkan oleh keterlibatan kita dalam kegiatan seperti ular tangga, permainan kartu, lemparan koin, dan antisipasi jenis kelamin keturunan.

Teori probabilitas adalah salah satu cabang matematika yang didasarkan pada konsep kombinatorik dan digunakan dalam mata

pelajaran statistika. Tujuan utamanya adalah menganalisis dan menjelaskan peristiwa-peristiwa yang pada dasarnya tidak pasti atau tidak dapat diprediksi. Teori probabilitas mencakup beberapa konsep utama, yaitu variabel acak, proses stokastik, dan peristiwa. Konsep-konsep ini berfungsi sebagai representasi matematis dari peristiwa non-deterministik, yang memungkinkan dilakukannya analisis dan pemahaman yang cermat.

Entitas utama yang dipelajari dalam teori probabilitas mencakup variabel acak, proses stokastik, dan peristiwa. Entitas-entitas ini berfungsi sebagai representasi matematis dari peristiwa-peristiwa non-deterministik atau kuantitas-kuantitas yang dapat diukur, yang dapat berupa kejadian-kejadian tunggal atau memperlihatkan pola-pola evolusi yang tampaknya acak seiring berjalannya waktu.

Jika peristiwa seperti pelemparan koin atau pelemparan dadu dianggap acak, maka rangkaian peristiwa tersebut akan menampilkan pola yang dapat diprediksi dari waktu ke waktu. Hukum bilangan besar dan teorema limit pusat adalah dua contoh hasil matematika terkenal yang menunjukkan pola serupa.

KBBI mengartikan peluang merupakan kesempatan. Apa yang kami sebut probabilitas dalam bahasa Inggris. Menghitung kemungkinan terjadinya sesuatu disebut dengan probabilitas oleh para ahli matematika. Untuk menerapkan teori probabilitas, penting untuk fokus pada ruang sampel dan titik sampel. Sebuah titik sampel ada dalam ruang sampel, yang merupakan kumpulan lengkap hasil peristiwa.

Dalam skenario yang disebutkan di atas, kita tidak memiliki kepastian mutlak dan harus bergantung pada teori probabilitas untuk membuat tebakan mengenai situasi yang ada. Setiap angka antara nol dan satu mempunyai probabilitas. Jika probabilitas suatu kejadian diatur ke nol, maka kejadian tersebut tidak dapat terjadi; jika nilainya ditetapkan ke satu, maka peristiwa itu pasti akan terjadi. Lalu, bagaimana teori peluang dapat diterapkan pada situasi dunia nyata?

Dalam istilah yang lebih mudah dipahami, probabilitas mengacu pada kemungkinan yang diantisipasi dari suatu peristiwa yang akan terjadi atau telah terjadi. Konsep peluang pada

hakikatnya terkait dengan pengertian peluang (kemungkinan) dan kejadian. Jika seseorang dihadapkan pada suatu peluang yang besar, kemungkinan terjadinya peluang tersebut juga akan besar. Sebaliknya, jika seseorang diberikan sedikit peluang, kemungkinan terjadinya hal tersebut akan rendah. Istilah "peluang" juga dapat disebut sebagai "probabilitas", yang menunjukkan bidang studi yang berkaitan dengan pengukuran dan analisis hasil potensial. Menurut Yunarti (2014), peluang ditandai dengan adanya ruang dan titik sampel. Konsep ruang sampel mengacu pada himpunan semua hasil yang mungkin timbul dari suatu eksperimen atau peristiwa tertentu, sedangkan titik sampel mengacu pada elemen atau anggota tertentu di dalam ruang sampel yang mewakili hasil tertentu.

Kemungkinan diukur berdasarkan peluang yang diberikan. Dalam suatu percobaan, S mewakili ruang sampel, dan setiap elemen S mempunyai peluang yang sama untuk terlihat. Peluang kejadian A , dimana A adalah himpunan bagian dari S , didefinisikan

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

sebagai

Keterangan

$n(A)$ = banyaknya anggota dalam kejadian A

$n(S)$ = banyak anggota dalam himpunan ruang sampel S

10.3 Sejarah Teori Peluang

Pada abad ke-17, konsep untung-untungan muncul sebagai alat untuk menentukan kemungkinan menang atau kalah dalam permainan untung-untungan seperti dadu dan kartu (Anggoro, 2015). Selain itu, teori probabilitas digunakan dalam upaya peramalan seperti pola curah hujan dan hasil acara olahraga.

Konsep keacakan berpusat pada gagasan ketidakpastian. Merupakan hal yang umum untuk menggolongkan sesuatu sebagai "acak" jika hal itu tidak dapat diharapkan. Sudah berapa lama penelitian yang mempelajari kejadian yang tampaknya acak ini?

Artefak kuno yang menyerupai dan dapat dibandingkan dengan permainan dadu modern telah ditemukan oleh para

arkeolog (Anglin, 1994). Bekas gigitan pada tulang dan permukaan batu yang terkelupas hampir pasti dibuat atau dibuang dengan sengaja. Bukti menunjukkan bahwa artefak ini bermakna bagi penggunaannya dan mirip dengan artefak yang terakhir kali digunakan dalam permainan papan, misalnya dalam budaya Mesir kuno (Boyer, 1969). Menganggap bukti ini begitu saja merupakan sebuah permasalahan. Sangatlah sulit untuk mengidentifikasi pentingnya penemuan-penemuan ini tanpa catatan tertulis.

Astragalus adalah salah satu perangkat paling awal yang digunakan untuk menghasilkan pola acak. Tulang astragalus umumnya terletak di tarsus kaninus dan leher tarsus. Dahulu tanaman astragalus banyak sekali jumlahnya. Hal ini menunjukkan bahwa benda ini telah dimanfaatkan sejak 5000 tahun yang lalu, pada zaman Mesir kuno dalam permainan untung-untungan. Ada foto orang Mesir kuno yang "memantulkan astragalus" sambil bermain permainan papan. Aturan main dan tren hasil pantulan astragalus tidak diketahui karena tidak pernah dicatat.

Mesopotamia adalah tempat lahirnya permainan untung-untungan pertama yang benar-benar dapat dipahami (Boyer, 1969). Ur adalah salah satu kota besar di Mesopotamia pada masa itu. Permainan papan kuno dan para pemainnya ditemukan oleh para arkeolog pada awal abad ke-20. "Ukiran halus" pada "permainan papan" berasal dari "sekitar 4500" tahun yang lalu. Berkat catatan kuno yang ditemukan selama penggalian, sekarang kita dapat memiliki pemahaman menyeluruh tentang permainan ini. Permainan 20 Kotak menjelaskan kegiatan ini. Permainan ini menampilkan pemeran dua orang. Semua orang mengira mereka bisa menang hanya dengan sedikit perencanaan dan sedikit keberuntungan. Setiap pemain melempar "dadu" untuk melihat berapa banyak ruang yang dapat mereka "gerakan" pada bidaknya di segmen "keberuntungan". Dibutuhkan keterampilan dalam menentukan komponen mana yang memerlukan relokasi.

Permainan kedua yaitu Papan 20 Persegi, seperti yang dijelaskan oleh Boyer pada tahun 1969. Permainan ini menunjukkan proses stokastik karena jumlah bidak yang dapat dimajukan setiap pemain bergantung pada hasil pelemparan dadu. Game ini telah mendapatkan popularitas yang signifikan baik di

Mesir dan India. Peradaban Mesopotamia mengalami kemunduran ketenaran sekitar 250 tahun setelah penemuan awal "Permainan 20 Persegi". Selama periode itu, kebudayaan Romawi, yang ditandai dengan berbagai aktivitas perjudiannya, menduduki posisi paling menonjol. Perjudian dapat dikonseptualisasikan sebagai suatu bentuk permainan yang tidak memiliki komponen papan fisik. Bakat para pemain diabaikan, dan para peserta hanya bertaruh pada hasil lemparan astragalus. Raja Augustus dan Vitellius terkenal karena kegemaran mereka yang berlebihan dalam aktivitas bermain game. Konsep teori probabilitas diperkenalkan oleh Chevalier de Mere, seorang bangsawan Perancis yang hidup antara tahun 1601 dan 1665 (Grabiner, 1969). Chevalier bertanya kepada Blaise Pascal dengan mengajukan beberapa pertanyaan. Selanjutnya, Pascal dan Fermat menyempurnakan penyelidikan ini, yang berpuncak pada perumusan teori probabilitas yang masih digunakan hingga saat ini.

10.4 Tokoh Teori Peluang

Ronald Aylmer Fisher, seorang ahli statistik terkemuka Inggris, memainkan peran penting dalam kemajuan statistik kontemporer. Tempat kelahiran Fisher didokumentasikan sebagai London, Inggris (Sylvan, 2013). Masa kecilnya ditandai dengan rasa keindahan. Terlepas dari gangguan penglihatannya, individu tersebut menunjukkan bakat intelektual yang luar biasa sebagai seorang siswa, mencapai Medali Needeld yang bergengsi pada usia 16 tahun dengan menjadi pemenang dalam kompetisi esai matematika. Karena keterbatasan penglihatannya, ia menerima pengajaran matematika tanpa bantuan buku teks atau alat tulis. Individu meningkatkan kapasitas mereka untuk secara mental mengonsep masalah geometri melalui penerapan operasi aljabar. Individu juga memiliki ketertarikan yang kuat terhadap bidang biologi, dengan penekanan khusus pada studi evolusi. Pada tahun 1909, Fisher dianugerahi beasiswa yang memberinya izin masuk ke Gonville dan Caius College, Cambridge. Individu tersebut menyelesaikan studinya di bidang astronomi di Universitas Cambridge pada tahun 1912. Bisa dibayangkan dari sinilah asal mula ketertarikannya pada statistik. Para astronom biasanya melakukan berbagai pengukuran dan kemudian menggunakan

konsep dan metodologi statistik untuk menganalisis dan menafsirkan data mereka. Selama masa jabatan Fisher di Universitas Cambridge, ia terlibat dengan literatur ilmiah, termasuk karya terkenal berjudul "Theory of Errors" yang ditulis oleh George Biddell Airy, seorang astronom Inggris terkemuka. Selanjutnya, Fisher menahan diri untuk tidak terlibat dalam kegiatan astronomi. Ronald Aylmer Fisher, juga dikenal sebagai R.A. Fisher, adalah seorang ahli statistik dan genetika Inggris terkemuka. Dia Setelah lulus, Fisher mengalami kesulitan dengan masalah keuangan. Selama kurun waktu tersebut, ia mengambil keputusan untuk bekerja sebagai buruh tani di sebuah peternakan yang berlokasi di Kanada selama beberapa bulan. Setibanya di London, ia mengambil peran sebagai ahli statistik di Perusahaan Perdagangan dan Investasi Umum. Pada tahun 1914, setelah dimulainya Perang Dunia I, ia menyatakan keinginan kuatnya untuk mendaftar sebagai tentara. Namun lamarannya ditolak karena gangguan penglihatannya. Selanjutnya, ia mengambil peran sebagai instruktur matematika dan fisika selama periode 1915 hingga 1919. Pada akhirnya, Fisher membuat keputusan untuk mengejar karir penuh waktu sebagai ilmuwan karena menerima dua tawaran pekerjaan secara bersamaan. Proposisi awal disampaikan oleh Karl Pearson, seorang tokoh terkemuka di bidang ini, sedangkan tawaran berikutnya datang dari Stasiun Percobaan Pertanian Rothamsted (Reinsel, 1980). Fisher memilih kesempatan kedua dan kemudian memberikan kontribusi yang signifikan di bidang statistik, khususnya dalam domain desain eksperimental dan analisis.

Investigasi Fisher berfokus pada kerangka teoritis desain eksperimen, dimulai dengan konseptualisasi pengacakan dan analisis varians. Konsep Kemungkinan Maksimum dikemukakan olehnya pada tahun 1912. Pada tahun 1922, ia memaparkan definisi statistik yang direvisi. Tujuannya adalah untuk mengurangi volume data, karena merupakan hal yang biasa bagi para ahli statistik dan ilmuwan untuk menggunakan kumpulan data yang luas dalam penelitian mereka selama periode tersebut. Penulis mengenali tiga perhatian utama dalam penelitiannya, yaitu fokus pada ciri-ciri populasi yang diamati, metode estimasi, dan pola penyebaran. Pada tahun 1925, Fisher menulis publikasi terkenal berjudul "Metode

Statistik untuk Pekerja Penelitian", yang mencapai kesuksesan komersial yang belum pernah terjadi sebelumnya, menjadikannya buku dengan penjualan tertinggi dalam sejarah. Penerbitan buku ini telah berlangsung selama lebih dari lima dekade. Selain kontribusi ilmiahnya yang lain, karya Fisher yang diterbitkan termasuk *The Design of Experiments* (1935) dan *Statistical Tables* (1947). Masing-masing faktor ini memainkan peran penting dalam kemajuan statistik kontemporer.

10.5 Dasar-Dasar Teori Peluang

10.5.1 Ruang Sampel

Ruang sampel mengacu pada kumpulan titik sampel atau keseluruhan hasil potensial dalam konteks eksperimen (Suhov, 2014). Istilah "ruang sampel" biasanya dilambangkan dengan simbol S .

10.5.2 Titik Sampel

Titik sampel merupakan anggota ruang sampel.

10.5.3 Kejadian

Suatu peristiwa dapat didefinisikan sebagai bagian dari ruang sampel, yang mewakili hasil tertentu atau hasil eksperimen yang diinginkan. Menurut Sitopu dkk. (2023), setiap peristiwa dikaitkan dengan kumpulan titik sampel, yang merupakan bagian dari empat ruang sampel. Setiap kejadian dikaitkan dengan kumpulan titik data yang merupakan bagian dari keseluruhan rangkaian hasil yang mungkin terjadi. Kumpulan komponen ini mewakili keseluruhan elemen yang berkontribusi terhadap kelayakan terjadinya. Peristiwa sederhana didefinisikan sebagai peristiwa yang hanya terdiri dari satu elemen dari ruang sampel. Peristiwa majemuk di ruang nol atau ruang kosong mengacu pada penggabungan banyak peristiwa dasar. Hal ini ditandai dengan kumpulan himpunan bagian di dalam ruang sampel yang tidak memiliki elemen apa pun, dilambangkan dengan simbol $\emptyset$.

10.6 Permutasi

Permutasi merupakan setiap urutan potensial di mana sekumpulan item dapat muncul tanpa ada item yang muncul lebih dari satu kali. Untuk “permutasi”, digunakan huruf P. Berikut rumus permutasi.

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dengan syarat $n \leq r$.

Keterangan

P = permutasi

n = banyaknya ruang sampel

r = Banyaknya sampel yang diambil

Contoh :

Seorang pegawai bank perlu mencetak tiga digit nomor antrian nasabah. Bila jumlah nomor antrian dan tidak mencakup (0, 1, 2, 3). Berapa banyak kemungkinan pilihan yang ada untuk nomor antrian?...

Penyelesaian:

Banyak angka yang tersedia = 4 angka yaitu, 0, 1, 2, 3, maka $n = 4$

Karena akan dipilih 3 nomor antrian berbeda, maka banyak pilihannya adalah permutasi 3 dari 4

$$\begin{aligned} P(4,3) &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} \\ &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 24 \end{aligned}$$

10.7 Kombinasi

Kombinasi r elemen dari n elemen adalah himpunan bagian dari r elemen yang dapat dibangun dari n item berbeda, tanpa memperhatikan urutan penyajian elemen tersebut. Jika kita mempunyai n elemen dan ingin memilih r elemen, kita dapat melakukannya tanpa mengkhawatirkan urutan kemunculannya,

oleh karena itu $0 \leq r \leq n$, adalah pilihan. berapa banyak cara n buah dapat digabungkan dengan r dilambangkan:

$$C_n^r \text{ atau } \binom{n}{r} \text{ atau } C = (n, r).$$

Perumusan kombinasinya antara lain :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Dengan syarat $n \leq r$.

Keterangan

C = kombinasi

n = banyaknya ruang sampel

r = Banyaknya sampel yang diambil

10.8 Jenis-Jenis Peluang

Jenis-jenis peluang terdiri dari:

10.8.1 Peluang Bersyarat

Hasil percobaan dapat dibagi menjadi setidaknya dua kategori. Jika peristiwa A sudah terjadi, berapa peluang terjadinya peristiwa B juga?

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Yang menyatakan bahwa

$P(B|A)$ = peluang peristiwa B terjadi dengan syarat peristiwa A terjadi terlebih dahulu

$P(A|B)$ = peluang peristiwa A dan B terjadi bersamaan

$P(A)$ = peluang terjadinya peristiwa A

10.8.2 Peluang Tidak Bersyarat

Penafsiran yang dimaksud atas istilah 'bebas' dalam konteks ini menyimpang dari pemahaman sehari-hari, malah selaras dengan konotasi statistiknya. Meskipun konsep 'bebas' secara keseluruhan mirip dengan 'bebas secara statistik', penting untuk dicatat bahwa istilah-istilah ini tidak sepenuhnya sama. Peristiwa A dianggap bebas terhadap peristiwa B bila tidak ada pengaruh atau ketergantungan antara kedua peristiwa tersebut. Misalnya, dalam

skenario di mana seorang peneliti mengambil kartu secara berurutan dari setumpuk kartu bridge, dan masing-masing kartu diganti saat diambil, dapat dinyatakan bahwa semua hasil dari peristiwa ini dianggap saling independen. Peluang memperoleh kartu as pada undian tertentu dari setumpuk kartu standar yang terdiri dari 52 kartu tetap konstan pada $4/52$. Jika tindakan menggambar kartu tidak melibatkan pengembalian kartu berikutnya ke tumpukan kartu, hasil yang diamati tidak akan menunjukkan independensi atau saling ketergantungan. Peluang memperoleh As pada pengambilan awal dari setumpuk kartu standar yang terdiri dari 52 kartu adalah $4/52$. Selanjutnya pada pengundian kedua, probabilitasnya berkurang menjadi $3/51$. Pola ini berlanjut, dengan probabilitas menurun menjadi $2/50$ pada pengundian ketiga, dan seterusnya. Hubungan antara dua kejadian yang saling bebas, dinotasikan sebagai A dan B, dapat digambarkan sebagai perpotongan himpunan A dan B, dinotasikan sebagai $(A \cap B)$, yang sama dengan hasil kali probabilitas kedua kejadian tersebut. Secara simbolik :

$$P(A \text{ dan } B) = P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Contoh :

Sebuah kantong berisi 6 kelereng putih, 4 kelereng biru dan 3 kelereng merah. Banyak cara pengambilan 3 kelereng putih dari kantong tersebut adalah...

Penyelesaian:

Karena akan dipilih 3 kelereng dari 6 kelereng, maka gunakan kombinasi 3 dari 6

$$\begin{aligned} C_r^n &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{6!}{3!(6-3)!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} \\ &= 20 \end{aligned}$$

Banyak kombinasi warna yang dihasilkan adalah 20.

10.9 Penerapan Teori Peluang dalam Kehidupan Sehari-hari

10.9.1 Penerapan Teori Peluang dalam Berbisnis

Saat memutuskan untuk meluncurkan sebuah perusahaan, Anda pasti akan mempertimbangkan penawaran akhirnya. Anda dapat mengetahui apa yang paling diinginkan orang dengan melakukan survei atau melihat cara mereka menggunakan suatu produk. Anda mungkin memutuskan untuk memulai bisnis penjualan keripik, misalnya, karena banyaknya kebutuhan akan makanan ringan. Anda dapat mengetahui jenis keripik kentang dan keripik singkong yang paling disukai dengan melakukan survei atau melakukan observasi secara cermat. Sekitar 75% dari 150 orang yang disurvei lebih menyukai keripik singkong dibandingkan keripik kentang. Hal ini menunjukkan bahwa Anda memiliki peluang lebih besar untuk menjual keripik singkong dibandingkan keripik kentang.

10.9.2 Penerapan Peluang dalam Mengambil Keputusan

Ketika dihadapkan pada suatu masalah, individu dihadapkan pada berbagai pilihan yang mengharuskan pemilihan tindakan yang paling tepat untuk mencapai hasil yang diinginkan (Anggoro, 2015). Ketika seseorang ingin masuk ke Universitas Negeri, mereka pasti akan menghadapi banyak pilihan ketika harus memilih bidang studi dan institusi tertentu yang ingin mereka masuki. Sebelum mengambil keputusan, penting untuk mempertimbangkan banyak faktor, termasuk tingkat penerimaan universitas dan prevalensi jurusan yang dicari. Teori probabilitas digunakan dalam menilai kemungkinan diterima dalam program akademik yang diinginkan, mengingat tantangan yang disebutkan di atas.

10.9.3 Penerapan Peluang pada Ramalan Cuaca

Tugas melakukan prakiraan cuaca dilaksanakan oleh Badan Meteorologi dan Geofisika (BMKG) memanfaatkan peralatan teknologi canggih dan sistem komputer yang canggih untuk meningkatkan akurasi dan keandalan prakiraan cuaca. Pemanfaatan superkomputer memerlukan landasan matematika untuk menilai

kejadian masa lalu sebagai dasar untuk memprediksi terulangnya kejadian tersebut di masa depan.

LATIHAN

Jawablah soal-soal dibawah ini dengan tepat!

1. Seorang peternak akan membeli hewan ternak untuk dipelihara. Dia akan membeli 3 ekor sapi, 4 ekor domba dan 5 ekor kambing. Seorang pedagang mempunyai 6 ekor sapi, 6 ekor domba dan 8 ekor kambing. Banyak cara yang dapat dilakukan untuk memilih hewan ternak yang akan dibeli adalah...
2. Setiap tahun, SMA Pelita Bangsa selalu mengadakan pentas seni. Sebelum acara akbar, para siswa mengadakan pemilihan ketua, sekretaris dan bendahara. Setelah melakukan seleksi, ada 5 orang siswa yang mendaftarkan diri. Banyak cara untuk memilih ketua, sekretaris dan bendahara untuk acara tersebut adalah....

DAFTAR PUSTAKA

- Anggoro, B. S. 2015. Sejarah Teori Peluang Dan Statistika. Al-Jabar : Jurnal Pendidikan Matematika, 6(1), 13-24. <https://doi.org/10.24042/ajpm.v6i1.55>
- Anglin, W. S. 1994. Mathematics: A concise history and philosophy. Undergraduate Texts in Mathematics. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0875-4>
- Boyer, C. B. 1969. The anthropology of mathematics: Evolution of mathematical Concepts . An elementary study. Raymond L. Wilder. Wiley, New York, 1968. xx + 234 pp., illus. \$8. Science, 163(3869), 799-799. <https://doi.org/10.1126/science.163.3869.799-a>
- Grabner, J. V. 1969. A history of mathematics. Carl B. Boyer. Wiley, New York, 1968. xviii + 717 pp., illus. \$10.95. Science, 163(3863), 171-171. <https://doi.org/10.1126/science.163.3863.171>
- Julie, H., Apriani, M. S., & Krisnamurti, C. N. 2017. Buku ajar Teori Peluang. Sanata Dharma University Press.
- Reinsel, G., Hogg, R. V., & Craig, A. T. 1980. Introduction to mathematical statistics (4th ed.). Journal of the American Statistical Association, 75(370), 474. <https://doi.org/10.2307/2287488>
- Sitopu, J. W., Nanang, Pasaribu, J. S., Baist, A., Daniel, F., Ridho'i, M., Indraswari, N. F., Suarsana, I. M., Ramadhani, E. N., Saidi, S., Anam, A. C., & Aulia, H. H. 2023. Teori Peluang. Global Eksekutif Teknologi.
- Suhov, Y., & Kelbert, M. 2014. Probability and statistics by example. Cambridge University Press.
- Sylvan, D. 2013. Introduction to mathematical statistics. Journal of Biopharmaceutical Statistics, 23(3), 716-717. <https://doi.org/10.1080/10543406.2013.756334>
- Yunarti, T. 2014. Desain didaktis teori peluang sma. Jurnal Pendidikan MIPA, 15(1), 15-20. <https://doi.org/10.23960/jpmipa/v15i1.pp15-20>

BAB 11

STATISTIK DASAR

Oleh Lita Lovia

11.1 Pendahuluan

Secara umum kata statistika dan statistik tidak mengandung perbedaan, namun keduanya memiliki makna yang berbeda. Kata “statistik” berasal dari kata status (bahasa latin) yang berarti “Negara” dan mempunyai persamaan arti dengan kata state (bahasa inggris) (Nuryadi *et al.*, 2017).

11.2 Beberapa Pengertian dasar dalam Statistika

11.2.1 Statistik dan Statistika

Pada awalnya, istilah “statistik” didefinisikan sebagai sekumpulan data yang terdiri dari angka, yang dikenal sebagai “data kuantitatif”, dan juga menggambarkan ukuran sebagai representasi dari kumpulan data. Oleh karena itu, statistik adalah sekumpulan data yang terdiri dari angka yang disusun dalam bentuk tabel atau diagram yang menunjukkan karakteristik dari kumpulan data, yang kemudian dianalisa dan ditarik kesimpulan. Statistika adalah bidang yang mempelajari bagaimana data dikumpulkan, diolah, dianalisis, dan ditarik kesimpulan.

Statistik dapat diartikan sebagai sejumlah cara atau metode dan aturan tentang pengumpulan, pengolahan (analisis), penyajian, dan penarikan kesimpulan terhadap data-data yang berupa angka-angka. Sedangkan ilmu pengetahuan yang membahas tentang cara atau metode dan aturan tersebut disebut statistika. (Arisena, 2018) Statistika dalam pengertian sebagai ilmu dibedakan menjadi dua yaitu Statistika Deskriptif dan Statistika Inferensia.

1. Statistika deskriptif mempunyai tujuan untuk mendeskripsikan atau memberikan gambaran tentang subjek penelitian. Statistika deskriptif adalah teknik pengumpulan, penyajian, dan analisis data tanpa membuat kesimpulan atau membuat generalisasi. Penentuan rata-rata

(mean), modus, median, rentang, dan simpangan baku dijelaskan dalam statistika deskriptif ini. Data juga disajikan dalam diagram dan tabel.

2. Statistik inferensial bertujuan untuk penarikan kesimpulan. Ini mencakup semua metode yang berkaitan dengan analisis sebagian data, yang dapat digunakan untuk meramalkan atau menarik kesimpulan tentang populasi data.

11.2.2 Populasi dan Sampel

Keseluruhan objek yang akan diteliti atau diamati dan memiliki sifat-sifat yang sama disebut populasi. Sedangkan sampel adalah sebagian dari populasi yang benar-benar diteliti atau objek pengamatan langsung yang digunakan sebagai dasar untuk pengambilan keputusan (Nuryadi *et al.*, 2017). Sampel yang diteliti harus dapat mewakili gambaran yang benar terhadap populasi.

11.2.3 Pengertian Datum dan Data

Datum adalah informasi yang dikumpulkan dalam bentuk angka atau lambang dari suatu pengamatan atau penelitian. Bentuk jamak dari datum disebut dengan data.

11.2.4 Jenis-jenis Data

1. Menurut sifatnya data dibagi menjadi dua
 - a. Data kualitatif adalah data yang berbentuk kategori atau atribut.
Contoh
Data yang diperoleh dari penelitian tentang hobi, misalnya membaca, nonton TV, makan, olahraga dan lain-lain
 - b. Data Kuantitatif adalah data yang berbentuk bilangan, atau data yang dinyatakan dalam bentuk angka.
Contoh
Luas halaman parkir, tinggi badan, rata-rata ujian semester, berat badan dan lain-lain.
Data kuantitatif terbagi dua yaitu :
 - 1) Data diskret; adalah data yang diperoleh hasil perhitungan atau pencacahan.

Contoh; jumlah kursi di lokal D ada sebanyak 30 buah, jumlah mahasiswa yang mengikuti perkuliahan statistika dasar sebanyak 30 orang.

- 2) Data kontinu adalah data yang diperoleh dari hasil pengukuran

Contoh; berat badan Budi adalah 50 kg, Jarak padang-Jakarta

2. Menurut cara memperolehnya atau sumbernya data terbagi dua
 - a. Data Primer adalah data yang diperoleh langsung dari objeknya
Contoh; wawancara, kuis dan lain-lain
 - b. Data Sekunder adalah data yang diperoleh dari pihak lain, tidak mengamati sendiri
Contoh; data yang diperoleh dari majalah atau surat kabar atau publikasi lainnya.

11.2.5 Pengumpulan, Pembulatan, dan Pemeriksaan data

1. Pengumpulan Data

Untuk mengumpulkan data dapat dilakukan beberapa cara yaitu wawancara, penelitian lapangan (observasi), angket (kuisisioner), studi literatur.

2. Pembulatan Data

Pembulatan dapat dilakukan ke banyaknya angka signifikan, ke satuan ukuran terdekat, atau ke banyaknya angka desimal

3. Pemeriksaan Data

Pemeriksaan data dilakukan untuk mencegah kekeliruan atau ketidakbenaran yang mungkin terjadi karena alat ukur yang tidak akurat.

11.3 Distribusi Frekuensi

Distribusi frekuensi biasanya didefinisikan sebagai pengelompokan data dari yang terkecil hingga yang terbesar ke dalam beberapa kelompok atau kelas, lalu menghitung jumlah data yang masuk ke dalam setiap kelas.

11.3.1 Distribusi Frekuensi Data Tunggal.

Penataan data dapat dilakukan jika jumlah data responden sedikit. Ini dapat dilakukan dengan mengurutkan data dari yang tertinggi ke yang terendah atau sebaliknya.

Contoh1 :

Nilai Mid semester pada matakuliah statistika 30 orang mahasiswa jurusan matematika di suatu perguruan tinggi diberikan sebagai berikut :

60	80	75	80	70	90
70	70	90	70	60	95
60	65	75	90	75	65
65	80	85	75	90	75
95	80	90	60	75	95

Selanjutnya data dapat diurutkan dari data yang tertinggi ke data yang rendah atau sebaliknya untuk membuat tabel distribusi frekuensinya.

Nilai	Tally	Frekuensi (<i>f</i>)
60	IIII	4
65	III	3
70	IIII	4
75	IIII I	6
80	IIII	4
85	I	1
90	IIII I	5
95	III	3

Tabel 11.1. Tabel distribusi Frekuensi data tunggal

Nilai	Frekuensi (f)
60	4
65	3
70	4
75	6
80	4
85	1
90	5
95	3

11.3.2 Distribusi Frekuensi Data Berkelompok.

Apabila data tertinggi dan data terendah memiliki jarak yang cukup lebar dan jumlah data cukup besar maka sebaiknya digunakan distribusi frekuensi data berkelompok.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menyusun tabel distribusi frekuensi data berkelompok (aturan sturges) adalah:

1. Tentukan data tertinggi (x_{max}) dan data terendah (x_{min})
2. Tentukan selisih data tertinggi dengan data terendah (Range)

$$J = x_{max} - x_{min}$$

3. Tentukan Banyak kelas yang akan digunakan dengan menggunakan rumus

$$K = 1 + 3.3 \log n$$

4. Tentukan Panjang Kelas/ lebar kelas (interval)

$$P = \frac{J}{K}$$

5. Susun format sesuai dengan yang dibutuhkan, tally data dan kemudian sempurnakan

Contoh2 :

Prestasi Belajar 80 orang mahasiswa statistika dalam Mata Kuliah “Statistika Dasar”, seperti tertera pada data berikut ini.

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	82	75	94	77	69	74	68	60
96	78	89	61	75	95	60	79	83	71
79	62	67	97	78	85	76	65	71	75
65	80	73	57	88	78	50	76	53	74
86	67	73	81	72	63	76	75	85	77

Jawab

1. $x_{max} = 97, x_{min} = 50$
2. $J = x_{max} - x_{min} = 97 - 50 = 47$
3. $K = 1 + 3.3 \log n = 1 + 3.3 \log 80 = 7,28 \cong 7$
Jadi banyak kelas dengan menggunakan aturan ini adalah 7
4. $P = \frac{J}{K} = \frac{46}{7} = 6,714 \cong 7$

Nilai	Turus	Frekuensi
50-56	II	2
57-63	IIII II II	12
64-70	IIII III I	11
71-77	IIII IIII IIII III IIII	24
78-84	IIII II IIII	14
85-91	IIII III	10
92-98	II II	7

Tabel 11.2. Tabel distribusi Frekuensi data kelompok

Nilai	Frekuensi
50-56	2
57-63	12
64-70	11
71-77	24
78-84	14
85-91	10
92-98	7

11.4 Penyajian Data

11.4.1 Penyajian Data dalam Bentuk Tabel

Tabel adalah alat penyajian data angka dalam bentuk baris-baris dan kolom-kolom. Data angka yang dikumpulkan disusun dan didistribusikan ke dalam baris-baris dan kolom-kolom menurut klasifikasi datanya (Ananda and Fadhli, 2018).

Contoh 3 :

Tabel 11.3. Jumlah Akte Kelahiran yang Diterbitkan Menurut Kecamatan (dokumen)

Kecamatan	Jumlah Akte Kelahiran yang Diterbitkan Menurut Kecamatan (dokumen)		
	2020	2021	2022
Bungus Teluk Kabung	2020	2021	2022
Lubuk Kilangan	1005	1017	530
Lubuk Begalung	2247	1692	839
Padang Selatan	4070	3440	1818
Padang Timur	1894	2638	848
Padang Barat	1946	2569	1128
Padang Utara	1183	1276	544
Nanggalo	2581	2562	857
Kuranji	1903	1506	887
Pauh	4679	7091	2270
Koto Tengah	7096	6529	3243

Sumber

<https://padangkota.bps.go.id/indicator/12/663/1/jumlah-akte-kelahiran-yang-diterbitkan-menurut-kecamatan.html>

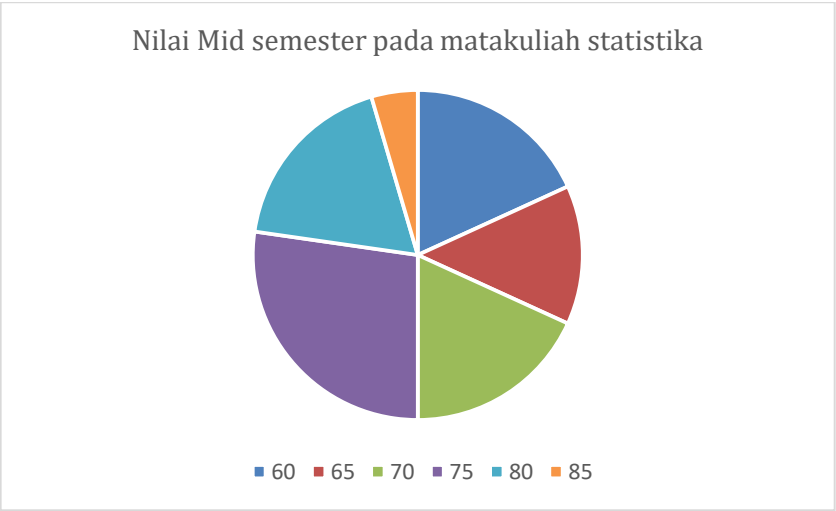
Access Time: November 7, 2023, 8:33 pm

11.4.2 Penyajian Data dalam Bentuk Diagram Lingkaran

Diagram lingkaran adalah diagram yang menunjukkan sebuah data ataupun hasil angka dalam bentuk lingkaran

Contoh 4 :

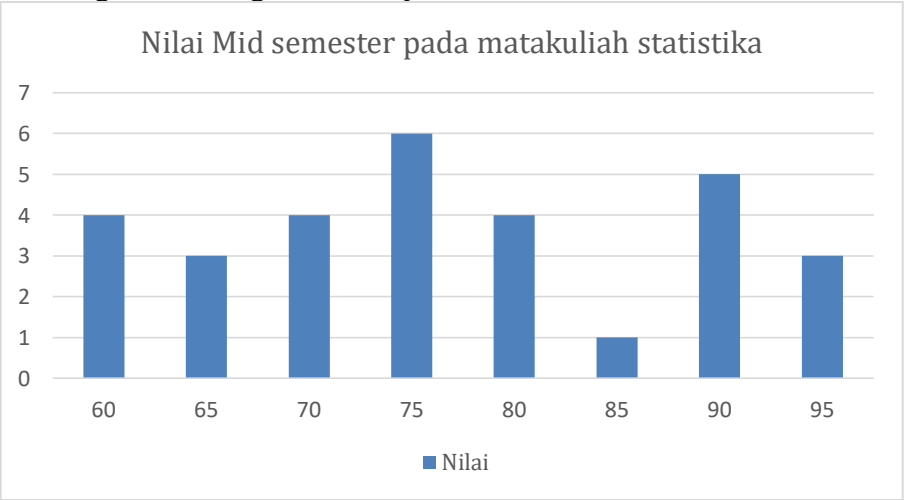
Diagram Lingkaran dari data pada Tabel 11.2.



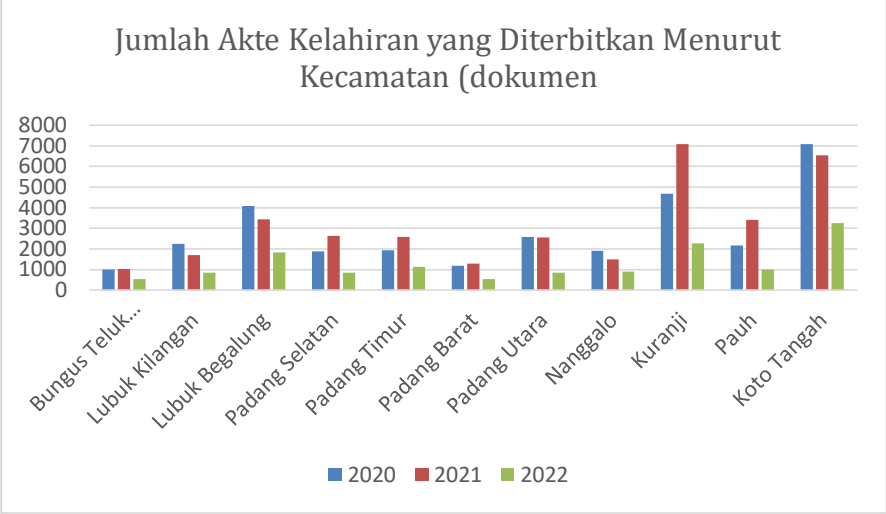
11.4.2 Penyajian Data dalam Bentuk Diagram Batang

Contoh 5 :

1. Diagram batang dari data pada Tabel 11.1



2. Diagram batang dari data pada Tabel 11.3

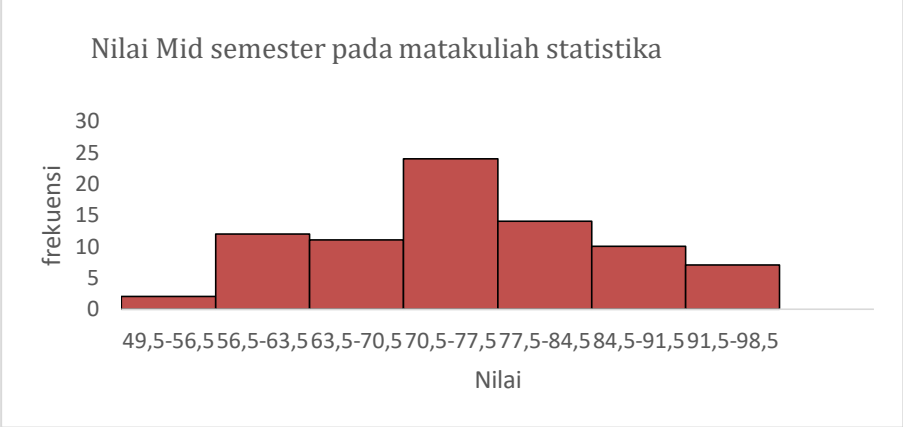


11.4.3 Penyajian Data dalam Bentuk Histogram

Histogram digunakan untuk data bergolong/kelompok. Diagram batang dan histogram pada dasarnya sama, namun pada histogram sumbu x menunjukkan batas nyata kelas interval.

Contoh6

Histogram dari data pada Tabel 11.2.



11.5 Ukuran Pemusatan

11.5.1 Data Tunggal

1. Nilai tengah (Mean)

Rata-rata merupakan ukuran pemusatan data yang paling sering digunakan. Rata-rata merupakan jumlah semua nilai-nilai dibagi dengan banyaknya data.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Keterangan:

μ : rata-rata hitung populasi

$\bar{x}$: rata-rata hitung sampel

n : ukuran Sampel

x_i : data ke- i

2. Modus

Modus adalah data yang sering muncul atau data yang memiliki frekuensi terbesar. Dilambangkan dengan M_o

3. Median

median adalah suatu atau bilangan yang membatasi separuh dari frekuensi di bagian bawah median dan separuh lagi di bagian atas median.

Jadi, jika banyak data (n) ganjil dan terurut, maka

$$Me = \text{data ke } \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

Jadi, jika banyak data (n) genap dan terurut, maka

$$Me = \frac{\text{data ke } \left(\frac{n}{2} \right) + \text{data ke } \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{2}$$

Contoh 7:

Data tinggi badan 14 orang mahasiswa diberikan sebagai berikut:

153,155, 165, 162, 163, 172, 164, 170, 170, 168, 170, 169, 173,158.

Dari data di atas tentukan Mean, Median dan Modus

Mean

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{153+155+165+162+163+172+164+170+170+168+170+169+173+158}{14} \\ &= \frac{2.312}{14} = 165\end{aligned}$$

Modus

Data yang sering muncul adalah angka 170, muncul sebanyak 3 kali

Median

Terlebih dahulu diurutkan menjadi

153, 155, 158, 162, 163, 164, 165, 168, 169, 170, 170, 170, 172, 173

Banyak data $n = 14$ (genap), maka

$$\begin{aligned}Me &= \frac{\text{data ke } \left(\frac{14}{2}\right) + \text{data ke } \left(\frac{14}{2} + 1\right)}{2} \\ &= \frac{\text{data ke } 7 + \text{data ke } 8}{2} = \frac{165 + 168}{2} = 166,5\end{aligned}$$

11.5.2 Data Berkelompok

1. Nilai Tengah (Mean)

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Dimana ;

$\bar{x}$:= Nilai Tengah Sampel

x_i := Titik Tengah Interval Kelas

f_i := Frekuensi Observasi pada kelas interval ke- i

2. Modus

$$M_o = T_{bo} + P \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

M_o := Modus

T_{bo} := Tepi bawah kelas modus

P := lebar kelas interval dimana median berada

d_1 := selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi sebelum kelas modus

d_2 := selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi sesudah kelas modus

3. Median

$$M_e = T_{bm} + P \frac{\left(\frac{\sum f_i}{2} - f_k\right)}{f_{me}}$$

dimana ;

M_e := Median

T_{bm} := Tepi bawah kelas median

:= Frekuensi Observasi pada kelas interval ke- i

f_k := frekwensi kumulatif dari kelas interval sebelum kelas median

P :=lebar kelas interval dimana median berada

Contoh 8:

Berdasarkan data pada contoh2, tentukan Mean, Median dan Modus dari data tersebut.

1. Mean

Nilai	Frekuensi (f_i)	x_i	$f_i x_i$
50-56	2	53	106
57-63	12	60	720
64-70	11	67	737
71-77	24	74	1776
78-84	14	81	1134
85-91	10	88	880
92-98	7	95	665
	80		6018

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6018}{80} = 75,255$$

2. Modus

$$T_{bo} = 84,5 ; P = 7 ;$$

$$d_1 = 14 - 10 = 4; d_2 = 10 - 7 = 3$$

$$M_o = T_{bo} + P \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

$$= 84,5 + 7 \frac{4}{(4 + 3)} = 88,5$$

3. Median

Banyaknya data ada 80 sehingga letak mediannya pada frekuensi $\frac{80}{2} = 40$

$$\frac{\sum f_i}{2} = 40; T_{bm} = 70,5; f_k = 25; f_{me} = 24$$

$$M_e = T_{bm} + P \frac{\left(\frac{\sum f_i}{2} - f_k\right)}{f_{me}}$$

$$= 70,5 + 7 \frac{(40 - 25)}{24} = 74,875$$

11.6 Ukuran Letak

11.6.1 Kuartil

Kuartil adalah nilai-nilai pada kelompok data yang sudah disusun terurut yang membagi kelompok data tersebut menjadi 4 bagian yang sama.

1. Data Tunggal

Letak dari Q_i dirumuskan sebagai berikut

$$\text{Letak } Q_i = \frac{i(n + 1)}{4}$$

Keterangan

Q_i := Kuartil ke- i

n := Banyak data

Contoh9

Berdasarkan data pada contoh7, tentukan Kuartil-1, Kuartil -2, dan Kuartil-3 dari data tersebut.

Data diurutkan sebagai berikut :

153, 155, 158, 162, 163, 164,165, 168, 169, 170,170, 170, 172, 173

$$\text{Letak } Q_1 = \frac{(n + 1)}{4} = \frac{(14 + 1)}{4} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

$$Q_1 = \text{data ke } 3 + \frac{3}{4} (\text{data ke } 4 - \text{data ke } 3)$$

$$\begin{aligned}
&= 158 + \frac{3}{4}(162 - 158) \\
&= 158 + \frac{3}{4}(4) \\
&= 161 \\
\text{Letak } Q_2 &= \frac{2(n+1)}{4} = \frac{2(14+1)}{4} = \frac{30}{4} = 7\frac{2}{4} \\
Q_2 &= \text{data ke } 7 + \frac{2}{4}(\text{data ke } 8 - \text{data ke } 7) \\
&= 165 + \frac{2}{4}(168 - 165) \\
&= 165 + \frac{2}{4}(3) \\
&= 166,5 \\
\text{Letak } Q_3 &= \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(14+1)}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4} \\
Q_3 &= \text{data ke } 11 + \frac{1}{4}(\text{data ke } 12 - \text{data ke } 11) \\
&= 170 + \frac{1}{4}(170 - 170) \\
&= 170 + \frac{1}{4}(0) \\
&= 170
\end{aligned}$$

Contoh10

Berdasarkan data pada Tabel 13.1 tentukan Kuartil-1, Kuartil - 2, dan Kuartil-3 dari data tersebut.

$$\begin{aligned}
\text{Letak } Q_1 &= \frac{(n+1)}{4} = \frac{(30+1)}{4} = \frac{31}{4} = 7\frac{3}{4} \\
Q_1 &= \text{data ke } 7 + \frac{3}{4}(\text{data ke } 8 - \text{data ke } 7) \\
&= 65 + \frac{3}{4}(70 - 65) \\
&= 65 + \frac{3}{4}(5) \\
&= 68,75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Letak } Q_2 &= \frac{2(n+1)}{4} = \frac{2(30+1)}{4} = \frac{62}{4} = 15\frac{2}{4} \\
 Q_2 &= \text{data ke } 15 + \frac{2}{4}(\text{data ke } 16 - \text{data ke } 15) \\
 &= 75 + \frac{2}{4}(75 - 75) \\
 &= 75 + \frac{2}{4}(0) \\
 &= 75 \\
 \text{Letak } Q_3 &= \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(30+1)}{4} = \frac{93}{4} = 23\frac{1}{4} \\
 Q_3 &= \text{data ke } 23 + \frac{1}{4}(\text{data ke } 24 - \text{data ke } 23) \\
 &= 90 + \frac{1}{4}(90 - 90) \\
 &= 90 + \frac{1}{4}(0) \\
 &= 90
 \end{aligned}$$

2. Data Berkelompok

$$Q_i = T_i + P \frac{\left(\frac{i}{4}n - f_k\right)}{f_i}, \text{ dengan } i = 1, 2, 3$$

Keterangan :

T_i := batas bawah kelas Q_i , yaitu kelas interval dimana Q_i akan terletak

P := panjang kelas Q_i

f_k := frekwensi kumulatif dari kelas interval sebelum kelas kelas Q_i

f_i := frekuensi kelas Q_i

Contoh 11

Berdasarkan data pada Tabel 13.2 tentukan Kuartil-1, Kuartil - 2, dan Kuartil-3 dari data tersebut.

Sebelumnya kita tentukan dulu kelas yang memuat Q_1 . Kelas yang memuat Q_1 adalah kelas yang memuat data ke $\frac{i}{4}n = \frac{1}{4}80 = 20$

$$Q_1 = T_1 + P \frac{\left(\frac{n}{4} - f_k\right)}{f_1} = 63,4 + 7 \frac{(20 - 14)}{11} = 63,9$$

Kelas yang memuat Q_2 adalah kelas yang memuat data ke $\frac{i}{4}n = \frac{2}{4}80 = 40$

$$Q_2 = T_2 + P \frac{\left(\frac{2n}{4} - f_k\right)}{f_2} = 70,5 + 7 \frac{(40 - 25)}{24} = 74,875$$

Kelas yang memuat Q_3 adalah kelas yang memuat data ke $\frac{i}{4}n = \frac{3}{4}80 = 60$

$$Q_3 = T_3 + P \frac{\left(\frac{3n}{4} - f_k\right)}{f_3} = 77,5 + 7 \frac{(60 - 49)}{14} = 83$$

11.6.3 Desil

Desil adalah nilai-nilai pada kelompok data yang sudah disusun terurut yang membagi kelompok data tersebut menjadi 10 bagian yang sama.

1. Data Tunggal

Letak dari D_i dirumuskan sebagai berikut

$$\text{Letak } D_i = \frac{i(n+1)}{10} \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \dots, 9$$

Contoh 12

Tentukan Desil ke-5 dari data pada Contoh 7

Data diurutkan sebagai berikut :

153, 155, 158, 162, 163, 164, 165, 168, 169, 170, 170, 170, 172, 173

$$\text{Letak } D_5 = \frac{5(14+1)}{10} = 7 \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} D_5 &= \text{data ke } 7 + \frac{1}{2}(\text{data ke } 8 - \text{data ke } 7) \\ &= 165 + \frac{1}{2}(168 - 165) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 165 + \frac{1}{2}(3) \\
 &= 166,5
 \end{aligned}$$

2. Data Berkelompok

$$D_i = T_i + P \frac{\left(\frac{i}{10}n - f_k\right)}{f_i}, \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \dots, 9$$

Keterangan :

T_i := batas bawah kelas D_i , yaitu kelas interval dimana D_i akan terletak

P := panjang kelas D_i

f_k := frekwensi kumulatif dari kelas interval sebelum kelas kelas D_i

f_i := frekuensi kelas D_i

Contoh13

Berdasarkan data pada Tabel 13.2 tentukan Desil ke-5

Sebelumnya kita tentukan dulu kelas yang memuat D_5 . Kelas yang memuat D_5 adalah kelas yang memuat data ke $\frac{i}{10}n = \frac{5}{10}80 = 40$

$$D_5 = T_5 + P \frac{\left(\frac{5}{10}n - f_k\right)}{f_5} = 70,5 + 7 \frac{(40 - 25)}{24} = 74,875$$

11.6.4 Persentil

Desil adalah nilai-nilai pada kelompok data yang sudah disusun terurut yang membagi kelompok data tersebut menjadi 100 bagian yang sama.

1. Data Tunggal

Letak dari P_i dirumuskan sebagai berikut

$$\text{Letak } P_i = \frac{i(n+1)}{100}, \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \dots, 99$$

Contoh14

Tentukan persentil ke-20 dari data pada Contoh7

Data diurutkan sebagai berikut :

153, 155, 158, 162, 163, 164, 165, 168, 169, 170, 170, 170, 172, 173

$$\text{Letak } P_{20} = \frac{20(14 + 1)}{100} = 3$$

$$P_{20} = \text{data ke} - 3 = 158$$

2. Data Berkelompok

$$P_i = T_i + P \frac{\left(\frac{i}{100}n - f_k\right)}{f_i}, \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \dots, 99$$

Keterangan :

T_i := batas bawah kelas P_i , yaitu kelas interval dimana P_i akan terletak

P := panjang kelas P_i

f_k := frekwensi kumulatif dari kelas interval sebelum kelas kelas P_i

f_i := frekuensi kelas P_i

Contoh 15

Berdasarkan data pada Tabel 13.2 tentukan persentil ke-50

Sebelumnya kita tentukan dulu kelas yang memuat P_{50} . Kelas yang memuat P_{50} adalah kelas yang memuat data ke $\frac{i}{100}n = \frac{50}{100}80 = 48$

$$P_{50} = T_{50} + P \frac{\left(\frac{50}{100}n - f_k\right)}{f_{50}} = 70,5 + 7 \frac{(40 - 25)}{24} = 74,875$$

11.7 Ukuran Penyebaran

Ukuran penyebaran meliputi jangkauan (range), simpangan rata-rata (deviasi rata-rata) dan simpangan baku (deviasi standar).

11.7.1 Range/Jangkauan/wilayah

$$J = x_{\max} - x_{\min}$$

11.7.2 Simpangan Rata-rata (Deviasi Rata-rata)

Simpangan rata-rata suatu data adalah nilai rata-rata dari selisih setiap data dengan nilai rata-rata hitung

1. Simpangan rata-rata data tunggal dirumuskan sebagai berikut

$$SR = \frac{1}{n} |x_i - \bar{x}|$$

Keterangan

SR := Simpangan rata-rata

n := ukuran data

x_i := data ke- i

$\bar{x}$:= rata-rata hitung

2. Simpangan rata-rata data berkelompok dirumuskan sebagai berikut

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^k f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

11.7.3 Ragam dan simpangan Baku (Deviasi Standar)

1. Ragam

Ragam data tunggal dirumuskan sebagai berikut

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Ragam data berkelompok dirumuskan sebagai berikut

$$S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

2. Simpangan Baku (deviasi Standar)

Simpangan Baku (deviasi Standar) adalah $S = \sqrt{S^2}$

DAFTAR PUSTAKA

- Ananda, R. and Fadhli, M. 2018. *Statistik Pendidikan (Teori Dan Praktik Dalam Pendidikan)*. CV. Widya Puspita, Medan.
- Arisena, G.M.K. 2018. 'Buku Ajar Pengantar Statistika', 2018, pp. 1–46.
- Nuryadi *et al.* 2017. *Buku Ajar Dasar-dasar Statistik Penelitian, Sibuku Media*.

BAB 12

TRIGONOMETRI DASAR

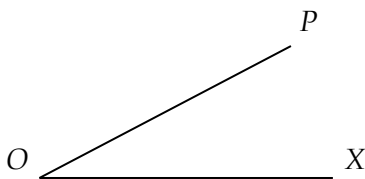
Oleh Evy Lalan Langi'

12.1 Pendahuluan

Seperti namanya, trigonometri adalah ilmu yang berkaitan dengan pengukuran bagian-bagian suatu segitiga. Fungsi trigonometri adalah bidang ilmu trigonometri yang didasarkan pada rasio-rasio tertentu. Aplikasi trigonometri pada mulanya diterapkan dalam bidang pengukuran tanah, navigasi, dan teknik. Selanjutnya, untuk mempelajari semua jenis fenomena, termasuk getaran, suara, cahaya, dan listrik, fungsi trigonometri juga memainkan peranan penting. Oleh karena itu, bagian terbesar yang akan dibahas dalam bab ini adalah hubungan antara fungsi-fungsi trigonometri dan sifat-sifatnya.

12.2 Sudut dan Ukuran Sudut

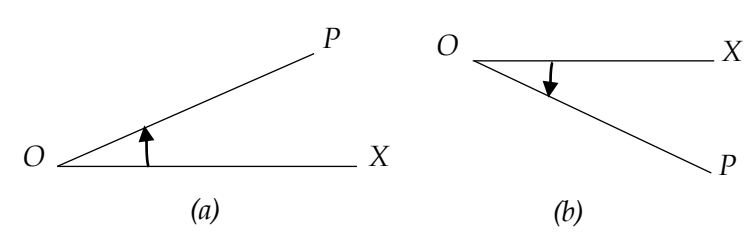
Garis OX dan OP adalah dua garis yang saling berpotongan di titik O dan membentuk sudut bidang (*Plane angle*) XOP . Pada Gambar 12.1, garis OX dan OP disebut sisi-sisi sudut, dan titik O disebut titik sudut (*vertex*).



Gambar 12.1. Sudut Bidang XOP

Sudut bidang juga dapat dipandang sebagai hasil rotasi (dalam bidang) dari suatu garis pada posisi awal OX ke posisi akhir OP . Dalam hal ini, O adalah titik sudut, OX sebagai sisi awal (*initial*

side), dan OP sebagai sisi akhir (*terminal side*) dari sudut. Jika arah rotasi (ditunjukkan oleh panah lengkung) berlawanan arah putaran jarum jam, maka sudut tersebut disebut sudut positif (Gambar 12.2 (a)). Sebaliknya, jika arah rotasi searah dengan putaran jarum jam, maka disebut sebagai sudut negatif (lihat Gambar 12.2 (b)).

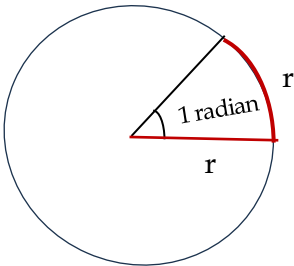


Gambar 12.2. Arah Rotasi Garis

Ukuran sudut pusat yang dibentuk oleh busur lingkaran sebesar $\frac{1}{360}$ dari keliling lingkaran disebut satu *derajat* ($^{\circ}$). Dalam satuan derajat juga dikenal satuan *menit* ($'$) dan *detik* ($''$), sehingga diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$1^{\circ} = 60' \qquad \text{dan} \qquad 1' = 60''$$

Satu *radian* (*rad*) adalah ukuran dari sudut pusat yang terbentuk ketika panjang busur lingkarannya sama dengan jari-jari lingkaran (lihat Gambar 12.3).



Gambar 12.3. Sudut Satu Radian

Besar sudut satu lingkaran adalah 360° dengan keliling lingkaran yakni $2\pi r$, sehingga dapat dituliskan sebagai $2\pi \text{ radian} = 360^{\circ}$. Selanjutnya, diperoleh:

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,296^\circ = 57^\circ 15' 45''$$

$$1 \text{ derajat} = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ radian} = 0,017453 \text{ radian}$$

12.3 Fungsi Trigonometri dari Suatu Sudut

12.3.1 Sudut Dalam Posisi Standar

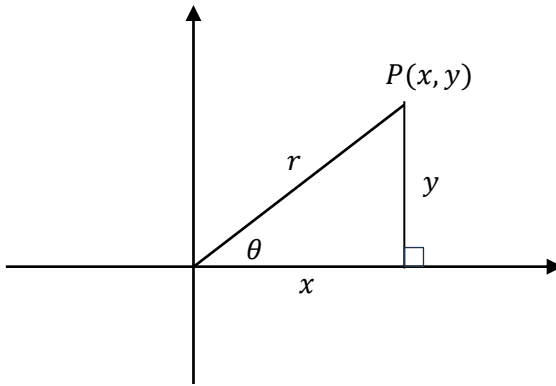
Dalam sistem koordinat rektanguler, jika titik sudut berada di titik asal dan sisi awalnya berimpit dengan sumbu x positif, maka sudut tersebut dikatakan berada dalam posisi standar. Jika suatu sudut dalam posisi standar memiliki sisi akhir yang terletak di kuadran pertama, maka sudut tersebut dikatakan sebagai sudut kuadran pertama. Contoh sudut-sudut kuadran pertama antara lain 30° , 72° , -330° , dan sebagainya. Untuk sudut kuadran-kuadran lainnya juga berlaku definisi yang serupa. Sebagai contoh: sudut 118° adalah sudut kuadran kedua, sudut -118° adalah sudut kuadran ketiga, sudut -15° dan 710° adalah sudut-sudut kuadran keempat.

Jika dua sudut ditempatkan pada posisi standar sehingga sisi-sisi akhirnya (*terminal side*) berimpit, maka kedua sudut tersebut disebut *sudut-sudut koterminial*. Contoh sudut-sudut koterminial adalah 710° dan -10° , 30° dan -330° . Selain itu, juga dikenal istilah *sudut-sudut kuadrantal* yakni semua sudut yang koterminial dengan sudut-sudut 0° , 90° , 180° , dan 270° .

12.3.2 Fungsi Trigonometri dari Suatu Sudut Umum

Untuk membangun pemahaman tentang fungsi trigonometri dari suatu sudut, dapat dijelaskan melalui Gambar 12.4. Diberikan θ adalah sudut tetapi bukan sudut kuadrantal, dan $P(x, y)$ adalah sebarang titik (bukan titik asal) yang terletak di sisi akhir sudut tersebut. Dengan menggunakan rumus Pythagoras, diperoleh:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Gambar 12.4. Sudut θ Dalam Posisi Standar

Berdasarkan posisi sudut θ , dapat dibangun enam definisi fungsi trigonometri yang dinyatakan dalam absis, ordinat, dan jarak P dari titik asal O , yaitu:

$$\text{sinus } \theta = \sin \theta = \frac{\text{ordinat}}{\text{jarak}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{cosinus } \theta = \cos \theta = \frac{\text{absis}}{\text{jarak}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{tangen } \theta = \tan \theta = \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}} = \frac{y}{x}$$

$$\text{cosecant } \theta = \csc \theta = \frac{\text{jarak}}{\text{ordinat}} = \frac{r}{y}$$

$$\text{secan } \theta = \sec \theta = \frac{\text{jarak}}{\text{absis}} = \frac{r}{x}$$

$$\text{cotangen } \theta = \cot \theta = \frac{\text{absis}}{\text{ordinat}} = \frac{x}{y}$$

Selanjutnya, diperoleh *relasi-relasi kebalikan* yang merupakan akibat langsung dari definisi-definisi di atas, yakni:

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

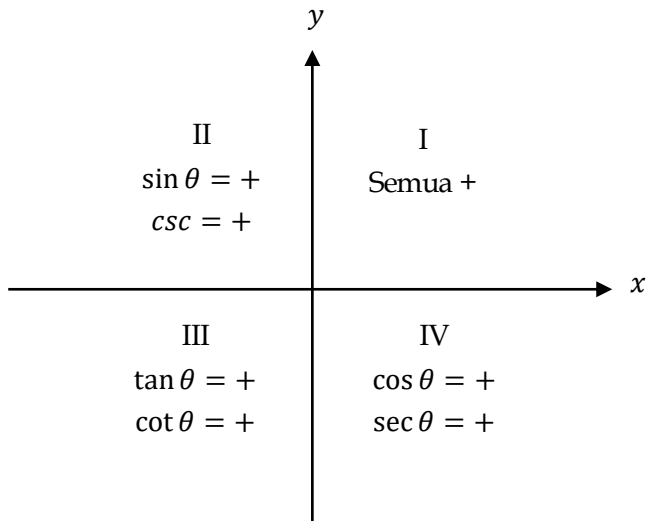
$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Karena r selalu positif, fungsi trigonometri dalam setiap kuadran tergantung pada tanda dari x dan y . Untuk menemukan tanda-tanda ini, dapat memperhatikan sudut dalam posisi standar atau menggunakan gambar tertentu, seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 12.5.



Gambar 12.5. Tanda Fungsi Trigonometri di Berbagai Kuadran

Sudut kuadrantal terbentuk apabila sisi akhir suatu sudut berada pada salah satu sumbu. Dalam kasus sudut kuadrantal, jika suatu titik berada pada sisi akhir (bukan titik asal) maka tentulah akan memenuhi salah satu dari keadaan berikut yakni $x = 0, y \neq 0$ atau $x \neq 0, y = 0$. Dua dari enam fungsi trigonometri tidak didefinisikan dalam kedua situasi tersebut. Sebagai contoh, sudut 0° memiliki sisi akhir yang berimpit dengan sumbu x positif. Jika suatu titik P berada pada sisi akhir sudut tersebut, maka ordinat dari P adalah 0. Ini berarti 0 bertindak sebagai penyebut dari

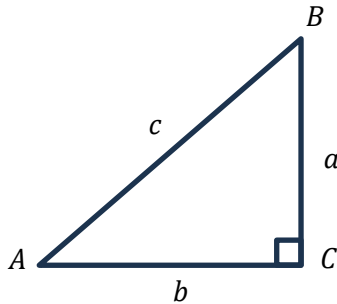
perbandingan yang memberikan definisi cotangen dan cosecan, sehingga kedua fungsi ini tidak didefinisikan. Tabel 12.1 menunjukkan fungsi-fungsi trigonometri dari sudut-sudut kuadrantal.

Tabel 12.1. Fungsi Trigonometri dari Sudut Kuadrantal

Fungsi	0°	90°	180°	270°
<i>sin θ</i>	0	1	0	-1
<i>cos θ</i>	1	0	-1	0
<i>tan θ</i>	0	tak terdefinisi	0	tak terdefinisi
<i>cot θ</i>	0	0	0	0
<i>sec θ</i>	1	tak terdefinisi	-1	tak terdefinisi
<i>csc θ</i>	tak terdefinisi	1	tak terdefinisi	-1

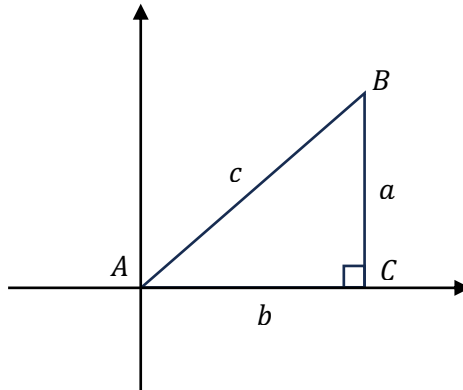
12.4 Fungsi Trigonometri dari Dua Sudut

Pada bagian ini, pembahasan tentang sebarang segitiga siku-siku akan dinyatakan dalam segitiga *ABC* (Lihat Gambar 12.6) dengan sudut-sudutnya sebagai *A, B, C* dengan *C* sebagai titik sudut siku-sikunya. Sisi yang terletak di depan sudut *A* diberi label *a*, sisi yang terletak di depan sudut *B* diberi label *b*, dan sisi di depan sudut *C* diberi label *c*. Berdasarkan sudut *A*, maka *a* sebagai *sisi depan* dan *b* sebagai *sisi samping*. Berdasarkan sudut *B*, *a* sebagai *sisi samping* dan *b* sebagai *sisi depan*. Sisi *C* akan selalu berperan sebagai *hipotenusa (sisi miring)*.



Gambar 12.6. Segitiga Siku-siku ABC

Jika dibawa ke sistem koordinat (Lihat Gambar 12.7), segitiga siku-siku ABC dapat digambarkan dengan sudut A pada posisi standar, dimana titik B pada sisi akhir sudut dari A dengan koordinat (a, b) dan jarak $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Gambar 12.7. Segitiga ABC pada Sistem Koordinat

Perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku berikut mewakili definisi fungsi-fungsi trigonometri dari sudut A .

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{a}{c} = \frac{\text{panjang sisi depan}}{\text{panjang hipotenusa}} \\ \cos A &= \frac{b}{c} = \frac{\text{panjang sisi samping}}{\text{panjang hipotenusa}} \\ \tan A &= \frac{a}{b} = \frac{\text{panjang sisi depan}}{\text{panjang sisi samping}} \\ \csc A &= \frac{c}{a} = \frac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi depan}} \\ \sec A &= \frac{c}{b} = \frac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi samping}} \\ \cot A &= \frac{b}{a} = \frac{\text{panjang sisi samping}}{\text{panjang sisi depan}}\end{aligned}$$

Sudut lancip A dan B pada segitiga siku-siku ABC adalah sudut-sudut *komplementer* (jumlah kedua sudut adalah 90°). Setiap fungsi trigonometri dari suatu sudut lancip memiliki pasangan yang bersesuaian dengan fungsi sudut komplementernya atau disebut *kofungsi* dari fungsi lainnya, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\sin B &= \frac{b}{c} = \cos A \\ \cos B &= \frac{a}{c} = \sin A \\ \tan B &= \frac{b}{a} = \cot A \\ \csc B &= \frac{c}{b} = \sec A \\ \sec B &= \frac{c}{a} = \csc A \\ \cot B &= \frac{a}{b} = \tan A\end{aligned}$$

12.5 Reduksi ke Fungsi-fungsi dari Sudut Lancip Positif

Untuk sudut-sudut koterminal, bila θ adalah sebarang sudut dengan n adalah bilangan bulat sebarang atau nol, maka akan berlaku:

$$\sin(\theta + n360^\circ) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + n360^\circ) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta + n360^\circ) = \tan \theta$$

$$\csc(\theta + n360^\circ) = \csc \theta$$

$$\sec(\theta + n360^\circ) = \sec \theta$$

$$\cot(\theta + n360^\circ) = \cot \theta$$

Gambar 12.8. memperlihatkan sebuah sudut negatif θ . Bila θ adalah sebarang sudut, maka diperoleh fungsi-fungsi negatif sebagai berikut:

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

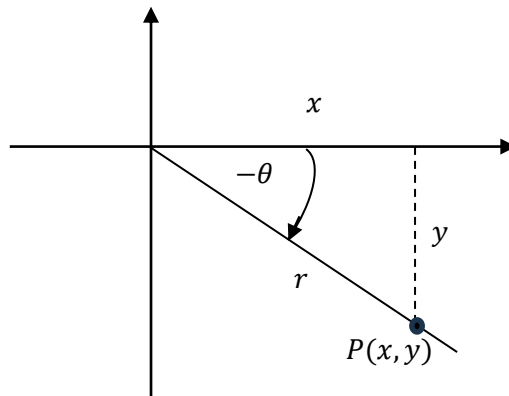
$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc \theta$$

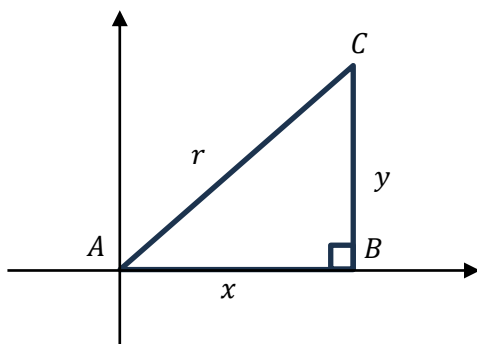
$$\sec(-\theta) = \sec \theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot \theta$$



Gambar 12.8. Sudut Negatif

Perhatikan Gambar 14.9. Segitiga ABC terletak pada kuadran I dengan sudut siku-siku berada pada sudut B , sehingga sudut A dan C merupakan sudut-sudut lancip.



Gambar 12.9. Segitiga Siku-siku ABC

Bila besar sudut A adalah θ , maka fungsi trigonometri berdasarkan sudut A dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \csc \theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

Karena sudut A dan sudut B adalah dua sudut yang komplementer, maka besar sudut B dapat ditulis sebagai sudut $(90^\circ - \theta)$. Dengan demikian fungsi sudut B diperoleh sebagai berikut:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \qquad \csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \qquad \sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y}$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \qquad \cot(90^\circ - \theta) = \frac{y}{x}$$

Dengan melihat relasi sudut A dan B , dapat diperoleh fungsi-fungsi trigonometri sebagai berikut:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \sec \theta$$

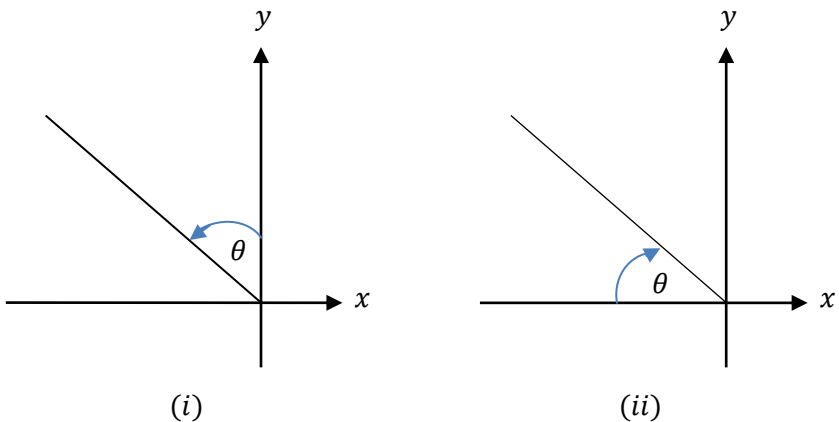
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \csc \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

Untuk sudut-sudut yang terletak di kuadran II, dapat dinyatakan dalam bentuk sudut $(90^\circ + \theta)$ dan sudut $(180^\circ - \theta)$. Relasi kedua bentuk sudut dapat dilihat pada Gambar 12.10.



Gambar 12.10. Sudut di Kuadran II

Fungsi-fungsi trigonometri sudut di kuadran II dapat diperoleh dari relasi kedua bentuk sudut tersebut, yakni:

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

$$\csc(90^\circ + \theta) = \sec \theta$$

$$\csc(180^\circ - \theta) = \csc \theta$$

$$\sec(90^\circ + \theta) = -\csc \theta$$

$$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec \theta$$

$$\cot(90^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta$$

Dengan cara berpikir yang sama, sudut-sudut yang terletak di kuadran ketiga dapat dinyatakan dalam bentuk sudut $(180^\circ + \theta)$ dan sudut $(270^\circ - \theta)$. Fungsi-fungsi trigonometri dari relasi kedua bentuk sudut tersebut adalah sebagai berikut:

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$	$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta$
$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$	$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta$
$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$	$\tan(270^\circ - \theta) = \cot \theta$
$\csc(180^\circ + \theta) = -\csc \theta$	$\csc(270^\circ - \theta) = -\sec \theta$
$\sec(180^\circ + \theta) = -\sec \theta$	$\sec(270^\circ - \theta) = -\csc \theta$
$\cot(180^\circ + \theta) = \cot \theta$	$\cot(270^\circ - \theta) = \tan \theta$

Sudut-sudut yang terletak di kuadran IV dapat dinyatakan dalam bentuk sudut $(270^\circ + \theta)$ dan sudut $(360^\circ - \theta)$. Fungsi trigonometri dari relasi kedua bentuk sudut tersebut adalah sebagai berikut:

$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$	$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$
$\cos(270^\circ + \theta) = \sin \theta$	$\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$
$\tan(270^\circ + \theta) = -\cot \theta$	$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$
$\csc(270^\circ + \theta) = -\sec \theta$	$\csc(360^\circ - \theta) = -\csc \theta$
$\sec(270^\circ + \theta) = \csc \theta$	$\sec(360^\circ - \theta) = \sec \theta$
$\cot(270^\circ + \theta) = -\tan \theta$	$\cot(360^\circ - \theta) = -\cot \theta$

DAFTAR PUSTAKA

- Ayres, Frank., Schmidt, P.A. 2004. *Matematika Universitas*. Jakarta: Erlangga.
- Budiman, B. 2019. Pembelajaran trigonometri dengan pendekatan kontekstual. *Jurnal matematika dan pendidikan matematika*, 2(2).
- Purcell, Edwin J., Varberg, Dale., Rigdon, Steven E. 2004. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.
- Zen, Fathurin. 2012. *Trigonometri*. Bandung: Alfabeta.

BAB 13

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Oleh Afnaria

13.1 Pendahuluan

Perkembangan statistik belakangan ini telah dirasakan pada berbagai aspek kehidupan manusia. Statistik tidak lagi hanya tentang koleksi data dan penyajiannya dalam tabel dan grafik, namun lebih dianggap sebagai petunjuk dalam pengambilan keputusan berbasis inferensi data yang diobservasi. Dalam kondisi ketidakpastian, statistik menyiapkan kerangka kerja yang lebih logis dan sistematis (Freund 2014).

Kombinatorika berkaitan dengan mendaftarkan semua alternatif objek-objek suatu himpunan ke dalam pola-pola yang memenuhi aturan yang ditentukan. Jika jumlah alternatif untuk masalah tertentu sedikit, maka semua alternatif tersebut dapat didaftarkan. Penting untuk memahami perbedaan antara mendaftarkan semua alternatif dan menentukan jumlahnya.

Pada bab ini, akan dibahas teknik-teknik untuk menentukan jumlah alternatif dari tipe tertentu tanpa terlebih dahulu mendaftarkannya. Tentu saja jumlah dari alternatif tersebut mungkin sangat banyak sehingga tidak memungkinkan untuk mendaftarkan semuanya (Brualdi 2009).

13.2 Aturan Perkalian

Pada permasalahan statistik, sering kali kita diharuskan untuk membuat daftar semua alternatif yang mungkin, atau setidaknya menentukan berapa banyak kemungkinan yang ada. Teorema berikut merupakan prinsip dasar penghitungan, aturan penghitungan untuk kejadian majemuk, atau aturan untuk perkalian pilihan.

Teorema 13.1

Jika sebuah operasi terdiri dari dua langkah, dimana langkah pertama dapat dilakukan dengan n_1 cara dan untuk setiap cara tersebut, langkah kedua dapat dilakukan dengan n_2 cara, maka seluruh operasi dapat dilakukan dengan $n_1 \bullet n_2$ cara.

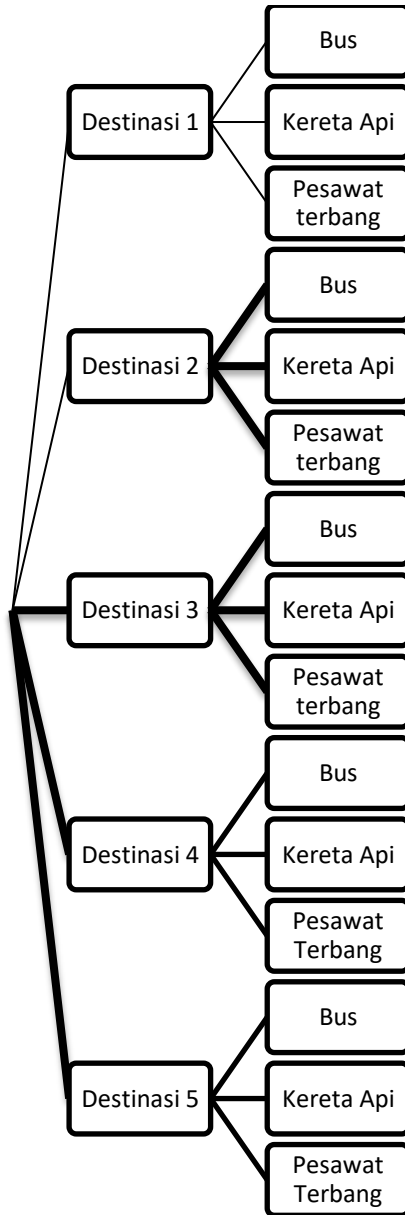
Disini “operasi” dapat diartikan sebagai semua jenis prosedur, proses maupun metode seleksi.

Contoh 1:

Misalkan seseorang ingin pergi ke lima destinasi wisata dengan menaiki bus, atau kereta api atau dengan pesawat terbang. Tentukan dengan berapa cara berbeda yang dapat ditempuhnya?

Solusi:

Destinasi wisata dapat dipilih dengan $n_1 = 5$ cara, dan transportasinya dapat ditempuh dengan $n_2 = 3$ cara. Dengan demikian, perjalanan wisata itu dapat ditempuh dengan $5.3 = 15$ cara berbeda (lihat gambar 13.1). $\square$



Gambar 3.1. Diagram Pohon

Selanjutnya, teorema 13.1 dapat dikembangkan untuk situasi dimana operasi terdiri dari dua langkah atau lebih.

Teorema 13.2

Jika suatu operasi terdiri dari k langkah, dimana langkah pertama dapat dilakukan dengan n_1 cara, langkah kedua dapat dilakukan dengan n_2 cara, langkah ketiga dapat dilakukan dengan n_3 cara, dan seterusnya, maka seluruh operasi dapat dilakukan dengan $n_1 \bullet n_2 \bullet \dots \bullet n_k$ cara.

Contoh 2:

Ada berapa cara berbeda seseorang dapat memesan makan siang dimana terdapat 3 jenis sup, 5 jenis lauk, 4 jenis sayur dan 6 jenis jus?

Solusi:

Total jumlah cara berbeda adalah $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 = 360$ cara. $\square$

Contoh 3:

Dalam berapa cara berbeda seseorang dapat menjawab 20 pertanyaan pilihan berganda yang terdiri dari 4 pilihan jawaban?

Solusi:

Seluruhnya terdapat :

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4}_{20 \text{ faktor}} = 1.0099.511.627.776 \text{ cara berbeda. } \square$$

13.3 Permutasi

Permutasi merupakan pengaturan untuk menentukan berapa banyak susunan berbeda dari sekelompok objek, dengan memperhatikan urutan.

Contoh 4:

Berapa banyak permutasi dari huruf a, b dan c?

Solusi:

Susunan yang mungkin adalah: abc, acb, bac, bca, cab, dan cba. Jadi jumlah permutasi berbeda adalah 6. $\square$

Dengan teorema 13.2, dapat diperoleh jawaban tanpa harus mendaftarkan permutasinya.

Karena ada 3 cara untuk memilih pada langkah pertama, kemudian 2 cara pada langkah kedua, dan 1 cara pada langkah ketiga, maka jumlah permutasi total adalah $3.2.1 = 6$ cara. $\square$

Secara umum dari contoh di atas, diketahui bahwa n objek berbeda dapat disusun dalam $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3.2.1$ cara berbeda, yang dapat dinotasikan sebagai $n!$ (baca: n faktorial). Dimana $0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 2.1 = 2$; $3! = 3.2.1 = 6$; $4! = 4.3.2.1 = 24$, dst.

Teorema 13.3

Jumlah permutasi dari n objek berbeda adalah $n!$

Contoh 6:

Dalam berapa cara berbeda 5 siswa dapat memperkenalkan diri di depan kelas?

Solusi:

Terdapat $5! = 5.4.3.2.1 = 120$ cara berbeda siswa tersebut dapat memperkenalkan diri. $\square$

Contoh 7:

Jika dari 4 huruf a, b, c dan d disusun menjadi 2 huruf, berapa banyak permutasi berbeda yang dapat diperoleh?

Solusi:

Pada posisi pertama dapat dipilih dari 4 huruf, dan pada posisi kedua tersisa 3 huruf berbeda yang dapat dipilih, yaitu:

Huruf I	Huruf II
4	3

Dengan demikian, dari teorema 13.3, diperoleh $4 \cdot 3 = 12$ cara berbeda. $\square$

Secara umum, dengan menggunakan contoh di atas, diketahui bahwa terdapat n objek berbeda, diambil sebanyak r pada satu waktu, dimana $r > 0$, dapat disusun menjadi $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - r + 1)$ cara berbeda. Perkalian ini dinotasikan menjadi P_r^n .

Teorema 13.4

Jumlah permutasi dari n objek berbeda diambil sebanyak r objek pada satu waktu adalah:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Untuk $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

Dimana $P_0^n = 1$.

Contoh 8:

3 orang dipilih dari 24 orang anggota suatu kelompok untuk diangkat sebagai ketua, sekretaris, bendahara. Ada berapa cara berbeda pemilihan ini dapat dilakukan?

Solusi:

Jumlah permutasi dari 24 objek berbeda diambil 3 pada satu waktu adalah:

$$P_3^{24} = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24!}{21!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21!}{21!} = 24 \cdot 23 \cdot 22 = 12.144 \text{ cara. } \square$$

Contoh 9

Dalam berapa cara berbeda, 3 orang profesor dapat memberikan kuliah umum pada tiga kegiatan yang berbeda, jika mereka bersedia pada salah satu dari 5 tanggal yang memungkinkan?

Solusi:

Karena dapat dipilih 3 dari 5 tanggal yang berbeda, serta urutan mereka dipilih itu berarti (profesor yang berkaitan), maka diperoleh:

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ cara. } \square$$

13.4 Permutasi Siklis

Permutasi dapat juga terjadi saat objek disusun melingkar, disebut sebagai permutasi siklis. Dua permutasi siklis dianggap sama jika objek dalam dua susunan tersebut memiliki objek yang sama dikiri dan kanannya.

Teorema 13.5

Jumlah permutasi dari n objek berbedayang disusun melingkar adalah

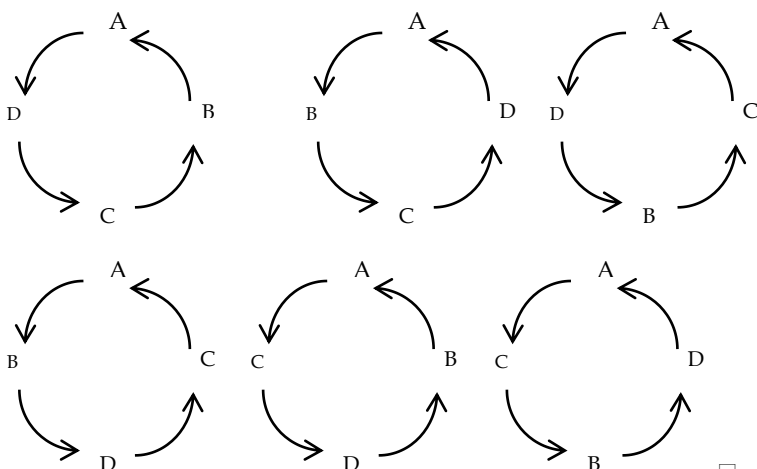
$$(n - 1)!$$

Contoh 10:

Berapa macam cara berbeda empat orang pemain kartu bridge duduk melingkar?

Solusi:

Banyak cara mereka duduk $= (4 - 1)! = 3! = 6$ cara berbeda.



□

Teorema13.6

Jumlah permutasi dari n objek dimana n_1 jumlah jenis pertama, n_2 jumlah jenis kedua, ..., n_k jumlah jenis k , dan $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ adalah:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \dots n_k!}$$

Contoh 13:

Berapa banyak susunan berbeda yang dapat dibuat dari kata MATEMATIKA.

Solusi:

Diketahui: $n = 10$, jumlah huruf M, $n_1 = 2$; jumlah huruf A, $n_2 = 3$, jumlah huruf T, $n_3 = 2$. Dengan demikian, jumlah permutasinya adalah:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 1} = 151.200 \text{ cara. } \square$$

13.5 Kombinasi

Kombinasi adalah pemilihan r objek yang diambil dari n objek yang berbeda tanpa memperhatikan urutan pemilihan.

Teorema13.7

Jumlah kombinasi dari n objek berbeda, diambil r objek pada suatu waktu adalah:

$$C_r^n = \frac{n!}{r! (n - r)!}$$

Untuk $r = 0, 1, 2, \dots, n$

Contoh 14:

Petugas sensus akan mengumpulkan data 3 orang dari 20 rumah tangga. Ada berapa banyak cara berbeda yang dapat dilakukan petugas tersebut?

Solusi:

Karena 3 orang yang dipilih dari setiap rumah tangga, urutannya tidak menjadi permasalahan, maka diperoleh:

$$C_3^{20} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3.2.1.17!} = \frac{20.19.18.17!}{6.17!} = 1140 \text{ cara. } \square$$

Contoh 15:

Sebuah koin dilempar 6 kali, ada berapa cara berbeda yang dapat menghasilkan 2 angka dan 4 gambar?

Solusi:

Dari sebuah koin yang dilempar 6 kali, misalkan dipilih pelemparan yang menghasilkan 2 angka. Dengan demikian diperoleh:

$$C_2^6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6.5.4!}{2.1.4!} = 15 \text{ cara. } \square$$

Teorema 13.8

Jumlah cara di mana sekumpulan n objek yang berbeda dapat dipartisi menjadi k himpunan bagian dengan n_1 objek pada himpunan bagian pertama, n_2 objek pada himpunan bagian kedua, $\dots$, dan n_k objek pada himpunan bagian ke- k adalah

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_k}^n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \dots n_k!}$$

Contoh 16:

Ada berapa macam cara 4 huruf berbeda dipartisi menjadi dua, satu dan satu huruf?

Solusi:

Misalkan huruf abcd dipartisi menjadi 2, 1, dan 1 huruf, maka diperoleh:

$$C_{2,1,1}^4 = \frac{4!}{2!1!1!} = \frac{4.3.2!}{2!1.1} = 4.3 = 12 \text{ cara.}$$

ab	c	d
ab	d	c
ac	b	d
ac	d	b

ad	b	c
ad	c	b
bc	a	d
bc	d	a

bd	a	c
bd	c	a
cd	a	b
cd	b	a

□

DAFTAR PUSTAKA

- Brualdi, R.A., 2009. *Introductory Combinatorics* 5th ed., USA: Pearson Education, Inc.
- Freund, J.E., 2014. *Mathematical Statistics with Applications* 8th ed., USA: Pearson Education, Inc.

BIODATA PENULIS



Yenny Anggreini Sarumaha, S.Pd., M.Sc.
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Penulis lahir di Padang tanggal 22 Januari 1988. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Cokroaminoto Yogyakarta. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang dan melanjutkan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sriwijaya.

BIODATA PENULIS



Hartina Husain, S.Si., M.Stat

Dosen Program Studi Sains Data
Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir pada 23 Mei 1996 di Samata, Sulawesi Selatan. Penulis meraih gelar sarjana dari Universitas Hasanuddin tahun 2017 pada jurusan Statistika. Kemudian penulis melanjutkan studi magister di Surabaya tepatnya di Institut Teknologi Sepuluh Nopember dengan jurusan yang sama. Saat ini, penulis aktif bekerja sebagai Dosen Sains Data di Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie. Penulis juga aktif sebagai tutor online (tuton) di Universitas Terbuka. Adapun topik penulisan artikel penulis terkait pemodelan statistika, regresi non parametrik, dan analisis meta.

BIODATA PENULIS



Eni Defitriani, S.Pd., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas KIP Universitas Batanghari

Penulis lahir di Jambi tanggal 13 April 1991. Penulis adalah dosen tetap di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas KIP, Universitas Batanghari. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 di Prodi Pendidikan Matematika Universitas Jambi pada tahun 2012 dan melanjutkan S2 di Prodi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia, lulus tahun 2015. Saat ini, penulis mendapat amanah sebagai Ketua Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Batanghari. Selain itu, penulis juga aktif melakukan kegiatan penelitian, pengabdian, dan menulis buku. Bidang fokus penelitian dan pengabdian penulis adalah pembelajaran matematika di sekolah menengah.

BIODATA PENULIS



Beatrice Videlia Remme', S.Pd., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Kristen Indonesia (UKI) Toraja

Penulis lahir di Rantepao, pada tanggal 6 April 1989. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Kristen Indonesia Toraja. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika UKI Toraja pada tahun 2011 dan melanjutkan S2 tahun 2012 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Makassar. Penulis menyelesaikan studi S2 pada tahun 2015, dan sampai saat ini penulis aktif mengajar pada program studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja, mengajarkan mata kuliah Teori Bilangan, Kalkulus Vektor, dan Geometri, dan Kalkulus.

BIODATA PENULIS



Rifka Agustianti, M. Pd

Dosen Matematika Program Studi Motor Pesawat
Fakultas Teknik Universitas Nurtanio Bandung

Penulis lahir di Kota Palopo (Sulawesi Selatan) pada tanggal 27 Agustus 1988. Penulis adalah dosen tetap mata kuliah matematika pada Program Studi Motor Pesawat Fakultas Teknik, Universitas Nurtanio Bandung. Menyelesaikan pendidikan S1 pada tahun 2013 dan langsung melanjutkan pendidikan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika pada tahun 2015 di STKIP Siliwangi Bandung (sekarang IKIP Siliwangi Bandung).

Tak hanya mengajar di perguruan tinggi, penulis juga aktif menjadi tutor matematika pada beberapa bimbingan belajar dan privat di Bandung. Penulis juga merupakan Ketua Biro Pertemuan Ilmiah DPD Bandung Barat pada Perkumpulan Dosen Peneliti Indonesia (PDPI) dan Wakil Sekretaris Umum pada Forum Komunikasi Dosen (FKD) periode 2022-2027. Penulis juga telah menulis beberapa judul *book chapter* baik sebagai *author* maupun editor, diantaranya Media Pembelajaran, Filsafat Pendidikan Matematika, Konsep Dasar Matematika, Teknologi Pendidikan, Inovasi Teknologi Pembelajaran, Logika dan Struktur Diskrit, Teori Bilangan, Metode Penelitian Kualitatif dan Kuantitatif, Strategi Pembelajaran, Model-Model Pembelajaran, Kalkulus Diferensial, Matematika Sekolah, dan lainnya.

Selain menulis *book chapter*, penulis juga aktif menulis beberapa artikel ilmiah pada jurnal nasional baik dalam ranah

penelitian maupun ranah pengabdian kepada masyarakat yang terakreditasi Kemendikbud yang bertemakan matematika dan pendidikan matematika.

BIODATA PENULIS



Dr. Hersiyati Palayukan, M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Kristen Indonesia Toraja

Penulis lahir di Samarinda, 15 Oktober 1990. Penulis menempuh Pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Makale dan lulus pada tahun 2008. Penulis mulai mendalami ketertarikannya pada Bidang pendidikan matematika dengan menempuh Pendidikan Sarjana di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja (UKI Toraja) dan lulus pada tahun 2012. Pada tahun berikutnya Penulis melanjutkan studi di Pascasarjana Universitas Negeri Makassar (UNM) pada Program Studi Pendidikan Matematika dan lulus S2 pada tahun 2015. Selanjutnya penulis melanjutkan studi ke jenjang doktoral di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang (UM) dan menyelesaikan studi S3 pada tahun 2022.

Penulis merupakan Dosen tetap dan saat ini aktif mengajar pada Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Kristen Indonesia Toraja. Sesuai Bidanganya, penulis aktif melakukan penelitian pada Bidang Pendidikan Matematika. Beberapa penelitian yang terfokus pada perangkat pembelajaran, aplikasi, dan proses berfikir sehubungan dengan matematika telah dipublikasi pada Jurnal ilmiah baik Nasional maupun Internasional.

BIODATA PENULIS



Irmayani, S.Si.,M.Si.

Dosen Program Studi Aktuaria
Jurusan Sains dan Teknologi

Penulis lahir di Anabanua tanggal 21 April 1988. Penulis adalah dosen pada Program Studi Aktuaria Jurusan Sains dan Teknologi, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin.

BIODATA PENULIS



Yusem Ba'ru, S.Pd., M.Pd

Dosen Pada Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Penulis merupakan anak ke tujuh dari sepuluh bersaudara yang memasuki jenjang pendidikan formal pada tingkat Sekolah Dasar pada tahun 1995 dan tamat pada tahun 2001, kemudian pada tahun yang sama melanjutkan pendidikan pada jenjang SLTP dan lulus tahun 2004, selanjutnya penulis memasuki pendidikan menengah atas dan lulus tahun 2007. Setahun kemudian, penulis melanjutkan pendidikan tinggi dengan mengambil jurusan pendidikan matematika pada program studi pendidikan matematika UKI Toraja tempat penulis mengabdikan sebagai tenaga pengajar saat ini. Setelah lulus pada jenjang S1, pada tahun 2012, , penulis diberi kesempatan untuk melanjutkan Pendidikan S2 dengan jurusan yang sama pada Program Pascasarjana Universitas Negeri Makassar. Setelah beberapa tahun mengajar tepatnya tahun 2020, penulis kembali melanjutkan studi ke jenjang S3 pada Program Pascasarjana Universitas Negeri Makassar dengan mengambil jurusan Ilmu pendidikan. Sejak tahun 2012 hingga sekarang, penulis tercatat sebagai dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja. Penulis aktif pada kegiatan-kegiatan ilmiah, diantaranya sebagai penulis di bidang Pendidikan khususnya Pendidikan Matematika

BIODATA PENULIS



A.Ika Putriani, S. Si., M. Si.

Dosen Program Studi Matematika

Penulis lahir di Wajo tanggal 22 April 1997. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika, Institut Teknologi Bachruddin Jusuf Habibie. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika di Universitas Hasanuddin pada tahun 2019 dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika di Universitas Hasanuddin pada tahun 2022. Penulis menekuni bidang Matematika.

BIODATA PENULIS



Dr. Inelsi Palengka', M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Penulis lahir di Tengan tanggal 30 November 1989. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Kristen Indonesia Toraja. Ketertarikan penulis terhadap Pendidikan matematika dimulai pada tahun 2008 silam. Hal tersebut membuat penulis memilih untuk masuk ke Universitas Kristen Indonesia Toraja dengan memilih Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA (2008), kemudian melanjutkan studi S2 pada program pascasarjana pada program studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Makassar (2013), dan S3 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya (2017). Sejak tahun 2012 hingga sekarang tercatat sebagai dosen di program studi Pendidikan Matematika pada Universitas Kristen Indonesia Toraja. Penulis memiliki kepakaran dibidang Pendidikan Matematika. Dan untuk mewujudkan karir sebagai dosen profesional, penulis pun aktif sebagai peneliti dibidang kepakarannya tersebut. Beberapa penelitian yang telah dilakukan dipublikasikan pada jurnal nasional dan internasional bereputasi.

Email Penulis: inelsipalengka@gmail.com

BIODATA PENULIS



Lita Lovia, M.Si.

Dosen Program Studi Matematika
Universitas Dharma Andalas

Penulis lahir pada 20 April 1980 di Minang Kabau Lb. Aur. Tamat Sarjana pada Program Studi Matematika di Universitas Andalas Pada tahun 2003. Tamat Magister Program Studi Matematika di Universitas Andalas pada tahun 2011.

BIODATA PENULIS



Dr. Evy Lalan Langi', M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Kristen Indonesia Toraja

Penulis adalah sosok yang memiliki ketertarikan terhadap dunia Pendidikan khususnya bidang Matematika sejak berada di bangku sekolah. Hal tersebut membuat penulis memilih untuk kuliah S1 pada program studi Pendidikan Matematika di Universitas Kristen Indonesia Toraja dan selesai pada tahun 2012. Setahun kemudian, penulis melanjutkan Pendidikan S2 dengan jurusan yang sama pada Program Pascasarjana Universitas Negeri Makassar. Karena kecintaan yang begitu luar biasa terhadap Pendidikan Matematika, penulis kembali melanjutkan studi ke jenjang S3 pada Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya dan berhasil lulus pada tahun 2022. Sejak tahun 2012 hingga sekarang, penulis tercatat sebagai dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja. Penulis aktif pada kegiatan-kegiatan ilmiah dan terlibat sebagai peneliti di bidang Pendidikan khususnya Pendidikan Matematika.

BIODATA PENULIS



Dr. Afnaria, S.Si, M.Si

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Islam Sumatera Utara

Penulis lahir di Medan tanggal 16 Januari 1981. Penulis adalah dosen tetap LLDIKTI Wilayah I dpk FKIP UISU, bertugas sejak tahun 2005 sampai dengan sekarang. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika, FMIPA USU pada tahun 2004. Menyelesaikan pendidikan S2 pada jurusan matematika, FMIPA USU pada tahun 2010. Dan menyelesaikan pendidikan S3 pada jurusan matematika, FMIPA USU pada tahun 2020.