



GEOMETRI BIDANG & RUANG

Nanang

Raden Sri Ayu

Ramadhana

Joni Wilson Sitopu

Mesak Ratuanik

Ridha Yuniara

Arini Ulfah Hidayati

Vini Rizqi

Maswar



ISBN 9786231-98337-4



9 786231 983374

GEOMETRI BIDANG & RUANG

**Nanang
Raden Sri Ayu Ramadhana
Joni Wilson Sitopu
Mesak Ratuanik
Ridha Yuniara
Arini Ulfah Hidayati
Vini Rizqi
Maswar**



PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI

GEOMETRI BIDANG & RUANG

Penulis :

Nanang
Raden Sri Ayu Ramadhana
Joni Wilson Sitopu
Mesak Ratuanik
Ridha Yuniara
Arini Ulfah Hidayati
Vini Rizqi
Maswar

ISBN : 978-623-198-337-4

Editor : Mila Sari, MSi.

Fauziah Anwar, S.Pd.

Penyunting: Yuliatr Novita, M.Hum.

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Triana, S.Pd.

Penerbit : PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :

Jl. Pasir Sebelah No. 30 RT 002 RW 001
Kelurahan Pasie Nan Tigo Kecamatan Koto Tengah
Padang Sumatera Barat
Website : www.globaleksekutifteknologi.co.id
Email : globaleksekutifteknologi@gmail.com

Cetakan pertama, Mei 2023

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayahNya, maka Penulisan Buku dengan judul Geometri Bidang & Ruang dapat diselesaikan dengan kerjasama tim penulis. Buku ini berisi tentang titik, garis, sudut, lukisan dasar dan segitiga, jajar genjang, persegi panjang, persegi, layang-layang, trapesium, belah ketupat, lingkaran, melukis segi empat, luas dan volume kubus, balok, rhomboeder dan parallel epipedum, prisma dan limas, tabung, kerucut dan bola.

Buku ini masih banyak kekurangan dalam penyusunannya. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan dan kesempurnaan buku ini selanjutnya. Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam proses penyelesaian Buku ini. Semoga Buku ini dapat menjadi sumber referensi dan literatur bagi dosen dan mahasiswa di berbagai perguruan tinggi.

Padang, Mei 2023
Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI.....	ii
DAFTAR GAMBAR	iv
BAB 1 TITIK, GARIS, SUDUT	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Titik.....	2
1.3 Garis.....	5
1.3.1 Sinar Garis.....	6
1.3.2 Ruas Garis	7
1.4 Sudut	7
1.5 Bidang.....	13
DAFTAR PUSTAKA.....	15
BAB 2 LUKISAN DASAR DAN SEGITIGA	17
2.1 Pendahuluan	17
2.2 Lukisan Dasar	18
2.3 Segitiga	21
2.3.1 Definisi segitiga	21
2.3.2 Lukisan segitiga	26
2.3.3 Dasar-dasar Melukis dengan Penggaris dan Jangka Menggunakan sifat dari Belah Ketupat.....	27
2.3.4 Garis-garis Istimewa pada Segitiga.....	30
DAFTAR PUSTAKA.....	31
BAB 3 JAJAR GENJANG, PERSEGI PANJANG, PERSEGI, LAYANG- LAYANG, TRAPESIUM, BELAH KETUPAT	33
3.1 Pendahuluan	33
3.2 Jajar Genjang.....	33
<i>ABCD</i> adalah jajaran genjang dengan <i>BD</i> diagonal.....	35
3.3 Persegi Panjang	38
3.4 Persegi	39
3.5 Layang layang.....	40
3.6 Trapesium	43
3.7 Belah Ketupat	45
DAFTAR PUSTAKA.....	47
BAB 4 LINGKARAN.....	49
4.1 Pendahuluan	49
4.2 Pengertian Dasar.....	49
4.3 Tali Busur dan Jarag dari Pusat	55
4.4 Garis Sumbu Pada Tali Busur.....	56
4.5 Garis Singgung pada Lingkaran.....	58
4.6 Rangkuman.....	70
DAFTAR PUSTAKA.....	72

BAB 5 MELUKIS SEGI EMPAT	73
DAFTAR PUSTAKA.....	79
BAB 6 LUAS DAN VOLUME KUBUS, BALOK, RHOMBOEDER DAN PARALELEPIPEDUM	81
6.1 Pendahuluan	81
6.2 Luas Permukaan Kubus dan Balok.....	82
6.3 Volume Kubus dan Balok	90
6.3.1 Volume Kubus	90
6.3.2 Volume Balok.....	94
6.4 Paralelepipedum dan Rhomboeder.....	97
DAFTAR PUSTAKA.....	103
BAB 7 PRISMA DAN LIMAS	105
7.1 Pendahuluan	105
7.2 Prisma	106
7.2.1 Bagian-bagian Prisma	107
7.2.2 Jaring-jaring dan Luas Permukaan Prisma.....	108
7.2.3 Volume Prisma.....	109
7.3 Limas	112
7.3.1 Jaring-jaring dan Luas Permukaan Limas.....	113
7.3.2 Volume Limas	113
DAFTAR PUSTAKA.....	116
BAB 8 TABUNG, KERUCUT DAN BOLA.....	119
8.1 Tabung.....	119
8.1.1 Unsur-unsur Tabung	120
8.1.2 Luas Permukaan Tabung.....	122
8.1.3 Volume Tabung.....	124
8.1.4 Soal Latihan.....	126
8.2 Kerucut.....	127
8.2.1 Unsur-unsur Kerucut	127
8.2.2 Luas Permukaan Kerucut.....	130
8.2.3 Volume Kerucut.....	134
8.2.4 Soal Latihan	135
8.3 Bola	135
8.3.1 Unsur-unsur Bola.....	135
8.3.2 Luas Permukaan Bola	136
8.3.3 Volume Bola	138
8.3.4 Soal Latihan.....	140
DAFTAR PUSTAKA.....	141
BIODATA PENULIS	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. $< ABC$	8
Gambar 1.2. Ukuran sudut.....	9
Gambar 1.3. Busur derajat.....	10
Gambar 1.4. Ukuran sudut cukup.....	10
Gambar 7.1. Benda-benda yang berbentuk prisma dan limas.....	105
Gambar 7.2. Beberapa contoh bentuk prisma	106
Gambar 7.3. Prisma segitiga	107
Gambar 7.4. Jaring-jaring prisma	108
Gambar 7.5. Proses menentukan prisma segitiga siku-siku.....	109
Gambar 7.6. Proses menentukan volume prisma segitiga sembarang.....	110
Gambar 7.7. Prisma segi lima	111
Gambar 7.8. Jaring-jaring limas segitiga dan limas segi lima.....	113
Gambar 7.9. Proses penentuan volume limas segitiga.....	114
Gambar 8.1. Tabung dan Unsur-unsur Tabung	120
Gambar 8.2. Jaring-jaring Tabung	121
Gambar 8.3. Perubahan Balok Menjadi Tabung.....	125
Gambar 8.4. Kerucut dan Unsur-unsurnya	128
Gambar 8.5. Jaring-jaring Kerucut	129
Gambar 8.7. Jaring-jaring Kerucut	131
Gambar 8.8. Perubahan Limas Menjadi Kerucut	134
Gambar 8.9. Bola dan Unsur-unsurnya.....	136
Gambar 8.10. Ilustrasi setengah Bola dan Kerucut	139
Gambar 8.11. Bola Padat Diiris Menjadi Limas-limas	139

BAB 1

TITIK, GARIS, SUDUT

Oleh Nanang

1.1 Pendahuluan

Lahirnya Geometri diungkapkan oleh Sukriadi (2020) berkat kebiasaan kehidupan sehari-hari masyarakat. Misalnya orang Mesir lebih dari 2000 tahun yang lalu mempunyai kebiasaan bekerja dengan dasar-dasar geometri, seperti akibat banjir berkala sungai Nil yang selalu menghanyutkan garis batas tanah milik mereka. Sehingga memaksa mereka untuk membuat kembali garis-garis batas tanah tersebut. Bangsa Yunani yang banyak dipengaruhi oleh daerah Mediterania memiliki sedikit pandangan lebih maju terhadap geometri. Geometri telah dianggap sebagai sebuah abstraksi dari dunia nyata atau sebuah model yang membantu pikiran atau logika. Sampai akhirnya pada tahun 250 sebelum masehi Euclide menghasilkan karya monumental yang dituangkan ke dalam buku *Element*, hingga sekarang karyanya masih dipelajari dan digunakan.

Didalam Geometri terdapat unsur yang tidak dapat didefinisikan, yaitu merupakan unsur yang mendasar dalam matematika. Unsur ini disebut juga dengan unsur primitif. Contoh dari unsur yang tidak dapat didefinisikan adalah titik, garis, dan bidang. Unsur yang terdefinisi merupakan unsur-unsur yang memiliki batasan yang jelas mengenai dirinya. Contoh dari unsur yang terdefinisi di antaranya yaitu ruas garis, sinar garis, dan segitiga.

Didalam pembahasan Geometri terdapat istilah Aksioma, Dalil atau Teorema. Aksioma merupakan suatu pernyataan yang kebenarannya tidak perlu dibuktikan. Contoh aksioma dalam matematika misalnya terdapat dua titik A dan B, “Untuk setiap A dan B yang berbeda ($A \neq B$) pada satu bidang, hanya dapat dibuat satu garis” (Maulana, 2010). Dalil atau dengan nama lain teorema adalah suatu pernyataan yang kebenarannya perlu dibuktikan. Contoh dalil yang paling terkenal dan sangat dekat dengan siswa sekolah dasar adalah Dalil Pythagoras. Inti dari dalil tersebut berbunyi “Panjang kuadrat sisi miring sebuah segitiga siku-siku itu sama dengan jumlah panjang kuadrat kedua sisi lainnya” (Murtiningsih, 2011).

1.2 Titik

Pada bagian pendahuluan telah disinggung bahwa titik, garis, dan bidang adalah unsur-unsur yang tidak didefinisikan. Unsur-unsur sederhana yang mudah dipahami tetapi menjadi blunder (berbelit) apabila kita mencoba membuat definisinya. Sehingga para ahli geometri mengelompokkan konsep titik, garis, dan bidang ke dalam kelompok unsur yang tidak didefinisikan atau disebut pengertian pangkal.

Dalam geometri, titik adalah konsep abstrak yang tidak berwujud atau tidak berbentuk, tidak mempunyai ukuran, tidak mempunyai berat, atau tidak mempunyai panjang, lebar, atau tinggi. Titik adalah ide atau gagasan abstrak yang hanya ada dalam benak orang yang memikirkannya.

Untuk melukiskan atau menggambarkan titik diperlukan simbol atau model. Gambar simbol atau model untuk titik digunakan noktah: “•”.

Sebuah titik diberi nama menggunakan huruf kapital yang diletakan dekat titik tersebut, misalnya: titik P: •P, titik Q: •Q , dan titik R: •R. Menggambar sebuah titik dapat menggunakan

ujung pensil, pena, jangka, atau kapur yang ditekan pada bidang tulis atau permukaan kertas atau papan tulis. Apabila anda menekankan ujung pensil pada permukaan kertas maka noktah hitam yang membekas pada permukaan kertas tersebut adalah titik.

Menggambar titik dapat pula diperoleh bagian dari penggaris dengan cara meletakkan sebuah penggaris pada papan tulis kemudian gambar sebuah titik pada sisi penggaris dengan cara menekankan kapur ke papan tulis dan kemudian angkat penggaris tersebut. Kita dapat melihat bahwa pada papan tulis terdapat noktah hasil goresan ujung kapur terhadap papan tulis, dan goresan itu adalah titik.

Seperti halnya di dalam buku *Element* karya Euclide ada yang disebut dengan istilah *primitive*. Istilah primitif ditujukan untuk konsep-konsep sederhana yang mudah dipahami dan sulit dibuatkan batasannya. Yang kemudian oleh para ahli geometri modern konsep-konsep tersebut dikelompokkan ke dalam istilah-istilah yang tidak didefinisikan (*undefined*). Dalam struktur geometri modern khususnya dan matematika pada umumnya terdapat istilah-istilah yang telah disepakati dan menjadi pedoman bagi semua orang yang mempelajari geometri, matematika, atau cabang matematika yang lain. Istilah-istilah tersebut adalah: 1) unsur-unsur yang tidak didefinisikan, 2) unsur-unsur yang didefinisikan, 3) aksioma/postulat, dan 4) teorema/dalil/rumus.

Unsur yang tidak didefinisikan atau pengertian pangkal adalah konsep primitif yang mudah dipahami dan sulit dibuatkan definisinya, seperti titik, garis, dan bidang. Apabila kita paksakan untuk membuat definisi untuk unsur primitif tersebut maka akan terjadi blunder. Misalnya kita akan membuat definisi untuk titik, seperti titik adalah sesuatu yang menempati tempat. Kemudian kita harus mendefinisikan lagi sesuatu yang menempati tempat itu apa,

misalnya noktah yang ada pada bidang. Kemudian kita harus mendefinisikan tentang noktah itu apa, dan seterusnya. Sehingga dalam definisi terdapat definisi dan begitu seterusnya. Oleh karena itu semua konsep yang memiliki sifat demikian dimasukkan ke dalam katagori unsur primitif atau unsur yang tidak terdefinisi.

Unsur-unsur yang didefinisikan adalah konsep yang mempunyai definisi atau batasan. Sehingga dengan definisi konsep-konsep tersebut menjadi jelas, tidak ambigu atau tidak bermakna ganda. Syarat sebuah definisi adalah harus singkat, padat, jelas, dan tidak mengandung pengertian ganda. Unsur yang didefinisikan adalah konsep-konsep yang dikembangkan dari unsur yang tidak didefinisikan. Misalnya, sinar garis, ruas garis, segitiga, segiempat dikembangkan dari konsep garis sebagai unsur yang tidak didefinisikan.

Aksioma/postulat adalah anggapan dasar yang disepakati benar tanpa harus dibuktikan. Yang termasuk ke dalam aksioma/postulat adalah sesuatu atau konsep yang secara logika dapat diterima kebenarannya tanpa harus dibuktikan. Dalam geometri (Euclide) misalnya dikenal postulat garis sejajar yaitu apabila ada sebuah garis dan sebuah titik di luar garis tersebut, melalui titik itu dibuat garis lain yang sejajar garis pertama maka kedua garis tersebut tidak akan berpotongan.

Teorema/rumus/dalil adalah anggapan sementara yang harus dibuktikan kebenarannya melalui serangkaian pembuktian deduktif. Pembuktian teorema/rumus/dalil dalam matematika keberlakuannya harus secara umum, tidak berlaku hanya untuk beberapa kasus seperti contoh. Misalnya teorema Pythagoras yang menyatakan bahwa dalam sebuah segitiga siku-siku berlaku "jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi miringnya". Apabila kita

mengajukan pembuktian melalui menunjukkan/memberi contoh dalam segitiga siku-siku dengan panjang sisi masing-masing 3 dan 4 satuan panjang, serta panjang sisi miringnya sama dengan 5 satuan panjang (tripel Pythagoras), sehingga diperlihatkan hubungan $3^2 + 4^2 = 5^2$ ini bukan pembuktian, tetapi sekadar menunjukkan satu kasus. Teorema Pythagoras sejak ditemukannya sampai sekarang telah dibuktikan lebih dari 200 cara.

1.3 Garis

Garis adalah konsep yang tidak dapat dijelaskan dengan menggunakan kata-kata sederhana atau kalimat simpel. Karenanya garis juga dikelompokkan ke dalam usur yang tidak didefinisikan. Garis adalah ide atau gagasan abstrak yang bentuknya lurus, memanjang ke dua arah, tidak terbatas atau tidak bertitik akhir, dan tidak tebal. Garis adalah ide atau gagasan yang hanya ada dalam benak pikiran orang yang memikirkannya.

Mengambar model garis dapat dilakukan dengan membuat goresan alat tulis pada bidang tulis, kertas, atau papan tulis dengan bentuk yang lurus. Atau model garis dapat dibuat dengan menggambar bagian sisi benda yang lurus, misalnya menggambar salah satu sisi penggaris kayu. Berikut adalah model garis yang diperoleh dari hasil menggambar salah satu bagian sisi penggaris dengan memberi tanda anak panah pada kedua ujungnya yang menandakan bahwa garis tersebut memanjang kedua arah tidak mempunyai titik akhir.

Menamai sebuah garis dapat dilakukan dengan menggunakan dua cara. Pertama dengan sebuah huruf kecil pada salah satu ujung garis. Kedua menggunakan dua huruf besar yang diletakan pada dua titik pada garis tersebut. Di bawah ini adalah dua cara memberi nama terhadap garis.



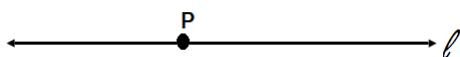
Garis yang paling kiri adalah garis **AB** dan yang sebelah kanan adalah garis ℓ . Notasi untuk menyatakan garis AB ditulis dengan $\overleftrightarrow{AB}$. Garis disebut juga sebagai unsur geometri satu dimensi. Karena garis adalah konsep yang hanya memiliki unsur panjang saja (linier).

Pada sebuah garis terdapat bagian berupa unsur-unsur sebagai berikut.

1.3.1 Sinar Garis

Apabila sebuah titik terletak pada sebuah garis maka titik tersebut akan membagi himpunan titik pada garis menjadi tiga himpunan titik yang saling lepas (disjoint). Apabila sebuah titik terletak pada sebuah garis maka titik tersebut membagi garis menjadi dua himpunan titik pada setengah garis.

Berikut gambar garis yang dipotong oleh sebuah titik P menjadi dua setengah garis.



Apabila titik P digabungkan dengan setengah garis pertama maka akan diperoleh sinar garis. Berikut gambar sinar garis sebagai setengah garis.



Gabungan antara sebuah titik dengan himpunan titik-titik setengah garis dinamakan sinar garis. Sinar garis adalah bagian dari garis yang memanjang ke satu arah dengan panjang tidak terhingga. Memodelkan sebuah sinar garis dapat dilakukan

seperti gambar-gambar di atas, dimulai dari sebuah titik yang disebut titik pangkal dan memanjang ke satu arah.

Memberi nama sebuah sinar garis biasanya menggunakan dua huruf kapital. Huruf pertama diletakan pada pangkal sinar garis, dan huruf ke dua diletakan pada salah satu titik di bagian yang memanjang dari sinar tersebut. Berikut sinar garis dengan nama PQ.

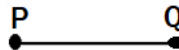


Gambar di $\overrightarrow{PQ}$ s adalah sinar PQ. Untuk menyatakan sinar PQ dapat ditulis: .

1.3.2 Ruas Garis

Apabila sinar garis adalah gabungan antara satu titik dengan himpunan titik-titik pada setengah garis, maka ruas garis adalah bagian dari setengah garis. Ruas garis adalah himpunan titik yang memanjang dengan posisi lurus dan dibatasi oleh dua buah titik.

Menamai sebuah ruas garis menggunakan dua huruf besar yang diletakan pada ujung-ujung ruas garis tersebut. Berikut gambar dan nama ruas garis.



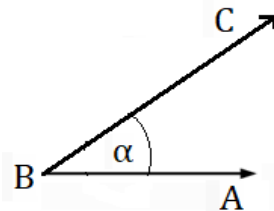
Gambar di atas adalah ruas garis PQ. Ruas garis PQ ditulis dengan $\overline{PQ}$.

1.4 Sudut

Sebuah sudut adalah gabungan dua buah sinar tidak kolinier (sinar-sinar itu tidak terletak pada sebuah garis) yang bersekutu pada pangkalnya. Berikut gambar-gambar sudut. Gambar di sebelah kanan adalah sudut yang dibentuk oleh dua buah sinar garis yang bersekutu pada pangkal-pangkal sinar

garis tersebut. Sudut yang terbentuk dari dua buah sinar garis adalah rentangan terkecil dan bukan rentangan besarnya. Berikut adalah sudut yang terbentuk dari gabungan dua sinar garis dimaksud.

Membei nama sebuah sudut dapat dilakukan dengan menggunakan satu huruf misalnya α , β , atau γ yang diletakan di daerah dalam sudut. Atau menggunakan tiga huruf besar, satu huruf diletakan pada titik sudut dan dua huruf yang lain diletakan pada pepanjangan sinar-sinarnya. Berikut dua cara penamaan sudut.

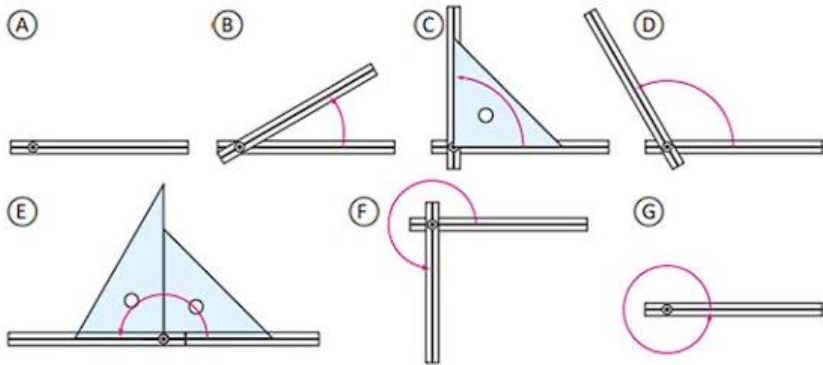


Gambar 1.1. $\angle ABC$

Sudut di sebelah kiri adalah sudut α , sedangkan sudut di sebelah kanan adalah sudut ABC atau sudut CBA. Memberi nama sudut seperti yang di sebelah kanan huruf yang terletak pada titik sudut harus diletakan di tengah-tengah. Notasi untuk sudut ABC dapat ditulis dengan $\angle ABC$.

Mengukur besar sebuah sudut dapat dilakukan dengan menggunakan satuan tidak baku atau satuan baku. Ukuran sudut dengan satuan tidak baku dapat menggunakan pojok atau sudut lain. Satuan sudut baku dikenal derajat dan radian. Satu derajat didefinisikan sama dengan satu pertiga ratus enam puluh putaran apabila titik ujung sebuah ruas garis diputar penuh dan ujung titik lainnya sebagai pusat putaran. Atau satu putaran sama dengan tiga ratus enam puluh derajat.

Untuk menentukan besar sebuah sudut dapat menggunakan alat yang disebut dengan busur derajat. Bentuk busur derajat adalah setengah lingkaran yang ditera menjadi 180 bagian yang sama. Berikut gambar busur derajat.



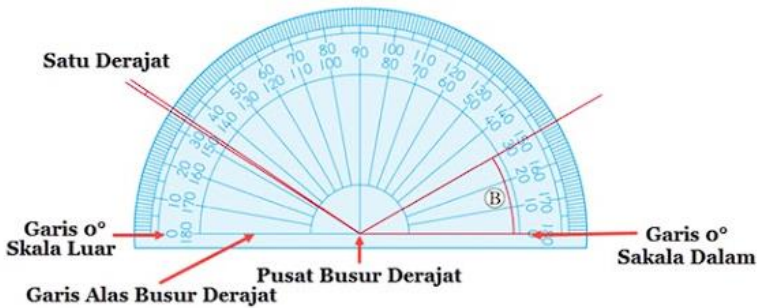
Gambar 1.2. Ukuran sudut

Sumber: <https://www.mikirbae.com/2022/07/mengenal-ukuran-dan.html>

Ukuran sudut E adalah 2 sudut siku-siku. Sudut yang merupakan 1 sudut siku-siku (C), 2 sudut siku-siku (E), 3 sudut siku-siku (F) dan 4 sudut siku-siku (G). 4 sudut siku-siku disebut “sudut satu putaran” dan 2 sudut siku-siku yang disebut “sudut setengah putaran”.

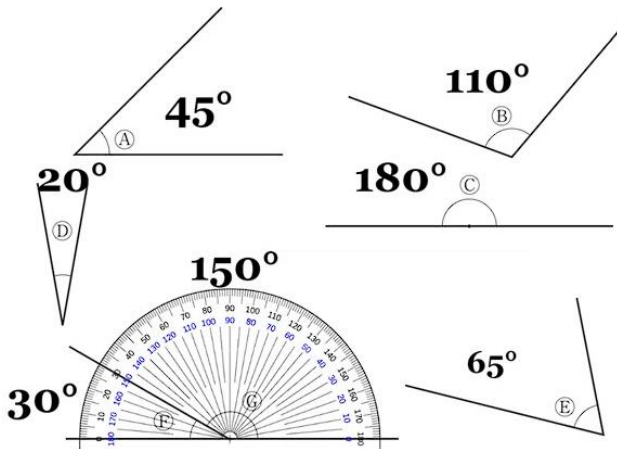
Derajat adalah satuan untuk menyatakan ukuran sudut. Sudut satu putaran dibagi menjadi 360 bagian yang sama. Ukuran satu bagian disebut satu derajat dan ditulis sebagai 1° . Cara menggunakan busur:

1. Taruhlah pusat busur derajat berimpit dengan titik sudut, di atas kaki sudut.
2. Taruhlah garis 0° dengan salah satu kaki sudut.
3. Bacalah skala yang berimpit dengan kaki sudut lainnya.
4. Busur derajat digunakan untuk mengukur ukuran sudut dengan tepat.



Gambar 1.3. Busur derajat

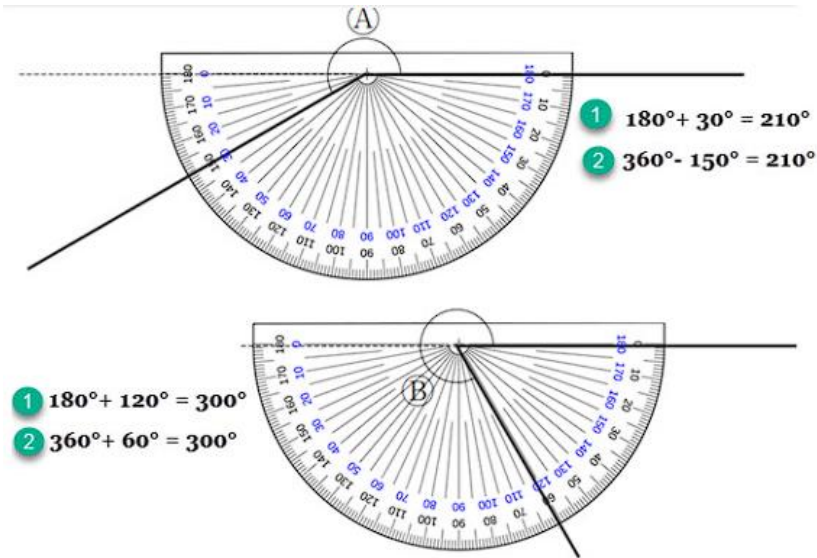
Pada gambar 1.1. besar sudut adalah: $C = 90^\circ$, $E = 180^\circ$, $F = 270^\circ$, dan $G = 360^\circ$. Ukuran sudut cukup disebut dengan sudut.



Gambar 1.4. Ukuran sudut cukup

5. Untuk mengukur sudut yang lebih besar dari 180° dapat dilakukan dengan dua cara yaitu sebagai berikut:

Dengan berdasarkan sudut 180° , ukur berapa derajat lebih besar kah dari 180° . Dengan berdasarkan sudut 360° , ukur berapa derajat lebih kecil dari dari 360° .

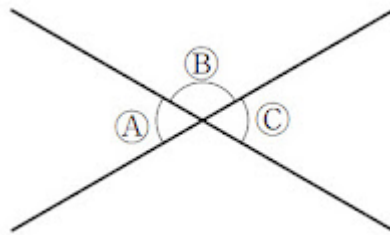


$$A = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \text{ atau } 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$$

$$B = 180^\circ + 120^\circ = 300^\circ \text{ atau } 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

Dengan menggunakan busur 360°, kita bisa mengukur suatu sudut dalam satu langkah.

6. Gambar di samping menunjukkan 2 garis berpotongan.



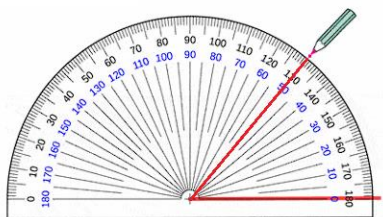
Sudut A = 180° - B; Sudut C = 180° - B; Sudut A dan C sama besar.

7. Cara menggambar sudut

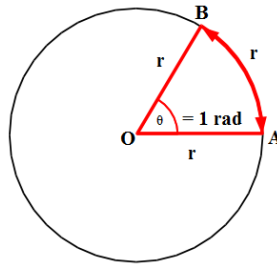
Ada beberapa langkah untuk menggambar sudut dengan sebuah busur derajat, untuk lebih jelasnya saya contoh jika akan

menggambar sudut 50° . Cara menggambarinya adalah sebagai berikut:

- Gambarlah satu sisi dan berilah tanda titik pada tempat yang akan dijadikan sebagai puncak sudut.
- Letakkan bagian tengah busur derajat dengan puncak sudut, dan tempatkan garis 0° di salah satu sisi sudut.
- Buatlah titik pada titik buta 50° .
- Buatlah sisi satu lagi dengan menghubungkan sudut puncak dengan titik yang telah dibuat.



Selain derajat satuan sudut yang lain adalah radian. Besar sudut satu radian (1 rad) didefinisikan sama dengan besar sudut yang menghadapi tali busur dengan panjang r (jari-jari). Berikut gambar besar sudut 1 radian.



Definisi 1 radian



$$1 \text{ radian} = \frac{\text{busur } r}{\text{keliling lingkaran}} \times 360^\circ$$

$$1 \text{ radian} = \frac{r}{2\pi r} \times 360^\circ$$

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Sumber: <https://images.search.yahoo.com/search/images?p=gambar+1+radian>

Dari gambar 2.3.8 di atas, panjang $OA = OB = r =$ jari-jari lingkaran. Busur AB sama dengan r . Sehingga besar sudut AOB adalah 1 radian. Kita dapat mengkonversi besar sudut radian ke dalam derajat atau sebaliknya. Dari definisi sudut radian di atas, kita dapat menentukan besar sudut satu lingkaran penuh dalam satuan radian, yaitu keliling lingkaran ($2\pi r$) dibagi jari-jari lingkaran (r). Atau besar sudut satu lingkaran penuh dalam satuan radian adalah $(2\pi r)/r = 2\pi$. Sedangkan di depan kita sudah menentukan bahwa besar sudut satu lingkaran penuh dalam satuan derajat adalah 360° . Jadi $2\pi \text{ radian} = 360^\circ$, atau $1 \text{ radian} \approx 57^\circ$.

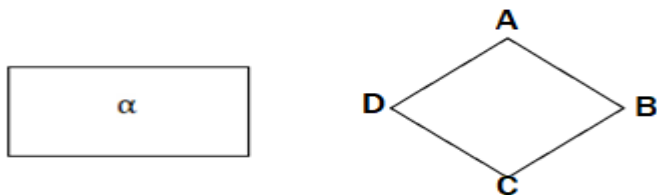
1.5 Bidang

Bidang adalah unsur lain dalam geometri yang tidak dapat dijelaskan menggunakan kata-kata sederhana atau kalimat simpel seperti halnya titik dan garis. Apabila kita mencoba membuat definisi bidang maka akan berbelit atau blunder. Oleh

karena itu seperti titik dan garis, bidang juga dimasukan ke dalam kelompok unsur yang tidak didefinisikan. Bidang adalah ide atau gagasan abstrak yang hanya ada dalam benak pikiran orang yang memikirkannya. Bidang diartikan sebagai permukaan yang rata, meluas ke segala arah dengan tidak terbatas, dan tidak memiliki tebal. Bidang masuk ke dalam bangun dua dimensi, karena bidang dibentuk oleh dua unsur yaitu panjang dan lebar.

Model bidang dapat digambarkan oleh bagian dari benda, misalnya bagian permukaan kaca, permukaan daun pintu, lembaran kertas, atau dinding tembok kelas yang rata. Atau bidang dapat diperoleh dengan cara mengiris tipis-tipis permukaan benda sehingga diperoleh lembaran-lembaran tipis, misalnya bagian salah satu sisi balok diiris-iris menjadi bagian-bagian yang tipis. Bagian-bagian tersebut adalah model-model bidang.

Di bawah ini adalah gambar atau model dari bidang. Memberi nama sebuah bidang dapat menggunakan sebuah huruf kecil atau huruf-huruf Yunani seperti α (alpa), β (beta), γ (gamma) yang diletakan di daerah dalam bidang tersebut. Atau menggunakan huruf-huruf besar yang disimpan di titik-titik sudut bidang tersebut. Berikut adalah cara memberi nama sebuah bidang.



DAFTAR PUSTAKA

- Adelia (2020). Geometri dan Aritmatika Sosial 2A. Pengertian Titik,Garis,Ruas Garis dan Sudut (Adelia). by A K7119003 Adelia Trihandayani - Wednesday, 26 February 2020, 8:35 AM. <https://spada.uns.ac.id/mod/forum/discuss.php?d=8168>.
- Menggambar 1 radian. <https://images.search.yahoo.com/search/images?p=gambar+1+radian.html>.
- Mikirbae.com (2022). Mengenal Ukuran dan Cara menggambar Sudut. <https://www.mikirbae.com/2022/07/mengenal-ukuran-dan.html>.
- Sukriadi. Modul Pembelajaran Geometri dan Pengukuran. <https://anyflip.com/tgogh/dqfx>.
- Suprih Widodo. Geometri Bangun Datar. http://file.upi.edu/Direktori/KD-PURWAKARTA/198012182005011001-Suprih_Widodo/Pemecahan%20Masalah%20Matematika/Bahan%20ajar%20Geometri.pdf.
- Thalia Thamsir. (2016). Modul Matematika: Garis dan Sudut. Tangerang: Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Pelita Harapan.

BAB 2

LUKISAN DASAR DAN SEGITIGA

Oleh Raden Sri Ayu Ramadhana

2.1 Pendahuluan

Sebagai seorang pendidik yang akan mengajarkan peserta didik untuk turut aktif dalam pembelajaran matematika, diperlukan kemampuan dalam membuat maupun merancang alat peraga ataupun alat bantu dalam proses belajar mengajar, hal ini merupakan proses yang paling krusial dalam proses belajar mengajar dengan harapan proses belajar mengajar bisa berhasil. Lukisan bangun geometri ialah salah satu usaha dalam memvisualisasikan objek-objek geometri yang bersifat absurd/tidak nyata menjadi lebih gampang dipahami dan dikomunikasikan sehingga peserta didik mampu memahami dengan benar konsep ataupun objek yang dipaparkan dengan alat peraga ataupun berupa alat bantu, baik lukisan maupun gambar. Oleh karenanya konsep mengenai lukisan dari bangun geometri menjadi hal yang krusial dan penting untuk dilakukan.

Melukis merupakan suatu kegiatan yang membutuhkan kesabaran dan ketelitian. Hasil melukis tak seperti yang diinginkan apabila proses pekerjaan yang akan dilakukan dilaksanakan dengan terburu-buru atau dilakukan dengan asal-asalan. Hal ini terlihat ketika ada dua garis yang seharusnya berpotongan di satu titik tertentu tidak berpotongan di titik tersebut karena kecerobohan-kecerobohan saat melukis. Oleh karena itu pembuatan lukisan ini membutuhkan perencanaan yang sangat matang. Sejalan dengan yang dikatakan oleh Nirvayanti dan Mulyati (Mulyati, 2017), jika langkah-langkah dalam membuat lukisan pada setiap pembuatan lukisan dan

dilaksanakan dengan sungguh-sungguh serta dilaksanakan secara konsisten dalam proses pembelajaran, maka materi mengenai “lukisan” memiliki “nilai tambah” karena dapat menumbuh sikap positif dalam berperilaku yakni sikap sistematis, bersih, teliti, rapi dan juga cermat.

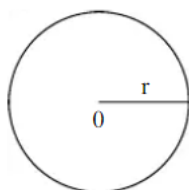
2.2 Lukisan Dasar

Menurut Nirvayanti dan Mulyati (Mulyati, 2017), dalam melukis bentuk geometri seperti melukis segitiga sama sisi, segi lima, segi enam, persegi, garis bagi, garis tinggi dan sebagainya adalah serangkaian dari jenis lukisan pangkal. Cara melukis pangkal yaitu:

1. Buatlah garis lurus (selanjutnya disebut sebagai “garis”) melalui dua titik yang berbeda dengan diketahui A dan B



2. Gambarlah busur lingkaran dengan titik pusat (O) dan panjang jari-jari (r) yang diketahui. Karena lingkaran ialah himpunan titik-titik yang berjarak sama dari titik tertentu yang dikenal sebagai pusat lingkaran, titik-titik pada busur lingkaran berjarak sama dari pusat lingkarannya.



Lukisan pangkal pertama membutuhkan penggaris yang baik dan lukisan pangkal kedua membutuhkan jangka. Setiap lukisan diperoleh dengan membuat rangkaian kedua lukisan pangkal

secara berulang-ulang. Lukisan murut Djoko Iswadi (Iswadi, 2001) adalah proses untuk mendapatkan gambaran objek tertentu dalam geometri seperti: garis, sudut, segitiga dan lain-lainnya dengan menggunakan alat utama yang berupa penggaris dan jangka serta pensil dan busur derajat. Agar mendapatkan hasil lukisan yang baik dan tepat dari segi bentuk dan ukurannya menurut Djoko Iswadi langkah-langkah yang harus diperhatikan ialah sebagai berikut:

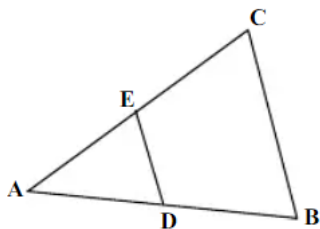
1. Gunakan pensil yang runcing
2. Gunakan penggaris yang bagus artinya ujung-ujungnya tidak patah
3. Gunakan jangka yang bagus, artinya engselnya tidak bergerak dan jarum serta pensil tajam atau tidak tumpul
4. Siapkan penghapus karet
5. Jika Anda hendak menggambar garis melalui dua titik, usahakan jarak kedua titik tersebut persis sama dengan tepi penggaris.
6. Jika Anda hendak menggambar garis melalui dua titik, perhatikan posisi penggaris agar tidak goyah.
7. Jika Anda hendak menggambar busur lingkaran, tentukan terlebih dahulu titik pusat dan panjang jari-jari. Contoh dengan label "x", masukkan jarum jangka tepat tepat pada titik pusat.
8. Buat garis agak tipis terlebih dahulu sebelum memastikan keakuratan gambarnya, jika Anda yakin garisnya bisa lebih ditebalkan.

Dalam matematika, melukis ialah kegiatan yang berkaitan dengan akurasi dan presisi. Hasil dari melukis tidak akan sesuai harapan jika proses kegiatan ini dilakukan dengan tergesa-gesa atau asal-asalan. Sering terjadi, dua garis lurus yang seharusnya berpotongan di titik tertentu, tidak berpotongan di titik tersebut akibat kecerobohan dan tidak teliti saat melukis. Oleh karena itu, pembuatan lukisan ini membutuhkan perencanaan yang matang. Nirvayanti dan Mulyati (Mulyati, 2017) jika langkah-langkah dalam membuat lukisan pada setiap pembuatan lukisan

dan dilaksanakan dengan sungguh-sungguh serta dilaksanakan secara konsisten dalam proses pembelajaran, maka materi mengenai “lukisan” memiliki “nilai tambah” karena dapat mengembangkan sikap positif dalam berkarya yaitu dengan teliti dan sistematis. Seperti yang telah dipaparkan di atas yakni pada dasarnya setiap lukisan selalu merupakan hasil dari satu atau lebih lukisan pangkal. Dua lukisan pangkal tersebut ialah melukis garis lurus dan busur lingkaran. Prasyarat yang harus dimiliki guru dan siswa untuk mempelajari lukisan ini ialah:

- Pengetahuan tentang yaitu himpunan titik-titik yang berjarak sama dari titik tertentu yang dikenal sebagai pusat lingkaran. Titik-titik yang terletak pada busur lingkaran mempunyai jarak sama dari pusat lingkaran.
- Sifat-sifat belah ketupat dan layang-layang, seperti perpotongan kedua diagonalnya saling berpotongan tegak lurus.
- Kesebangunan dalam segitiga yakni jika pada segitiga ABC berlaku $DE \parallel BC$ maka:

$$AD:AB = AE:AC = DE:BC$$



- Sifat-sifat kekongruenan pada dua segitiga
- Sifat sumbu pada ruas garis AB sebagai himpunan titik-titik berjarak sama terhadap titik A dan B
- Sifat garis bagi $\angle ABC$ sebagai himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap garis AB dan AC

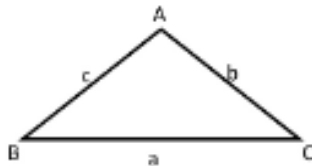
Selain dari dua lukisan pangkal di atas, menurut Fajar (Shadiq, 2004) ada juga sepuluh lukisan dasar yang biasanya digunakan untuk menggambar bangun datar, yakni (a) menduplikat

segitiga, (b) menduplikat sudut, (c) menggambar sumbu ruas garis, (d) membagi keduanya garis menjadi ruas yang sama rata (e) menggambar garis melalui titik yang diketahui dan tegak lurus dengan garis yang lain, (f) menggambar garis melalui titik yang diketahui dan sejajar dengan garis lain, (g) membagi suatu ruas garis menjadi beberapa ruas garis yang kongruen, (h) menggambar lingkaran yang melewati tiga titik yang diketahui, (i) membagi dua sudut yang sama dan (j) menggambar lingkaran yang bersinggungan dengan sisi dari ketiga segitiga. Yang menjadi perhatian dari kesepuluh gambar dasar tersebut selalu digunakan dua gambar dasar pangkal yang telah dipaparkan di atas yakni untuk melukis sebuah garis lurus dan menggambar busur lingkaran.

2.3 Segitiga

2.3.1 Definisi segitiga

Segitiga merupakan bentuk dasar dari bangun-bangun geometri. Definisi dari segitiga adalah bentuk bidang dua dimensi yang dibuat dengan cara menghubungkan tiga titik non linier. Tiga titik yang dimaksud adalah A, B dan C. segitiga yang terbentuk disebut dengan segitiga ABC dan ditulis dengan $\triangle ABC$ dan sisi yang berhadapan dengan titik sudutnya tersebut diberi label huruf kecil sesuai dengan nama sudut.



Dalam $\triangle ABC$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{CA}$ disebut sisi $\triangle ABC$, dan $\angle BAC$, $\angle ABC$ dan $\angle ACB$ disebut sudut-sudut dari $\triangle ABC$ dengan masing-masing titik sudutnya ialah titik A, B dan C.

Berdasarkan sisi-sisi segitiga, segitiga dibedakan menjadi beberapa macam yaitu:

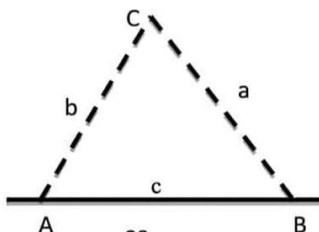
- Segitiga sembarang adalah segitiga yang panjang sisinya tidak sama antar satu dengan yang lain.
- Segitiga sama kaki adalah segitiga yang kedua sisinya sama panjang.
- Segitiga sama sisi adalah segitiga yang panjang ketiga sisinya sama.

Kemudian, berdasarkan besar sudutnya, segitiga dibagi menjadi beberapa jenis, yakni:

- Segitiga siku-siku adalah segitiga yang salah satu sudutnya merupakan sudut siku-siku dengan besar sudutnya 90° .
- Segitiga lancip adalah segitiga yang ketiga sudutnya merupakan sudut lancip yang besar sudutnya antara 0° dan 90°
- Segitiga tumpul adalah segitiga yang salah satu sudut yang dimilikinya ialah sudut tumpul dengan besar sudutnya 90° dan 180°

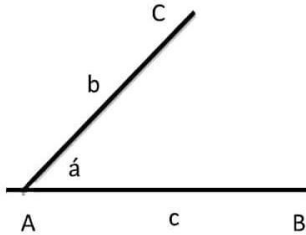
Selanjutnya, ada beberapa cara untuk membentuk suatu segitiga, yakni:

- Apabila ketiga sisi diketahui (s-s-s)
Diketahui $AB = c$, $AC = b$, dan $BC = a$, maka bisa digambarkan segitiga seperti gambar berikut:



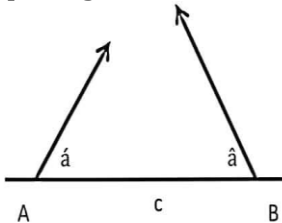
- b. Apabila dua sisi dan satu sudut yang diapit diketahui (s. sd. s)

Diketahui $AB = c$, $AC = b$, dan $\angle A = a$, maka bisa digambarkan segitiga seperti gambar berikut:



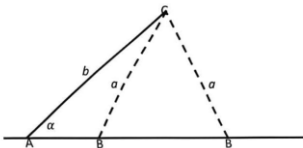
- c. Apabila satu sisi dan dua sudut yang mengapit diketahui (sd.s.sd)

Diketahui $\angle A = a$, $AB = c$, dan $\angle B = \beta$, maka bisa digambarkan segitiga seperti gambar berikut:



- d. Apabila dua sisi dan satu sudut diketahui (s.s.sd)

Apabila diketahui sisi $AC = b$, $BC = a$, dan $\angle A = a$, membentuk terbentuklah dua segitiga atau tidak ada segitiga sama sekali, hal ini bergantung pada panjang a , b dan juga besar dari sudut a



Apabila tiga ruas garis $AB = c$, $AC = b$, dan $BC = a$, nilai $c = a + b$, maka titik A, B dan C terdapat pada garis lurus, sehingga tidak terbentuklah segitiga. Sebuah segitiga

terbentuk jika $a + b > c$. Hal ini menjadi tolak ukur bahwa kita hanya bisa melukis sebuah segitiga jika tiga dari empat kriteria terpenuhi.

Contoh:

Lukiskan segitiga ABC jika diketahui panjang $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, dan $AC = 5\frac{1}{2}$ cm !

Penyelesaian :

Segitiga ABC disebutkan dalam tugas di atas bisa gambarkan, karena:

- a) Memenuhi salah satu keempat kriteria dalam melukiskan segitiga, yaitu telah diketahui panjang dari ketiga sisinya (s-s-s)
- b) Sifat segitiga terpenuhi karena jumlah panjang kedua sisi dari segitiga lebih panjang dari panjang sisi yang ketiga.

Dik:

5 cm _____
4 cm _____
_____ $5\frac{1}{2}$ cm

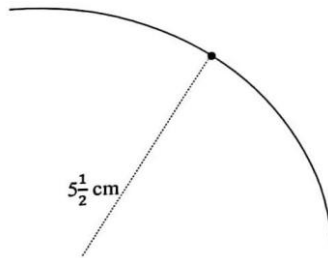
Sebagai langkah awal, siapkan 3 ruas garis yang masing-masing panjangnya 5cm, 4cm dan $5\frac{1}{2}$ cm. Pertama, lukis sisi $AB = 5$ cm, kemudian buat busur lingkaran yang berpusat pada A dan B dengan jari-jari $5\frac{1}{2}$ cm dan 4 cm. Keduanya pada busur lingkaran ini berpotongan di titik yang menunjukkan titik sudut C dari $\triangle ABC$.

Tahapan dalam melukis:

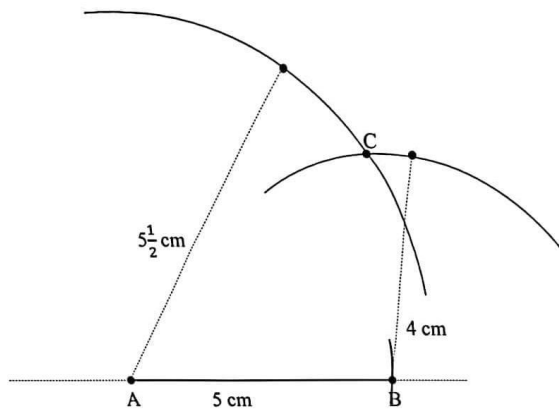
Tahapan awal



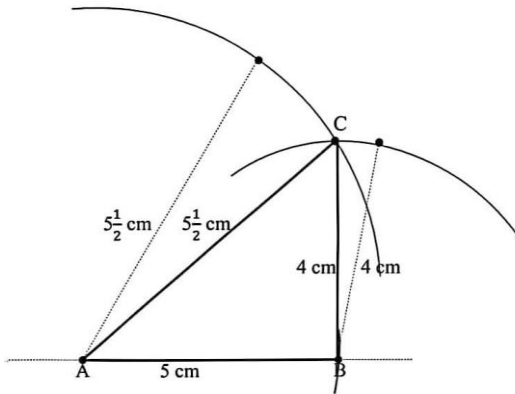
Tahapan kedua



Tahapan ketiga



Tahapan ke 4



2.3.2 Lukisan segitiga

Segitiga ialah bentuk yang penting dalam kajian geometri, hal ini dikarenakan bentuk geometris yang lain juga dapat terbentuk dari segitiga. Demikian pula, sifat-sifat bentuk tertentu juga dapat dipaparkan dengan sifat segitiga.

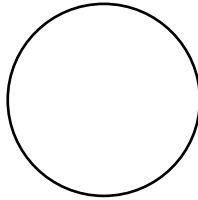
Jika Anda mengetahui aspek fundamental dalam menggambar segitiga, Anda tidak bisa hanya menggunakan penggaris. Pada awalnya mungkin Anda mengalami beberapa kesulitan untuk mengukur sisi pertama dan kedua, akan tetapi juga mengalami kesulitan dalam menggambarkan sisi ketiga segitiga sesuai dengan ukuran yang diberikan, jadi sangat penting untuk menggunakan penggaris dan jangka.

Pada dasarnya setiap lukisan yang akan Anda buat, misalnya melukis segitiga atau persegi, selalu merupakan rangkaian dari dua jenis lukisan dasar/pangkal. Yang dimaksud dengan lukisan dasar/pangkal yaitu:

- Gambarkan garis lurus melalui dua titik berbeda yang diketahui. Sebuah penggaris digunakan dalam menggambarkan ini



- b. Untuk menggambar busur lingkaran dengan titik pusat tertentu dengan jari-jari diketahui, gunakan jangka pada saat Anda menggambar dasar/pangkal.

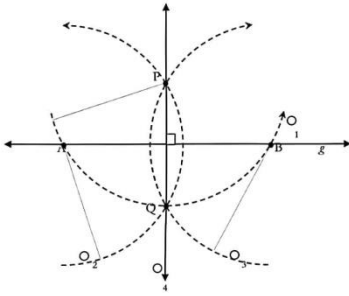


Suatu segitiga bisa dilukiskan apabila diketahui 3 aturannya saling bebas, artinya aturan tersebut tidak dapat bergantung dengan aturan lainnya. Muatan dapat berupa bagian lain dari segitiga atau unsur segitiga, seperti panjang garis berat pada segitiga.

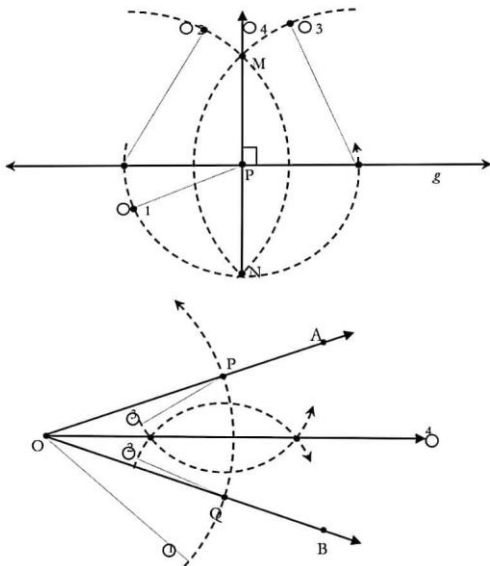
2.3.3 Dasar-dasar Melukis dengan Penggaris dan Jangka Menggunakan sifat dari Belah Ketupat

Belah ketupat mempunyai beberapa sifat yaitu tiap diagonalnya adalah sumbu dari diagonal lainnya, dan setiap diagonalnya itu membagi bagian dalam sudut sekelilingnya menjadi dua selang sudut yang sama besar. Karena belah ketupat ialah segi empat dengan semua sisinya sama panjang, sifat-sifat belah ketupat dapat digunakan untuk membuat gambar khususnya yang disebut dasar-dasar menggambar dengan bantuan mistar/penggaris dan jangka.

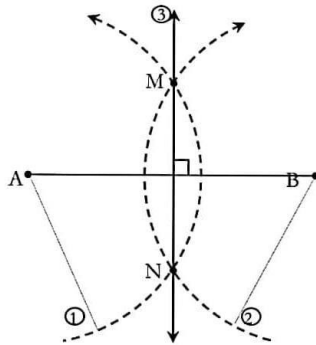
- a. gambarkan garis melalui titik P berada di luar atau tepat garis g kemudian tegak lurus terhadap garis g
1. P berada di luar garis g



2. P terletak pada garis g

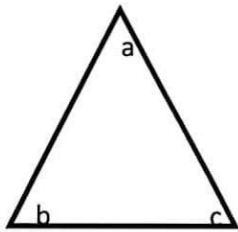


b. Menggambar sumbu pada sebuah Garis (digambar pada sumbu $\overline{AB}$,)

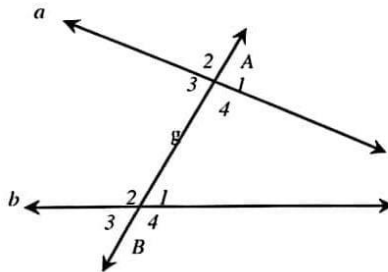


Teorema 2.1 Jumlah sudut dalam suatu segitiga ialah 180°

Bukti:



Dalam pembuktian pernyataan tersebut, kita dapat menggunakan salah satu dari sudut yang besar sudutnya cenderung sama yakni ‘aksioma sudut dalam berseberangan’, ‘sudut luar yang berseberangan’, ‘sudut berhadapan’, dan ‘sudut bertolak belakang’ seperti gambar berikut:

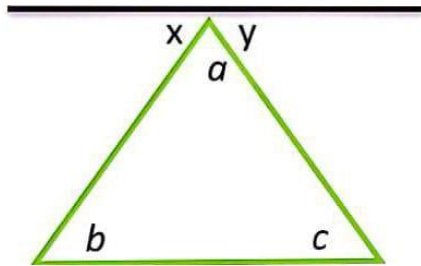


Sudut-sudut yang besarnya selalu sama ialah:

- $\angle A_3 = \angle B_1$ yakni 'sudut dalam berseberangan'
- $\angle A_2 = \angle B_4$ yakni 'sudut luar berseberangan'
- $\angle A_2 = \angle B_2$ yakni 'sudut yang berhadapan'
- $\angle A_2 = \angle A_4$ yakni 'sudut yang bertolak belakang'

Berikut penjelasan sebagai bentuk pembuktian bahwa jumlah sudut-sudut suatu segitiga sama dengan 180° :

Langkah pertama buat garis sejajar pada salah satu sisi segitiga



Selanjutnya, dikarenakan $\angle x$, $\angle a$, dan $\angle y$ membentuk garis lurus maka $x + a + y = 180^\circ$. Dikarenakan $\angle b = \angle x$ merupakan sudut dalam yang berseberangan dan $\angle c = \angle y$ juga merupakan sudut dalam yang berseberangan maka $a + b + c = 180^\circ$. Maka terbukti bahwa jumlah sudut-sudut dalam suatu segitiga sama dengan 180° .

2.3.4 Garis-garis Istimewa pada Segitiga

Untuk sebarang segitiga bisa kita gambarkan garis istimewa yakni Garis Sumbu, Garis Tinggi, Garis Berat dan juga Garis Bagi. Untuk sebarang segitiga ini juga terdapat 3 buah sumbu yakni 3 buah garis tinggi, 3 buah garis berat dan 3 buah garis bagi. Kenapa disebut istimewa? karena dari ketiga garis pada tiap-tiap garis khusus/istimewa itu mempunyai satu titik persekutuan.

DAFTAR PUSTAKA

- Iswadji, D., 2001. *Geometri Ruang*. 1 penyunt. Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA, UNY.
- Mulyati, N. d., 2017. *Geometri Dasar*. 1 penyunt. Gowa: Agma.
- Shadiq, F., 2004. *Geometri*. 1 penyunt. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah PPG Matematika.

BAB 3

JAJAR GENJANG, PERSEGI PANJANG, PERSEGI, LAYANG-LAYANG, TRAPESIUM, BELAH KETUPAT

Oleh Joni Wilson Sitopu

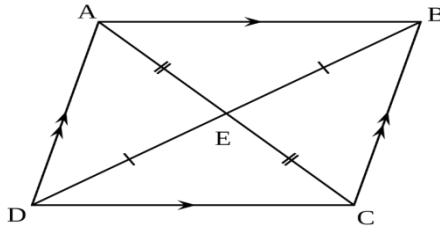
3.1 Pendahuluan

Segi empat adalah bangun datar yang memiliki empat sisi. Bangun datar segi empat terdiri dari persegi, persegi panjang, belah ketupat, jajar genjang, layang layang, dan trapezium.

3.2 Jajar Genjang

Jajaran genjang adalah segi empat sederhana (tidak berpotongan sendiri) dengan dua pasang sisi sejajar. Sisi-sisi jajar genjang yang berhadapan atau berhadapan sama panjang dan sudut-sudut berlawanan jajargenjang sama besar. Kesesuaian sisi yang berlawanan dan sudut yang berlawanan adalah konsekuensi langsung dari postulat paralel Euclidean dan tidak ada kondisi yang dapat dibuktikan tanpa mengacu pada postulat paralel Euclidean atau salah satu formulasi ekuivalennya.

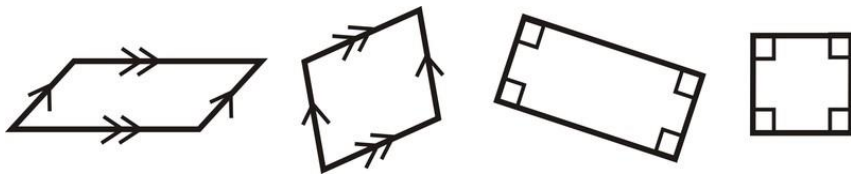
Menurut Nuharini & Wahyuni (2008) jajar genjang adalah bangun datar segi empat yang dibentuk dari sebuah segitiga dan bayangannya yang diputar setengah putaran (180^0) pada titik tengah salah satu sisinya.



Jajaran genjang ini adalah belah ketupat karena tidak memiliki sudut siku-siku dan sisi yang tidak sama.

Jajaran genjang adalah Segi empat dengan dua pasang sisi sejajar.

Contoh :



Perhatikan bahwa setiap pasang sisi ditandai sejajar. Seperti halnya persegi panjang dan bujur sangkar, ingatlah bahwa dua garis dikatakan sejajar jika keduanya tegak lurus terhadap garis yang sama. Setelah kita mengetahui bahwa segiempat adalah jajaran genjang, kita dapat menemukan beberapa sifat tambahan.

Teorema Sisi Berlawanan : Jika segiempat adalah jajaran genjang, maka sisi yang berlawanan kongruen.

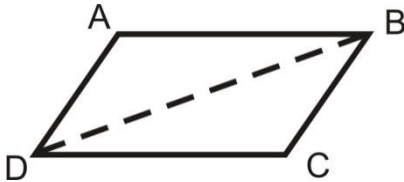
Teorema Sudut Berlawanan: Jika segiempat adalah jajaran genjang, maka sudut yang berlawanan adalah kongruen.

Teorema Sudut Berturutan : Jika segiempat adalah jajaran genjang, maka sudut berurutannya adalah pelengkap.

Teorema Paralelogram Diagonal : Jika segiempat adalah jajaran genjang, maka diagonalnya saling membagi dua.

Untuk membuktikan tiga teorema pertama, salah satu diagonal harus ditambahkan ke gambar dan kedua segitiga dapat dibuktikan kongruen.

Bukti Teorema Sisi Berlawanan



Perhatikan :

$ABCD$ adalah jajaran genjang dengan BD diagonal

Buktikan : $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

$ABCD$ adalah jajaran genjang dengan BD diagonal

Dari definisi jajar genjang, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Dari teorema sudut Alternate Interior,

$$\angle ABD \cong \angle BDC, \angle ADB \cong \angle DBC,$$

Sifat Reflexive, $\overline{BD} \cong \overline{DB}$

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB$$

Sudut kongruen, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

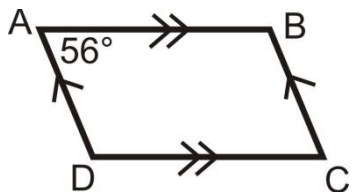
Bukti Teorema Sudut Berlawanan hampir identik.

Untuk langkah terakhir, sudutnya kongruen.

Contoh :

$ABCD$ adalah jajaran genjang. Jika $\angle A = 56^\circ$, tentukan besar ketiga sudut lainnya.

Penyelesaian :

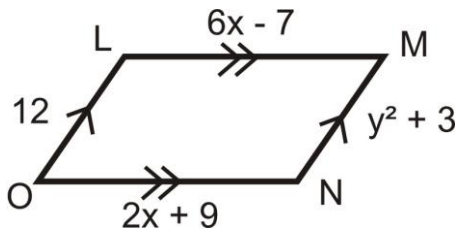


Perhatikan gambar jajaran genjang sbb;

Jika $\angle A = 56^\circ$, maka $\angle C = 56^\circ$, karena sudutnya berlawanan. $\angle B$ dan $\angle D$ adalah sudut berurutan dengan dengan $\angle A$, jadi keduanya merupakan pelengkap $\angle A$. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $56^\circ + \angle B = 180^\circ$, $\angle B = 124^\circ$. $\angle D = 124^\circ$.

Contoh :

Diketahui gambar dibawah ini ;



Tentukan nilai x dan y

Penyelesaian :

Sisi yang berlawanan kongruen, sehingga kita dapat mengatur setiap pasangan sama satu sama lain dan menyelesaikan kedua persamaan.

$$6x - 7 = 2x + 9$$

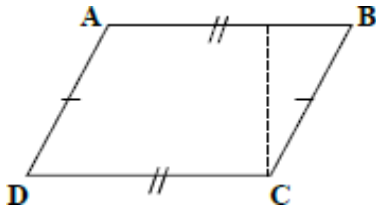
$$y^2 + 3 = 12$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

Meskipun $y = 3$ atau -3 , panjangnya tidak boleh negatif, jadi $y = 3$.

Dari definisi dan contoh diatas dapat kita peroleh sifat sifat jajargenjang, Kita perhatikan gambar dibawah ini,



Sifat-Sifat Jajargenjang ;

1. Sisi-sisi yang berhadapan sama panjang
2. Kedua diagonalnya saling membagi dua sama panjang
3. Jumlah sudut yang berdekatan
4. Sudut yang berhadapan sama besar
5. Jumlah semua sudut dalamnya

Keliling dan Luas Jajargenjang

Sebuah jajargenjang dengan panjang sisi alas a cm dan lebar b cm mempunyai keliling :

$$K = 2 \times (a + b)$$

Sebuah jajargenjang dengan panjang sisi alas a cm dan tinggit t cm mempunyai luas

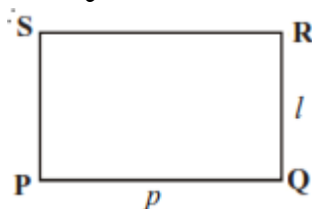
$$L = (a \times t) \text{ cm}$$

3.3 Persegi Panjang

Dalam geometri bidang Euclidean, persegi panjang adalah segiempat dengan empat sudut siku-siku. Ini juga dapat didefinisikan sebagai: segiempat sama sisi, karena sama sisi berarti semua sudutnya sama ($360^\circ/4 = 90^\circ$); atau jajaran genjang yang mengandung sudut siku-siku. Persegi panjang yang keempat sisinya sama panjang adalah persegi. Istilah "lonjong" kadang-kadang digunakan untuk merujuk pada persegi panjang bukan persegi.

Menurut Sujatmiko (2005) persegi panjang adalah bangun datar segi empat yang memiliki dua pasang sisi sejajar dan sama panjang sertamemiliki empat sudut siku-siku.

Sebuah persegi panjang dengan simpul (*vertices*) PQRS akan dilambangkan sebagai $\square PQRS$.



Kata persegi panjang berasal dari bahasa Latin *rectangulus*, yang merupakan gabungan dari *rectus* (sebagai kata sifat, kanan, tepat) dan *angulus* (sudut).

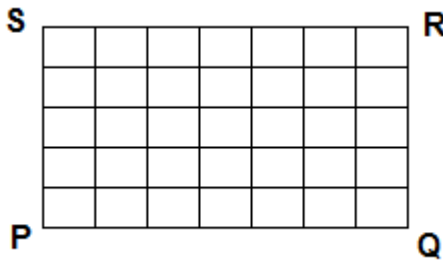
Persegi panjang silang adalah segiempat bersilangan (berpotongan sendiri) yang terdiri dari dua sisi persegi panjang yang berlawanan bersama dengan dua diagonal (oleh karena itu hanya dua sisi yang sejajar). Ini adalah kasus khusus anti paralelogram, dan sudutnya bukan sudut siku-siku dan tidak semuanya sama, meskipun sudut yang berlawanan adalah sama. Geometri lain, seperti bola, eliptik, dan hiperbolik, memiliki apa yang disebut persegi panjang dengan sisi berlawanan sama panjang dan sudut sama yang bukan sudut siku-siku.

Pandang persegi panjang PQRS, sisi-sisinya $PQ = p$ disebut panjang, $QR = l$ disebut lebar.

Keliling (K) persegi panjang adalah jumlah dari sisi-sisi persegi panjang tersebut yaitu:

$$K = p + l + p + l = 2(p + l).$$

Kemudian kira perhatikan gambar berikut ;



Dari gambar diatas $\square PQRS$ merupakan persegi panjang dengan panjang 7 persegi satuan dan lebar 5 persegi satuan.

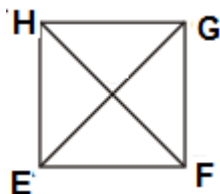
Maka luas dari $\square PQRS$ = banyaknya persegi dalam luas $PQRS$ yaitu sebanyak 35 satuan yaitu dari hasil kali panjang dan lebar $\square PQRS$. Sehingga Luas (L) dari persegi panjang adalah:

$$L = p \times l$$

3.4 Persegi

Persegi merupakan bangun datar segiempat yang sudut-sudutnya merupakan sudut siku-siku dan semua sisi-sisinya sama panjang.

Menurut Nuharini & Wahyuni (2008) persegi adalah bangun datar segi empat yang memiliki empat sisi sama panjang dan empat sudut siku-siku.



Perhatikan persegi $EFGH$. Sisi $EF=FG=GH=HE = s$ dengan s merupakan sisi dari persegi $EFGH$.

Keliling dan Luas Persegi

Persegi dengan panjang sisi s mempunyai keliling:

$$K = s + s + s + s = 4s$$

Persegi dengan panjang sisi s mempunyai luas (L) yaitu

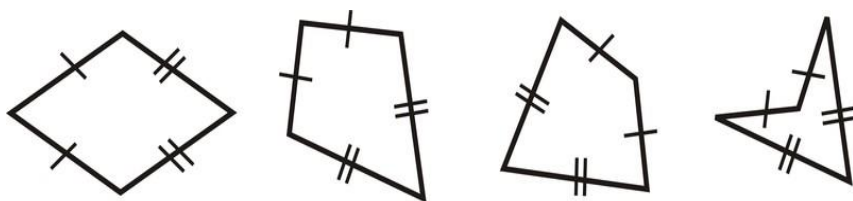
$$L = s \times s = s^2$$

3.5 Layang layang

Segiempat terakhir yang akan kita pelajari adalah layang-layang. Seperti yang mungkin kita pikirkan, ini terlihat seperti layang-layang tradisional yang diterbangkan di udara.

Layang-layang: Segi empat dengan dua pasang sisi kongruen yang berdekatan.

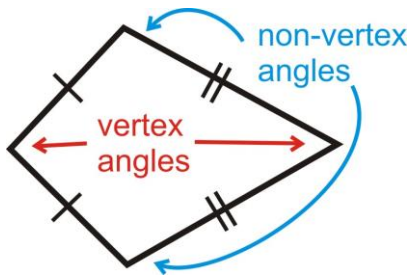
Beberapa contoh:



Dari definisi tersebut, layang-layang adalah satu-satunya segi empat yang dapat berbentuk cekung, seperti kasus layang-layang terakhir. Jika itu layang-layang cekung, maka disebut anak panah.

Sudut antara sisi kongruen disebut sudut **vertex**. Sudut lainnya disebut sudut **non-vertex**. Jika kita menggambar diagonal melalui sudut vertex, kita akan memiliki dua segitiga yang kongruen.

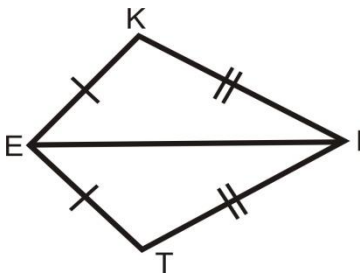
Menurut Nuharini & Wahyuni (2008), layang-layang adalah bangun datar segi empat yang dibentuk oleh gabungan dua segitiga sama kaki yang alasnya sama panjang dan berimpit.



Ambil : layang-layang dengan $\overline{KE} \cong \overline{TE}$, dan $\overline{KI} \cong \overline{TI}$

Buktikan : $\angle K \cong \angle T$

Perhatikan gambar dibawah ini,



$\overline{KE} \cong \overline{TE}$, dan $\overline{KI} \cong \overline{TI}$

Sifat Reflexive, $\overline{EI} \cong \overline{EI}$

$\triangle KEI \cong \triangle TEI$

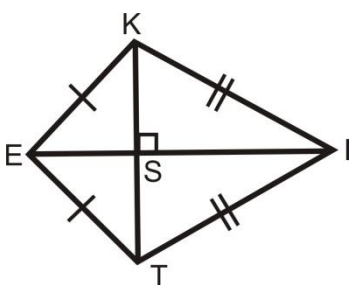
$\angle K \cong \angle T$

Teorema 1: Sudut-sudut bukan sudut sebuah layang-layang adalah kongruen.

Teorema 2: Diagonal yang melalui sudut sudut adalah garis bagi sudut untuk kedua sudut.

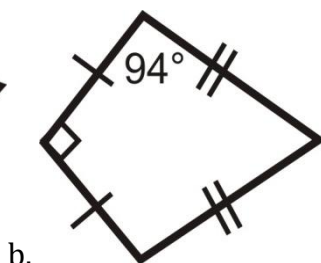
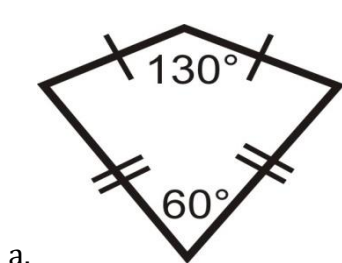
Pembuktian Teorema 2 sangat mirip dengan pembuktian Teorema 1 di atas.

Gunakan informasi ini untuk membantu membuktikan diagonal tegak lurus seperti gambar dibawah ini.



Contoh ;

Tentukan dua ukuran sudut lainnya pada layang-layang di bawah ini



ambil :

a) Dua sudut di sebelah kiri adalah sudut **non-vertex**, yang kongruen.

$$130^\circ + 60^\circ + x + x = 360^\circ$$

$$2x = 170^\circ$$

$$x = 85^\circ \text{ Kedua sudutnya } 85^\circ.$$

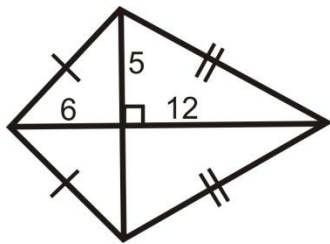
b) Sudut non-simpul lainnya juga 94° . Untuk mencari sudut keempat, kurangi tiga sudut lainnya dari 360° .

$$90^\circ + 94^\circ + 94^\circ + x = 360^\circ$$

$$x = 82^\circ$$

Pasangan kongruen berbeda. Artinya belah ketupat dan bujur sangkar tidak bisa menjadi layang-layang.

Contoh : Gunakan Teorema Pythagoras untuk mencari panjang sisi layang-layang.



Penyelesaian : Ingat bahwa Teorema Pythagoras adalah $a^2 + b^2 = c^2$, di mana c adalah sisi miringnya. Dalam layang-layang ini, semua sisinya adalah sisi miring.

$$6^2 + 5^2 = h^2$$

$$12^2 + 5^2 = j^2$$

$$36 + 25 = h^2$$

$$144 + 25 = j^2$$

$$61 = h^2$$

$$169 = j^2$$

$$\sqrt{61} = h$$

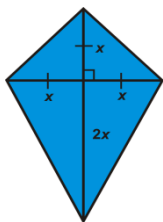
$$13 = j$$

3.6 Trapezium

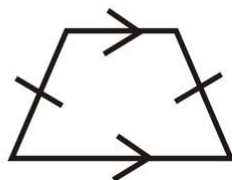
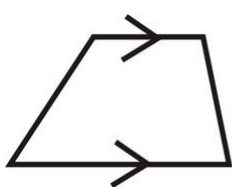
Menurut Nuharini & Wahyuni (2008), trapesium adalah bangun datar segi empat yang mempunyai tepat sepasang sisi yang berhadapan sejajar. Sisi sejajar disebut sisi alas dan sisi atas, sedangkan yang lain disebut kaki trapesium.

Tidak seperti jajaran genjang, trapesium hanya memiliki satu set garis sejajar. Dua sisi lainnya tidak memiliki batasan.

Trapesium : segi empat yang memiliki tepat sepasang sisi yang sejajar.

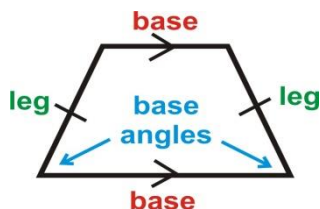


Contoh :



Trapesium sama kaki: Trapesium yang sisi-sisinya tidak sejajar.

Trapesium ketiga di atas adalah contoh trapesium sama kaki. Anggap saja sebagai segitiga sama kaki dengan bagian atas terpotong. Trapesium sama kaki juga memiliki bagian yang diberi label seperti segitiga sama kaki. Kedua sisi sejajar disebut alas



Trapesium sama kaki

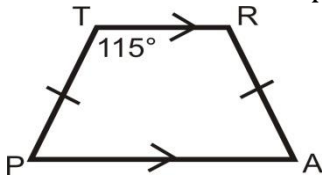
Pada Teorema sudut dasar dengan segitiga sama kaki. Teorema tersebut menyatakan bahwa dalam segitiga sama kaki, kedua sudut alasnya kongruen. Properti ini berlaku untuk

trapesium sama kaki. Dua sudut sepanjang alas yang sama dalam trapesium sama kaki juga akan kongruen. Sehingga diperoleh dua pasang sudut kongruen.

Teorema 3 : Sudut alas trapesium sama kaki adalah kongruen.

Contoh :

Perhatikan TRAP trapesium di bawah ini. Tentukan $\angle A$?



Solusi: TRAP adalah trapesium sama kaki. Jadi, $\angle R = 115^\circ$, menurut Teorema 3. Untuk mencari $\angle A$, buat persamaan.

$$115^\circ + 115^\circ + \angle A + \angle P = 360^\circ$$

$$230^\circ + 2\angle L = 360^\circ \rightarrow \angle L = \angle P$$

$$2\angle A = 130^\circ$$

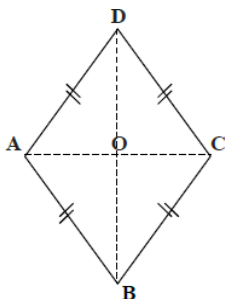
$$\angle A = 65^\circ$$

Perhatikan bahwa $\angle R + \angle A = 115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$. Sudut-sudut ini akan selalu pelengkap karena teorema sudut interior berturutan. Oleh karena itu, dua sudut sepanjang kaki yang sama (atau sisi non-paralel) selalu akan menjadi tambahan. Hanya dalam trapesium sama kaki sudut yang berlawanan juga akan menjadi pelengkap.

3.7 Belah Ketupat

Menurut Sujatmiko (2005), belah ketupat merupakan bangun datar segi empat yang dibentuk dari segitiga sama kaki dan bayangannya setelah dicerminkan terhadap alasnya.

Belah ketupat adalah jajargenjang yang dua sisi berdekatnya sama panjang.



Sifat-Sifat Belah Ketupat

1. Sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang
2. Semua sisi sama panjang
3. Kedua diagonalnya saling berpotongan tegak lurus
4. Kedua diagonalnya saling membagi dua sama panjang
5. Jumlah sudut yang berdekatan 180^0
6. Sudut yang berhadapan sama besar
7. Sudut-sudut dalam belah ketupat dibagi dua sama besar oleh diagonal-diagonalnya
8. Jumlah semua sudut dalamnya 360^0

Keliling dan Luas Belah ketupat

1. Belahketupat dengan panjang sisi s cm mempunyai keliling:
 $K = (4 \times s)$
2. Belahketupat dengan panjang diagonal 1 d_1 cm dan panjang diagonal dua d_2 cm, mempunyai luas:
 $L = (1/2 \times d_1 \times d_2) \text{ cm}^2$

DAFTAR PUSTAKA

- Bennett, Albert B, Burton, Laurie J, & Nelson, L. Ted. (2012). Mathematics for elementary teacher a conceptual approach. New york: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Hodgkin, Luke. (2005). A history of mathematics from mesopotamia to modernity. New York: Oxford University Press
- Jiagu, Xu (2010). Lecture Notes On Mathematical Olympiad Courses For Junior Section (Volume I). Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Karim, Muchtar Abdul, dkk. (2009). Pendidikan Matematika 2. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Manik, Rosida, Dame (2009). Penunjang Belajar Matematika. Jakarta: Pusat Pembukuan Departemen Pendidikan Nasional.
- Rich Barnet (2001). Geometry Scaum's Easy Outlines. McGraw-Hill Companies.
- Nuharini, Dewi dan Tri Wahyuni. (2008). Matematika Konsep dan Aplikasinya. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.
- Sujatmiko, Ponco.(2005). Matematika Kreatif 1. Solo : P.T Tiga Serangkai.
- Tanton, J (2005). Encyclopedia of Mathematics. New York: Fact On File, Inc.

BAB 4

LINGKARAN

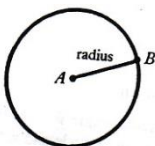
Oleh Mesak Ratuanik

4.1 Pendahuluan

Pada bab ini akan dijelaskan tentang unsur-unsur lingkaran serta teorema pada lingkaran. Bagian ini merupakan materi pengantar yang menjadi dasar untuk bab-bab selanjutnya.

4.2 Pengertian Dasar

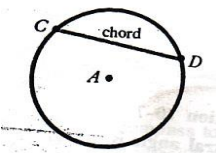
Lingkaran adalah himpunan titik- titik pada suatu bidang datar yang jaraknya sama terhadap titik tertentu.



AB adalah jari- jari dari lingkaran A. Tiap titik yang terletak pada adalah titik akhir dari jari- jari yang lain.

Definisi 4.2.1

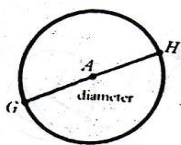
Jari- jari lingkaran adalah ruas garis yang titik akhirnya merupakan pusat dan sebuah titik pada lingkaran



CD adalah tali busur lingkaran A. Tiap pasang titik- titik ;pada lingkaran tali busur lingkaran membentuk

Definisi 4.2.2

Tali busur lingkaran adalah ruas garis yang titik akhirnya terletak pada lingkaran.

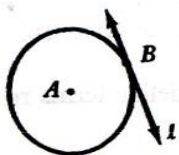


GH adalah diameter lingkaran A. Tiap pasang titik- titik pada lingkaran segaris dengan diameter lingkaran.

Definisi 4.2.3

Diameter lingkaran adalah tali busur yang merupakan pusat lingkaran.

Tali busur, jari- jari, dan diameter adalah ruas garis yang mempunyai hubungan dengan lingkaran. Definisi berikut menggambarkan beberapa garis dan sudut yang juga mempunyai hubungan dengan lingkaran.

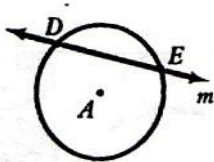


Garis l hanya mempunyai titik B yang merupakan titik persekutuan dengan lingkaran A.

Garis l merupakan garis singgung terhadap lingkaran A. Titik B disebut titik singgung

Definisi 4.2.4

Garis singgung terhadap sebuah lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik.

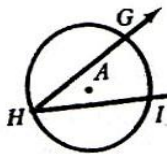


Garis m mempunyai dua titik persekutuan dengan lingkaran A .

Garis m adalah secan lingkaran A .

Definisi 4.2.5

Secan (tali busur) lingkaran adalah ruas garis yang memotong lingkaran tepat di dua titik.

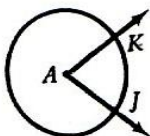


Titik sudut dari sudut GHI terletak pada lingkaran A . Kaki- kaki sudut GHI memotong lingkaran A di titik G dan I .

Sudut GHI adalah sudut keliling.

Definisi 4.2.6

Sudut keliling adalah sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran dan kaki- kaki sudutnya merupakan tali busur lingkaran.

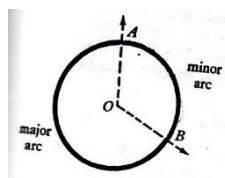


Titik sudut dari sudut KAJ adalah pusat lingkaran A . Sudut KAJ adalah sudut pusat.

Definisi 4.2.7

Sudut pusat adalah sudut yang titik sudutnya merupakan pusat lingkaran.

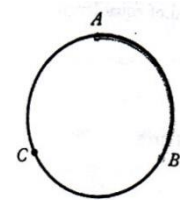
Ukuran Derajat Busur



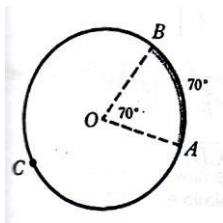
Ketika dua titik (yang bukan merupakan titik akhir dari diameter) terletak pada lingkaran, terbentuk dua busur yang pertama disebut busur besar dan yang lainnya disebut busur kecil.

Definisi 4.2.8

Busur kecil adalah busur yang terletak pada bagian dalam sudut pusat sedangkan yang sebaliknya disebut busur besar.



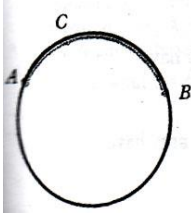
AB merupakan busur kecil yang dibentuk oleh titik A dan B. Untuk membentuk busur besar titik yang juga disertakan. ACB merupakan busur besar yang dibentuk oleh A dan B.



Besar suatu busur dibentuk oleh besar sudut pusatnya. Sebagai contoh, $m \widehat{AB} = m \angle AOB = 70$ dan $m \widehat{ACB} = 360 - 70 = 290$

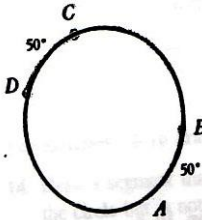
Definisi 4.2.9

Besar busur kecil adalah besar sudut pusatnya. Besarnya busur besar adalah 360 dikurangi besarnya busur kecil.



Titik C terletak pada busur AB. Dua busur, AC dan CB dibuat untuk membentuk busur AB.

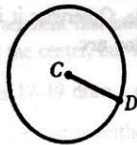
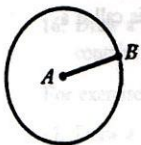
Postulat penambahan busur. Jika C terletak pada AB, maka $AC + m CB = m AB$.



Busur DC dan busur BA pada lingkaran keduanya mempunyai besar 50° . Kita menhatakan bahwa kedua busur tersebut kongruen.

Definisi 4.2.10

Jika dua busur lingkaran mempunyai besar yang sama maka kedua busur tersebut disebut kongruen. Jika AB dan CD kongruen, kita menulis $AB = CD$.



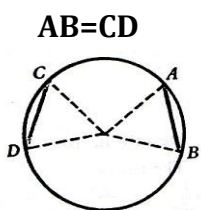
Jari-jari AB dan jari-jari CD sama panjangnya, lingkaran yang terbentuk adalah kongruen.

Definisi 4.2.11

Dua lingkaran kongruen jika mempunyai jari- jari yang sama panjangnya.

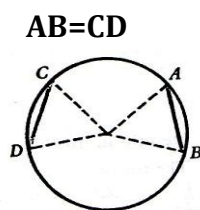
Diketahui tali busur kongruen.

Diketahui busur kongruen.



Apakah $AB=CD$?

Mengapa?



Apakah $AB = CD$?

Mengapa?

Teorema 4.2.1

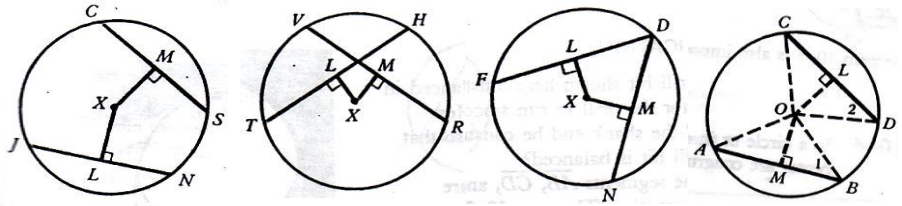
Dalam sebuah lingkaran atau dalam tali busur lingkaran yang kongruen terdapat busur kecil yang kongruen

Teorema 4.2.2

Dalam sebuah lingkaran atau dalam busur kecil lingkaran yang kongruen terdapat tali busur yang kongruen.

4.3 Tali Busur dan Jarag dari Pusat

Pada setiap gambar sepasang tali sama dan sebangun diberikan.



Di setiap kasus apakah $XL = XM$?

Contoh di atas meyakinkan teorema berikut.

Teorema 4.3.1

Dalam satu lingkaran atau di dalam lingkaran kongruen, tali busur yang kongruen adalah berjarak sama dari pusat.

Pembuktian

Dipunyai : Lingkaran O, AB kongruen CD, OM tegaklurus AB, OL tegaklurus CD.

Buktikan : $OM = OL$

Pernyataan	Alasan
1. AB kongruen CD	1. Dipunyai
2. $OA = OB = OC = OD$	2. Pengertian dari lingkaran
3. OA kongruen OB kongruen OC kongruen OD	3. Definisi dari bagian-bagian yang sebangun
4. Segitiga AOB kongruen Segitiga COD	4. Postulat Sisi, Sisi, Sisi
5. Sudut 1 kongruen sudut 2	5. CPCTC
6. OM tegaklurus AB, OL tegaklurus CD	6. Dipunyai
	7. Garis tegaklurus membentuk

Pernyataan	Alasan
7. Sudut OMB kongruen sudut OLD, sudut OMB dan sudut OLD sudut siku-siku	sudut siku-siku sebangun
8. Segitiga OMB dan segitiga OLD segitiga siku-siku	8. Pengertian segitiga siku-siku
9. Segitiga OMB kongruen segitiga OLD	9. HA kongruen
10. OM kongruen OL	10. CPCTC
11. OM = OL	11. Definifisi dari bagian-bagian yang kongruen

4.4. Garis Sumbu Pada Tali Busur

Diketahui : Ruas garis AB adalah tali busur lingkaran O , dan l adalah garis sumbu yang tegak lurus ruas garis AB.

Bukti : O adalah sebuah titik dari garis l .

Pernyataan	Alasan
1. l adalah garis sumbu ruas garis AB.	1. Diketahui
2. $OA = OB$	2. Definisi lingkaran
3. O terletak pada garis l .	3. Sebuah titik yang memiliki jarak sama dari titik A dan B termasuk sumbu ruas garis AB. (Teorema 6-10).

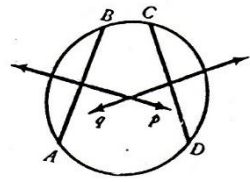
APLIKASI

Temukan pusat sebuah meja bundar.

Tahap 1 Pilih dua tali busur

ruas garis AB dan ruas garis CD.

Tahap 2 Gambar garis sumbu p dari ruas garis AB, dan sumbu q dari ruas garis CD.



Kesimpulan :

Berdasarkan teorem, pusat lingkaran terletak pada kedua garis p dan q . Oleh karena itu, pusat meja adalah titik perpotongan garis-garis tersebut.

Teorema 4.4.1

Jika sebuah garis melalui pusat sebuah lingkaran tegak lurus dengan tali busur yang bukan merupakan diameter lingkaran, maka garis ini membagi tali busur dan garis ini busur minor

Teorema 4.4.2

Jika sebuah garis melalui pusat lingkaran membagi dua sebuah tali busur yang bukan merupakan diameternya, maka garis ini tegak lurus dengan tali busur tersebut.

Diketahui : Lingkaran O dengan jari-jari 4 satuan. Ruas garis $OX \perp$ ruas garis PQ . Tali busur P berjarak 1 inchi dari O .

Temukan : PQ

Berdasarkan informasi yang diketahui $OP = 4$ dan $OY = 1$. Dengan menggunakan Teorema Pythagoras pada $\triangle OPY$, dapat

kita temukan bahwa $PY = \sqrt{15}$. Ruas garis OX membagi ruas garis PQ sama besar. Oleh karena itu $PQ = 2\sqrt{15}$

4.5 Garis Singgung pada Lingkaran

Tinjauan :

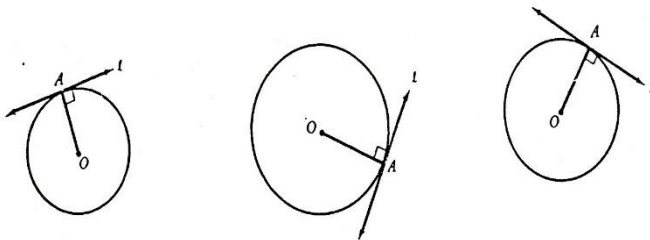
Sebuah garis menyinggung lingkaran jika garis tersebut memotong lingkaran tepat di satu titik.

Andaikan anda ingin mengukur sudut pojok dari sepotong kayu untuk membuat meja kecil. Untuk melakukan pekerjaan yang rapi harus menggambarkan busur lingkaran terlebih dahulu. Tepi papan harus menyinggung busur. Bagaimana busur dapat digambar?

Sebuah teorema pada pelajaran ini akan membantu memecahkan masalah tersebut.

Pada masing-masing gambar, ruas garis OA adalah jari-jari dan l tegak lurus ruas garis OA .

Apakah l merupakan garis singgung?

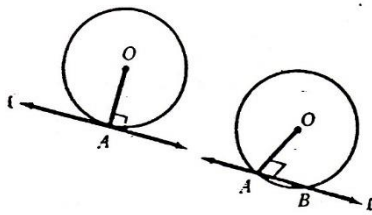


Teorema 4.5.1

Jika sebuah garis yang tegak lurus dengan jari-jari terletak di satu satu titik pada lingkaran, maka garis tersebut menyinggung lingkaran.

Diketahui : $l \perp$ ruas garis OA

Buktikan : l menyinggung lingkaran.



Perencanaan:

Menggunakan bukti tak langsung. Anggap l tidak menyinggung lingkaran. Berarti

l tidak memotong lingkaran atau l memotong lingkaran di dua tempat (dua titik). Akan kita selidiki pandangan tersebut.

Pernyataan	Alasan
1. l memotong lingkaran di titik B.	1. Pengandaian bukti tak langsung
2. Ruas garis $OA \perp l$	2. Diketahui
3. Ruas garis OB adalah sisi miring (garis hipotenusa) segitiga siku-siku.	3. Definisi sisi miring.
4. $OB > OA$	4. Panjang sisi miring lebih besar daripada sisi lainnya.
5. $OA = OB$	5. Defifnisi lingkaran

Pernyataan 4 dan 5 kontradiktif. Oleh karena itu pengandaian ditolak dan garis l menyinggung lingkaran.

Teorema 4.5.2

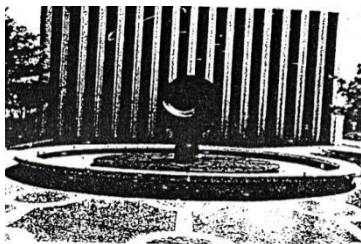
Jika sebuah garis menyinggung lingkaran, maka jari-jari yang digambarkan ke titik singgung tegak lurus dengan garis singgung.

Teorema 4.5.3

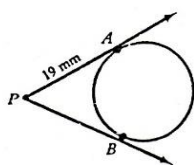
Jika sebuah garis tegak lurus dengan garis singgung pada satu titik lingkaran, maka pada garis tersebut terdapat pusat lingkaran.

Menyinggung dari sebuah titik ke lingkaran

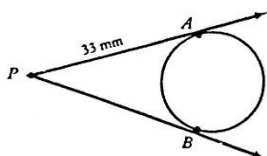
Seorang pengukur tanah berusaha menemukan pusat sebuah kolam air mancur. Tersedia tongkat dan transit. Teorema ini metode untuk menemukan pusat dengan alat tersebut.



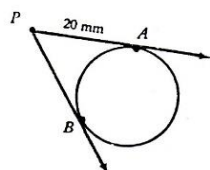
Pada masing-masing kasus, sinar PA dan sinar PB adalah garis singgung di A dan B . Ukur dengan penggaris atau busur derajat untuk mengetahui panjang yang belum diketahui.



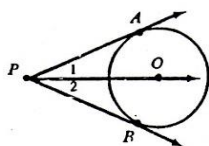
$$PA = 19 \text{ mm}, PB = ?$$



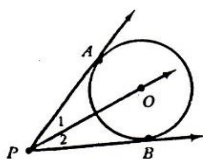
$$PA = 33 \text{ mm}, PB = ?$$



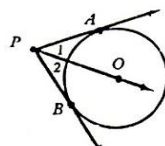
$$PA = 20 \text{ mm}, PB = ?$$



$$m\angle 1 = 24, m\angle 2 = ?$$



$$m\angle 1 = 25, m\angle 2 = ?$$



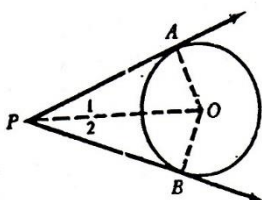
$$m\angle 1 = 38, m\angle 2 = ?$$

Teorema 4.5.4

Ruas garis singgung dari lingkaran ke titik di luar lingkaran kongruen dan membentuk sudut yang kongruen dengan garis yang menghubungkan pusat lingkaran dengan sebuah titik.

Diketahui : Sinar PA dan sinar PB menyinggung A dan B .

Buktikan : $PA \cong PB$ dan $\angle 1 \cong \angle 2$



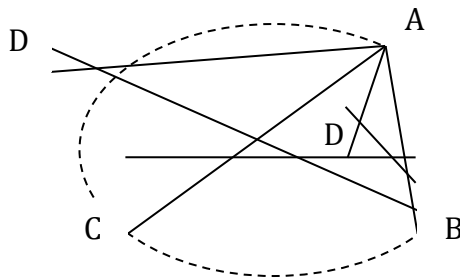
Pernyataan	Alasan
1. Gambar sinar PO dan jari-jari ruas garis OA dan ruas garis OB .	1. Konstruksi
2. $OA = OB$	2. Definisi jari-jari
3. $PO = PO$	3. Berhimpit
4. Ruas garis $OA \perp$ sinar PA dan ruas garis $OB \perp$ sinar PB	4. Teorema 10-9
5. $\triangle POA \cong \triangle POB$	5. SAS
6. Ruas garis $PA \cong$ ruas garis PB , $\angle 1 \cong \angle 2$	6. CPCTC

Teorema 4.5.5

Besar sudut keliling adalah setengah kali besar sudut pusat.

Aplikasi1

Teknik navigasi didasarkan pada Teorema 10-12. Jika titik C terletak pada busur lingkaran AB sedemikian rupa sehingga memiliki ukuran dua kali dari "sudut kritisnya", maka $m \angle ACB$ sama dengan sudut kritis. Jika D berada di lingkaran yang sama atau di dalamnya, kemudian $m \angle ADB$ akan sama dengan atau lebih besar dari sudut kritisnya. Ketika D di luar lingkaran, $m \angle ADB$ kurang dari sudut kritis dan sebuah kapal yang berada di titik D berada dalam posisi yang aman.



Aplikasi kedua ini didasarkan pada kasus khusus dari teorema 8-12, yang dinyatakan sebagai Teorema 8-13

Aplikasi 2

Seorang penggambar sering butuh untuk menarik dari sebuah titik tertentu di luar lingkaran dengan dua garis singgung lingkaran. Berikut adalah salah satu cara yang dapat dilakukan.

Step1-

Dari titik P di luar suatu lingkaran dengan pusat O, menggambar titik tengahnya OP dan M.

Step2-

Gambar lingkaran dengan diameter OP yang diberikan memotong lingkaran pada titik-titik A dan B. Gambar PA dan PB. Teorema 10-12 mengatakan kepada kita bahwa $\angle OAP$ dan $\angle OBP$ sudut yang benar.

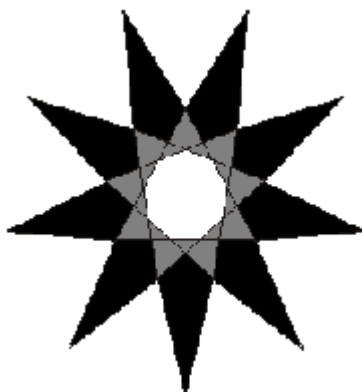
Step3-

Teorema 10-8 mengatakan kepada kita bahwa PA dan PB bersinggungan dengan lingkaran yang diberikan.

Sudut – sudut yang muncul dari Penggabungan

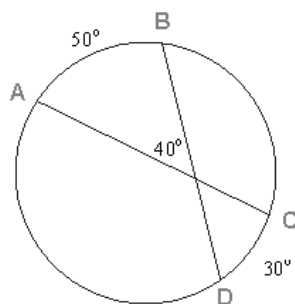
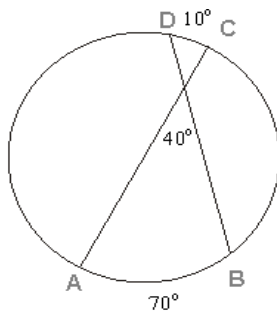
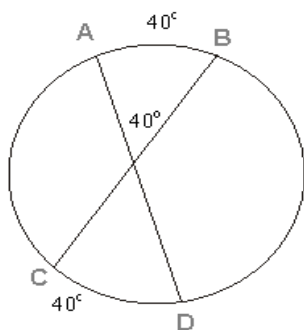
Poligon bintang digambar dengan menghubungkan setiap titik keempat dari 9 titik yang memiliki jarak sama pada sebuah lingkaran.

(See problem solving, p. 345)



Terdapat banyak sudut pada desain bintang ini yang kongruen. Di materi ini kita pelajari teorema yang dapat digunakan untuk membuktikan sudut-sudut kongruen ini.

Di setiap gambar $m\widehat{AB} + m\widehat{CD} = 80$



Gambar-gambar ini menjelaskan teorema yang digunakan.

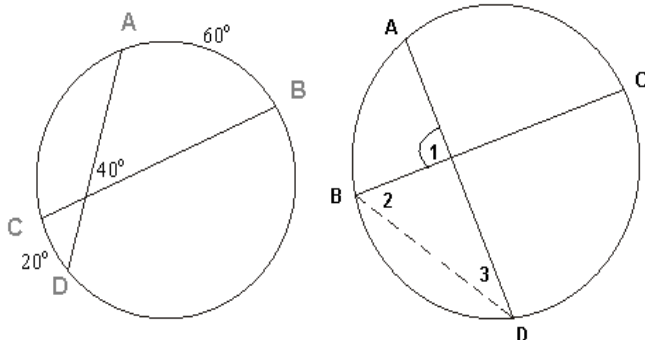
Theorem 4.5.6

Sebuah sudut yang muncul dari 2 gabungan yang memotong dalam sebuah lingkaran mempunyai ukuran sama dengan setengah dari jumlah busur.

BUKTIKAN

Dipunyai : gabungan AB and BC memotong di titik X

Tunjukkan : $m \angle AXB = \frac{1}{2} (m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$



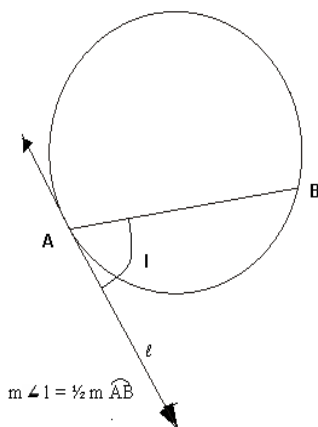
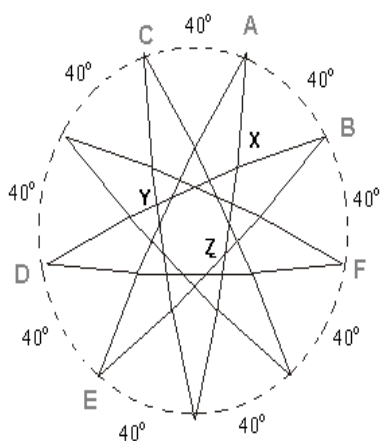
Pernyataan	Alasan
1. gambar raus garis BD	1. Dibuat
2. $m \angle 2 = \frac{1}{2} m\widehat{CD}$	2. teorema sudut dari 2 gabungan yang memotong dalam lingkaran
3. $m \angle 3 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$	3. Why?
4. $m \angle AXB = m \angle 2 + m \angle 3$	4. Why?
5. $m \angle AXB = \frac{1}{2} m\widehat{AB} + \frac{1}{2} m\widehat{CD}$	5. Substitusi (pernyataan 2,3,4)
6. $m \angle AXB = \frac{1}{2} (m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$	6. Properti distributive

APLIKASI

Menentukan besar sudut dari sudut-sudut pada poligon bintang di samping. Kita dapat gunakan teorema 10-14.

$$1. m \angle AXB = \frac{1}{2} (40 + 80) = 60$$

$$2. m \angle CYD = \frac{1}{2} (80 + 120) = 100$$



$$3. m \angle EZF = \frac{1}{2} (120 + 160) = 140$$

Ada sesuatu yang spesial dari teorema di atas dengan adanya garis tangen. Hal tersebut tercantum di bawah ini.

Teorema

Ukuran dari sebuah sudut yang terbentuk dari tangen dan sebuah gabungan gambar ke titik yang bersinggungan adalah setengah dari besar busur.

Sudut-sudut dan Ruas-ruas Garis yang Dibentuk oleh Tangen dan Secan.

Ketika para teknisi merancang menara radio, mereka harus tahu hitungan permukaan bumi yang akan menahan baja-baja radio dari menara.

Dalam bagian ini kita akan mempermudah masalah dengan memikirkan bagian beban berbentuk lingkaran pada bumi yang dilalui oleh kaki menara. Kita menanyakan : Jika kita tahu besar sudut yang dibentuk

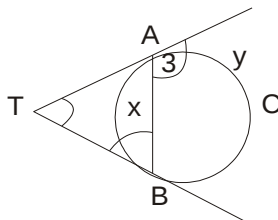
puncak menara dan tangen sinar terhadap lingkaran, kita dapat menemukan hitungan dari keliling lingkaran yang akan dikover baja-baja radio.

Teorema 4.5.7

Ukuran sebuah sudut yang dibentuk oleh dua tangen yang berpotongan terhadap lingkaran adalah setengah dari selisih dari besar busur-busur yang dibatasi persentuhan ruas garis.

Diberikan: $\overline{TA}$ dan $\overline{TB}$ adalah tangen sinar terhadap lingkaran,

Buktikan: $m\angle ATB = \frac{1}{2}(y - x)$



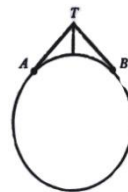
Pernyataan	Alasan
1. $m\angle 2 = \frac{1}{2}x$	1. Besar sudut yang dibentuk oleh tangen dan penghubung dua titik di lingkaran adalah setengah busur yang berpotongan
2. $m\angle 3 = \frac{1}{2}y$	2. Mengapa?
3. $m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$	3. Besar sudut luar sama dengan jumlah besar dua sudut dalam
4. $m\angle 1 = m\angle 3 - m\angle 2$	4. Mengapa?

Pernyataan	Alasan
5. $m\angle 1 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$	5. Substitusi
6. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(y - x)$	6. Mengapa?

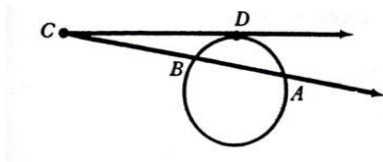
Teorema 4.5.8

Besar sebuah sudut yang dibentuk oleh tangen dan secan atau dua buah secan dari titik luar terhadap lingkaran adalah setengah dari selisih dari besar busur-busur yang dibatasi persentuhan ruas garis.

Pada bahasan sebelumnya kita bertanya berapa hitungan dari permukaan bumi yang akan dikover oleh tiang radio dari menara.



Pertanyaan yang sama pentingnya seberapa jauh baja radio menjangkau? Teorema pada halaman ini akan memberi taksiran bagus untuk menjawabnya.



Ingat bahwa $\overleftrightarrow{AC}$ adalah secan. Kita menyebut $\overline{CA}$ adalah bagian secan. $\overline{BC}$ disebut bagian secan luar.

Pikirkan Contoh lingkaran dengan sebuah tangen dan sebuah secan berikut.

Hubungan apa yang dapat kamu temukan dari ketiga contoh yang diberikan?

Jika sebuah bagian tangen dan bagian secan digambar pada sebuah lingkaran yang berasal dari sebuah titik eksterior, maka hasil kali panjang bagian tangen sama dengan hasil kali dari jumlah panjang seluruh bagian secan dengan panjang bagian secan luar.

Diberikan : $\odot O$ dengan bagian tangen $\overline{PT}$

Buktikan : $(PT)^2 = PS \cdot PR$

Rencana : Gambar $\overline{ST}$ dan $\overline{TR}$. Gunakan segitiga sebangun.

Pernyataan	Alasan
1. Gambar $\overline{ST}$ dan $\overline{TR}$	1. Bentuk
2. $\angle P \cong \angle P$	2. Sifat refleksi
3. $m\angle PTS = \frac{1}{2}m\overline{TS}$	3. Mengapa?
4. $m\angle SRT = \frac{1}{2}m\overline{TS}$	4. Mengapa?
5. $\angle PTS \cong \angle SRT$	5. Substitusi, definisi kongruen
6. $\triangle PTS \sim \triangle PRT$	6. Teorema Kesamaan AA
7. $\frac{PT}{PR} = \frac{PS}{PT}$	7. Definisi segitiga sama
8. $(PT)^2 = PS \cdot PR$	8. Teorema 7-1

Teorema 4.5.9

Jika dua tali (garis dalam lingkaran) berpotongan dalam lingkaran, maka hasil kali panjang ruas garis dari salah satu tali sama dengan hasil kali panjang ruas garis dari tali yang lain.

Teorema 4.5.10

Jika dua garis secan tergambar pada lingkaran dari titik eksterior, maka hasil kali panjang salah satu garis secan dan garis secan luarnya sama dengan hasil kali hasil kali panjang garis secan dan garis secan luar yang lain.

4.6 Rangkuman

- Lingkaran adalah himpunan titik- titik pada suatu bidang datar yang jaraknya sama terhadap titik tertentu.
- Jari- jari lingkaran adalah ruas garis yang titik akhirnya merupakan pusat dan sebuah titik pada lingkaran
- Tali busur lingkaran adalah ruas garis yang titik akhirnya terletak pada lingkaran.
- Garis singgung terhadap sebuah lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik.
- Secan (tali busur) lingkaran adalah ruas garis yang memotong lingkaran tepat di dua titik.
- Sudut keliling adalah sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran dan kaki- kaki sudutnya merupakan tali busur lingkaran.

- Sudut pusat adalah sudut yang titik sudutnya merupakan pusat lingkaran.
- Busur kecil adalah busur yang terletak pada bagian dalam sudut pusat sedangkan yang sebaliknya disebut busur besar.
- Besar busur kecil adalah besar sudut pusatnya. Besarnya busur besar adalah 360 dikurangi besarnya busur kecil.
- Dua lingkaran kongruen jika mempunyai jari- jari yang sama panjangnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Charles C. Carico, 1980. *Analytic Geometry*. John Wiley & Sons.
- Kusni. 2003. *Geometri*. Semarang: UNNES.
- Martin, G. 1982. *Transformation Geometry An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag.
- Suherman, Maman. 1986. *Geometri Analitik Datar*. Karunika Jakarta
- Sukirman. 2009. *Geometri Anlitik Bidang dan Ruang*. Universitas Terbuka.

BAB 5

MELUKIS SEGI EMPAT

Oleh Ridha Yuniara

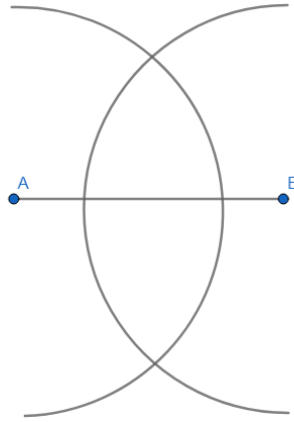
Segiempat dapat terbentuk jika terdapat empat titik pada bidang datar dan tiga titik tidak terdapat pada garis yang sama, sehingga segiempat dapat dibentuk dengan cara menghubungkan empat titik secara berurutan (Wagiyo dkk, 2008). Ada beberapa macam bangun datar segiempat yang diketahui secara umum, diantaranya adalah (1) Persegi panjang, (2) persegi, (3) Jajaran genjang, (4) Belah Ketupat, (5) Layang-layang, (6) Trapesium. Berikut adalah contoh langkah-langkah melukis persegi dan belah ketupat.

a. Melukis Persegi

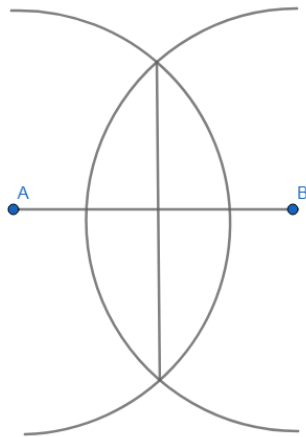
1. Buatlah ruas garis mendatar AB.



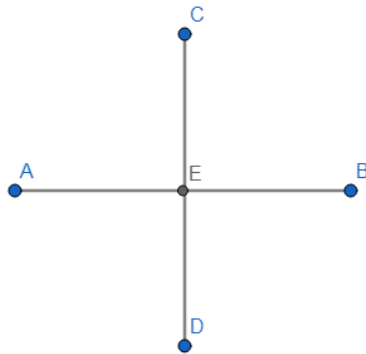
2. Gunakan jangka untuk menggambar busur lingkaran yang lebih dari setengah panjang ruas garis AB yang berpusat di titik A. Kemudian lakukan dengan cara yang sama pada titik B. Sehingga terdapat dua titik potong dari pertemuan kedua busur tersebut.



3. Hubungkanlah kedua titik potong tersebut sehingga memotong ruas garis AB.

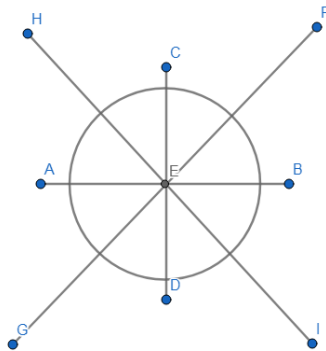


4. Titik potongan dengan ruas garis AB adalah titik pembagian dan diberi notasi, sehingga $AE = EB$.

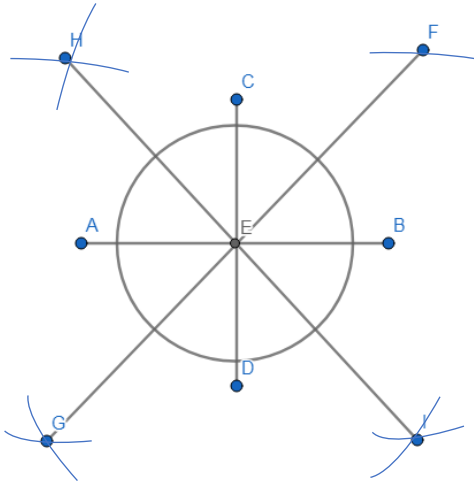


$$AE = EB$$

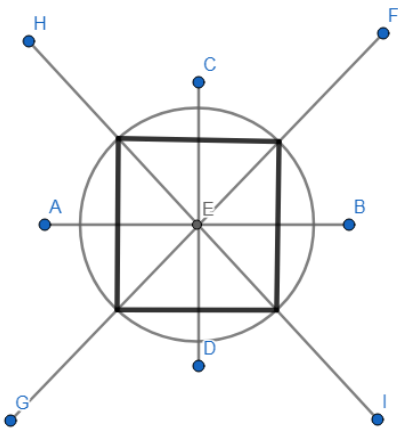
5. Gambarlah sebuah lingkaran yang jari-jarinya sembarang dan titik E sebagai pusatnya



6. Buatlah garis FG dan HI yang saling tegak lurus dengan membagi dua sudut 90° dari perpotongan ruas garis AB dan CD.



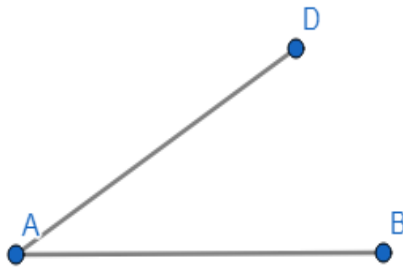
7. Hubungkan titik potong antara lingkaran dengan garis FG dan HI, sehingga terbentuklah persegi.



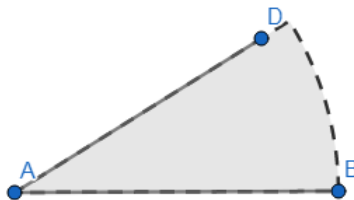
- b. Melukis Belah Ketupat
1. Buatlah ruas garis mendatar AB.



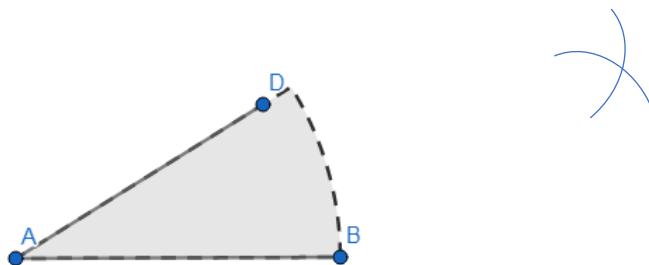
2. Buatlah garis lurus AD dimana panjang $AB = \text{panjang AD}$, AB berpotongan dengan AD di titik A dan membentuk sudut BAD.



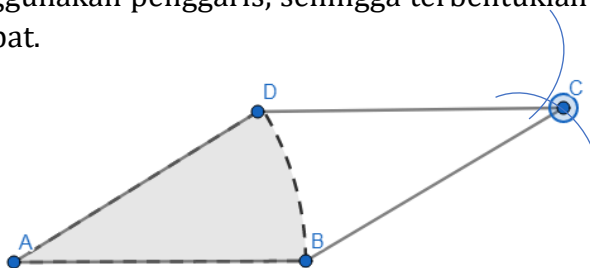
3. Gunakan jangka untuk membuat sebuah busur lingkaran dengan titik A sebagai pusatnya dan garis AB sebagai jari-jarinya sehingga memotong garis AB dan AD di titik B dan D.



4. Gunakan kembali jangka untuk membuat busur lingkaran dengan pusat di titik B dan jari-jari yang sama dengan garis AB. Lakukan hal yang sama terhadap titik D.



5. Hubungkan titik B dengan titik C dan D dengan menggunakan penggaris, sehingga terbentuklah belah ketupat.



DAFTAR PUSTAKA

- Byrd, G., & Lynn, B., & Pearce, C. 2013. Cambridge Checkpoint Mathematics Coursebook 8. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Hall, H. 1949. *School Geometry parts I-VI*. London: MacMillan and Co.
- Rich Barnet (2001). *Geometry Scaum's Easy Outlines*. McGraw-Hill Companies.
- Wagiyo, A., Surati, F., Supradiarini, I. 2008. *Pegangan Belajar Matematika untuk SMP/MTs Kelas VII*. Jakarta: Depdiknas.

BAB 6

LUAS DAN VOLUME KUBUS, BALOK, RHOMBOEDER DAN PARALELEPIPEDUM

Oleh Arini Ulfah Hidayati

6.1 Pendahuluan

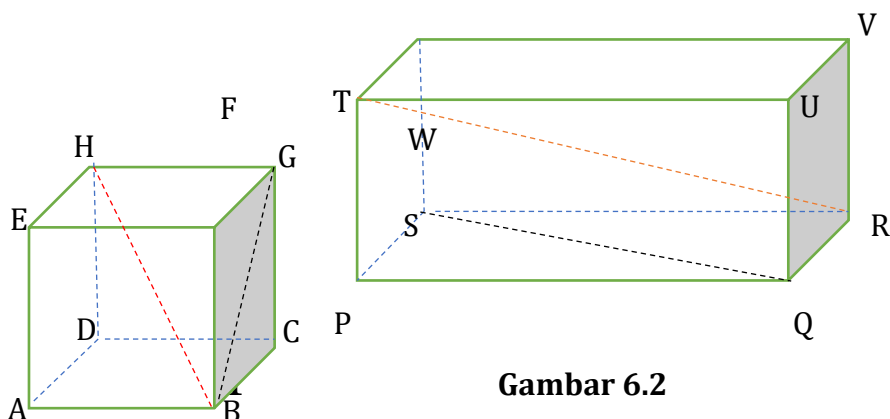
Dalam Geometri objek yang dikaji yaitu benda – benda pikiran yang sifatnya abstrak, sehingga pada waktu mengkaji suatu objek itu khususnya pada kegiatan belajar mengajar dalam kelas, objek abstrak itu contohnya balok atau kubus perlu ditunjukkan padanannya. Bentuk kongkrit dari suatu benda pikiran dapat berupa model atau gambar dari benda yang dimaksud. Sebaiknya sebelum memasuki kelas kita sudah siapkan gambar kubus, balok atau model keduanya.

Bangun ruang yang sangat dekat dengan kehidupan siswa adalah kubus dan balok dapat dilihat benda kongkritnya secara langsung seperti kotak makanan, almari buku, ruang tamu, ruang belajar dan juga buku- buku siswa yang tebal. Sebelumnya anda sudah mempelajari jaring – jaring dan bagian – bagian dari kubus dan balok, dalam BAB ini anda akan mempelajari luas dan volumenya termasuk rhomboeder dan paralelepipedum. Walaupun benda kongkritnya sudah ada banyak siswa yang masih kesulitan dalam menentukan luas dan volumenya sebagaimana dapat dicermati dari data penelitian internasional (TIMSS) dan NAEP secara konsisten menunjukkan bahwa pelajar lebih lemah dalam bidang pengukuran dari pada topik lain (Van de Walle, 2008), pengukuran disini yang dimaksud salah satunya adalah luas dan volume kubus dan balok. Dalam Bab 6 ini anda akan lebih memahami dan menemukan konsep khususnya luas dan volume bangun ruang kubus, balok,

rhomboeder dan paralelepipedum. Selanjutnya anda disajikan contoh soal dan latihan soal – soal terkait bangun ruang tersebut.

6.2 Luas Permukaan Kubus dan Balok

Sebelum memahami luas kubus dan balok sebaiknya Anda perlu memahami bagian – bagian tertentu atau keseluruhan dari suatu kubus atau balok, misalnya cara menghitung panjang diagonal ruang, panjang diagonal bidang , Perhatikan gambar berikut:



Dalam kubus dan balok anda mengenal dua macam diagonal yaitu diagonal bidang dan diagonal ruang. Diagonal bidang adalah diagonal dari persegi atau persegi panjang yang merupakan sisi dari kubus atau balok. Dari gambar di atas diagonal bidang ditunjukkan oleh garis BG pada kubus dan QS pada balok. Untuk mencari panjang diagonal bidang dapat dengan cara sebagai berikut:

Jika diketahui panjang sisi sebuah kubus adalah a cm maka panjang diagonal sisi BG adalah:

$$BG^2 = BC^2 + CG^2$$

$$BG^2 = a^2 + a^2$$

$$BG^2 = 2a^2$$

$$BG = a\sqrt{2} \text{ cm}$$

Begitu juga balok jika ingin mencari diagonal bidang balok gunakan teorema pythagoras. Karena pada kubus dan balok memiliki delapan titik sudut maka diagonal sisi kubus dan balok masing - masing adalah $2 \times 6 = 12$ buah. Sedangkan cara menghitung panjang diagonal ruang kubus adalah sebagai berikut:

Jika diketahui panjang sisi sebuah kubus adalah a cm maka panjang diagonal ruang kubus adalah:

Sebelum lebih jauh perlu diketahui panjang diagonal bidang kubus Gambar 2.2.1 adalah sama yaitu $a\sqrt{2}$ cm maka begitu juga dengan panjang BD adalah $a\sqrt{2}$ cm, gunakan lagi dalil teorema pythagoras:

$$HB^2 = BD^2 + DH^2$$

$$HB^2 = 2a^2 + a^2$$

$$HB^2 = 3a^2$$

$$HB = a\sqrt{3} \text{ cm}$$

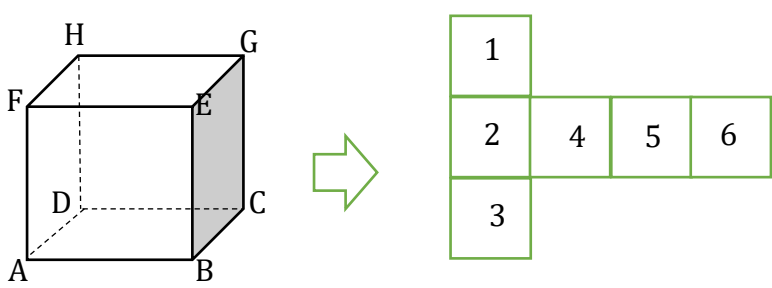
Pada umumnya panjang diagonal ruang sebuah balok samadengan akar kuadrat dari jumlah kuadrat bilangan - bilangan yang menyatakan panjang, lebar dan tinggi dari balok.

Setelah Anda memahami cara menentukan panjang diagonal bidang dan panjang diagonal ruang dari kubus dan balok maka anda dapat mempelajari bagaimana menentukan luas kubus dan balok.

Luas permukaan Kubus

Kubus merupakan bangun ruang yang dibatasi oleh enam bidang sisi yang memiliki ukuran yang sama berbentuk persegi atau bujur sangkar (Raina & Yusraningsih: 2021). Kubus memiliki 6 sisi, 12 rusuk, 12 titik sudut, 12 diagonal bidang, 4 diagonal ruang dan 2 bidang diagonal. Untuk menemukan luas permukaan kubus maka kita harus membuka jaring – jaring kubus tersebut.

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 6.2.

Jika Anda amati maka kubus jika dibuka akan membentuk jaring – jaring seperti gambar di atas, setiap angka membentuk bangun datar persegi, maka untuk mengetahui luas nya persegi 1 sampai dengan 6 dijumlahkan hasil luasnya. Misalkan luas persegi jika sisinya a cm maka luasnya a^2 . Maka untuk menentukan luas permukaan kubus dari kubus ABCDEFGH di atas maka Anda cukup menjumlahkah jumlah luas setiap bidang sisinya, jika rusuk kubus adalah a cm maka setiap bidang sisi kubus adalah $a^2\text{ cm}^2$, karena kubus memiliki 6 bidang sisi maka

luas permukaan kubus adalah $6 \times a^2 \text{ cm}^2$. Maka dapat disimpulkan

Luas permukaan kubus sama dengan enam kali kuadrat bilangan yang merupakan panjang rusuknya.

Contoh Soal:

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk sepertiga dari rusuk kubus PQRS.TUVW jika luas kubus PQRS.TUVW adalah 486 cm^2 , maka berapakah perbandingan rusuk kubus ABCD.EFGH dengan kubus PQRS.TUVW ...

Pembahasan :

Diketahui :

Luas kubus PQRS.TUVW = 486 cm^2 maka rusuknya adalah

$$L = 6 \times s^2$$

$$486 \text{ cm}^2 = 6 \times s^2$$

$$s^2 = \frac{486 \text{ cm}^2}{6} = 81 \text{ maka } s = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}^2$$

Pada soal diketahui panjang rusuk kubus ABCD.EFGH = $\frac{1}{3}$ dari kubus PQRS.TUVW maka

$$\text{Rusuk kubus ABCD.EFGH} = \frac{1}{3} \times 9 = 3 \text{ cm}$$

Maka perbandingan rusuk kubus ABCD.EFGH dan rusuk kubus PQRS.TUVW adalah 3 : 9 atau 1 : 3

2. Diketahui kubus dengan panjang diagonal ruang $8\sqrt{3} \text{ cm}$, maka berapakah luas kubus jika tanpa tutup...

Pembahasan :

Jika diketahui panjang diagonal ruang adalah $8\sqrt{3}$ maka panjang rusuk nya adalah 8 cm. Dan luasnya :

$$L = 6 s^2 = 6 \times (8^2) = 384 \text{ cm}^2$$

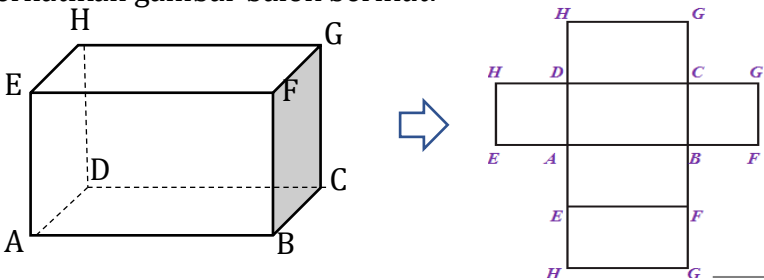
Tugas 1

Banu memiliki satu kamar ukuran 5m x 5m x 5m yang sangat lembab karena tidak memiliki jendela, sehingga membuat cat tembok kamar tersebut selalu mengelupas. Kamar tersebut memiliki pintu berukuran 2 m x 1 m. Banu berencana melapisi dinding kamar sekaligus mengganti bagian lantainya dengan keramik juga, dengan keramik berbentuk persegi berukuran 50 cm berwarna putih. Keramik tersebut dijual lima keramik per-set. Maka berapa set keramik yang dibutuhkan untuk dinding dan lantai kamar Banu?

Luas permukaan balok

Balok merupakan bangun ruang tiga dimensi yang dibentuk oleh tiga pasang persegi atau persegi panjang dengan paling tidak satu pasang diantaranya berukuran berbeda (Raina & Yusraningsih, 2021) . Sebagaimana halnya kubus, balok juga memiliki 6 buah sisi atau bidang, balok dibatasi enam daerah persegi panjang yang sepasang – sepasang berhadapan dan kongruen, dan dapat juga terdiri dari sepasang persegi berhadapan dan dua pasang persegi panjang berhadapan dan kongruen.

Perhatikan gambar balok berikut!



Gambar 6.3.

Pada gambar balok ABCDEFGH di atas memiliki rusuk – rusuk utamanya yaitu $p\text{ cm}$, $l\text{ cm}$, dan $t\text{ cm}$. Sisi –sisi yang berhadapan ABCD adalah EFGH kongruen dan luasnya sama maka $2 \times (p \times l)\text{cm}^2 = 2pl\text{ cm}^2$. Sisi – sisi yang berhadapan ABFE adalah DCHG kongruen dan luasnya sama maka $2 \times (p \times t)\text{cm}^2 = 2pt\text{ cm}^2$. Sisi – sisi yang berhadapan ADHE adalah BCGF kongruen dan luasnya sama maka $2 \times (l \times t)\text{cm}^2 = 2lt\text{ cm}^2$.

Dari keterangan tersebut dapat kita simpulkan:

$$\text{Luas permukaan balok} = 2 \times (p \times l)\text{cm}^2 + 2 \times (p \times t)\text{cm}^2 + 2 \times (l \times t)\text{cm}^2$$

Atau

$$\text{Luas permukaan balok} = 2pl\text{ cm}^2 + 2pt\text{ cm}^2 + 2lt\text{ cm}^2$$

$$\text{Luas permukaan balok} = 2(pl + pt + lt)\text{cm}^2$$

Luas permukaan balok sama dengan dua kali jumlah hasil kali sepasang – sepasang rusuk utamanya berlainan (Iswadji, 1993)

Contoh:

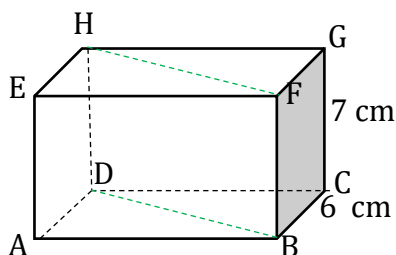
1. Sebuah balok berukuran panjang 23 cm, lebar 19 cm, dan tinggi 8 cm. Hitunglah luas permukaan balok tersebut!

Pembahasan:

$$p = 23\text{ cm}, l = 19\text{ cm dan } t = 8\text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas permukaan balok} &= 2 \times [(p \times l) + (p \times t) + (l \times t)] \\ &= 2 [(23 \times 19) + (23 \times 8) + (19 \times 8)] \\ &= 2 [437 + 184 + 152]\text{cm}^2 \\ &= 1.546\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

2. Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 6.5.

Jika Luas Permukaan balok ABCDEFGH adalah 344 cm^2 , Berapakah panjang AB dan luas dari persegi panjang BDHF !

Pembahasan:

Diketahui:

Panjang = AB cm

Lebar = 6 cm

Tinggi = 7 cm

Luas = 344 cm^2

Ditanyakan luas persegi BDHF!

Luas permukaan balok = $2 \times [(p \times l) + (p \times t) + (l \times t)]$

$$344 = 2 \times [(p \times 6) + (p \times 7) + (6 \times 7)]$$

$$344 = 2 \times [6p + 7p + 42]$$

$$344 = 2 \times [13p + 42]$$

$$344 = 26p + 84$$

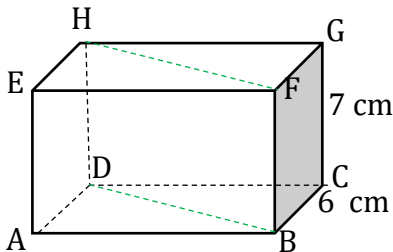
$$26p = 344 - 84$$

$$26p = 260$$

$$p = \frac{260}{26} = 10 \text{ cm}$$

Maka panjang AB = 10 cm

Selanjutnya perhatikan BDHF:



BDC merupakan segitiga siku – siku di C maka :

$$\begin{aligned} \text{Panjang BD} &= \sqrt{6^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{36 + 49} \\ &= \sqrt{85} \text{ cm} \end{aligned}$$

BDHF merupakan persegi panjang dengan panjang BD = $\sqrt{85}$ cm dan BF = 7 cm maka

$$\text{Luas BDHF} = 7 \times \sqrt{85} = 7\sqrt{85} \text{ cm}$$

Tugas 2

Sebuah pabrik minuman akan mengirimkan 1200 kotak minuman berbentuk balok dengan ukuran Panjang lebar dan tinggi masing- masing 15 cm, 6 cm dan 4 cm. kotak minuman tersebut akan dikemas ke dalam kotak yang lebih besar dan tiap kotak dapat menampung 24 kotak minuman. Karena kotak – kotak besar itu akan dikirim ke luar kota maka akan dilapisi dengan kertas. Bantulah pegawai pabrik untuk menentukan berapa luas permukaan kertas untuk melapisi kotak- kotak besar tersebut?

6.3 Volume Kubus dan Balok

6.3.1 Volume Kubus

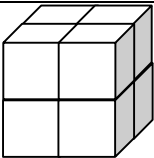
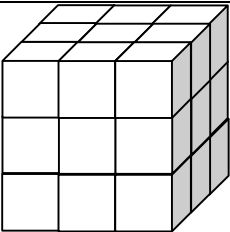
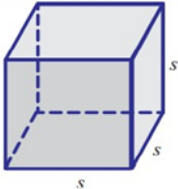
Volume merupakan isi atau besar atau banyaknya benda didalam suatu ruang. Satuan volume yang digunakan adalah cm^3 , menghitung volume kubus artinya menghitung berapa banyak kubus satuan yang berukuran 1 cm^3 dapat masuk kedalam suatu ruang kubus besar. Volume juga bisa disebut kapasitas benda tiga dimensi (Van de Walle, 2008). Untuk memudahkan siswa dalam memahami konsep volume kubus dapat dilakukan dengan *pilot experimen* terdiri dari 3 kegiatan yaitu mulai dari melihat kemasan untuk meningkatkan visualisasi spasial, melakukan percobaan dengan memasukkan satuan kubus ke dalam suatu wadah dan menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan kehidupan sehari – hari terkait volume kubus (Reny Wahyuni Dkk, 2015). Visualisasi spasial merupakan salah satu faktor penting yang dimiliki oleh siswa, pada kemampuan spasial diperlukan adanya kemampuan pengamatan, konsistensi logis, kemampuan mengklasifikasi gambar serta pemikiran konseptual (Sunartyo, 2015).

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 6.6

Dari gambar 6.6 terlihat bahwa kubus satuan yang terisi dalam kubus besar belum penuh, maka berapa banyak kubus satuan agar kubus besar terisi penuh, lakukan kegiatan berikut:

No	Kubus	Banyak kubus satuan	Ukuran Satuan ($s \times s \times s$)	Volume (V)
1		1 kubus satuan	$1 \times 1 \times 1 = 1^3$	1 cm^3
2		...	...	$\dots \text{ cm}^3$
3		...	...	$\dots \text{ cm}^3$
4		...	...	$\dots \text{ cm}^3$

Dapat diperhatikan dari pola satuan kubus tersebut jika digeneralisasikan dari no 1 hingga 3 maka akan mendapatkan suatu rumus volume kubus yaitu :

$$\text{Volume Kubus} = s \times s \times s = s^3$$

Contoh Soal:

1. Diketahui kubus dengan luas alas 64 cm^2 , berapakah volume dari kubus tersebut!

Pembahasan:

Diketahui:

Luas Alas Kubus = 64 cm^2 maka sisi kubus adalah $\sqrt{64} = 8 \text{ cm}$

Sehingga Volume Kubus = $s^3 = 8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512 \text{ cm}^3$

2. Diketahui diagonal bidang suatu kubus adalah $9\sqrt{2} \text{ cm}$, maka berapakah volume kubus tersebut!

Pembahasan:

Jika diagonal kubus adalah $9\sqrt{2} \text{ cm}$, maka sisinya adalah 9 cm, sehingga volume kubus adalah $s^3 = 9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729 \text{ cm}^3$

3. Tersedia kawat dengan panjang 6,3 m, banyak kerangka kubus dengan panjang rusuk 8,75 cm yang dapat dibuat adalah ...

Pembahasan:

Diketahui panjang rusuk kubus di atas adalah 8,75 cm maka panjang seluruh rusuk kubus adalah $12r = 12 \times 8,75 = 105 \text{ cm}$

Diperoleh bahwa untuk membuat 1 kerangka kubus dibutuhkan kawat sepanjang 105 cm. Karena tersedia kawat sepanjang 6,3 m atau 630 cm maka banyak kerangka kubus

$$\text{Banyak kerangka kubus} = \frac{\text{Panjang Kawat}}{\text{Panjang Kerangka}} = \frac{630}{105} = 6$$

Jadi, jika terdapat kawat sepanjang 6,3 m dengan kerangka kubus dengan rusuk 8, 75 cm yang dapat dibuat adalah 6 buah kubus

4. Selisih panjang rusuk dua buah kubus adalah 3 cm. Jika selisih luas sisi kubus itu 234 cm^2 selisih volume dua kubus tersebut adalah...

Pembahasan:

Misalkan rusuk kubus pertama adalah r_1 dan rusuk kubus kedua r_2 . Karena rusuk kubus tersebut adalah 3 cm maka $r_1 - r_2 = 3$. Karena diketahui selisih luas sisi kubus adalah 234 maka:

$$L_1 - L_2 = 234$$

$$6r_1^2 - 6r_2^2 = 234$$

$$6(r_1^2 - r_2^2) = 234$$

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = \frac{234}{6}$$

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 39$$

$$3(r_1 + r_2) = 39$$

$$(r_1 + r_2) = \frac{39}{3}$$

$$(r_1 + r_2) = 13$$

Diperoleh bahwa jumlah kedua rusuk kubus adalah 13 dm. Karena $r_1 - r_2 = 3$ dan $r_1 + r_2 = 13$ maka:

$$(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 13^2 - 3^2$$

$$(r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) = 169 - 9$$

$$4r_1r_2 = 160$$

$$r_1r_2 = \frac{160}{4} = 40$$

Akibatnya selisih volume kubus tersebut adalah

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= r_1^3 - r_2^3 = (r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) \\ &= (r_1 - r_2)((r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) - r_1r_2) \\ &= (r_1 - r_2)((r_1 + r_2)^2 - r_1r_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (3)((13)^2 - 40) \\
 &= 3(169 - 40) = 3(129) = 387
 \end{aligned}$$

Jadi selisih volume dua kubus tersebut adalah 387 cm^3

Tugas 3

Salin pada buku tugas kalian kemudian lengkapilah tabel tabel di bawah ini!

1. Tabel perubahan rusuk dan volume kubus

Rusuk kubus		Perubahan Rusuk $\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$	Volume		Perubahan Volume $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
s_1	s_2		$V_1 (\text{cm}^3)$	$V_2 (\text{cm}^3)$	
6	12	2	216	1728	$8 = 2^3$
6	24	...	...	...	...
6	3	...	...	27	...
6	2	$\frac{1}{3}$	...	...	...

Setelah kamu dapat melengkapi tabel di atas apa yang dapat kamu simpulkan dengan temanmu!

Bandingkan dengan kesimpulna di bawah ini

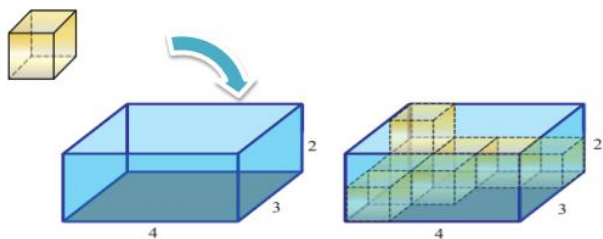
Jika panjang rusuk sebuah kubus kedua adalah k kali rusuk kubus pertama maka volume kubus kedua adalah k^3 kali volume kubus pertama

6.3.2 Volume Balok

Bangun ruang berbentuk balok sering kita jumpai di berbagai benda – benda yang ada dilingkungan sekitar seperti lemari, container, lemari es, dan lain –lain. Untuk menentukan

volume maka perlu mengukur berapa panjang, lebar dan tinggi suatu balok tersebut, adapun di bawah ini kita akan membuktikan dalam menemukan volume kubus.

Masih ingat dengan kubus satuan? ya volume balok juga dapat diilustrasikan dengan cara memasukkan kubus satuan ke dalam suatu balok, sebagai berikut:



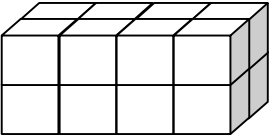
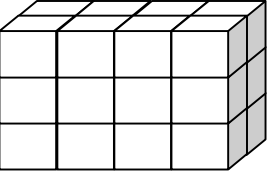
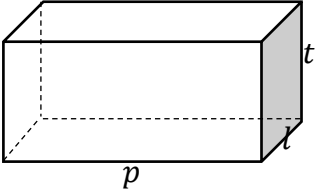
Gambar 6.7.

(Sumber: As’ari, Abdurrahman., dkk 2017)

Berapakah banyak kubus satuan yang dapat memenuhi balok tersebut?

Berdasarkan gambar 6.7, maka untuk menemukan rumus balok secara umum lakukan kegiatan berikut:

No	Balok	Banyak kubus satuan	Ukuran satuan (p x l x t) cm	Volume (V)
1		6 kubus satuan	$3 \times 2 \times 1$	6 cm^3
2		12 kubus satuan	...	$\dots\text{ cm}^3$

No	Balok	Banyak kubus satuan	Ukuran satuan (p x l x t) cm	Volume (V)
3		...	..	... cm^3
4		...	...	... cm^3
5		...	...	... cm^3

Perhatikan susunan pola satuan kubus di atas, bandingkan susunan kubus dari nomor 1 sampai 5, bagaimanakah menemukan pola volume kubus secara umum!

Dari pola nomor 1 sampai dengan 5 jika digeneralisasikan maka volume balok di dapat sebagai berikut:

$$Volume\ Balok = p \times l \times t$$

Tugas 4

Salin pada buku tugas kalian kemudian lengkapi tabel-tabel di bawah ini!

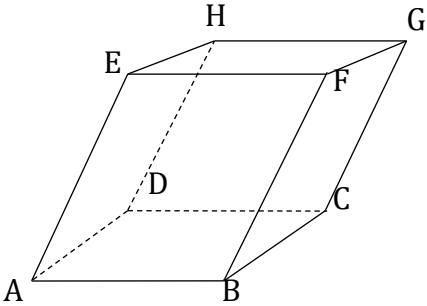
Tabel perubahan rusuk dan volume balok

Rusuk balok (cm × cm × cm)		Perubahan rusuk balok $\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \times \left(\frac{l_2}{l_1}\right) \times \left(\frac{t_2}{t_1}\right)$	Volume		Perubahan Volume $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
$p_1 \times l_1 \times t_1$	$p_2 \times l_2 \times t_2$		V_1 (cm ³)	V_2 (cm ³)	
$4 \times 3 \times 2$	$8 \times 6 \times 6$	$2 \times 2 \times 3$	24	288	$12 = 2 \times 2 \times 3$
$4 \times 3 \times 2$	$12 \times 1 \times 4$				
$4 \times 3 \times 2$	$1 \times 9 \times 8$				

Setelah kamu dapat melengkapi tabel di atas apa yang dapat kamu simpulkan dengan temanmu!

6.4 Paralelepipedum dan Rhomboeder

Paralelepipedum adalah prisma yang bidang alasnya berupa jajar genjang (Sardjana: 2018)



Gambar 6.8.

Dari definisi di atas maka semua bidang sisi semua paralelepipedum berupa jajar genjang. Pada setiap paralelepipedum terdapat tiga kelompok rusuk yang sejajar

AB //DC (karena ABCD jajar genjang)

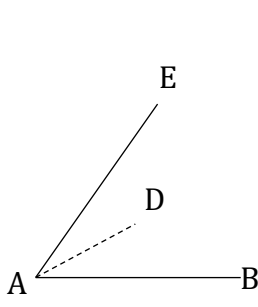
AB // FG (Karena ABFG bidang sisi tegak prisma, jadi berupa jajar genjang)

$FG \parallel EH$ (karena bidang $FGHE$ kongruen dengan bidang alas)

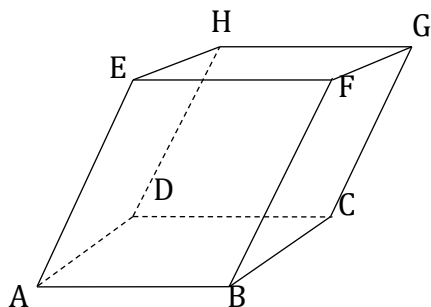
Kesimpulan:

AB, DC, FG dan EH adalah rusuk – rusuk yang sejajar dan sama panjang . kelompok 4 rusuk yang sejajar dan sama panjang adalah (AD, BC, GH, FE) dan (AF, BG, CH, DE) .

Dari sifat tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa suatu paralelepipedum ditentukan oleh tiga rusuk yang bertemu di satu titik (Sardjana: 2018). Perhatikan gambar 2.4.2a tiga ruas garis yang bertemu di satu titik. Pada gambar 6.9b ketiga ruas garis tersebut menentukan paralelepipedum.



Gambar 6.9a



Gambar 6.9b

Teorema 4.2 Setiap dua diagonal ruang satu paralelepipedum berpotongan di tengah – tengah atau saling membagi dua sama panjang (Sardjana: 2018).

Bukti:

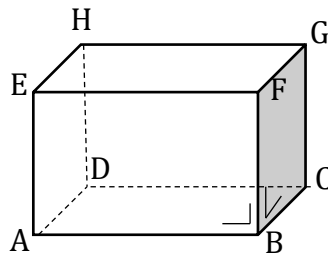
Pada gambar 6.8 paralelepipedum $ABCD.EFGH$ memiliki diagonal ruang BH dan DF . Karena BF sejajar DH berupa jajargenjang. Jadi diagonal BH dan DF juga merupakan diagonal – diagonal jajargenjang $BDHF$. Sebagai akibat BH dan DF berpotongan di tengah – tengah (yang satu membagi yang lain menjadi dua sama panjang, hal ini berlaku pula untuk pasangan

diagonal – diagonal ruang (AG, CE), (CE, BH),(DF, AG) dan (BH, AG).

Akibat dari teorema tersebut maka keempat diagonal ruang berpotongan di satu titik.

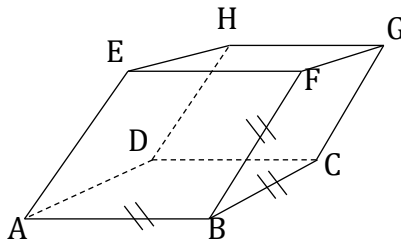
Definisi 4.9 paralelepipedum tegak adalah paralelepipedum yang rusuknya tegak (Sardjana:2018). Dari definisi ini maka mudah dipahami bahwa sisi tegak sisi tegak suatu paralelepipedum berupa persegi panjang. Bidang alas paralelepipedum pada umumnya berbentuk jajargenjang.

Paralelepipedum tegak yang bidang alasnya berbentuk persegi panjang disebut *paralelepipedum siku-siku* atau *balok*.



Gambar 6.11.

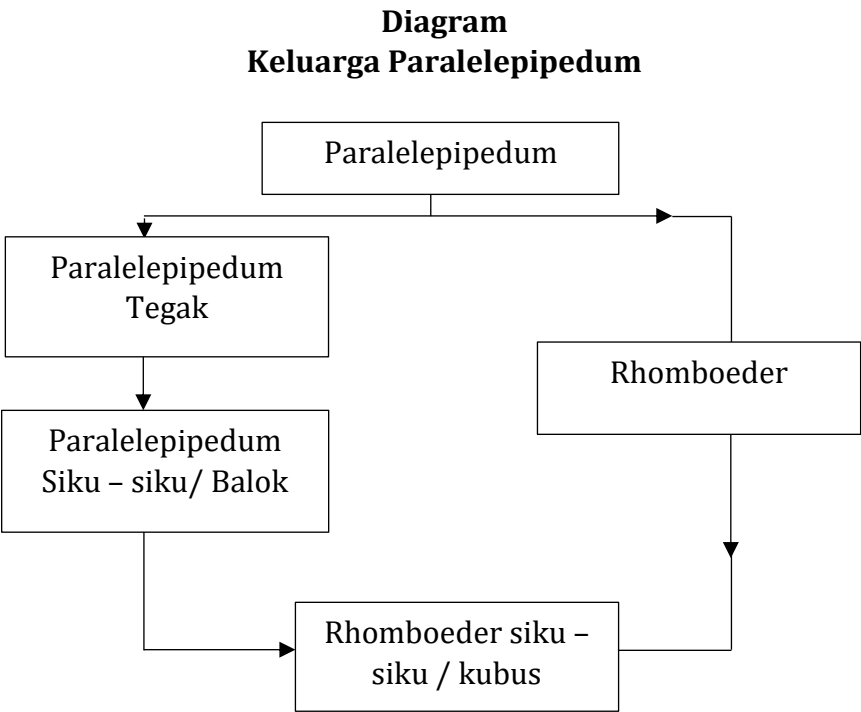
Paralelepipedum yang tiga rusuknya bertemu di satu titik disebut *rhomboeder* (Sardjana:2018).



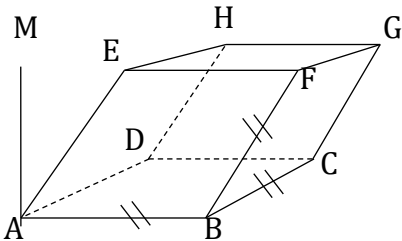
Gambar 6.12.

Paralelepipedum ABCD.EFGH semua rusuknya sama panjang $AB = BC = BF$ maka ABCD. EFGH merupakan rhomboeder. Maka

dengan mudah dibuktikan bahwa semua rusuknya bertemu di satu titik sama panjang disebut *kubus*. Jadi tidak lain kubus adalah rhomboeder siku – siku. Berdasarkan urutan di atas maka dapat dibuat diagram keluarga diagram pralelepipedum sebagai berikut:



Untuk menentukan volume paralelepipedum adalah sebagai berikut:



Gambar 6.11

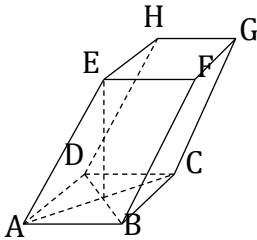
Sebagaimana halnya bangun ruang maka volume paralelepipedum sama dengan luas alas dikalikan tingginya
Jika dilihat pada gambar 6.11 maka

$$V = \text{Luas alas } ABCD \times AM$$

Contoh Soal :

Diketahui paralelepipedum ABCD.EFGH alasnya berbentuk belah ketupat dengan $\angle BAD = 60^\circ$ dan Panjang sisi AB 10 cm Panjang rusuk tegak 12 cm dan proyeksi titik E pada bidang alas berhimpit dengan pusat bidang alas. Tentukan volume paralelepipedum tersebut!

Pembahasan:



Gambar 6.12

Lihat belah ketupat ABCD sebagai alas paralelepipedum dengan O sebagai pusat bidang alasnya maka:

$$AB = 10 \text{ cm maka } BD = 10\sqrt{3}$$

$$BO = \frac{1}{2} \text{ dari } BD = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$AO = BO$$

$$\text{Luas } ABD = \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$$

$$\text{Luas } ABCD = 2 \times \text{Luas } ABD = 2 \times 25\sqrt{3} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Kemudian lihat segitiga AOE siku – siku di O maka untuk mencari tingginya :

$$t^2 = AE^2 - AO^2$$

$$t = \sqrt{AE^2 - AO^2}$$

$$t = \sqrt{12^2 - (5\sqrt{3})^2}$$

$$t = \sqrt{144 - 75}$$

$$t = \sqrt{69} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\text{Volume paralelepipedum } ABCD.EFGH &= \text{Luas alas} \times \text{tinggi} \\ &= 50\sqrt{3} \times \sqrt{69} \\ &= 150\sqrt{23} \text{ cm}^3\end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

- As'Ari, Abdurrahman., dkk 2017. *Matematika SMP/ MTs Kelas VIII semester 2*. Edisi Revisi. Jakarta: Kemetrian Pendidikan dan Kebudayaan RI.
- Iswadji, Djoko.1993. *Geometri Ruang*. Cetakan Pertama. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Raina k. Awal & Yusraningsih H. Pongliu. 2021. Kemampuan menghitung volume kubus dan balok dengan menggunakan table perkalian pintar. *Jurnal Ilmiah Media Publikasi Ilmu Pengetahuan dan Teknologi*, 10 (01). 44-51. <http://journal.umgo.ac.id/index.php/akademika>
- Reni Wahyuni, Ratu Indra Putri, & Yusuf Hartono. 2015. Volume kubus dan balok melibatkan kemampuan visualisasi spasial di kelas VIII. *Jurnal Elemen*, 01(02). 119-129. <http://e-journal.hamzanwadi.ac.id>
- Sardjana. 2008. *Geometri Ruang*. Edisi I. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Sunartyo, Nano. 2005. *Siap Lulus TBS*. Yogyakarta: Tunas Publishing
- Van de Walle, JA. 2008. *Matematika Sekolah Dasar Dan Menengah: Pengembangan Pengajaran*. Jilid Kedua. Jakarta: Erlangga.

BAB 7

PRISMA DAN LIMAS

Oleh Vini Rizqi

7.1 Pendahuluan

Sebelumnya telah dibahas bangun ruang kubus dan balok. Bentuk bangun ruang lainnya yang akan dibahas pada pembahasan kali ini adalah prisma dan limas. Dalam kehidupan sehari-hari prisma dan limas digunakan sebagai bentuk benda-benda keseharian yang sering kita lihat, misalkan saja bentuk Piramida di Mesir dan tenda pramuka yang merupakan limas segitiga, atau paving block dan mur baut yang merupakan prisma segi enam dan sebagainya.



Gambar 7.1. Benda-benda yang berbentuk prisma dan limas

Pada bab ini akan dibahas pengertian prisma dan limas, ciri-ciri fisiknya, bagian-bagian prisma dan limas, jaring-jaring prisma dan limas, serta menghitung luas permukaan dan volume prisma dan limas.

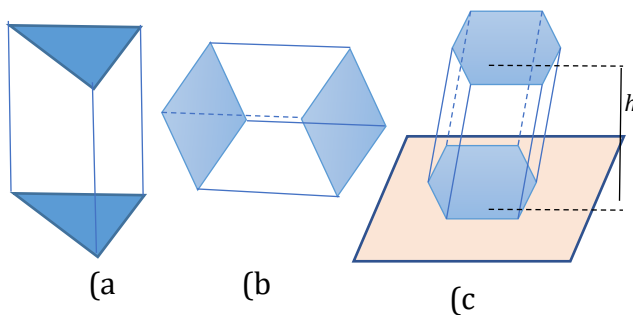
7.2 Prisma

Prisma merupakan sebuah bangun tiga dimensi yang menempati ruang. Bagian-bagian dari prisma terdiri dari tinggi prisma, sisi tegak yang menyelimuti prisma, dan alas (atas dan bawah) bangun prisma.

Ciri-ciri dari prisma dapat dilihat secara langsung, berikut adalah ciri-ciri prisma:

- Prisma mempunyai dua alas yang sebangun dan sejajar.
- Prisma mempunyai rusuk-rusuk tegak yang membentuk serangkaian ruas garis.

Pemberian nama pada sebuah prisma didasarkan pada bentuk bangun dari alas prisma tersebut. Jika alasnya berbentuk segi tiga maka dinamakan prisma segi tiga, jika alasnya segi empat maka disebut prisma segi empat, begitupun dengan yang lainnya.



Gambar 7.2. Beberapa contoh bentuk prisma

Pada gambar 7.1, (a) merupakan prisma segitiga siku-siku, (b) merupakan prisma segi empat, dan (c) merupakan prisma segi enam. Tinggi pada prisma (c) diberi tanda h .

Macam-macam prisma berdasarkan bentuk bangun yang membentuk alasnya, yaitu:

a. Prisma tegak:

Prisma tegak merupakan prisma dimana sisi-sisi tegak dengan alas bidangnya saling tegak lurus pada masing-masing titik alas bidang.

b. Prisma miring:

Prisma miring berkebalikan dengan prisma tegak dimana sisi-sisi tegak dengan alas bidangnya tidak saling tegak lurus.

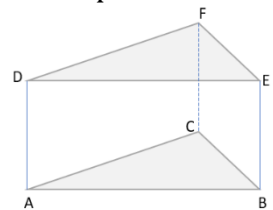
c. Prisma siku-siku:

Prisma siku-siku merupakan prisma dimana sisi-sisi tegak dengan alas bidangnya membentuk sudut siku-siku. dengan demikian tinggi dari prisma adalah panjang dari rusuk tegaknya.

7.2.1 Bagian-bagian Prisma

Sebelum menghitung bangun ruang prisma, kita perlu memahami bagian-bagian dari prisma terlebih dahulu. Manakah yang disebut tinggi prisma, sisi tegak prisma, dan alas bidang prisma, dengan begitu akan lebih mudah untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang akan dihadapi. Perhatikan gambar berikut.

Permukaan prismatik adalah jejak pergerakan sebuah garis lurus dalam ruang yang mengikuti keliling suatu bangun segi banyak. Ketika garis tersebut bergerak tepat melalui titik sudut bangun segi banyak, maka garis ini merupakan rusuk



Gambar 7.3.
Prisma segitiga

permukaan prismatik. Selanjutnya permukaan prismatik ini dikenal dengan nama sisi tegak prisma. Berdasarkan gambar sisi tegak prisma adalah $ABED$, $BCFE$, $CADF$.

Bangun segi banyak yang dimaksud merupakan sebuah bidang datar yang bersamaan dengan semua rusuk-rusuknya memotong permukaan prismatik. Rusuk-rusuk tersebut disebut sebagai rusuk tegak. Berdasarkan gambar rusuk tegak prisma adalah AD, BE, CF .

Jika sebuah bidang yang sejajar dengan bangun segi banyak memotong permukaan prisma, maka perpotongannya akan kongruen dengan bangun segi banyak tersebut. Bangun segi banyak ini selanjutnya disebut alas dan tutup prisma. Berdasarkan gambar alas dan tutup prisma adalah $\triangle ACB$ dan $\triangle DEF$.

Selanjutnya, tinggi prisma merupakan jarak antara alas dan tutup prisma. Jika prisma tersebut merupakan prisma miring, tinggi prisma diperoleh dengan menggunakan teorema pythagoras yang dapat dilihat pada gambar 7.4.

7.2.2 Jaring-jaring dan Luas Permukaan Prisma

Jika sebuah prisma kita buka, maka akan terbentuk sebuah jaring-jaring prisma. Berikut adalah jaring-jaring prisma dari sebuah prisma segitiga dan segi enam.



Gambar 7.4. Jaring-jaring prisma

Berdasarkan jaring-jaring prisma diatas, luas permukaan prisma didapat dari jumlah luas sisi tegak prisma dengan luas alas dan tutup prisma.

$$LP_{prisma} = L_{sisi\ tegak\ prisma} + L_{alas} + L_{tutup}$$

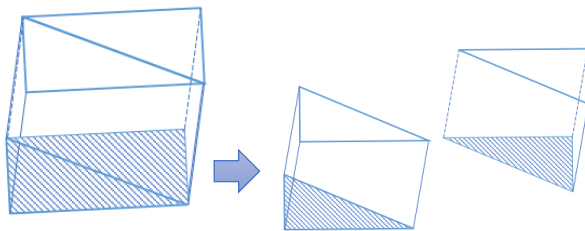
Perhatikan jaring-jaring prisma, Panjang dari bangun sisi tegak prisma merupakan keliling dari alas dan tutup prisma. Lebar dari bangun sisi tegak prisma adalah tinggi dari prisma. Selanjutnya, bentuk alas dan tutup prisma adalah sama, berdasarkan pemahaman tersebut Luas permukaan prisma dapat ditulis dengan:

$$LP_{prisma} = (K_{alas} \times t_{prisma}) + 2 \times L_{alas}$$

7.2.3 Volume Prisma

Volume atau isi prisma bergantung bentuk bangun alas dari prisma tersebut sama halnya dengan Luas permukaan. Perhatikan beberapa contoh prisma berikut.

Perhatikan bangun prisma segi empat atau balok berikut, jika bangun tersebut kita potong secara diagonal seperti dibawah ini, akan didapat dua buah prisma segitiga siku-siku yang saling kongruen.



Gambar 7.5. Proses menentukan prisma segitiga siku-siku

Sehingga volume prisma segitiga siku-siku tersebut adalah:

$$V_{balok} = 2 \times V_{prisma\ segitiga\ siku-siku}$$

$$\text{panjang} \times \text{lebar} \times \text{tinggi} = 2 \times V_{\text{prisma segitiga siku-siku}}$$

$$\frac{\text{panjang} \times \text{lebar}}{2} \times \text{tinggi} = V_{\text{prisma segitiga siku-siku}}$$

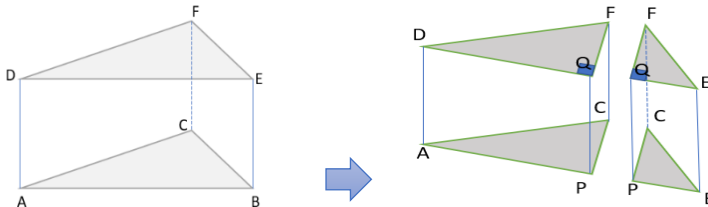
Karena alasnya berbentuk segitiga maka persamaan diatas dapat ditulis sebgai;

$$L_{\text{alas}} \times t_{\text{prisma}} = V_{\text{prisma segitiga siku-siku}}$$

Sehingga diperoleh:

$$V = L_{\text{alas}} \times t_{\text{prisma}}$$

Jika prisma tersebut adalah prisma segitiga sembarang, maka kita dapat mencari volumenya dengan membagi segitiga tersebut menjadi dua buah segitiga siku-siku.



Gambar 7.6. Proses menentukan volume prisma segitga sembarang

Berdasarkan gambar diatas:

$$\begin{aligned} V_{ABC.DEF} &= V_{APC.DQF} + V_{PBC.QEF} \\ &= L_{\Delta APC} \times t_{\text{prisma}} + L_{\Delta PBC} \times t_{\text{prisma}} \\ &= (L_{\Delta APC} + L_{\Delta PBC}) \times t_{\text{prisma}} \\ &= L_{\Delta ABC} \times t_{\text{prisma}} \end{aligned}$$

Dengan demikian volume prisma segitiga sembarang adalah:

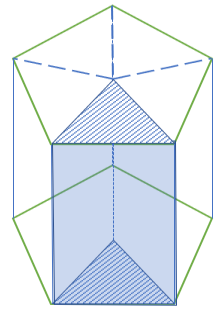
$$V_{\text{prisma segitiga}} = L_{\text{alas}} \times t_{\text{prisma}}$$

Dengan cara yang sama, volume prisma segi- n dapat dicari dengan membagi prisma terbut menjadi beberapa prisma segitiga. Perhatikan prisma segi lima berikut.

Misalkan alas prisma adalah a dan semua segitiga yang terbentuk merupakan segitika sama sisi yang saling kongruen satu dengan yang salinnya, maka berdasarkan rumus pythagoras:

$$t_{\Delta}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$t_{\Delta} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



Gambar 7.7
Prisma segi lima

Luas salahsatu segitiga sama sisi tersebut:

$$L_{\Delta} = \frac{a \times t_{\Delta}}{2}$$

$$= \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Luas 5 buah segitiga tersebut:

$$L_{\Delta} = 5 \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Dengan demikian berdasarkan penjelasan sebelumnya dan luas segitiga diatas, volume prisma segi lima tersebut:

$$V_{\text{prisma segi lima}} = L_{\text{alas}} \times t_{\text{prisma}}$$

$$= \frac{5a^2}{4}\sqrt{3} \times t_{\text{prisma}}$$

Secara umum volume prisma segi- n adalah penjumlahan dari seluruh volume prisma segitiga yang terbentuk.

$$\begin{aligned}
 V_{\text{prisma segi lima}} &= V_1 + V_2 + \dots + V_n \\
 &= L_1 \times t_{\text{prisma}} + L_2 \times t_{\text{prisma}} + \dots + L_n \times t_{\text{prisma}} \\
 &= (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \times t_{\text{prisma}} \\
 &= L_{\text{alas}} \times t_{\text{prisma}}
 \end{aligned}$$

Jadi secara umum berlaku bahwa:

$$V_{\text{prisma}} = L_{\text{alas}} \times t_{\text{prisma}}$$

7.3 Limas

Limas merupakan sebuah bangun tiga dimensi yang menempati ruang. Perbedaannya dengan prisma, limas mempunyai sebuah titik puncak yang berasal dari pertemuan semua rusuk alasnya. Oleh karenanya limas dapat didefinisikan sebagai suatu bangun ruang yang dibatasi oleh bangun alas. Bagian-bagian dari Limas terdiri dari tinggi limas, sisi tegak yang menyelimuti limas, dan bangun alas limas.

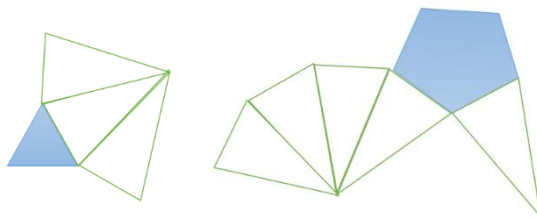
Ciri-ciri dari Limas dapat dilihat secara langsung, berikut adalah ciri-ciri limas:

- Limas mempunyai satu bangun alas segi banyak
- Setiap rusuk alasnya bertemu pada satu titik yang disebut titik puncak
- Tinggi dari limas adalah garis yang tegak lurus dari titik puncak ke bidang alas.

Pemberian nama pada sebuah limas didasarkan pada bentuk bangun dari alas limas tersebut. Jika alasnya berbentuk segi tiga maka dinamakan limas segi tiga, jika alasnya segi empat maka disebut limas segi empat, begitupun dengan yang lainnya.

7.3.1 Jaring-jaring dan Luas Permukaan Limas

Jika sebuah limas kita buka, maka akan terbentuk sebuah jaring-jaring limas. Berikut adalah jaring-jaring limas dari sebuah limas segitiga dan segi lima.



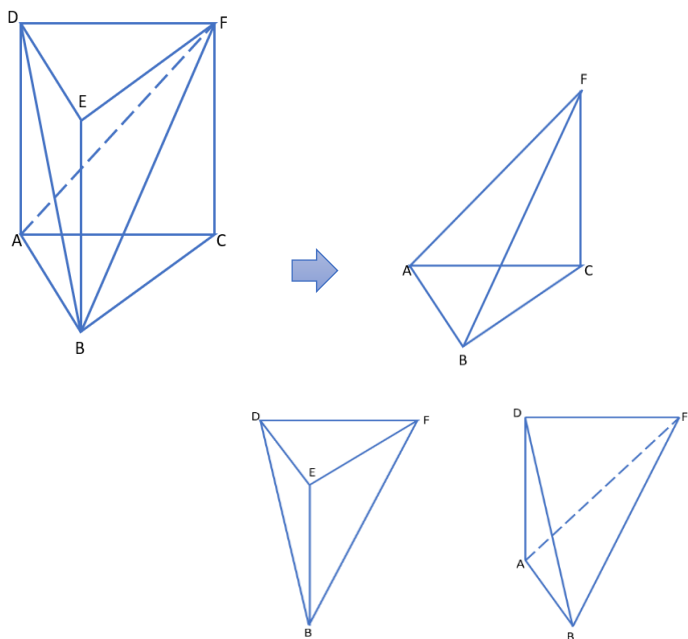
Gambar 7.8. Jaring-jaring limas segitiga dan limas segi lima

Berdasarkan jaring-jaring limas diatas, luas permukaan limas didapat dari jumlah luas sisi-sisi tegak limas dengan luas alasnya.

$$LP_{limas} = L_{seluruh sisi limas} + L_{alas}$$

7.3.2 Volume Limas

Volume limas segitiga dapat dicari dengan memotong prisma segitiga menjadi tiga bagian limas segitiga. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 7.9. Proses penentuan volume limas segitiga

Gambar diatas menunjukkan bahwa:

- Karena $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, maka $L_{\text{alas}} F.ABC = L_{\text{alas}} B.DEF$ dan $LP_{F.ABC} = LP_{B.DEF}$ dengan besar tinggi yang sama yaitu $CF = BE$.
- Dapat dilihat bahwa $\triangle BDE \equiv \triangle ABD$, jika keduanya merupakan alas prisma maka kita dapat menyimpulkan $L_{\text{alas}} F.BED = L_{\text{alas}} F.ABD$ dan $LP_{F.BED} = LP_{F.ABD}$ dengan besar tinggi yang sama yaitu jarak titik puncak F ke bidang $BDE = \text{jarak titik puncak F ke bidang } ABD = \text{jarak titik puncak F ke bidang } ABED$ yaitu CF .

Berdasarkan dua point diatas:

$$LP_{F.ABC} = LP_{B.DEF}$$

$$V_{F.ABC} = V_{B.DEF}$$

Jika alas limas B.DEF kita ganti menjadi $\triangle BDE$, maka akan terbentuk limas F.BED dengan ukuran semua rusuk yang sama dengan limas B.DEF. Olehkarenanya:

$$LP_{F.BED} = LP_{F.ABD}$$

$$V_{F.BED} = V_{B.DEF} = V_{F.ABD}$$

Pada point pertama telah diketahui bahwa $LP_{F.ABC} = LP_{B.DEF}$, maka $V_{F.ABC} = V_{B.DEF}$. Dengan demikian:

$$V_{F.BED} = V_{B.DEF} = V_{F.ABC} = V_{F.ABD}$$

Artinya volume semua bangun limas segitiga adalah sama. Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat disimpulkan bahwa volume limas segitiga adalah:

$$\begin{aligned} V_{limas\ segitiga} &= \frac{1}{3} \times V_{prisma\ tegak\ segitiga} \\ &= \frac{1}{3} \times L_{alas} \times t_{prisma} \end{aligned}$$

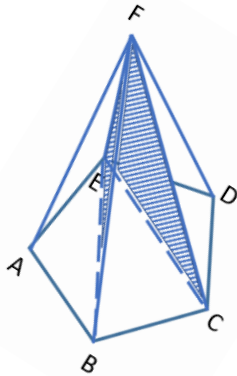
Selanjutnya untuk menentukan volume limas segi- n , kita dapat membagi limas tersebut menjadi beberapa buah limas segitiga.

Gambar dibawah menunjukkan Limas Z.ABCDE dibagi menjadi tiga buah limas kecil lainnya, yaitu limas F.ABE, limas F.BCE, dan limas F.CDE dengan tinggi limas yang sama, maka:

$$\begin{aligned}
 V_{limas} &= V_{F.ABE} + V_{F.BCE} + V_{F.CDE} \\
 &= \frac{1}{3} \times L_{\triangle ABE} \times t + \frac{1}{3} \times L_{\triangle BCE} \times t + \frac{1}{3} \times L_{\triangle CDE} \times t \\
 &= \frac{1}{3} \times t \times L_{ABCDE}
 \end{aligned}$$

Secara umum volume limas segi- n dengan tinggi t adalah:

$$V_{limas} = \frac{1}{3} \times L_{alas} \times t$$



Gambar 7.10. Limas Segi Lima

DAFTAR PUSTAKA

- Hall, H. (1949). *School Geometry parts I-VI*. London: MacMillan and Co.
- Iswandi, D., & dkk. (1993). *Geometri ruang*. Jakarta: Universitas terbuka.
- Kohn, E. (1994). *Cliff Quick Review Geometry*. Cliff Notes.
- Raharjo, M. (2000). *Pengukuran (konsep-konsep dan beberapa penurunan rumus)*. Yogyakarta: PPPG Matematika.
- Raharjo, M. (2009). *Geometri ruang*. Yogyakarta: P4TK Matematika Yogyakarta.
- Suwaji, U. T., & Suryopurnomo, S. (2009). *Kapitaselektak Pembelajaran Geometri Ruang Di SMP*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

BAB 8

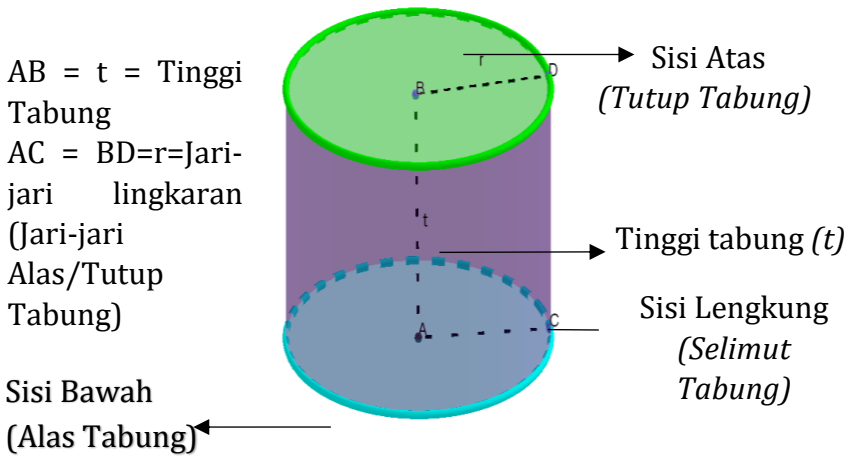
TABUNG, KERUCUT DAN BOLA

Oleh Maswar

8.1 Tabung

Pembahasan bangun tiga dimensi tidak terlepas dari bahasan bangun dua dimensi sebagai unsur-unsur penyusunnya. Dalam pembahasan di Bab ini difokuskan pada bangun ruang tiga dimensi bentuk sisi lengkung berupa tabung, kerucut dan bola. Perlu dipahami bahwa bangun ruang adalah benda tiga dimensi yang solid atau padat yang mencerminkan berkumpulnya titik-titik. Sementara, bangun ruang sisi lengkung merupakan bangun geometri ruang yang memiliki minimal satu sisi lengkung. Pada bangun ruang terdapat istilah luas permukaan dan volume. Beberapa bangun ruang sisi lengkung, antara lain: Tabung, Kerucut, Bola.

Tabung adalah suatu bangun ruang tiga dimensi yang mempunyai sisi atas (tutup) dan sisi bawah (alas) yang berbentuk lingkaran yang sejajar dan kongruen serta diselimuti oleh Persegi Panjang yang merupakan sisi lengkung. Berikut ditunjukkan gambar tabung beserta unsur-unsurnya.



Gambar 8.1. Tabung dan Unsur-unsur Tabung
Sumber. Hasil Desain Geogebra

8.1.1 Unsur-unsur Tabung

Tabung memiliki tiga bidang sisi, yaitu bidang sisi atas (tutup tabung) dan bidang sisi bawah (alas tabung) yang berbentuk lingkaran, serta bidang sisi lengkung yang kerap disebut dengan selimut tabung. Bidang sisi atas dan sisi bawah tabung berbentuk bidang datar berupa lingkaran, sedangkan bidang sisi lengkung tabung berbentuk persegi panjang. Dalam kehidupan nyata, bentuk tabung dapat diamati dari bentuk kaleng susu milk, silinder, dll.

a. Bidang Sisi Tabung

Tabung memiliki tiga bidang sisi, yaitu bidang sisi atas (tutup tabung) dan bidang sisi bawah (alas tabung) yang berbentuk lingkaran, serta bidang sisi lengkung yang kerap disebut dengan selimut tabung. Bidang sisi atas dan sisi bawah tabung berbentuk bidang datar berupa lingkaran, sedangkan bidang sisi lengkung tabung berbentuk persegi

panjang. Dalam kehidupan nyata, bentuk tabung dapat diamati dari bentuk kaleng susu milk, silender, dll.

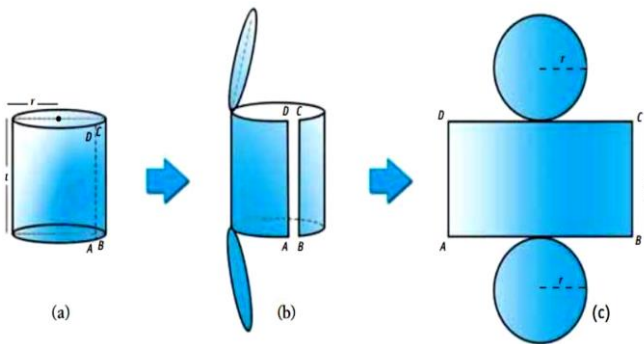
b. Tinggi Tabung (t)

Tinggi tabung adalah jarak antara bidang pada sisi atas dan sisi bawah pada tabung yang biasa disimbolkan dengan huruf t . Berdasarkan Gambar 8.1 diketahui bahwa tinggi tabung adalah AB

c. Jari-jari Tabung (r)

Jari-jari tabung merupakan jari-jari lingkaran pada sisi atas (tutup tabung) dan sisi bawah (alas tabung). Pada gambar 8.1 di atas diketahui bahwa $r=AD=BC$ merupakan jari-jari tabung.

Selain itu, terdapat jaring-jaring tabung yang dapat digunakan sebagai visualisasi untuk menentukan unsur-unsur tabung. Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 8.2. Jaring-jaring Tabung

Berdasarkan gambar di atas diketahui bahwa tabung mempunyai jari-jari r dan tinggi t (gambar 8.2a). Apabila tabung tersebut diiris sepanjang garis pada tinggi tabung (sepanjang DA atau CB), serta sepanjang keliling lingkaran alas dan lingkaran tutup (Gambar 8.2b) sehingga diperoleh jaring-jaring tabung (seperti gambar 8.2c) yang terdiri dari dua lingkaran dan persegi panjang.

Berikut ditunjukkan beberapa sifat tabung

- 1) Tabung memiliki 3 buah sisi, 1 persegi panjang, dan 2 lingkaran
- 2) Tabung tidak memiliki rusuk, titik sudut, bidang diagonal, dan diagonal bidang
- 3) Tabung memiliki sisi alas dan tutup yang sama dan kongruen
- 4) Tinggi tabung merupakan jarak titik pusat lingkaran pada sisi alas dengan sisi tutup
- 5) Tabung memiliki selimut tabung yang merupakan bidang tegak berwujud lengkungan
- 6) Jaring-jaring tabung terbentuk dari 2 lingkaran dan 1 persegi panjang.

8.1.2 Luas Permukaan Tabung

Permukaan tabung adalah bidang geometri yang membatasi tabung. Berdasarkan bentuk dari jaring – jaring tabung yang terdiri dari sisi atas (tutup), sisi bawah (alas), dan selimut tabung. Sehingga dapat disimpulkan bahwa luas permukaan tabung sama dengan luas seluruh bangun pada jaring – jaring tabung. Menggunakan jaring – jaring tabung didapatkan bahwa luas permukaan tabung terdiri dari.

$$\begin{aligned}
 \text{Luas Alas} &= \text{Luas Lingkaran} \\
 &= \pi r^2 \\
 \text{Luas Tutup} &= \text{Luas Lingkaran} \\
 &= \pi r^2 \\
 \text{Luas Selimut} &= \text{Luas Persegi Panjang} \\
 &= p \times l \\
 &= \text{Keliling Alas Tabung} \times \text{Tinggi Tabung} \\
 &= 2\pi r \times t \\
 &= 2\pi r t
 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa rumus luas permukaan tabung adalah:

$$\begin{aligned}\text{Luas Permukaan Tabung} &= \text{Luas Alas} + \text{Luas Tutup} + \text{Luas Selimut} \\ &= 2 \times \text{Lingkaran} + \text{Luas Selimut} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi t \\ &= 2\pi r(r + t)\end{aligned}$$

$$\text{Luas Permukaan Tabung } (L_{pt}) = 2\pi r(r + t)$$

Contoh 1

Diketahui sebuah tabung dengan diameter 8 cm dan tingginya 10 cm. luas permukaan tabung tersebut adalah ...

Penyelesaian:

$$d = 8 \text{ cm}$$

$$r = \frac{1}{2} d = 4 \text{ cm}$$

$$t = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Luas permukaan tabung} = 2\pi r(r + t)$$

$$= 2 \times 3,14 \times 4 \times (4 + 10)$$

$$= 25,12 \times 14$$

$$= 351,68 \text{ cm}^2$$

Jadi, luas permukaan tabung tersebut adalah $351,68 \text{ cm}^2$.

Contoh 2

Tentukan luas permukaan tabung, jika luas selimut tabung 314 cm^2 dan tingginya 5 cm .

Penyelesaian:

$$\text{Luas selimut tabung} = 314 \text{ cm}^2$$

$$\text{Tinggi tabung} = 5 \text{ cm}$$

Sebelum menentukan luas permukaan tabung, sebelumnya dicari jari-jari tabung terlebih dahulu menggunakan luas selimut

$$\text{Luas selimut tabung} = 2\pi r t$$

$$314 = 2 \times 3,14 \times r \times 5$$

$$314 = 3,14 r$$

$$r = \frac{314}{3,14}$$

$$r = 10$$

Selanjutnya mencari luas permukaan tabung dengan menggunakan rumus yang telah diketahui: $L_{pt} = 2\pi r(r + t)$.

$$\text{Luas permukaan tabung} = 2\pi r(r + t)$$

$$L_{pt} = 2 \times 3,14 \times 10 \times (10 + 5)$$

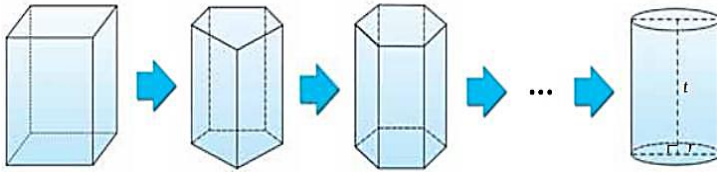
$$L_{pt} = 2 \times 3,14 \times 10 \times 15$$

$$L_{pt} = 942 \text{ cm}^2$$

8.1.3 Volume Tabung

Tabung dapat juga dikatakan sebagai prisma beraturan yang memiliki segi sangat banyak. Selain itu, terdapat kesamaan antara tabung dan prisma tegak, yaitu sama-sama memiliki dua sisi yang kongruen.

Perhatikan gambar di bawah ini!



Gambar 8.3. Perubahan Balok Menjadi Tabung

Berdasarkan gambar di atas diketahui bahwa balok yang memiliki sisi atas dan bawah merupakan bangun persegi atau persegi panjang, selanjutnya menjadi bentuk prisma segi beraturan. Jika prisma segi beraturan pada sisi atas (tutup) dan sisi bawah (alas) menjadi segi beraturan yang sangat banyak mendekati bentuk lingkaran, maka prisma segi beraturan tersebut merupakan tabung. Akibatnya, unsur pembentuk volume prisma beraturan juga akan sama dengan volume tabung.

$$\begin{aligned}\text{Volume Tabung} &= \text{Luas Alas Tabung} \times \text{Tinggi Tabung} \\ &= \text{Luas Lingkaran} \times \text{Tinggi Tabung} \\ &= \pi r^2 \times t \\ &= \pi r^2 t\end{aligned}$$

$$\text{Volume Tabung (V}_t\text{)} = \pi r^2 t$$

Dari keterangan di atas, dapat diketahui bahwa volume tabung adalah $\pi r^2 t$, dengan r adalah jari-jari tabung dan t adalah tinggi tabung.

Contoh

Diketahui sebuah drum berbentuk tabung tertutup yang berisi air bersih memiliki diameter 40 cm dan tinggi 70 cm.

Tentukan berapa liter volume drum yang dapat menampung air bersih ($\pi=22/7$)!.

Penyelesaian:

Diameter tabung = 40 cm

Tinggi tabung = 70 cm

Volume Tabung = $\pi r^2 t$

$$\begin{aligned} \text{Volume Tabung } (V_t) &= \pi r^2 t \\ &= \frac{22}{7} \times \left(\frac{40}{2}\right)^2 \times 70 \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{1600}{4} \times 70 \\ &= 88.000 \text{ cm}^3 \\ &= 88 \text{ liter} \end{aligned}$$

$$= 22/7 \times (40/2)^2 \times 70$$

$$= 22/7 \times 1600/4 \times 70$$

$$= 88000 \text{ cm}^3$$

$$= 88 \text{ liter}$$

Jadi, volume tabung drum tersebut adalah 88.000 cm^3 atau bila dikonvensi ke liter menjadi 88 liter.

8.1.4 Soal Latihan

1. Andi akan menempel brand merek dagang homeindustry yang dia produksi pada kaleng berbentuk tabung dengan diameter 20 cm dan tinggi kaleng 25 cm. Berapa ukuran brand tempelan yang dibutuhkan?

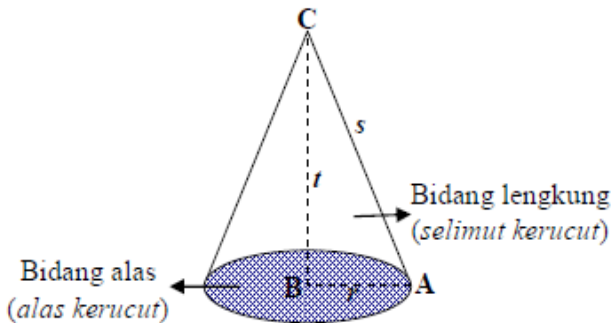
2. Sebuah tabung tingginya 22 cm dan berdiamter 14 cm. Tentukan luas selimut tabung dan luas permukaan tabung itu jika tidak memakai tutup!
3. Penampungan air hujan berbentuk tabung dengan volume 19.250 liter. Jika diameternya 3,5 m, tentukan tinggi penampungan air tersebut!
4. Ibu Miranda membeli 3 susu kaleng yang masing-masing berisi 1000 ml untuk membuat manisan. Susu tersebut akan dipindah untuk dicampur ke dalam ember berbentuk tabung dengan ukuran diameter 14 cm dan tingginya 30 cm. Berapa ml sisa susu dalam kaleng?
5. Kolam ikan berbentuk tabung memiliki diameter 2,1 meter dengan kedalaman 1,2 meter. Kolam tersebut diisi air $\frac{2}{3}$ bagian saja. Hitunglah berapa liter volume kolam ikan tersebut?

8.2 Kerucut

Kerucut adalah bangun ruang sisi lengkung yang dibatasi oleh garis pelukis yang ujung-ujungnya bergerak mengelilingi sisi alas dan menyerupai limas segi- n beraturan yang bidang alasnya berbentuk lingkaran, serta pangkalnya membentuk titik puncak kerucut.

8.2.1 Unsur-unsur Kerucut

Sepertihalnya pada bangun-bangun ruang lainnya, kerucut juga memiliki unsur-unsur pembentuk yang penting untuk dipahami. Berikut ini ditunjukkan gambar kerucut beserta unsur-unsurnya.

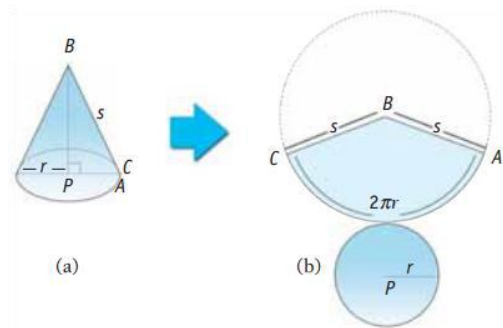


Gambar 8.4. Kerucut dan Unsur-unsurnya

Berdasarkan gambar di atas diketahui bahwa kerucut memiliki unsur-unsur sebagai berikut.

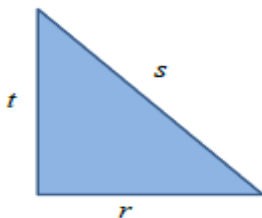
- a. Sisi
Kerucut memiliki dua sisi yang berbeda, yaitu sisi selimut berbentuk juring sebagai sisi lengkung dan sisi bawah (alas) yang berbentuk lingkaran.
- b. Tinggi kerucut ($t=BC$)
Tinggi kerucut adalah jarak antara titik puncak kerucut C dengan titik pusat lingkaran pada alas. Berdasarkan Gambar 4 diketahui bahwa tinggi tabung adalah $BC=t$.
- c. Jari-jari kerucut (r)
Jari-jari pada kerucut merupakan jari-jari lingkaran pada sisi bawah (alas). Pada gambar di atas diketahui bahwa $r=AB$ merupakan jari-jari kerucut.
- d. Garis pelukis (s)
Garis pelukis merupakan jarak antara titik puncak pada kerucut dengan salah satu titik pada keliling alas berbentuk lingkaran.

Selain itu, terdapat jaring-jaring kerucut yang merupakan visualisasi dalam menentukan luas permukaan kerucut.



Gambar 8.5. Jaring-jaring Kerucut

Sebelum mengenal lebih jauh terkait jaring-jaring kerucut, terlebih dahulu akan dijelaskan terkait hubungan antara t sebagai tinggi kerucut, r sebagai jari-jari kerucut, dan s sebagai garis pelukis. Pada Gambar 5a di atas diketahui bahwa terdapat bentuk segitiga siku-siku antara t , r , dan s . Sehingga berlaku teorema Pythagoras, sebagai berikut.



Gambar 8.6. Segitiga Siku-siku

Maka berlaku,

$$s^2 = t^2 + r^2$$

$$t^2 = s^2 - r^2$$

$$r^2 = s^2 - t^2$$

Selanjutnya dari gambar 8.5 dan 8.6 diketahui bahwa bangun kerucut yang memiliki jari-jari alas r dan panjang garis pelukis s . Jika pada kerucut yang ditunjukkan pada gambar tersebut di iris sepanjang garis pelukis s dan sepanjang keliling

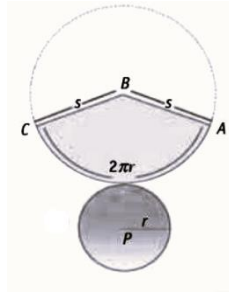
alas yang membentuk lingkaran sebagai garis lengkung, maka akan diperoleh jaring-jaring kerucut, sehingga dapat disimpulkan bahwa jaring-jaring kerucut terdiri dari dua sisi, yaitu sisi lengkung sebagai selimut kerucut merupakan juring lingkaran ABC dengan jari-jari s dan sisi datar sebagai alas kerucut berbentuk lingkaran dengan pusat P dan jari-jari r .

Berikut ini dikenalkan beberapa sifat kerucut:

- 1) Kerucut memiliki 2 sisi, 1 rusuk dan 1 titik sudut
- 2) Kerucut terdiri dari sisi lengkung yang disebut selimut kerucut dan sisi alas berbentuk lingkaran
- 3) Titik C disebut sebagai titik puncak kerucut
- 4) $BC=t$ adalah tinggi kerucut
- 5) AB disebut jari-jari alas yang berbentuk lingkaran sebagai jari-jari kerucut
- 6) $AC=s$ adalah garis pelukis, yaitu garis yang menghubungkan titik puncak kerucut ke titik pada keliling las

8.2.2 Luas Permukaan Kerucut

Luas permukaan kerucut dapat diketahui dengan menjumlahkan semua sisi pada jaring-jaring kerucut yang terdiri dari sebuah juring lingkaran dan lingkaran. Berikut ditunjukkan perincian dari masing-masing sisi pada jaring-jaring kerucut. Luas permukaan kerucut dapat diketahui dengan menjumlahkan semua sisi pada jaring-jaring kerucut yang terdiri dari sebuah juring lingkaran dan lingkaran. Berikut ditunjukkan perincian dari masing-masing sisi pada jaring-jaring kerucut.



Gambar 8.7. Jaring-jaring Kerucut

Luas Selimut Kerucut

Luas selimut kerucut = luas juring lingkaran

- Panjang jari-jari BC (AB) = Panjang garis pelukis (s)
- Panjang busur AC = keliling lingkaran alas kerucut = $2\pi r$

Selanjutnya, dengan melalui informasi di atas diketahui bahwa bahwa luas selimut kerucut dapat ditentukan perbandingannya menggunakan perhitungan berikut:

$$\frac{\text{Luas Juring Lingkaran } ABC}{\text{Luas Lingkaran Besar}} = \frac{\text{Panjang Busur Kecil } AC}{\text{Keliling Lingkaran Besar}}$$

$$\frac{\text{Luas Selimut Kerucut}}{\pi s^2} = \frac{2\pi r}{2\pi s}$$

$$\frac{\text{Luas Selimut Kerucut}}{\pi s^2} = \frac{r}{s}$$

$$\text{Luas Selimut Kerucut} = \pi s^2 \times \frac{r}{s}$$

$$\text{Luas Selimut Kerucut} = \pi rs$$

Luas Selimut Kerucut (L_{sk}) = πrs

Luas Permukaan Kerucut

Alas kerucut berbentuk lingkaran, sehingga luas alas kerucut sama dengan luas lingkaran yaitu πr^2 . Berdasarkan beberapa rumus yang sudah ditemukan, maka luas permukaan kerucut dapat diketahui sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Luas Permukaan Kerucut} &= \text{Luas selimut kerucut} + \text{luas alas kerucut} \\ &= \pi r s + \pi r^2 \\ &= \pi r(r + s)\end{aligned}$$

$$\text{Luas Permukaan Kerucut (L}_{pk}\text{)} = \pi r(r + s)$$

Contoh 1

Diketahui suatu kerucut dengan jari-jari alas kerucut 14 cm dan garis pelukis 39 cm. Tentukan luas permukaan kerucut tersebut dengan $\pi = 3,14$!

Penyelesaian:

Jari-jari alas kerucut = 14 cm

Garis pelukis (s) = 39 cm

Luas permukaan kerucut = $\pi r(r + s)$

$$\begin{aligned}L_{pk} &= \pi r(r + s) \\ &= 3,14 \times 14 (14 + 39) \\ &= 3,14 \times 14 \times 53 \\ &= 2.329,88 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Jadi, luas permukaan kerucut = $2.329,88\text{cm}^2$.

Contoh 2

Tentukan luas permukaan kerucut seluruhnya, jika jari-jari kerucut dan tingginya masing-masing 20 cm dan 15 cm!

Penyelesaian:

$$r = 20 \text{ cm}$$

$$t = 15 \text{ cm}$$

Karena dalam rumus luas permukaan kerucut terdapat s (garis pelukis), kita dapat mencarinya dengan menggunakan r dan t dalam teorema Pythagoras.

$$s^2 = r^2 + t^2$$

$$s^2 = 20^2 + 15^2$$

$$s^2 = r^2 + t^2$$

$$s^2 = 20^2 + 15^2$$

$$s^2 = 400 + 225$$

$$s^2 = 625$$

$$s = 25$$

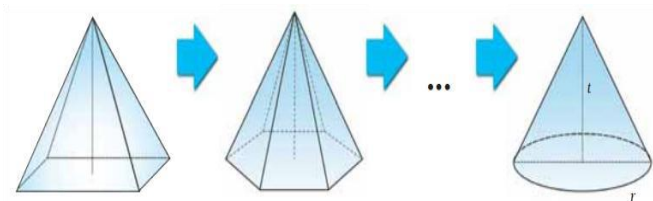
Selanjutnya, dicari luas permukaan kerucut tersebut dengan rumus yang telah ditentukan.

$$\begin{aligned} L_{pk} &= \pi r(r + s) \\ &= 3,14 \times 20 \times (20 + 25) \\ &= 3,14 \times 20 \times 45 \\ &= 2.826\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Jadi, luas permukaan kerucut tersebut adalah 2.826 cm^2 .

8.2.3 Volume Kerucut

Kerucut dapat juga dikatakan sebagai limas beraturan yang memiliki segi yang sangat banyak. Selain itu, antara kerucut dan limas tegak memiliki kesamaan, yaitu memiliki dua sisi (bidang) sejajar yang kongruen.



Gambar 8.8. Perubahan Limas Menjadi Kerucut

Berdasarkan gambar di atas diketahui bahwa limas yang memiliki sisi samping dan bawah merupakan bangun persegi atau persegi panjang, selanjutnya menjadi bentuk limas segi beraturan yang tergantung pada bentuk alasnya. Jika limas segi beraturan pada sisi alas menjadi segi beraturan yang sangat banyak mendekati bentuk lingkaran, maka limas segi beraturan tersebut merupakan suatu kerucut. Akibatnya, unsur pembentuk volume limas beraturan juga akan sama dengan volume kerucut.

$$\begin{array}{lcl} \text{Volume} & = & \frac{1}{3} \text{luas alas limas} \times \text{tinggi limas} \\ \text{Limas} & & \end{array}$$

Dikarenakan unsur pembentuk volume limas beraturan sama dengan volume kerucut dengan tinggi t , maka berlaku sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcl} \text{Volume Kerucut} & = & \frac{1}{3} \text{luas alas kerucut} \times \text{tinggi kerucut} \\ V_k & = & \frac{1}{3} \text{luas lingkaran} \times \text{tinggi kerucut} \\ V_k & = & \frac{1}{3} \pi r^2 t \end{array}$$

Seingga volume kerucut adalah $\frac{1}{3}\pi r^2 t$ dengan r merupakan jari-jari lingkaran (alas kerucut) dan t merupakan tinggi kerucut.

$$\text{Voleme Kerucut } (V_k) = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

8.2.4 Soal Latihan

1. Suatu kerucut dengan diameter 21 cm memiliki volume **462 cm³**. Tentukan tinggi kerucut tersebut!
2. Volume kerucut adalah **314 cm³**. Jika kerucut tersebut memiliki jari-jari 10 cm. Hitunglah Tinggi kerucut, Panjang garis pelukis, dan Luas permukaan kerucut!
3. Tentukan panjang jari-jari kerucut, jika bolomenya adalah 1508 cm³ dan tingginya 10 cm!
4. Sebuah kerucut tingginya 12 cm dan berdiamter 28 cm. berapakah volume kerucut tersebut?
5. Humam akan mewarnai lapisan luar topinya yang berbentuk kerucut dengan diameter 48 cm dan tingginya 10 cm. Berapa luas permukaan yang dapat diwarnai oleh Humam?

8.3 Bola

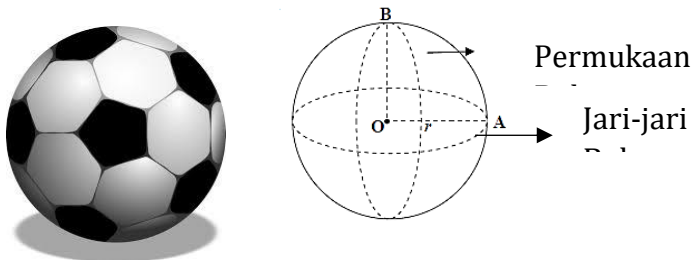
Bola merupakan bangun ruang sisi lengkung yang dibatasi oleh tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama (jari-jari) dari suatu titik tertentu (titik pusat).

8.3.1 Unsur-unsur Bola

Bangun ruang bola memiliki keunikan tersendiri dibandingkan dengan bangun lainnya. Bola lebih populer dikenal lebih mudah oleh semua kalangan, dari anak-anak

hingga dewasa. Lebih-lebih ketika hampir setiap tahun ada yang namanya turnamen sepak bola.

Berikut ini dikenalkan beberapa unsur bola, yang diasumsikan dapat dengan mudah untuk mengidentifikasi dan memahaminya.



Gambar 8.9. Bola dan Unsur-unsurnya
Sumber: ErlanggaPedia

Berdasarkan gambar di atas diketahui bahwa unsur-unsur bola terdiri dari.

$$r = AO = BO = \text{jari} - \text{jari}$$

$$O = \text{titik pusat}$$

Berikut ini ditunjukkan sifat-sifat bola:

- 1) Hanya memiliki satu sisi yaitu bidang lengkung
- 2) Hanya memiliki satu titik pusat
- 3) Tidak memiliki titik sudut
- 4) Memiliki jari-jari yang tak hingga banyak dan semuanya sama Panjang

8.3.2 Luas Permukaan Bola

Menghitung luas permukaan bola dapat dilakukan dengan berbagai variasi rumus yang mudah dipahami, akan tetapi rumus-rumus yang sudah umum digunakan kadangkala hanya

menekankan kemampuan procedural tidak secara konseptual. Oleh karena itu, penting memahami secara komprehensif tentang luas permukaan bola dan bagaimana hingga dapat dirumuskan luas permukaan bola tersebut.

Permukaan bola dapat juga dikatakan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu yang dinamakan sebagai pusat bola. Permukaan bola dapat dibuktikan dengan melilitkan tali ke selimut setengah bola. Kemudian lilitan ini dibuka dan dililitkan lagi ke lingkaran dengan jari-jari yang sama dengan jari-jari bola. Berdasarkan percobaan tersebut diperoleh tali yang dililitkan ke selimut setengah bola yang jika dililitkan ke lingkaran akan diperoleh dua lingkaran penuh, sehingga ditemukan.

$$\begin{aligned}\text{Luas selimut setengah lingkaran} &= 2 \times \text{luas lingkaran} \\ &= 2\pi r^2\end{aligned}$$

Dari rumus di atas dapat diketahui bahwa rumus luas permukaan/selimut bola sebagai berikut:

$$\text{Luas permukaan/selimut bola} = 4\pi r^2$$

$$\text{Luas Permukaan/Selimut Bola} = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

Contoh

Tentukan luas permukaan bola jika memiliki jari-jari 10 cm!

Penyelesaian:

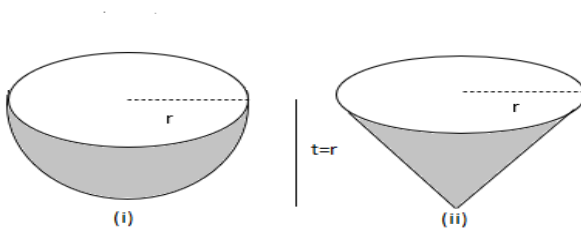
$$\begin{aligned}\text{Jari-jari (r)} &= 10 \text{ cm} \\ \text{Luas Permukaan Bola} &= 4\pi r^2 \\ &= 4(3,14)10^2 \\ &= 4(3,14)100 \\ &= 4(314)\end{aligned}$$

$$= 1256 \text{ cm}^2$$

Jadi, hasil perhitungan menunjukkan bahwa luas permukaan bola dengan jari-jari 10 cm adalah 1.256 cm^2 .

8.3.3 Volume Bola

Pembahasan akan bangun tiga dimensi yang banyak digemari umat manusia ini (disebut bola) tidak hanya pada luas permukaan/selimutnya, tetapi juga mencakup volume/isinya. Perhatikan gambar di bawah ini!

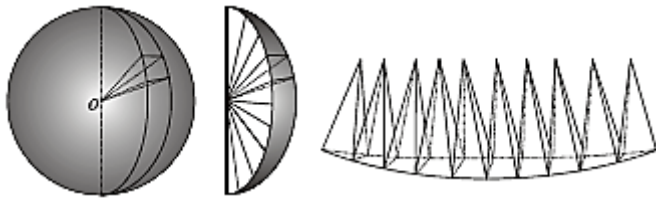


Gambar 8.10. Ilustrasi setengah Bola dan Kerucut

Berdasarkan gambar (i) dan (ii) di atas diketahui bahwa untuk uji kasus pada sebuah bola yang memiliki jari-jari (r) dan sebuah kerucut yang jari-jari (r) nya juga sama dengan tingginya (t) maka akan memiliki kesetaraan volume sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Volume Bola} &= 2 \times 2 \times \text{Volume Kerucut} \\ &= 4 \times \frac{1}{3} \pi r^2 t \\ &= 4 \times \frac{1}{3} \pi r^2 r \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Penentuan rumus volume bola juga dapat ditemukan dari ilustrasi bola pada yang diiris-iris menjadi limas-limas dengan ukuran yang sama hingga irisan yang ke- n . Perhatikan gambar 11 di bawah ini!



Gambar 8.11. Bola Padat Diiris Menjadi Limas-limas

Berdasarkan gambar di atas diketahui bahwa sebuah bola dipotong-potong membentuk limas-limas dengan titik puncak di pusat bola seperti pada gambar di atas. Beberapa limas tersebut memiliki tinggi yang sama sebagai jari-jari bola. Luas alas setiap limas dimisalkan sebagai $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$. Jika alas suatu limas dibuat sekecil-kecilnya dan n dibuat sebesar-besarnya, maka jumlah seluruh luas alas limas akan sama dengan luas permukaan bola. Dengan demikian, dapat diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}
 \text{Volume Bola} &= \text{Jumlah Volume Seluruh Limas} \\
 &= \frac{1}{3}L_1r + \frac{1}{3}L_2r + \frac{1}{3}L_3r + \dots + \frac{1}{3}L_nr \\
 &= \frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n)r \\
 &= \frac{1}{3}(\text{luas permukaan bola})r \\
 &= \frac{1}{3}(4\pi r^2)r \\
 &= \frac{4}{3}\pi r^3
 \end{aligned}$$

$$\text{Volume Bola } (V_b) = \frac{1}{3}4\pi r^3$$

Contoh

Tentukan volume sebuah bola yang memiliki diameter 6 cm!

Penyelesaian:

Karena diameter (d) = 6 cm , maka jari-jari (r) = $\frac{1}{2}(6)\text{ cm} = 3\text{ cm}$, sehingga volume bola (V_b) = $\frac{1}{3}4(3,14)3^3 = 4(3,14)9$.

$V_b = 36(3,14) = 113,04\text{ cm}^3$. Jadi, Volume bola adalah $113,04\text{ cm}^3$.

8.3.4 Soal Latihan

1. Jika diketahui volume sebuah bola **479 cm^3** , hitunglah panjang jari-jari bola tersebut!
2. Hitunglah massa 200 bola besi yang masing-masing berdiameter **$0,7\text{ cm}$** , jika massa **1 cm^3** besi adalah **$7,8\text{ gram}$** !
3. Sebuah bola dimasukkan ke dalam kubus dengan panjang rusuk **21 cm** , sehingga sisi bola menyinggung semua sisi kubus itu. Berdasarkan ilustrasi tersebut, hitunglah:
 - a. Luas permukaan bola
 - b. Volume bola
4. Diketahui sebuah tangki minyak goreng berbentuk tabung dengan kedua ujung berbentuk setengah bola. Jika panjang tangki **7 m** dan tinggi **2 m** , berapa literkah minyak goreng yang dapat ditampung pada tangki itu ?
5. Perhatikan gambar buah melon berikut ini!



Buah melon di samping setelah diukur ternyata memiliki perbedaan diameter, yaitu 12 cm dan 16 cm . Jika rasio diameter tersebut adalah $3:4$, maka tentukan rasio luas permukaan

DAFTAR PUSTAKA

- Adinawan, M.C & Sugiono. 2005. *Matematika Untuk SMP/MTs Kelas VIII*. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Byrd, G., & Lynn, B., & Pearce, C. 2013. *Cambridge Checkpoint Mathematics Coursebook 8*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Byrd, G., & Lynn, B., & Pearce, C. 2014. *Cambridge Checkpoint Mathematics Coursebook 7*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Goldie, S. 2012. *Pure Mathematics 1*. London: Hodder Education, a Hachette UK Company.
- Navedtra. 1985. *Mathematics, Basic Math and Algebra*. United States: Naval Education and Training Professional Development and Technologi Center.
- Tim Gakko Toshio. 2021. *Matematika untuk Sekolah Menengah Pertama kelas VII*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan.
- Tohir, M., & Anam, A. C., & Taufiq, I. 2021. *Matematika untuk SMA/SMK Kelas XII*. Jakarta: Pusat Perbukuan, BSKAP Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, dan Teknologi.
- Tohir, M., & Anam, A. C., & Taufiq, I. 2021. *Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas XII*. Jakarta: Pusat Perbukuan, BSKAP Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, dan Teknologi.

BIODATA PENULIS



Dr. H. Nanang, M.Pd.
Staf Dosen Jurusan Teknik Sipil
Institut Teknologi Garut

Penulis lahir di Bandung tanggal 1 Juli 1964. Penulis adalah dosen dpk Kopertis Wilayah VII Surabaya pada Program Studi Pendidikan FKIP Universitas Muhammadiyah Jember dari tahun 1990 s.d. 2000 dan dosen LLDIKTI Wilayah IV Jawa Barat dan Banten pada Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Sipil dan Arsitektur Institut Teknologi Garut (ITG) dari Tahun 2000 s.d. sekarang. Dari tahun 1986 s.d 1990, penulis bekerja sebagai guru di SMAN 1 Bandung, SMA 55 Asia Afrika Bandung, SMA Karya Agung Bandung, SMA Swadaya Bandung.

Penulis menyelesaikan: S1 Pendidikan di IKIP Bandung (UPI) Tahun 1989, S2 Pendidikan di IKIP Surabaya (UNESA) Tahun 1999, dan S3 Pendidikan di UPI Bandung Tahun 2009. Penulis menekuni bidang Pembelajaran. Penulis juga sebagai Tim Penilai DUPAK Kepangkatan Guru-guru di Kabupaten Garut dari tahun 2015 s.d. sekarang. Telah beberapa kali memperoleh hibah penelitian dan pengabdian pada masyarakat dari Universitas Muhammadiyah Jember, Institut Teknologi Garut, dan Ristek Dikti Kemendikbud.

BIODATA PENULIS



Raden Sri Ayu Ramadhana, S.Pd .I, M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Raden Sri Ayu Ramadhana lahir di Kwala Begumit, tanggal 15 Februari 1992. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika Institut Agama Islam Negeri Sumatera Utara (IAIN SU) dan melanjutkan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Medan. Pada tahun 2014-2019 sebagai Tenaga Pengajar di Sekolah Tingkat Menengah dan Madrasah Aliyah Negeri di Langkat kemudian pada tahun 2019 sampai saat ini merupakan dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Al Washliyah Labuhanbatu.

BIODATA PENULIS



Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd.

Dosen FKIP Universitas Simalungun

Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd, lahir di Medan, Pendidikan S1, S2 dan S3 Prodi Pendidikan Matematika dan Matematika FMIPA USU Medan. Dosen di FKIP dan SPS Program S2 serta Kepala Pusat Komputer Universitas Simalungun. Penulis aktif mengikuti sebagai pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional dan aktif menulis Buku, Jurnal OJS, Sinta, dan Scopus.

BIODATA PENULIS



Mesak Ratuanik, S.Si., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Lelemuku Saumlaki

MESAK RATUANIK, S.Si., M.Pd, Anak ketiga dari empat bersaudara dari pasangan suami-istri, Ayah Eduard Ratuanik dan Ibu Nelci Ungirwalu, Lahir di Waturu, Kabupaten Kepulauan Tanimbar, Maluku pada tanggal 13 April 1989. Jenjang Pendidikan Sekolah Dasar di SD Inpres Waturu, SMP Negeri 5 Tanimbar Utara dan melanjutkan ke SMA Negeri 2 Tanimbar Utara. Telah Menyelesaikan Studi S1 di Universitas Pattimura Ambon pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (2008-2012). Menyelesaikan Studi Magister Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta (2017-2019). Tahun 2018-2019 menjadi tutor Matematika Dasar dalam Kegiatan Program Matrikulasi Kuliah Mahasiswa Mappi, Papua. Penulis juga aktif menerbitkan penelitian-penelitian bidang pendidikan pada Jurnal Nasional dan Jurnal Internasional. Sekarang menjadi salah satu tenaga pendidik (dosen) di Universitas Lelemuku Saumlaki (UNLESA), Kabupaten Kepulauan Tanimbar, Maluku. Beberapa Mata Kuliah yang diampu oleh penulis diantaranya Pengantar Dasar Matematika, Geometri Dasar, Geometri Analitik, Geometri Transformasi, Analisis Real, Metode Numerik, Kalkulus dan Metodolgi Penelitian.

BIODATA PENULIS



Arini Ulfah Hidayati., M.Pd.

Dosen Statistika Pendidikan di Fakultas Tarbiyah
Sekolah Tinggi Ilmu Tarbiyah Bustanul 'Ulum (STIT BU)
Lampung Tengah

Penulis lahir di Lampung Tengah tanggal 09 Juni 1990. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Guru Madrasah Ibtidaiyah mengampu mata kuliah statistika pendidikan di perguruan tinggi swasta STIT BU Lampung Tengah. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Ahmad Dahlan dan melanjutkan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Yogyakarta. Penulis menekuni bidang menulis dan karya ilmiah khusus matematika.

BIODATA PENULIS



Maswar, S.Pd., M.Pd.

Dosen Program Studi Tadris Matematika
Fakultas Tarbiyah Universitas Ibrahimy Sukorejo Situbondo

Penulis lahir di Sumenep, tanggal 10 April 1989. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah, Universitas Ibrahimy Situbondo. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Fakultas MIPA IKIP PGRI Jember, Jurusan Pendidikan Matematika Tahun 2012 dan melanjutkan S2 pada Pasca Sarjana Universitas Negeri Surabaya, Jurusan Magiste Pendidikan Matematika. Penulis menekuni bidang Menulis sejak di Bangku Kuliah Hingga saat ini. Karya ilmiah nasional yang dipublikasikan antara lain: Buku dengan judul “Mathemagic dan Hitung Cepat dengan Metode Singkat” diterbitkan oleh Absolute Media, Terakata Media dan Tangga Ilmu Yogyakarta (2010), Buku dengan judul “Mathemagic: Pintar Matematika dan Pintar Bersulap” diterbitkan oleh Tangga Ilmu Yogyakarta (2012), Buku dengan judul “Teknik Analisis Korelasi dan Regresi untuk Penelitian Pendidikan, Ekonomi, dan Bisnis: Dilengkapi dengan Panduan Penggunaan SPSS 23 Dan EvIEWS

8.1” diterbitkan oleh Salsabila Jember (2018), Buku dengan judul “Merawat Peradaban Pesantren” diterbitkan oleh Tanwirul Afkar Situbondo (2020), Buku berjudul “Pengantar

Matematika Dasar: Untuk Mahasiswa, Guru, dan Pegiat Matematika” diterbitkan oleh PT. Global Eksekutif Teknologi Padang (2022), dan Buku Kolaboratif dengan judul ” Ilmu Pendidikan” diterbitkan oleh PT. Global Eksekutif Teknologi Padang (2023). Sementara, karya ilmiah artikel nasional dan internasional dapat di searching melalui alamat GS berikut: https://scholar.google.com/citations?user=c_ikLTIAAAAJ&hl=id&oi=ao.

Penulis dapat dihubungi melalui HP 081249268720, dengan alamat email: maswar@ibrahimy.ac.id, Scopus ID: 57219872153, WoS Researcher ID: AAB-2456-2020, dan Sinta ID: 6711489.