

ALJABAR LINIER TEKNIK ELEKTRO



Tim Penulis:

- Abdul Azis
- Putri Anugrah Cahya Dewi
- Devi Rahayu Agustin
- Hasniati
- Sutiyono
- Moh. Nafis Husen Romadani
- Evi Sunarti Antu
- Nining Puji Lestari
- Suprihatin
- Fajriana
- Ida Kurnia Waliyanti

ALJABAR LINIER TEKNIK ELEKTRO

**Abdul Azis
Putri Anugrah Cahya Dewi
Devi Rahayu Agustin
Hasniati
Sutiyono
Moh. Nafis Husen Romadani
Evi Sunarti Antu
Nining Puji Lestari
Suprihatin
Fajriana
Ida Kurnia Waliyanti**



GETPRESS INDONESIA

ALJABAR LINIER TEKNIK ELEKTRO

Penulis :

Abdul Azis
Putri Anugrah Cahya Dewi
Devi Rahayu Agustin
Hasniati
Sutiyono
Moh. Nafis Husen Romadani
Evi Sunarti Antu
Nining Puji Lestari
Suprihatin
Fajriana
Ida Kurnia Waliyanti

ISBN : 978-623-125-971-4

Editor : Hendra Nusa Pratama

Desain Sampul dan Tata Letak : Tri Putri Wahyuni

PENERBIT : GET PRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Jl. Palarik RT 01 RW 06 Kelurahan Air Pacah
Kecamatan Koto Tangah Padang Sumatera Barat
website: www.getpress.co.id
email: adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, Agustus 2025

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya sehingga buku berjudul Aljabar Linier Teknik Elektro ini dapat diselesaikan. Isi buku ini mencakup pembahasan tentang vektor, jarak euclidean, *dot product* dan *cross product* antara dua vektor, basis dan dimensi dari suatu ruang vektor, definisi matriks dan operasi matriks, matriks-matriks khusus; transformasi elementer, determinan matriks 2×2 , determinan matriks $n \times n$, perhitungan invers matriks $\times$ dengan metode *adjoint* dan eliminasi gauss-jordan, penyelesaian sistem persamaan linier dengan determinan matriks, penyelesaian sistem persamaan linier (spl) dengan invers matriks, dan penyelesaian sistem persamaan linear (spl) dengan metode gauss dan gauss jordan. Akhir kata, kami berharap buku ini dapat menjadi referensi yang bermanfaat bagi semua pembaca.

Padang, Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
DAFTAR GAMBAR	v
BAB 1 VEKTOR	1
1.1 Pendahuluan.....	1
1.2 Definisi Vektor	2
1.3 Vektor Dalam Susunan Koordinat Ruang Berdimensi Satu, Dua, Tiga.....	5
1.4 Operasi Pada Vektor	9
DAFTAR PUSTAKA	33
BAB 2 JARAK <i>EUCLIDEAN</i>, <i>DOT PRODUCT</i> DAN <i>CROSS PRODUCT</i> ANTARA DUA VEKTOR, BASIS DAN DIMENSI DARI SUATU RUANG VEKTOR	35
2.1 Pendahuluan.....	35
2.2 Menghitung Jarak <i>Euclidean</i>	36
2.2 Mengaplikasikan Dot Product dan <i>Cross Product</i> Antara Dua Vektor.....	38
2.3 Basis dan Dimensi dari Suatu Ruang Vektor.....	43
DAFTAR PUSTAKA	47
BAB 3 DEFINISI MATRIKS DAN OPERASI MATRIKS.....	49
3.1 Pendahuluan.....	49
3.2 Definisi Vektor	49
3.3 Definisi Matriks	51
3.3 Jenis-Jenis Matriks.....	54
3.4 Operasi Matriks	59
DAFTAR PUSTAKA	68
BAB 4 MATRIKS-MATRIKS KHUSUS; TRANSFORMASI ELEMENTER.....	71
4.1 Pendahuluan.....	71
4.2 Matriks-Matriks Khusus.....	72
4.3 Transformasi Elementer.....	80

4.4 Penerapan Transformasi Elementer.....	83
DAFTAR PUSTAKA	86
BAB 5 DETERMINAN MATRIKS 2 X 2	87
5.1 Definisi Determinan.....	87
5.2 Sifat-Sifat Determinan Matriks.....	90
5.3 Aplikasi dari Determinan Matriks 2X2.....	99
DAFTAR PUSTAKA	105
BAB 6 DETERMINAN MATRIKS 3 × 3.....	106
6.1 Mencari Determinan Matriks 3 × 3 Menggunakan Metode Sarrus.....	107
6.2 Mencari Determinan Matriks 3 × 3 Menggunakan Metode Ekspansi Kofaktor.....	111
6.3 Mencari Determinan Matriks 3 × 3 Menggunakan Metode Reduksi Baris.....	116
6.4 Beberapa Sifat Mengenai Determinan Matriks 3 × 3.....	121
6.5 Latihan-Latihan Soal.....	124
DAFTAR PUSTAKA	126
BAB 7 DETERMINAN MATRIKS N X N	127
7.1 Definisi dan Notasi Determinan.....	127
7.2 Metode Perhitungan Determinan.....	131
7.3 Sifat-sifat Determinan.....	134
7.4 Aplikasi Determinan dalam Sistem Persamaan Linier (<i>Cramer's Rule</i>).....	136
7.5 Aplikasi Determinan dalam Transformasi Linear dan Geometri.....	140
DAFTAR PUSTAKA	143
BAB 8 PERHITUNGAN INVERS MATRIKS N×N DENGAN METODE ADJOINT DAN ELIMINASI GAUSS-JORDAN	145
8.1 Pendahuluan.....	145
8.2 Invers Matriks dengan Metode <i>Adjoint</i>	151
8.3 Invers Matriks dengan Metode Eliminasi Gauss-Jordan..	159
8.4 Perbandingan Metode <i>Adjoint</i> dan Gauss-Jordan	163
DAFTAR PUSTAKA	169

BAB 9 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER	
DENGAN DETERMINAN MATRIKS	171
9.1 Pengertian Sistem Persamaan Linier (SPL)	171
9.2 Jenis- jenis dari Sistem Persamaan linier	172
9.3 Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linier	173
DAFTAR PUSTAKA	186
BAB 10 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER	
(SPL) DENGAN INVERS MATRIKS	187
10.1 Pendahuluan	187
10.2 Sistem Persamaan Linier.....	187
10.3 Metode Invers Matriks	190
DAFTAR PUSTAKA	200
BAB 11 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR	
(SPL) DENGAN METODE GAUSS DAN GAUSS JORDAN	201
11.1 Sistem Persamaan Linear.....	201
11.2 Metode Eliminasi Gauss.....	207
11.3 Metode Eliminasi Gauss-Jordan	212
11.4 Soal Latihan	219
DAFTAR PUSTAKA	220
BIODATA PENULIS	221

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1 Vektor $v = \overrightarrow{AB}$	3
Gambar 1. 2 Vektor Ekuivalen	4
Gambar 1. 3 Negatif dari vektor v	5
Gambar 1. 4 Sistem Koordinat Ruang Berdimensi-1	5
Gambar 1. 5 Vektor dalam Ruang Berdimensi-2	7
Gambar 1. 6 Vektor dalam Ruang Berdimensi-3	9
Gambar 1. 7 Penjumlahan Vektor	11
Gambar 1. 8 Vektor $u + (v + w)$ dan $(u + v) + w$	12
Gambar 1. 9 Pengurangan Vektor	14
Gambar 1. 10 Perkalian Skalar dan Vektor.....	15
Gambar 1. 11 Norma Vektor dalam Ruang Dimensi Dua.....	16
Gambar 1. 12 Norma Vektor dalam Ruang Dimensi Tiga	17
Gambar 1. 13 Vektor Satuan dalam Ruang Dimensi Dua.....	19
Gambar 1. 14 Vektor Satuan dalam Ruang Dimensi Tiga	20
Gambar 1. 15 Perkalian Titik Vektor.....	22
Gambar 1. 16 Sudut Diantara Vektor u dan v Memenuhi 0° $< \theta < 180^\circ$	23
Gambar 1. 17 Proyeksi Vektor v pada Vektor u	25
Gambar 1. 18 Vektor $u (1, 5, 2)$ dan $v (0, 2, 4)$	27

BAB 1

VEKTOR

Oleh Abdul Azis

1.1 Pendahuluan

Dalam disiplin teknik elektro, konsep vektor merupakan fondasi utama dalam memahami dan memodelkan berbagai fenomena fisis yang bersifat vektor, seperti medan listrik, medan magnet, gaya, arus, serta tegangan. Fenomena-fenomena ini tidak hanya memiliki besar (magnitudo) tetapi juga arah, yang menjadikan representasi vektor sebagai alat yang sangat esensial dalam analisis teknis dan perancangan sistem elektro (Sadiku, 2018).

Misalnya, medan listrik yang dihasilkan oleh muatan titik akan memiliki arah dari muatan positif menuju muatan negatif dan nilai besarnya bergantung pada jarak serta besar muatannya. Untuk menggambarkan fenomena ini secara matematis, digunakan vektor posisi, vektor gaya, dan vektor medan. Dengan kata lain, vektor memungkinkan para insinyur untuk menyatakan perubahan fisik dalam ruang tiga dimensi secara lebih presisi dan konsisten (Ulaby & Ravaioli, 2023).

Selain itu, dalam analisis rangkaian listrik tiga fasa atau sistem koordinat dalam elektromagnetika, penggunaan vektor tak hanya sekadar untuk menunjukkan arah dan besaran, tetapi juga terlibat dalam operasi matematis kompleks seperti penjumlahan, proyeksi, perkalian dot (*dot*

product), dan perkalian silang (*cross product*). Operasi-operasi tersebut berguna untuk menghitung torsi motor, gaya Lorentz, serta distribusi arus pada penghantar (Sadiku, 2018).

Pemahaman yang kuat terhadap vektor juga merupakan prasyarat dalam mempelajari ruang vektor, transformasi linear, dan sistem koordinat ortonormal yang lebih lanjut dibahas dalam aljabar linier. Dalam konteks pendidikan teknik, penguasaan konsep ini membantu mahasiswa menjembatani antara teori matematika dan penerapannya dalam teknologi (Lay, et al., 2022).

Oleh karena itu, sebelum mempelajari transformasi matriks, sistem persamaan linier, atau aplikasi numerik lainnya, penguasaan materi tentang vektor menjadi landasan penting dalam kurikulum aljabar linier untuk mahasiswa teknik elektro.

1.2 Definisi Vektor

Dalam bidang teknik elektro dan aljabar linier, istilah vektor merujuk pada besaran yang memiliki arah dan besar (magnitudo). Vektor tidak hanya terbatas pada penggambaran fisik seperti dalam fisika klasik (misalnya gaya atau kecepatan), tetapi juga digunakan secara matematis sebagai susunan bilangan yang merepresentasikan posisi atau perubahan dalam ruang berdimensi dua, tiga, atau lebih (Lay, et al., 2022).

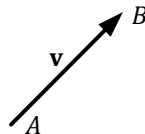
Vektor dibedakan dari besaran skalar, karena hanya memiliki nilai besar tanpa arah. Misal besaran skalar meliputi suhu, waktu, massa, dan energi. Sebaliknya, dalam teknik elektro, vektor digunakan untuk menyatakan fenomena

seperti arus, tegangan, serta transformasi sinyal dan sistem dinamis (Sadiku, 2018).

Dalam aljabar linier, notasi vektor biasanya ditulis dalam huruf tebal kecil seperti **c**, **d**, **u**, **v**, dan **w**, sedangkan besar vektor (yang merupakan skalar) dapat ditulis dengan huruf miring kecil seperti *c*, *d*, *u*, *v*, dan *w* (Anton, et al., 2019).

Secara geometris, vektor direpresentasikan sebagai sebuah garis berarah (panah) dalam ruang dimensi dua atau tiga. Arah dari panah menunjukkan orientasi vektor, sedangkan panjangnya menggambarkan besar atau magnitudo vektor tersebut. Pangkal panah disebut titik awal vektor, dan ujung panah disebut titik terminal. Gambar 1.1 menunjukkan vektor **v** memiliki titik awal di titik *A* dan titik *B* merupakan titik akhir, maka vektor tersebut dapat dituliskan sebagai (Anton, et al., 2019):

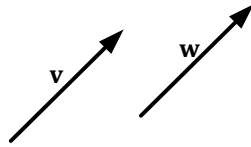
$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$



Gambar 1. 1 Vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$
(Sumber : Anton, et al., 2019)

Vektor-vektor yang memiliki arah dan besar yang sama, meskipun titik awalnya berbeda, disebut vektor ekuivalen. Sebagai contoh, jika dua vektor **v** dan **w** memiliki panjang dan arah yang identik, maka vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai ekuivalen, ditulis (Lay, et al., 2022):

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$



Gambar 1. 2 Vektor Ekuivalen
(Sumber : Lay, et al., 2014)

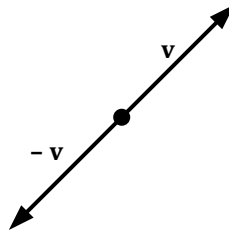
Vektor yang tidak memiliki panjang disebut sebagai vektor nol, dan biasanya dilambangkan dengan simbol **0**. Dalam operasi penjumlahan vektor, vektor nol bersifat identitas, sehingga penjumlahan diantara vektor nol dan vektor apa pun akan menghasilkan vektor itu sendiri, sebagaimana dinyatakan dalam (Anton, et al., 2019):

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

Vektor nol tidak memiliki arah karena tidak menunjukkan pergeseran posisi dalam ruang, namun tetap penting secara aljabar dalam operasi vektor, terutama sebagai elemen netral dalam penjumlahan (Strang, 2023).

Untuk setiap vektor **v**, terdapat vektor negatif **-v** yaitu vektor yang memiliki panjang yang sama tetapi berlawanan arah. Jika **v** merupakan vektor tak nol, maka **-v** direpresentasikan secara geometris sebagai panah yang menunjuk ke arah yang berlawanan dari **v**, seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 1.3. Penjumlahan antara suatu vektor dan negatifnya akan menghasilkan vektor nol, atau (Anton, et al., 2019):

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

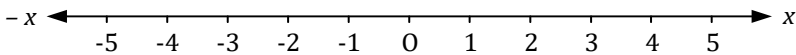


Gambar 1. 3 Negatif dari vektor v
(Sumber : Anton, et al., 2019)

1.3 Vektor Dalam Susunan Koordinat Ruang Berdimensi Satu, Dua, Tiga

➤ Vektor Dalam Ruang Berdimensi Satu

Dalam ruang berdimensi satu, vektor direpresentasikan sepanjang satu garis lurus, biasanya pada sumbu x dalam sistem koordinat Kartesian. Vektor satu dimensi hanya memiliki satu komponen arah, yaitu ke kanan (positif) atau ke kiri (negatif) dari titik acuan nol (origin) (Anton, et al., 2019). Representasi ini umum digunakan dalam matematika dasar maupun fisika untuk menunjukkan posisi atau perpindahan dalam arah linear.



Gambar 1. 4 Sistem Koordinat Ruang Berdimensi-1
(Sumber : Anton, et al., 2019)

Gambar 1.4 menunjukkan representasi visual dari sistem koordinat satu dimensi (1D), yang terdiri atas garis lurus horizontal sebagai sumbu x . Titik tengah pada garis ini adalah origin (0), yang menjadi acuan posisi dan arah vektor. Pada gambar, panah ke arah kanan dari titik nol menandakan vektor dengan nilai positif, seperti $\mathbf{v} = +5$, yang berarti perpindahan sejauh 5 satuan ke kanan. Sebaliknya, panah ke arah kiri menunjukkan vektor dengan nilai negatif, seperti $\mathbf{v} = -3$, yang berarti perpindahan sejauh 3 satuan ke kiri (Serway & Jewett, 2019).

Representasi vektor satu dimensi dapat dianggap sebagai kasus khusus dari vektor dua atau tiga dimensi, di mana komponen lainnya bernilai nol. Artinya, vektor satu dimensi $\mathbf{v} = x$ dapat ditulis sebagai $\mathbf{v} = (x, 0)$ dalam dua dimensi, atau $\mathbf{v} = (x, 0, 0)$ dalam tiga dimensi (Varberg, et al., 2010).

➤ **Vektor Dalam Ruang Berdimensi Dua**

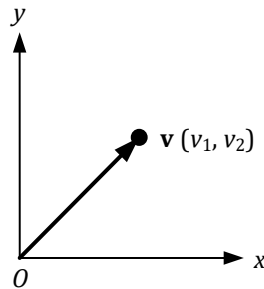
Pada ruang dua dimensi, vektor digambarkan pada bidang datar dan memiliki dua komponen, yakni komponen horizontal yang sejajar dengan sumbu- x dan komponen vertikal yang sejajar dengan sumbu- y . Sistem koordinat Kartesian dua dimensi digunakan untuk menentukan posisi suatu titik atau arah vektor berdasarkan dua nilai, yaitu: komponen x dan komponen y . Setiap vektor dalam ruang berdimensi dua ditulis dalam bentuk pasangan terurut (x, y) , di mana x menyatakan komponen vektor pada sumbu horizontal dan y menyatakan komponen vektor pada sumbu vertikal (Anton, et al., 2019).

Secara geometris, vektor dua dimensi direpresentasikan sebagai panah yang dimulai dari titik asal (origin) di $(0, 0)$ dan berakhir di suatu titik (x, y) dalam bidang koordinat (Anton, et al., 2019). Panjang dari panah tersebut mencerminkan

besar atau magnitudo dari vektor, sedangkan arah panah menunjukkan arah vektor dalam bidang dua dimensi (Kuttler, 2020).

Misalnya, suatu vektor $\mathbf{v}$ dapat divisualisasikan seperti pada Gambar 1.5. Jika v_1 dan v_2 merupakan komponen-komponen dari vektor $\mathbf{v}$ sepanjang sumbu- x dan sumbu- y , maka $\mathbf{v}$ dapat ditulis dalam bentuk koordinat sebagai (Anton, et al., 2019):

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$



Gambar 1. 5 Vektor dalam Ruang Berdimensi-2
(Sumber : Anton, et al., 2019)

Titik ujung dari panah tersebut, yaitu titik (v_1, v_2) , disebut sebagai komponen vektor $\mathbf{v}$ (Anton, et al., 2019). Representasi ini penting dalam analisis vektor dan sangat umum digunakan dalam berbagai bidang ilmu seperti fisika, matematika, dan teknik (Strang, 2023).

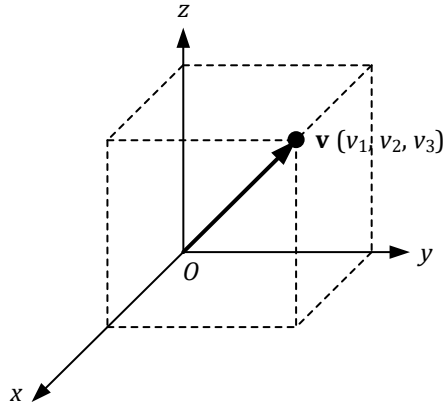
➤ Vektor Dalam Ruang Berdimensi Tiga

Pada ruang berdimensi tiga, vektor direpresentasikan menggunakan tiga komponen arah, yakni sepanjang sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z . Sistem koordinat Kartesian tiga dimensi memungkinkan posisi suatu titik atau arah vektor ditentukan berdasarkan tiga nilai komponen tersebut: x , y , dan z (Anton, et al., 2019). Berbeda dengan ruang dua dimensi, dalam tiga dimensi setiap vektor dituliskan dalam bentuk pasangan terurut tiga elemen, yaitu (x, y, z) , di mana x merupakan komponen sepanjang sumbu horizontal, y sepanjang sumbu vertikal, dan z menunjukkan posisi relatif terhadap kedalaman ruang.

Secara geometris, vektor tiga dimensi direpresentasikan sebagai panah yang dimulai dari titik asal (origin) di koordinat $(0, 0, 0)$ dan berakhir pada suatu titik (x, y, z) dalam ruang (Anton, et al., 2019). Panjang panah ini mencerminkan besar atau magnitudo vektor, sedangkan arah panah menunjukkan arah vektor dalam ruang tiga dimensi (Kuttler, 2020).

Misalnya, suatu vektor $\mathbf{v}$ dapat divisualisasikan pada ruang tiga dimensi (Gambar 1.6). Jika $\mathbf{v}$ memiliki komponen v_1 , v_2 , dan v_3 pada sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z , maka $\mathbf{v}$ dapat dituliskan sebagai (Anton, et al., 2019):

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$



Gambar 1. 6 Vektor dalam Ruang Berdimensi-3
(Sumber : Anton, et al., 2019)

Dalam ruang tiga dimensi, setiap komponen vektor berperan menentukan arah dan besar vektor secara keseluruhan, berbeda dengan vektor dua dimensi yang hanya memiliki dua komponen. Titik (v_1, v_2, v_3) merepresentasikan komponen-komponen vektor $\mathbf{v}$ yang menunjukkan arah dan besar vektor tersebut (Anton, et al., 2019). Representasi ini penting untuk aplikasi teknik seperti analisis gaya, perhitungan gerak, dan simulasi medan elektromagnetik (Strang, 2023).

1.4 Operasi Pada Vektor

Operasi pada vektor merupakan dasar penting dalam berbagai bidang teknik, termasuk teknik elektro, karena memungkinkan analisis arah dan besar suatu besaran fisik secara matematis. Operasi-operasi ini meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, perkalian silang, perkalian

titik, serta perhitungan panjang dan sudut antar vektor (Anton, et al., 2019).

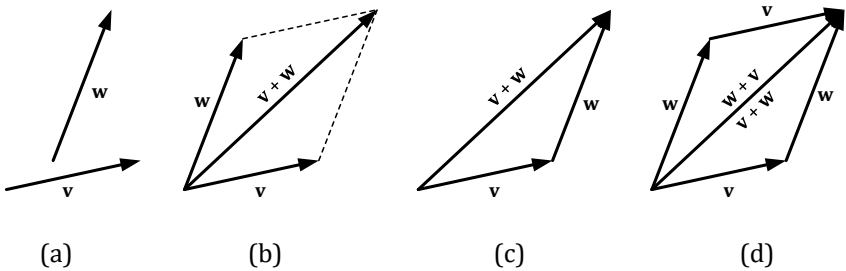
➤ **Penjumlahan Vektor**

Penjumlahan vektor merupakan operasi dasar dalam aljabar vektor yang menghasilkan satu vektor baru yang disebut sebagai resultan vektor. Secara visual, penjumlahan ini dapat dilakukan melalui: aturan jajar genjang, dan aturan segitiga (Anton, et al., 2019).

Dalam operasi penjumlahan vektor, aturan jajar genjang merupakan salah satu pendekatan geometris yang digunakan untuk memvisualisasikan hasil penjumlahan dua vektor. Misalnya, apabila $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ merupakan dua vektor sebarang (lihat Gambar 1.7.a), maka penjumlahan keduanya dilakukan dengan meletakkan kedua vektor tersebut pada titik pangkal yang sama. Selanjutnya, dari ujung vektor $\mathbf{v}$ dibuat garis sejajar dengan arah dan panjang vektor $\mathbf{w}$, dan dari ujung vektor $\mathbf{w}$ dibuat garis sejajar dengan arah dan panjang vektor $\mathbf{v}$, sehingga terbentuk sebuah jajar genjang. Vektor resultan $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ diperoleh dengan menarik garis dari titik pangkal bersama menuju sudut berlawanan dari jajar genjang tersebut (lihat Gambar 1.7.b) (Anton, et al., 2019). Vektor resultan ini menggambarkan hasil penjumlahan kedua vektor secara geometris dalam ruang dua maupun tiga dimensi (Strang, 2023).

Selain menggunakan aturan jajar genjang, penjumlahan dua vektor juga dapat dilakukan dengan aturan segitiga. Misalnya apabila $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ merupakan dua vektor sebarang (lihat Gambar 1.7.a), maka penjumlahan keduanya dilakukan dengan cara meletakkan titik awal vektor $\mathbf{w}$ tepat pada titik akhir vektor $\mathbf{v}$. Setelah itu, ditarik sebuah vektor dari titik awal vektor $\mathbf{v}$ menuju titik akhir vektor $\mathbf{w}$. Vektor ini diberi arah

dengan anak panah dan disebut sebagai vektor resultan, atau $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (lihat Gambar 1.7.c). Dengan demikian, aturan segitiga memungkinkan visualisasi penjumlahan dua vektor dalam bentuk segitiga, di mana vektor resultan merupakan sisi ketiga yang menghubungkan awal dan akhir rangkaian vektor (Anton, et al., 2019).



Gambar 1. 7 Penjumlahan Vektor
(Sumber : Anton, et al., 2019)

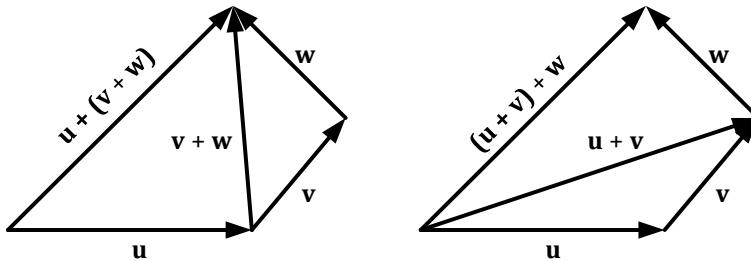
Dalam operasi penjumlahan vektor, hukum komutatif menyatakan bahwa urutan penjumlahan dua vektor tidak mempengaruhi hasil akhir. Artinya, untuk setiap dua vektor $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$, berlaku (Anton, et al., 2019):

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

Secara geometris, hal ini dapat dijelaskan menggunakan aturan segitiga maupun aturan jajar genjang, di mana vektor $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ dapat ditambahkan dalam urutan apa pun, namun tetap menghasilkan vektor resultan yang sama (Anton et al., 2019). Gambar 1.7.d memperlihatkan ketika vektor $\mathbf{w}$ diletakkan pada ujung $\mathbf{v}$, atau sebaliknya, panah hasil penjumlahan (resultan) tetap menunjukkan arah dan besar yang sama, sehingga menggambarkan sifat komutatif secara visual (Strang, 2023).

Dalam penjumlahan vektor, berlaku hukum asosiatif, yaitu (Serway & Jewett, 2019):

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$



Gambar 1. 8 Vektor $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ dan $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(Sumber : Serway & Jewett, 2019)

Artinya, ketika tiga vektor ditambahkan, urutan pengelompokan tidak memengaruhi hasil akhirnya. Baik menjumlahkan $\mathbf{u}$ dengan $\mathbf{v}$ terlebih dahulu, lalu hasilnya dijumlahkan dengan $\mathbf{w}$, maupun menjumlahkan $\mathbf{v}$ dengan $\mathbf{w}$ terlebih dahulu lalu dijumlahkan dengan $\mathbf{u}$, hasil akhirnya tetap sama (Serway & Jewett, 2019).

➤ **Pengurangan Vektor**

Sama seperti penjumlahan vektor, pengurangan vector juga dapat direpresentasikan secara geometris dengan menggunakan aturan jajar genjang atau aturan segitiga (Anton, et al., 2019).

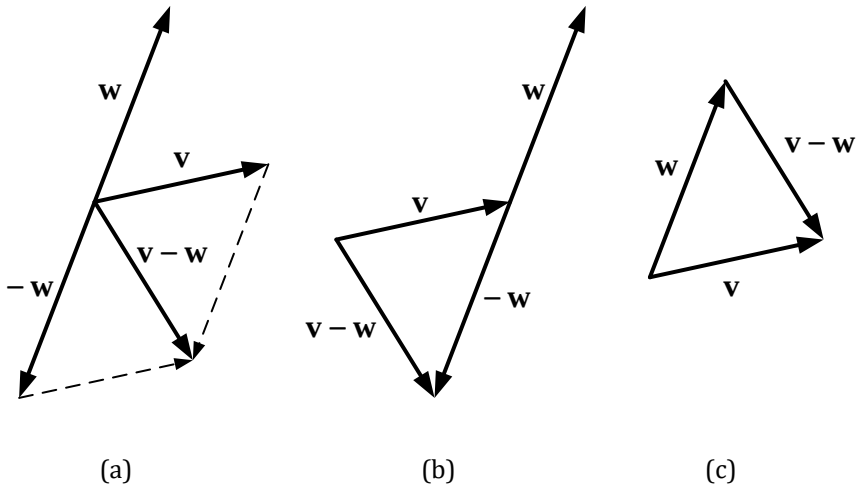
Dalam operasi pengurangan vektor, aturan jajar genjang adalah salah satu pendekatan geometris yang umum digunakan untuk memvisualisasikan hasil selisih antara dua

vektor. Misalnya, apabila $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ merupakan dua vektor sebarang (lihat Gambar 1.7.a), maka pengurangannya, yaitu $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, dilakukan dengan terlebih dahulu menempatkan kedua vektor pada titik pangkal yang sama. Selanjutnya, dibuat vektor $-\mathbf{w}$, yaitu vektor yang memiliki besar sama dengan $\mathbf{w}$ tetapi dengan arah berlawanan. Dari titik awal, ditarik vektor $\mathbf{v}$ dan $-\mathbf{w}$, kemudian garis sejajar dibuat untuk membentuk jajar genjang. Hasil pengurangannya, yaitu $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, direpresentasikan oleh diagonal jajar genjang yang ditarik dari titik pangkal bersama menuju titik sudut berlawanan (lihat Gambar 1.9.a). Representasi ini berlaku baik dalam ruang dua dimensi maupun tiga dimensi (Anton, et al., 2019).

Selain itu, aturan segitiga juga dapat digunakan untuk menggambarkan pengurangan dua vektor secara geometris. Dalam pendekatan ini, setelah menentukan vektor $-\mathbf{w}$, titik awal dari vektor $-\mathbf{w}$ diletakkan pada ujung vektor $\mathbf{v}$. Kemudian, vektor resultan $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ digambarkan sebagai anak panah yang menghubungkan titik awal $\mathbf{v}$ dengan titik akhir $-\mathbf{w}$ (lihat Gambar 1.9.b). Dengan demikian, aturan segitiga menunjukkan bahwa selisih dua vektor dapat divisualisasikan sebagai sisi ketiga dalam segitiga terbuka, di mana arah dan panjang vektor resultan mencerminkan efek gabungan dari kedua vektor tersebut (Anton, et al., 2019).

Alternatif lainnya, pengurangan vektor juga dapat digambarkan dengan cara menghubungkan titik awal vektor $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ secara bersamaan pada satu titik. Kemudian, dari titik akhir vektor $\mathbf{w}$, ditarik vektor menuju titik akhir vektor $\mathbf{v}$. Vektor yang terbentuk ini dengan arah dari ujung $\mathbf{w}$ ke ujung $\mathbf{v}$ merupakan vektor $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, atau selisih antara vektor $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ (lihat Gambar 1.9.c). Metode ini secara intuitif menyatakan bahwa selisih antara dua vektor adalah vektor yang harus

ditambahkan pada $\mathbf{w}$ agar hasilnya menjadi $\mathbf{v}$ (Anton, et al., 2019).



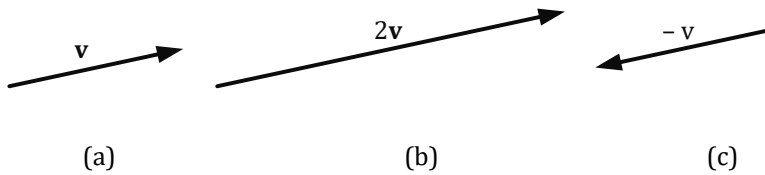
Gambar 1. 9 Pengurangan Vektor
(Sumber : Anton, et al., 2019)

➤ Perkalian Skalar dan Vektor

Perkalian antara sebuah vektor dan sebuah skalar merupakan salah satu operasi dasar dalam aljabar vektor. Jika $\mathbf{v}$ adalah vektor bukan nol dalam ruang dimensi dua atau tiga, dan k merupakan skalar bukan nol, maka hasil kali skalar $k\mathbf{v}$ didefinisikan sebagai vektor yang memiliki panjang sebesar $|k| \times \text{panjang } \mathbf{v}$. Arah dari $k\mathbf{v}$ akan sama dengan arah $\mathbf{v}$ jika k positif, dan berlawanan jika k bernilai negatif. Sebaliknya, jika $k = 0$ atau $\mathbf{v} = 0$, maka hasil perkaliannya merupakan vektor nol, yaitu $k\mathbf{v} = 0$ (Anton, et al., 2019).

Contohnya, jika $k = 2$, maka $k\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ dua kali lebih panjang dari $\mathbf{v}$ dan arahnya sama (Gambar 1.10.b). Jika $k = -1$, maka $k\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ panjangnya sama tapi arahnya berlawanan dengan $\mathbf{v}$

(Gambar 1.10.c). Jika dua vektor adalah hasil kali skalar satu sama lain, artinya mereka terletak di garis yang sama dan disebut kolinear. Walaupun satu vektor digeser, keduanya tetap sejajar karena arah dan perbandingan panjangnya tidak berubah. Bahkan, vektor nol dianggap sejajar dengan semua vektor lainnya (Serway & Jewett, 2019).



Gambar 1. 10 Perkalian Skalar dan Vektor
(Sumber : Serway & Jewett, 2019)

➤ Sifat-Sifat Vektor

Apabila $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ merupakan vektor dalam ruang dimensi dua dan tiga, kemudian k dan m merupakan skalar, maka berlaku sifat-sifat berikut (Anton, et al., 2019):

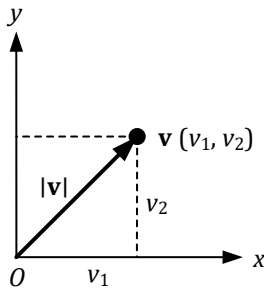
1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
6. $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$
7. $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

➤ Norma Vektor

Norma vektor (panjang vektor) adalah ukuran seberapa panjang suatu vektor dari titik awal ke titik akhirnya dalam

ruang. Norma dari vektor menyatakan jarak vektor tersebut dari titik asal (origin) dan dilambangkan dengan $|\mathbf{v}|$. Seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 1.11, berdasarkan Teorema Pythagoras, norma dari sebuah vektor $\mathbf{v}$ (v_1, v_2) dalam ruang dimensi dua adalah (Sadiku, 2018):

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



Gambar 1. 11 Norma Vektor dalam Ruang Dimensi Dua
(Sumber : Sadiku, 2018)

Contoh 1.

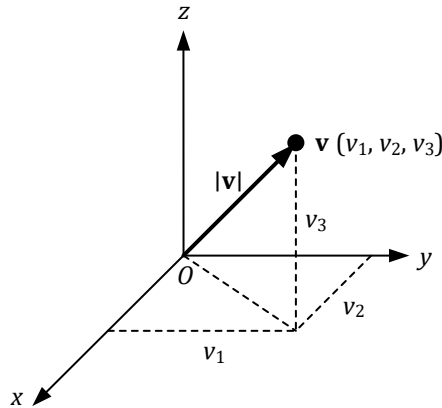
Diketahui $\mathbf{v} = (-3, 4)$, tentukan panjang vektor $\mathbf{v}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{v}| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\
 &= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5
 \end{aligned}$$

Demikian pula, norma vektor dari sebuah vektor $\mathbf{v}$ (v_1, v_2, v_3) di ruang dimensi tiga, yang diperoleh dari penerapan Teorema Pythagoras, yaitu (Sadiku, 2018):

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$



Gambar 1. 12 Norma Vektor dalam Ruang Dimensi Tiga
(Sumber : Sadiku, 2018)

Contoh 2.

Diketahui $\mathbf{v} = (3, -1, 2)$, tentukan panjang vektor $\mathbf{v}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{v}| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \\
 &= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}
 \end{aligned}$$

➤ Vektor Satuan

Vektor satuan merupakan vektor yang mempunyai panjang (norma) sebesar satu satuan. Fungsi utamanya adalah menunjukkan arah suatu vektor tanpa memperhitungkan besarannya. Rumus umum untuk mendapatkan vektor satuan dari vektor $\mathbf{v}$ adalah (Sadiku, 2018):

$$\mathbf{a}_v = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v}$$

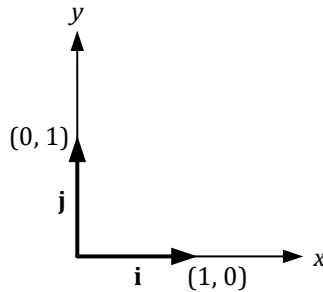
Dalam ruang dimensi dua (bidang xy), dua vektor satuan standar adalah (Sadiku, 2018):

$\mathbf{i} = (1, 0)$: menunjuk ke arah sumbu- x

$\mathbf{j} = (0, 1)$: menunjuk ke arah sumbu- y

Keduanya tegak lurus dan membentuk dasar (basis) dari ruang dua dimensi. Setiap vektor dua dimensi $\mathbf{v}$ (v_1, v_2) dapat dinyatakan sebagai (Sadiku, 2018):

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$$



Gambar 1. 13 Vektor Satuan dalam Ruang Dimensi Dua
(Sumber : Sadiku, 2018)

Dalam ruang dimensi tiga (xyz), tiga vektor satuan standar adalah (Sadiku, 2018):

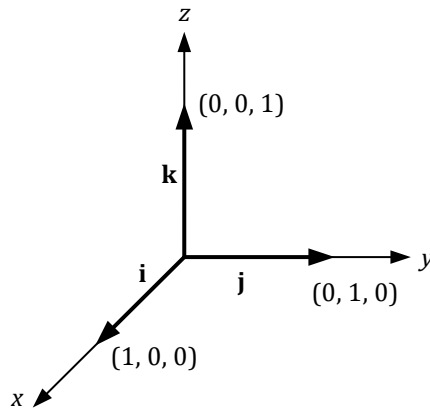
$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$: menunjuk ke arah sumbu- x

$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$: menunjuk ke arah sumbu- y

$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$: menunjuk ke arah sumbu- z

Ketiganya saling tegak lurus (orthonormal) dan menjadi dasar dari semua vektor dalam ruang dimensi tiga. Vektor $\mathbf{v}$ (v_1, v_2, v_3) di ruang dimensi tiga dapat dituliskan (Sadiku, 2018):

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$



Gambar 1. 14 Vektor Satuan dalam Ruang Dimensi Tiga
(Sumber : Sadiku, 2018)

Contoh 3.

Diketahui $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$, tentukan vektor satuan $\mathbf{a}_v$ yang searah dengan $\mathbf{v}$.

Penyelesaian:

Langkah pertama adalah menghitung panjang (norma) vektor $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \end{aligned}$$

Kemudian gunakan rumus vektor satuan:

$$\mathbf{a}_v = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \frac{1}{3} (2, -1, 2)$$

Cek norma vektor satuan:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_v| &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1 \end{aligned}$$

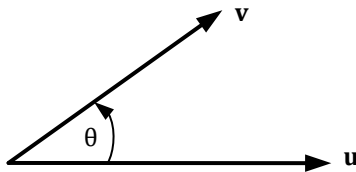
Hasil valid, karena panjang vektor satuan memang harus 1.

➤ Perkalian Titik

Perkalian titik atau dalam istilah lain disebut juga perkalian dalam Euclidis adalah operasi antara dua vektor yang menghasilkan sebuah bilangan real (skalar). Oleh karena itu, perkalian ini juga dikenal sebagai perkalian skalar (Lay, et al., 2022).

Definisi pertama perkalian titik antara dua vektor dengan pendekatan geometris, yaitu berdasarkan panjang masing-masing vektor serta sudut yang terbentuk di antara keduanya. Asumsinya, titik awal dari kedua vektor berada pada posisi yang sama (berhimpit), sehingga membentuk sudut di antara arah vektor tersebut. Secara matematis, jika terdapat dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, dan θ merupakan sudut di antara keduanya, maka perkalian titik didefinisikan sebagai (Lay, et al., 2022):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta & ; \text{jika } \mathbf{u} \neq 0 \text{ dan } \mathbf{v} \neq 0 \\ 0 & ; \text{jika } \mathbf{u} = 0 \text{ dan } \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$



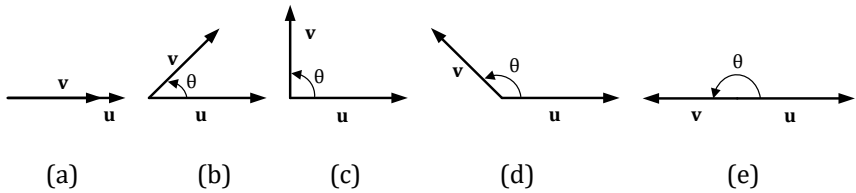
Gambar 1. 15 Perkalian Titik Vektor
(Sumber : Lay, et al., 2022)

Hasil dari perkalian titik ini merupakan bilangan real (skalar). Apabila salah satu ataupun kedua vektor adalah vektor nol, maka hasil dot product adalah nol, karena normanya nol. Besar sudut diantara dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dapat dihitung menggunakan rumus hasil dot product secara geometris, yaitu (Ulaby & Ravaioli, 2023):

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \quad \text{di mana } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Apabila $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan vektor tak nol, dan θ merupakan sudut diantara keduanya, maka berdasarkan definisi geometri dari perkalian titik, berlaku (Gambar 1.16) (Anton, et al., 2019):

- a. $\mathbf{u}$ searah dengan $\mathbf{v}$ membentuk sudut 0° ($\theta = 0^\circ$) maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$
- b. $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ membentuk sudut lancip ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
- c. $\mathbf{u}$ tegak lurus dengan $\mathbf{v}$ membentuk sudut 90° ($\theta = 90^\circ$) maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
- d. $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ membentuk sudut tumpul ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
- e. $\mathbf{u}$ berlawanan arah dengan $\mathbf{v}$ membentuk sudut 180° ($\theta = 180^\circ$) maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$



Gambar 1. 16 Sudut Diantara Vektor u dan v Memenuhi $0^\circ < \theta < 180^\circ$

(Sumber : Anton, et al., 2019)

Perkalian titik memiliki sejumlah sifat penting yang mempermudah manipulasi aljabar vektor, seperti sifat komutatif, distributif, dan hubungan dengan panjang serta sudut antar vektor. Apabila u , v , dan w merupakan vektor di ruang dimensi dua atau tiga, dan k merupakan skalar, maka berlaku (Lay, et al., 2022):

1. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{0}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
4. $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
5. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

Vektor satuan $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, dan $\mathbf{k}$ merupakan saling tegak lurus satu sama lain, dan membentuk sudut 90° . Dua buah vektor satuan yang sejenis membentuk sudut 0° ($\cos \theta^\circ = 1$), sedangkan dua vektor satuan yang berbeda arah membentuk sudut 90° ($\cos 90^\circ = 0$). Oleh karena itu, hasil perkalian titik

antar vektor satuan dapat dirumuskan sebagai berikut (Anton, et al., 2019):

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \\
 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0 \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0
 \end{array}$$

Definisi kedua dari perkalian titik dua vektor berdasarkan komponen (aljabaris). Perkalian titik juga dapat dihitung menggunakan komponen-komponen dari vektor, sebagai berikut (Anton, et al., 2019):

1. Untuk vektor di ruang dimensi dua:
Apabila $\mathbf{u}$ (u_1, u_2) dan $\mathbf{v}$ (v_1, v_2), maka komponen vektor dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$$

Perkalian titik antara vektor $\mathbf{u}$ dengan $\mathbf{v}$ adalah:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) \\
 &= u_1 \mathbf{i} \cdot v_1 \mathbf{i} + u_1 \mathbf{i} \cdot v_2 \mathbf{j} + u_2 \mathbf{j} \cdot v_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} \cdot v_2 \mathbf{j} \\
 &= u_1 v_1 + u_2 v_2
 \end{aligned}$$

2. Untuk vektor di ruang dimensi tiga:
Apabila $\mathbf{u}$ (u_1, u_2, u_3) dan $\mathbf{v}$ (v_1, v_2, v_3), maka komponen vektor dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

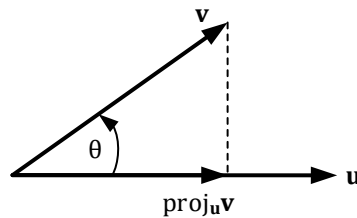
Perkalian titik antara vektor $\mathbf{u}$ dengan $\mathbf{v}$ adalah:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}) \\
 &= u_1 \mathbf{i} \cdot v_1 \mathbf{i} + u_1 \mathbf{i} \cdot v_2 \mathbf{j} + u_1 \mathbf{i} \cdot v_3 \mathbf{k} + u_2 \mathbf{j} \cdot v_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} \cdot v_2 \mathbf{j} \\
 &\quad + u_2 \mathbf{j} \cdot v_3 \mathbf{k} + u_3 \mathbf{k} \cdot v_1 \mathbf{i} + u_3 \mathbf{k} \cdot v_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} \cdot v_3 \mathbf{k} \\
 &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3
 \end{aligned}$$

Perkalian titik memiliki sejumlah sifat penting yang mempermudah manipulasi aljabar vektor, seperti sifat komutatif, distributif, dan hubungan dengan panjang serta sudut antar vektor. Apabila $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ merupakan vektor di ruang dimensi dua atau tiga, dan k merupakan skalar, maka berlaku (Lay, et al., 2022):

1. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{0}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
4. $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
5. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

Apabila $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan vektor tak nol yang titik asalnya berimpit, dan θ merupakan sudut antara kedua vektor tersebut (lihat Gambar 1.17), maka vektor $\mathbf{v}$ dapat diproyeksikan ke arah vektor $\mathbf{u}$ untuk membentuk vektor baru yang disebut vektor proyeksi (Anton, et al., 2019).



Gambar 1. 17 Proyeksi Vektor $\mathbf{v}$ pada Vektor $\mathbf{u}$
(Sumber : Anton, et al., 2019)

Vektor ini menunjukkan komponen dari $\mathbf{v}$ yang searah dengan $\mathbf{u}$, dan disebut sebagai proyeksi ortogonal $\mathbf{v}$ terhadap $\mathbf{u}$. Proyeksi vektor merupakan bayangan suatu vektor ke arah vektor lain, yang berguna untuk mengetahui sejauh mana

suatu vektor berada dalam arah atau jalur yang sama dengan vektor lainnya. Sebagai contoh, jika vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ berasal dari titik awal yang sama, maka proyeksi vektor $\mathbf{v}$ terhadap $\mathbf{u}$ merupakan vektor yang menggambarkan komponen $\mathbf{v}$ pada arah $\mathbf{u}$ (Anton, et al., 2019).

Apabila $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan vektor dalam ruang dua atau tiga dimensi dan keduanya bukan merupakan vektor nol, maka proyeksi vektor $\mathbf{v}$ ke arah vektor $\mathbf{u}$ dapat ditentukan. Vektor ini disebut proyeksi ortogonal $\mathbf{v}$ terhadap $\mathbf{u}$, dan dinotasikan sebagai $\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. Proyeksi ini menunjukkan komponen dari $\mathbf{v}$ yang searah dengan $\mathbf{u}$. Rumus proyeksi ortogonal $\mathbf{v}$ terhadap $\mathbf{u}$ adalah (Anton, et al., 2019):

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

Sedangkan panjang dari vektor proyeksi tersebut, yaitu panjang komponen $\mathbf{v}$ dalam arah $\mathbf{u}$, adalah:

$$|\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}$$

Contoh 4.

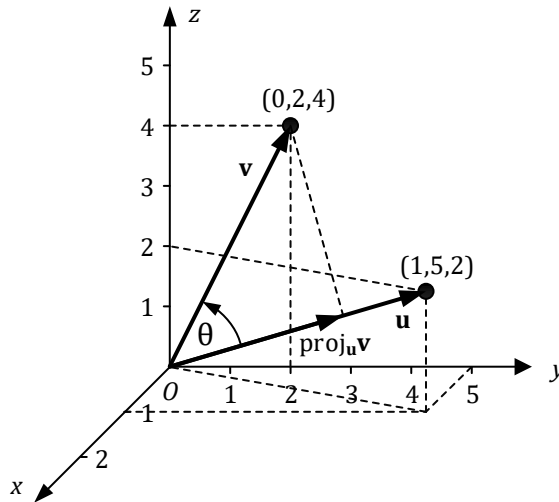
Jika $\mathbf{u} (1, 5, 2)$ dan $\mathbf{v} (0, 2, 4)$, tentukanlah:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
2. Sudut dalam arah vektor $\mathbf{u}$ dan vektor $\mathbf{v}$
3. Vektor proyeksi $\mathbf{v}$ terhadap vektor $\mathbf{u}$
4. Panjang vektor proyeksi $\mathbf{v}$ terhadap vektor $\mathbf{u}$

Penyelesaian:

Komponen vektor $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Komponen vektor $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$



Gambar 1. 18 Vektor $\mathbf{u}$ (1, 5, 2) dan $\mathbf{v}$ (0, 2, 4)

$$1. \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$= (1)(0) + (5)(2) + (2)(4) = 10 + 8 = 18$$

2. Sudut dalam arah vektor $\mathbf{u}$ dan vektor $\mathbf{v}$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

$$= \cos^{-1} \frac{18}{\left(\sqrt{(1)^2 + (5)^2 + (2)^2}\right) \left(\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (4)^2}\right)}$$

$$= \cos^{-1} \frac{18}{(\sqrt{30}) (\sqrt{20})}$$

$$= \cos^{-1} \frac{18}{24,495} = \cos^{-1} 0,735$$

$$= 42,706^\circ$$

3. Vektor proyeksi $\mathbf{v}$ terhadap vektor $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\text{proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} \\ &= \left(\frac{18}{(\sqrt{30})^2} \right) (1, 5, 2) \\ &= \left(\frac{3}{5} \right) (1, 5, 2) \\ &= \left(\frac{3}{5}, 3, \frac{6}{5} \right)\end{aligned}$$

4. Panjang vektor proyeksi $\mathbf{v}$ terhadap vektor $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}|\text{proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}| &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|} \\ &= \frac{18}{\sqrt{30}} = 3,286\end{aligned}$$

➤ Perkalian Silang

Perkalian silang merupakan salah satu operasi yang melibatkan dua vektor dalam ruang tiga dimensi. Tidak seperti perkalian titik yang menghasilkan nilai skalar, operasi ini menghasilkan vektor baru (Lay, et al., 2022).

Dalam proyeksi ortogonal, vektor hasil proyeksi akan berada searah atau sejajar dengan vektor acuannya. Berbeda dengan itu, operasi perkalian silang antara dua vektor menghasilkan sebuah vektor baru yang tegak lurus terhadap kedua vektor asal. Dengan kata lain, hasil dari $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ merupakan vektor yang ortogonal terhadap baik vektor $\mathbf{u}$ maupun $\mathbf{v}$ (Anton, et al., 2019).

Apabila $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ merupakan vektor-vektor di ruang dimensi tiga, maka perkalian silang $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (Anton, et al., 2019):

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Atau, dapat juga ditulis dalam bentuk determinan sebagai:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Contoh 5.

Jika dua vektor: $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 4, -2)$

Hitunglah hasil dari perkalian silang $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= ((-1)(-2) - (3)(4), (3)(1) - (2)(-2), (2)(4) - (-1)(1)) \\ &= (-10, 7, 9) \end{aligned}$$

Dalam ruang dimensi tiga, dua operasi penting antara vektor adalah perkalian titik dan perkalian silang. Meskipun keduanya melibatkan pasangan vektor, hasil yang dihasilkan memiliki sifat dan makna yang sangat berbeda, perkalian titik menghasilkan sebuah nilai skalar, sedangkan perkalian silang menghasilkan vektor. Meskipun demikian, keduanya saling berkaitan erat dalam berbagai konteks geometris dan aljabar. Apabila $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ merupakan vektor dalam ruang dimensi tiga, maka (Anton, et al., 2019):

$$1. \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$$

2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$
3. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$
4. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$
5. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$

Dalam analisis vektor di ruang tiga dimensi, perkalian silang memiliki sejumlah sifat aljabar yang sangat penting untuk dipahami. Apabila $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ merupakan sembarang vektor dalam ruang dimensi tiga dan k merupakan sembarang skalar, maka (Anton, et al., 2019):

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
4. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Vektor satuan $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, dan $\mathbf{k}$ merupakan vektor-vektor yang saling tegak lurus satu sama lain, atau membentuk sudut 90° . Dua buah vektor satuan yang sejenis membentuk sudut 0° ($\sin 0^\circ = 0$), sedangkan dua buah vektor satuan yang tidak sejenis membentuk sudut 90° ($\sin 90^\circ = 1$). Maka hasil perkalian silang antara dua buah vektor satuan adalah sebagai berikut (Anton, et al., 2019):

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 & \mathbf{i} \times \mathbf{j} & = \mathbf{k} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \\
 \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \\
 \mathbf{k} \times \mathbf{k} & = 0 \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}
 \end{array}$$

Jika $\mathbf{u}$ (u_1, u_2, u_3) dan $\mathbf{v}$ (v_1, v_2, v_3), maka komponen vektor dapat dinyatakan sebagai: $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$, dan $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$

$\mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$. Maka perkalian silang dengan menggunakan komponen-komponen dari vektor di ruang dimensi tiga, sebagai berikut (Anton, et al., 2019):

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}) \\ &= u_1 \mathbf{i} \times v_1 \mathbf{i} + u_1 \mathbf{i} \times v_2 \mathbf{j} + u_1 \mathbf{i} \times v_3 \mathbf{k} + u_2 \mathbf{j} \times v_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} \times v_2 \mathbf{j} + u_2 \mathbf{j} \times v_3 \mathbf{k} + u_3 \mathbf{k} \times v_1 \mathbf{i} + u_3 \mathbf{k} \times v_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} \times v_3 \mathbf{k} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k}\end{aligned}$$

Atau, dapat juga ditulis dalam bentuk determinan sebagai:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}\end{aligned}$$

Contoh 5.

Diketahui dua vektor: $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -1)$

Tentukanlah hasil dari perkalian silang $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dalam bentuk vektor

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
 &= ((2)(-1) - (3)(0))\mathbf{i} - ((1)(-1) - (3)(4))\mathbf{j} + ((1)(0) - (2)(4))\mathbf{k} \\
 &= -2\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 8\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., Rorres, C., & Kaul, A. 2019. *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. 12th edn. Hoboken: Wiley.
- Kuttler, K. 2020. *A First Course in Linear Algebra*. Canada: Lyryx Learning Inc.
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. 2022. *Linear Algebra and Its Applications*. 6th edn. Boston: Pearson.
- Sadiku, M. N. O. 2018. *Elements of Electromagnetics*. 7th edn. New York: Oxford University Press.
- Serway, R. A., & Jewett, J. J. W. 2019. *Physics for Scientists and Engineers*. 10th edn. Boston: Cengage Learning.
- Strang, G. 2023. *Introduction to Linear Algebra*. 6th edn. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press.
- Ulaby, F. T., & Ravaioli, U. 2023. *Fundamentals of Applied Electromagnetics*. 8th edn. United Kingdom: Pearson.
- Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. 2010. *Kalkulus: Jilid 2*. 9th edn. Jakarta: Erlangga.

BAB 2

JARAK *EUCLIDEAN*, *DOT PRODUCT* DAN *CROSS PRODUCT* ANTARA DUA VEKTOR, BASIS DAN DIMENSI DARI SUATU RUANG VEKTOR

Oleh Putri Anugrah Cahya Dewi

2.1 Pendahuluan

Coba bayangkan seorang pemain sepak bola yang sedang menendang bola ke gawang. Bola tersebut meluncur dengan kecepatan tertentu dan dalam arah tertentu menuju gawang. Pergerakan bola ini mewakili representasi suatu vektor. Tidak hanya dalam olahraga, konsep vektor juga banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari, seperti dalam navigasi GPS, perhitungan gaya dalam fisika, hingga dalam analisis data dalam ilmu komputer.

Vektor adalah salah satu konsep dalam matematika yang memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang seperti fisika, ilmu komputer, dan teknik (Sipayanti *et al.*, 2024). Dalam matematika, vektor merepresentasikan besaran yang memiliki nilai dan arah (Warsih *et al.*, 2024). Berbeda dengan skalar yang hanya memiliki nilai tanpa arah. Pemahaman

mengenai vektor sangat penting dalam berbagai bidang ilmu karena dapat digunakan untuk menganalisis data, memodelkan sistem fisis, dan memecahkan masalah komputasi.

Dalam bab ini, kita akan membahas secara mendalam mengenai konsep-konsep tersebut, termasuk cara perhitungannya, contoh soal, serta aplikasi dalam kehidupan nyata.

2.2 Menghitung Jarak *Euclidean*

Jarak *Euclidean* digunakan untuk mengukur kedekatan antara dua titik dalam suatu ruang (Miftahuddin, Umaroh and Karim, 2020). Misalnya, dalam layanan pengiriman barang. Sistem navigasi menggunakan jarak *Euclidean* untuk menghitung jarak tercepat antara titik pengiriman dan tujuan. Jarak *Euclidean* juga menjadi dasar dalam banyak algoritma *machine learning* dan analisis data, seperti dalam pengelompokan (*clustering*) dan pengenalan pola.

Diketahui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka jarak *euclidean* dapat dicari dengan rumus berikut.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jarak *Euclidean* antara dua titik dalam ruang dimensi- n dapat dicari dengan rumus berikut.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + \dots}$$

Contoh soal 1:

Hitunglah jarak antara titik A(1, 2) dan B(4, 6) !

Penyelesaian:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Contoh soal 2:

Seorang pengantar paket berjalan dari titik koordinat (2,3) ke titik koordinat (10,7). Namun, di tengah jalan ia mendapatkan panggilan untuk mengantarkan paket tambahan ke titik (6,5) sebelum melanjutkan ke tujuan akhirnya. Hitung total jarak yang ditempuh pengantar paket menggunakan jarak Euclidean!

Penyelesaian:

Jarak antara titik awal A(2, 3) ke titik paket tambahan B(6, 5):

$$d(A, B) = \sqrt{(6 - 2)^2 + (5 - 3)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Jarak antara titik paket tambahan B(6, 5) ke titik akhir C(10, 7):

$$d(B, C) = \sqrt{(10 - 6)^2 + (7 - 5)^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Sehingga, total jarak yang ditempuh yaitu

$$d_{total} = d(A, B) + d(B, C) = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Contoh soal 3:

Diberikan dua titik dalam ruang tiga dimensi:

$$P(4, -2, 7) \text{ dan } Q(-3, 5, -1)$$

Tentukan jarak euclidean antara titik P dan Q.

Penyelesaian:

Gunakan rumus jarak Euclidean di ruang tiga dimensi:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(-3 - 4)^2 + (5 - (-2))^2 + (-1 - 7)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(-7)^2 + (7)^2 + (-8)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{49 + 49 + 64} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$$

2.2 Mengaplikasikan Dot Product dan Cross Product Antara Dua Vektor

Operasi matematika pada vektor seperti *dot product* dan *cross product* memiliki peranan besar dalam perhitungan sudut antara vektor, penentuan kerja dalam fisika, serta dalam grafika komputer. Misalnya, dalam pembuatan animasi digital dan video game, *dot product* digunakan untuk menentukan sudut pencahayaan terhadap suatu objek sehingga efek bayangan dapat dibuat lebih realistis.

2.2.1 Dot Product Antara Dua Vektor

- a. *Dot product* antara dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dapat ditulis dengan $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Jika vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka dot product antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Catatan :

1. Jika $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ saling tegak lurus, maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
2. Jika $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ searah, maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$
3. Jika $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ berlawanan arah, maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{a} \cdot \vec{b}$

Contoh soal :

Hitunglah nilai $\vec{a} \cdot \vec{b}$, jika diketahui $\vec{a} = (-4, -2, 1)$ dan $\vec{b} = (5, 3, -1)$.

Penyelesaian :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 5 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = -27$$

Contoh soal :

Dalam sebuah simulasi kecerdasan buatan untuk robot pembersih lantai, robot diberikan dua instruksi gerakan berdasarkan vektor:

- Gerakan pertama: $a = (5, 7)$ (ke arah kanan dan atas).
- Gerakan kedua: $b = (3, -4)$ (ke arah kanan dan bawah).

Jika *dot product* antara dua vektor ini positif, robot akan melanjutkan gerakan. Tetapi jika negatif, robot akan berhenti dan mencari rute lain. Apakah robot akan melanjutkan gerakannya atau berhenti?

Penyelesaian:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-4) = -13$$

Karena hasilnya negatif, maka robot akan berhenti dan mencari rute lain.

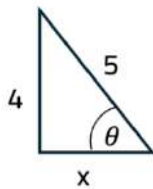
- b. *Dot product* antara dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dengan sudut θ dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Contoh soal :

Diketahui $|\vec{a}| = 5$ dan $|\vec{b}| = 8$ dan $\sin \theta = \frac{4}{5}$, hitung $\vec{a} \cdot \vec{b}$!

Penyelesaian :



Nilai $\cos \theta$ dapat dicari menggunakan Teorema Pythagoras

$$x = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{maka, nilai } \cos \theta = \frac{3}{5}$$

sehingga,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 8 \cdot \frac{3}{5} = 24$$

Contoh soal:

Sebuah pesawat bergerak dalam arah vektor $(6, 8)$, sementara angin bertiup dengan arah vektor $(3, 4)$. Jika sudut antara pesawat dan angin adalah 30° , maka hitung besar proyeksi kecepatan pesawat dalam arah angin.

Penyelesaian:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Maka,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot 5 \cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = 25\sqrt{3}$$

Contoh soal:

Diberikan vektor-vektor $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}$ dan $\vec{b} = 24\hat{i}$.
 Besar sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

Penyelesaian :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 2\sqrt{3} \cdot 0 = 8$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\vec{b}| = 4$$

maka,

$$\cos \theta = \frac{8}{4 \cdot 4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

2.2.2 Cross Product Antara Dua Vektor

Cross product adalah operasi perkalian antara dua vektor dalam ruang tiga dimensi yang menghasilkan vektor baru yang tegak lurus terhadap kedua vektor tersebut (Januaji, Nugroho and Hutagalung, 2017). Rumus untuk menghitung *cross product* antara dua vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ adalah:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Operasi dalam perkalian silang :

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
3. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |a||b|\sin\theta$

Catatan :

- Jika $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ saling tegak lurus , maka $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$
- Jika $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ saling searah atau berlawanan arah , maka $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

Contoh soal:

Diketahui dua vektor $\vec{a} = (1, 2, 3)$ dan $\vec{b} = (4, 5, 6)$, hitung $\vec{a} \times \vec{b}$!

Penyelesaian :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [(2 \times 6)\vec{i} + (3 \times 4)\vec{j} + (1 \times 5)\vec{k}] - [(1 \times 6)\vec{j} + (3 \times 5)\vec{i} + (2 \times 4)\vec{k}]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} \text{ atau } (-3, 6, -3)$$

Contoh soal :

Dalam sebuah simulasi pesawat drone, dua gaya bekerja pada drone dalam arah yang berbeda yaitu $F_1(2, -1, 3)$ dan $F_2(-3, 4, 1)$. Hitung torsi yang dihasilkan oleh kedua gaya ini jika dianggap bekerja dari titik asal!

Penyelesaian :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [(-1 \times 1)\mathbf{i} + (3 \times -3)\mathbf{j} + (2 \times 4)\mathbf{k}] - [(2 \times 1)\mathbf{j} + (3 \times 4)\mathbf{i} + (-1 \times -3)\mathbf{k}]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -13\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \text{ atau } (-13, -11, 5)$$

2.3 Basis dan Dimensi dari Suatu Ruang Vektor

Lebih lanjut, konsep basis dan dimensi dari suatu ruang vektor menjadi dasar dalam aljabar linear, yang berperan penting dalam representasi data dalam berbagai bidang seperti pemrosesan citra, kecerdasan buatan, dan kompresi data. Basis vektor memungkinkan kita untuk merepresentasikan ruang dalam bentuk yang lebih sederhana dan lebih mudah dianalisis. Misalnya, dalam pengolahan suara digital, basis vektor digunakan untuk mengubah sinyal suara menjadi representasi numerik yang lebih mudah diproses oleh komputer.

2.3.1 Basis Suatu Ruang Vektor

Definisi:

Misalkan V adalah sebarang ruang vektor atas skalar F dan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ adalah himpunan berhingga vektor-vektor dalam V .

A dikatakan basis untuk ruang V jika memenuhi:

1. A bebas linier
2. A merentang V

Contoh soal:

Diketahui vektor $a_1 = (1, 2, 5)$, $a_2 = (2, 2, 6)$, dan $a_3 = (3, 6, 9)$.

Apakah $\{a_1, a_2, a_3\}$ merupakan suatu basis di R^3 ?

Penyelesaian:

A Bebas Linier

$\{a_1, a_2, a_3\}$ bebas linier jika terdapat $k_1, k_2, k_3 \in F$ sehingga

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$$

dimana k_1, k_2, k_3 memiliki solusi trivial ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓
A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 12$$

Karena $\det(A) \neq 0$, maka persamaan tersebut memiliki solusi trivial.

Sehingga, $\{a_1, a_2, a_3\}$ bebas linier.

A merentang V

$\{a_1, a_2, a_3\}$ merentang di R^3 jika untuk setiap $b \in R^3$, terdapat $k_1, k_2, k_3 \in F$ sehingga

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = b$$

Karena $\det(A) \neq 0$, maka persamaan tersebut konsisten sehingga $\{a_1, a_2, a_3\}$ merentang di $\mathbb{R}^3$.

Dikarenakan A bebas linier dan A merentang V , maka $\{a_1, a_2, a_3\}$ merupakan suatu basis di $\mathbb{R}^3$.

2.3.2 Dimensi Suatu Ruang Vektor

Definisi:

Misalkan V adalah ruang vektor tak nol.

- Jika V direntang oleh himpunan berhingga, maka V dikatakan berdimensi berhingga. Begitupula sebaliknya, Jika V tidak direntang oleh himpunan berhingga, maka V dikatakan berdimensi tak hingga
- Dimensi V dinotasikan dengan $\dim(V)$ adalah banyaknya vektor pada suatu basis untuk V

Contoh soal:

Misalkan diberikan dua ruang vektor sebagai berikut:

1. Ruang vektor V_1 direntang oleh himpunan vektor $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
2. Ruang vektor V_2 adalah ruang vektor dari semua polinom dengan koefisien riil.

Tentukan apakah masing-masing ruang vektor berdimensi hingga atau tak hingga! Jika berdimensi hingga, tentukan dimensinya!

Penyelesaian:

Untuk V_1

Karena $\det(S) \neq 0$ maka himpunan S merentang di seluruh ruang $\mathbb{R}^3$.

Karena V_1 direntang oleh himpunan berhingga, maka V_1 adalah ruang vektor berdimensi berhingga.

Dimensi V_1 adalah banyaknya vektor dalam basisnya yaitu

$$\dim(V_1) = 3$$

Untuk V_2

Basis ruang vektor V_2 adalah himpunan tak berhingga $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ karena setiap polinom dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor ini.

Dikarenakan ruang ini tidak bisa direntang oleh himpunan vektor berhingga, maka V_2 adalah ruang vektor berdimensi tak hingga.

DAFTAR PUSTAKA

- Januaji, Z., Nugroho, T. A. and Hutagalung, M. (2017) 'Kompensasi Kemiringan Nampan Printer Tiga Dimensi Menggunakan Auto Level Switch', *Jurnal Telematika*, 11(1), p. 8. doi: 10.61769/telematika.v11i1.142.
- Miftahuddin, Y., Umaroh, S. and Karim, F. R. (2020) 'Perbandingan Metode Perhitungan Jarak Euclidean, Haversine, Dan Manhattan Dalam Penentuan Posisi Karyawan', *Jurnal Tekno Insentif*, 14(2), pp. 69–77. doi: 10.36787/jti.v14i2.270.
- Sipayanti, S. *et al.* (2024) 'Pengaruh Sudut Terhadap Besar Resultan Gaya Vektor: Kajian Eksperimental Menggunakan Praktikum Cookbook Laboratory', *Jurnal Penelitian dan Pembelajaran Fisika Indonesia*, 6(1). doi: 10.29303/jppfi.v6i1.322.
- Warsih, D. *et al.* (2024) 'Analisis Penerapan Vektor 2D Menggunakan Laboratorium Virtual PhET', *Jurnal Ilmu Fisika dan Pembelajarannya*, 8(2), pp. 137–142. Available at: <https://jurnal.radenfatah.ac.id/index.php/jifp/index>.

BAB 3

DEFINISI MATRIKS DAN OPERASI MATRIKS

Oleh Devi Rahayu Agustin

3.1 Pendahuluan

Bab ini membahas mengenai pengertian vektor, pengertian matriks, berbagai jenis matriks, serta operasi-operasi pada matriks. Secara umum, setelah mempelajari bab ini, pembaca diharapkan dapat memahami konsep dasar mengenai matriks, mengidentifikasi macam-macam matriks, serta melakukan operasi matriks dengan benar. Selain itu, pembaca juga diharapkan dapat mengaplikasikan konsep matriks dalam menyelesaikan berbagai permasalahan.

3.2 Definisi Vektor

Vektor adalah kumpulan elemen (angka) yang disusun secara linier (satu baris atau satu kolom). Menyatakan vektor dengan huruf kecil tebal untuk, dan secara default vektor dianggap sebagai vektor kolom. Contoh vektor kolom dengan tiga elemen sebagai berikut.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sedangkan vektor baris didefinisikan sebagai elemen-elemen yang disusun dalam satu baris. Contoh:

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

Sebuah vektor disebut *unit* atau *ter-normalisasi* jika jumlah kuadrat semua elemennya adalah 1.

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

Untuk sebuah vektor x yang memiliki n elemen.

Contoh : Diketahui sebuah vektor:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \text{ Tentukan apakah vektor } \mathbf{x} \text{ merupakan unit vektor?}$$

Jawab:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

Sehingga,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Jadi, jumlah kuadrat kedua elemen tersebut adalah 1 maka disebut sebagai unit vektor (Gibbs, 2011).

Contoh: Diketahui sebuah vektor:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{4}} \\ \frac{2}{\sqrt{4}} \end{bmatrix}. \text{ Tentukan apakah vektor } \mathbf{x} \text{ merupakan unit vektor?}$$

Jawab:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

Perlu diketahui
bahwa $\sqrt{4} = 2$

Sehingga,

$$\left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 + 1 = 2$$

Jadi, jumlah kuadrat dari dua elemen ini adalah 2 bukan 1. Artinya bukan unit vektor.

3.3 Definisi Matriks

Matriks adalah susunan bilangan yang membentuk persegi panjang dan ditata secara sistematis dalam baris serta kolom. Biasanya, matriks dinyatakan dengan tanda kurung biasa (), kurung siku [] atau dengan garis vertical ganda $\|$. Setiap bilangan dalam matriks disebut sebagai elemen. Nama matriks umumnya dilambangkan dengan huruf kapital tebal seperti A, B, C, dan seterusnya, sementara elemen-elemennya dinyatakan dengan huruf kecil.

Sebagai contoh, matriks $\mathbf{G}$ ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{G}_{m \times n} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut berukuran $m \times n$, yang berarti memiliki m baris dan n kolom.

Penjelasan Notasi:

- $\mathbf{G}$: Nama matriks,
 m : Jumlah baris pada matriks,
 n : Jumlah kolom pada matriks,
 $m \times n$: Ukuran (ordo) matriks.

Ukuran atau ordo suatu matriks merupakan representasi jumlah baris dan kolom yang membentuknya (Abadir and Magnus, 2005; Goldsmith, 2005; Easley and Waas, 2011; Gibbs, 2011; Salaka, Patty and Talakua, 2013; Watt, Borhani and Katsaggelos, 2016)

Suatu matriks kolom memiliki m baris dan 1 kolom, atau matriks berukuran $m \times 1$. Elemen pada baris ke- m disebut h_m .

Contoh:

- Diberikan matriks berukuran 3×1 , jika $h_1 = 9$; $h_2 = 8$; $h_3 = 1$.

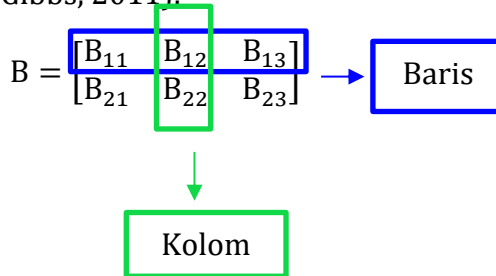
$$[\mathbf{h}] = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Matriks baris memiliki satu baris dan n kolom, contoh,

$$[h] = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] = [9 \quad 8 \quad 1]$$

Elemen-elemen dalam kolom disebut h_n (Eisley and Waas, 2011).

Berikut adalah matriks ukuran 2×3 , artinya terdiri dari 2 baris dan 3 kolom (Gibbs, 2011).



Istilah penting terkait matriks:

1. Ukuran Matriks: Menunjukkan jumlah baris dan kolom.
2. Dimensi Matriks: Hasil dari banyaknya baris dikalikan banyaknya kolom.
3. Ordo Matriks: Khusus untuk matriks persegi, yaitu ukuran di mana jumlah baris sama dengan jumlah kolom.
4. Elemen Matriks: Bilangan-bilangan yang terdapat dalam matriks.
5. Entri Matriks: Nilai spesifik pada suatu posisi dalam baris dan kolom (Ruminta, 2014).

3.3 Jenis-Jenis Matriks

3.3.1 Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks berbentuk persegi yang elemennya tetap sama, jika posisi baris dan kolom ditukar atau secara matematis ditulis $A_{mn} = A_{nm}$.

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ maka tentukan A^T !

Penyelesaian:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Jika suatu matriks memenuhi sifat $A^T = A$, maka matriks tersebut termasuk dalam kategori matriks simetris. Ciri khas dari matriks simetris adalah elemen-elemennya mencerminkan posisi yang sama terhadap diagonal utama. (Eisley and Waas, 2011).

Contoh:

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, berlaku sifat $A^T = A$.

3.3.2 Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan jenis matriks persegi yang memiliki elemen nol di semua posisi selain pada diagonal utamanya. Nilai selain nol hanya diperbolehkan pada elemen-elemen yang terletak di diagonal utama, yaitu dari sudut kiri atas ke kanan bawah.

Ciri-ciri matriks diagonal, yakni:

1. $D_{mn} = 0$, jika $m \neq n$.
2. Berordo $n \times n$ (matriks persegi).
3. Hanya elemen D_{mn} yang bisa tidak nol.

Contoh:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal selalu simetris.

- Elemen selain diagonal utama = 0
- Elemen pada diagonal utama = 1, 9, 2

3.3.3 Matriks Identitas (Satuan)

Matriks identitas adalah matriks berbentuk persegi yang memiliki elemen nol di semua posisi kecuali pada diagonal utamanya. Elemen-elemen pada diagonal utama semuanya bernilai satu. Matriks ini biasanya dinotasikan dengan huruf I (Allmendinger, Cardozo and Fisher, 2011; Eisley and Waas, 2011; Gibbs, 2011).

Contoh:

Diberikan matriks identitas 3×3 .

Penyelesaian:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.4 Matriks Transpose

Matriks transpos merupakan matriks yang dihasilkan dengan mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Transpos dari suatu matriks biasanya ditandai dengan superskrip T atau simbol apostrof ('). Jika sebuah matriks dinotasikan sebagai A , maka transposenya ditulis sebagai A^T atau A' .

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}; A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Contoh:

Jika $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, maka tentukan M^T !

Penyelesaian:

$$M^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3.3.5 Matriks Hermitian

Diberikan sebuah matriks kompleks berbentuk persegi A , matriks tersebut dikatakan sebagai Hermitian jika memenuhi syarat bahwa A sama dengan konjugat-transposenya, yaitu $A = \overline{A^T}$ (Gibbs, 2011; Salaka, Patty and Talakua, 2013).

Contoh:

$$A = \overline{A^T}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1+2i & 4-7i \\ 1-2i & 4 & 2i \\ 4+7i & -2i & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1-2i & 4+7i \\ 1+2i & 4 & -2i \\ 4-7i & 2i & -5 \end{bmatrix} \quad \boxed{A = A^T}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1+2i & 4-7i \\ 1-2i & 4 & 2i \\ 4+7i & -2i & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1+2i & 4-7i \\ 1-2i & 4 & 2i \\ 4+7i & -2i & -5 \end{bmatrix} \quad \boxed{A = \overline{A^T}}$$

Jadi, $A = \overline{A^T}$.

3.3.6 Matriks Simetris Miring

Matriks berbentuk persegi $\mathbf{A}$ simetris miring jika memenuhi $-\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. (Gibbs, 2011; Salaka, Patty and Talakua, 2013).

Contoh:

Jika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -9 \\ -6 & 0 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, maka tentukan $-\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$!

Penyelesaian:

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$$

$$-\mathbf{A} = (-1) \begin{bmatrix} 0 & 6 & -9 \\ -6 & 0 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 9 \\ 6 & 0 & -1 \\ -9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 9 \\ 6 & 0 & -1 \\ -9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, $-\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

3.3.7 Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang seluruh elemennya bernilai nol. Matriks ini biasanya dilambangkan dengan huruf $\mathbf{O}$ (Andari, 2017).

Ciri-ciri matriks nol sebagai berikut.

1. Semua entri = 0.
2. Dapat berbentuk persegi maupun tidak.
3. Bersifat identitas aditif dalam operasi matriks (misalnya $A + O = A$).

Contoh:

Matriks nol berordo 2×3 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3.8 Matriks Segitiga

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang memiliki elemen-elemen nol di atas diagonal utamanya. Sebaliknya, matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang semua elemen di bawah diagonal utama bernilai nol (Gibbs, 2011).

Contoh segitiga atas:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Contoh segitiga bawah:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

3.3.9 Matriks Bujur Sangkar (Persegi)

Matriks persegi adalah matriks yang memiliki jumlah baris sama dengan jumlah kolom, yaitu ketika $m = n$. Matriks ini berordo $n \times n$ (Ruminta, 2014).

Contoh:

Matriks persegi berordo 3×3 :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriks persegi berordo 2×2 :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

3.4 Operasi Matriks

Operasi matriks merujuk pada serangkaian prosedur aljabar yang diterapkan pada dua matriks atau lebih. Operasi ini mencakup beberapa jenis, antara lain:

- Penjumlahan dan pengurangan matriks
- Perkalian matriks dengan skalar
- Perkalian matriks

3.4.1 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua matriks atau lebih yang memiliki ukuran (ordo) yang sama dapat dijumlahkan atau dikurangkan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang sepadan, yaitu elemen-elemen yang berada pada posisi yang sama dalam masing-masing matriks. Berikut ini adalah contoh penjumlahan dua matriks berordo $K \times N$ (Allmendinger, Cardozo and Fisher, 2011; Gibbs, 2011; Watt, Borhani and Katsaggelos, 2016).

$$\mathbf{D}_{K \times N} = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,N} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & d_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{K,1} & d_{K,2} & \dots & d_{K,N} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\mathbf{R}_{K \times N} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,N} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{K,1} & r_{K,2} & \dots & r_{K,N} \end{bmatrix}$$

Maka penjumlahan matriks $\mathbf{D}$ dan $\mathbf{R}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{R} = \begin{bmatrix} d_{1,1} + r_{1,1} & d_{1,2} + r_{1,2} & \dots & d_{1,N} + r_{1,N} \\ d_{2,1} + r_{2,1} & d_{2,2} + r_{2,2} & \dots & d_{2,N} + r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{K,1} + r_{K,1} & d_{K,2} + r_{K,2} & \dots & d_{K,N} + r_{K,N} \end{bmatrix}$$

Dengan

$$c_{k,n} = d_{k,n} + r_{k,n}$$

Jika pengurangan D dengan R adalah

$$\mathbf{D} - \mathbf{R} = \begin{bmatrix} d_{1,1} - r_{1,1} & d_{1,2} - r_{1,2} & \dots & d_{1,N} - r_{1,N} \\ d_{2,1} - r_{2,1} & d_{2,2} - r_{2,2} & \dots & d_{2,N} - r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{K,1} - r_{K,1} & d_{K,2} - r_{K,2} & \dots & d_{K,N} - r_{K,N} \end{bmatrix}$$

Dengan

$$c_{k,n} = d_{k,n} - r_{k,n} \text{ (Yang et al., 2005).}$$

Menurut Ruminta (2014), terdapat beberapa ketentuan penting yang harus diperhatikan dalam operasi penjumlahan dan pengurangan matriks, yaitu:

- Operasi penjumlahan dan pengurangan hanya dapat dilakukan jika kedua matriks memiliki ukuran yang sama. B
- Matriks dengan ukuran berbeda tidak dapat dijumlahkan maupun dikurangkan.
- Hasil dari penjumlahan atau pengurangan matriks akan memiliki ukuran yang sama dengan matriks yang dioperasikan.
- Penjumlahan dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang berada pada posisi yang sama.
- Pengurangan dilakukan dengan mengurangkan elemen-elemen pada posisi yang sepadan.

Contoh:

1. Jika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

Maka tentukan $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$!

Penyelesaian:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+4 & 5+6 \\ 7+8 & 9+10 & 11+12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 15 & 19 & 23 \end{bmatrix}$$

2. Jika $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 9 & 12 & 14 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

Maka tentukan $\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{D}$!

Penyelesaian:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 10-2 & 3-4 & 5-6 \\ 9-8 & 12-10 & 14-12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Jika matriks $\mathbf{N} = \text{Matriks } \mathbf{B}$. Tentukan nilai Y dan Z dimana,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} Y+Z & 6 \\ 2 & Y-Z \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} Y+Z & 6 \\ 2 & Y-Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh,

$$Y + Z = 4$$

$$Y - Z = 2 -$$

$$2Z = 2$$

$$Z = 1$$

Substitusi $Z = 1$ ke dalam $Y + Z = 4$

$$Y + Z = 4$$

$$Y + 1 = 4$$

$$Y = 4 - 1$$

$$Y = 3$$

Jadi nilai $Y = 3$ dan $Z = 1$.

Berikut pengecekan dengan memasukkan nilai-nilai ke dalam matriks N :

$$N = B$$

$$N = \begin{bmatrix} Y + Z & 6 \\ 2 & Y - Z \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 3 + 1 & 6 \\ 2 & 3 - 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Fatwa *et al.*, 2022).

Penjumlahan matriks memiliki beberapa sifat penting, di antaranya:

- Komutatif, yaitu $P + Q = Q + P$;
- Asosiatif, yaitu $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ (Malcata, 2020).

3.4.1 Perkalian Matriks dengan Skalar

Jika sebuah matriks C dikalikan dengan skalar γ , maka hasilnya adalah matriks baru yang ukurannya tetap sama dengan C , namun setiap elemennya merupakan hasil perkalian elemen asli dengan γ (Allmendinger, Cardozo and Fisher, 2011; Watt, Borhani and Katsaggelos, 2016).

$$\gamma D = \begin{bmatrix} \gamma d_{1,1} & \gamma d_{1,2} & \dots & \gamma d_{1,M} \\ \gamma d_{2,1} & \gamma d_{2,2} & \dots & \gamma d_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma d_{M,1} & \gamma d_{M,2} & \dots & \gamma d_{M,N} \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\text{Jika } M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \text{ maka tentukan } 2M!.$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 2\mathbf{M} &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\
 2\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 5 & 2 \times 8 \\ 2 \times 2 & 2 \times 9 & 2 \times 0 \\ 2 \times 6 & 2 \times 4 & 2 \times 3 \end{bmatrix} \\
 2\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 2 & 10 & 16 \\ 4 & 18 & 0 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.4.2 Perkalian Matriks**Pengertian:**

Perkalian dua matriks dilakukan dengan cara mengalikan elemen-elemen pada baris matriks pertama dengan elemen-elemen yang bersesuaian pada kolom matriks kedua, kemudian menjumlahkan hasil-hasil perkalian tersebut (Gibbs, 2011).

Syarat perkalian matriks:

Dua matriks hanya dapat dikalikan jika jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua.

Notasi dan Ukuran Matriks:

Misalkan dilakukan perkalian antara matriks A dan matriks B : Matriks A memiliki ukuran $m \times n$ Matriks B berukuran $n \times r$ Maka hasil perkalian matriks AB akan berupa matriks berukuran $m \times r$ (Watt, Borhani and Katsaggelos, 2016).

$$a_{m1}b_{1r} + a_{m2}b_{2r} + \dots + a_{mn}b_{nr}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ (ukuran } m \times n \text{)}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \text{ (ukuran } n \times r \text{)}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix} \text{ (ukuran } m \times r \text{)}$$

Dengan setiap elemen $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$

Artinya, untuk mendapatkan elemen c_{ij} , perlu kalikan baris ke- i dari $\mathbf{A}$ dengan **kolom ke- j** dari $\mathbf{B}$, lalu dijumlahkan hasilnya.

Contoh:

1. Misalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$, maka perkalian matriks A dan B adalah

Penyelesaian:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1(2) + 2(9) & 1(6) + 2(1) \\ 3(2) + 4(9) & 3(6) + 4(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 + 18 & 6 + 2 \\ 6 + 36 & 18 + 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 42 & 22 \end{bmatrix}$$

2. Misalkan $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ maka tentukan $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$!.

Penyelesaian :

$$\mathbf{D} \times \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} \times \mathbf{M} =$$

$$\begin{bmatrix} (2 \cdot 1) + (1 \cdot 0) & (2 \cdot 0) + (1 \cdot 2) & (2 \cdot 3) + (1 \cdot 2) \\ (3 \cdot 1) + (0 \cdot 0) & (3 \cdot 0) + (0 \cdot 2) & (3 \cdot 3) + (0 \cdot 2) \\ (5 \cdot 1) + (5 \cdot 0) & (5 \cdot 0) + (5 \cdot 2) & (5 \cdot 3) + (5 \cdot 2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} \times \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 3 & 0 & 9 \\ 5 & 10 & 25 \end{bmatrix}$$

3. Sebuah perusahaan transportasi mengoperasikan dua jenis kendaraan, yaitu bus dan minibus. Setiap harinya, satu bus membutuhkan biaya bahan bakar sebesar Rp 400.000, sementara satu minibus memerlukan Rp 200.000. Perusahaan ini melayani tiga rute, yaitu rute A, B, dan C. Jumlah kendaraan yang digunakan pada masing-masing rute adalah sebagai berikut:

- Rute A: 4 bus dan 6 minibus
- Rute B: 2 bus dan 4 minibus
- Rute C: 7 bus dan 5 minibus

Susunlah sebuah matriks yang merepresentasikan jumlah bus dan minibus yang dioperasikan pada setiap rute. Setelah itu, tentukan total biaya bahan bakar harian

untuk masing-masing rute dengan menggunakan operasi matriks.

Penyelesaian:

- a. Membuat matriks untuk menunjukkan jumlah bus dan minibus disetiap rute.
- b. Menghitung total biaya bahan bakar setiap rute

Diketahui:

Misal,

Matriks A untuk menunjukkan rute per bus dan minibus.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks B untuk menunjukkan biaya bahan bakar per bus dan minibus.

$$B = \begin{bmatrix} 400000 \\ 200000 \end{bmatrix}$$

Ditanya: Berapakah total biaya bahan bakar harian yang diperlukan untuk setiap rute yang dinyatakan oleh Matriks C ?

Jawab:

Total biaya bahan bakar harian untuk setiap rute adalah hasil perkalian matriks A dan matriks B .

$$C = A \times B$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 400000 \\ 200000 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (4 \times 400000) + (6 \times 200000) \\ (2 \times 400000) + (4 \times 200000) \\ (7 \times 400000) + (5 \times 200000) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1600000 + 1200000 \\ 800000 + 800000 \\ 2800000 + 1000000 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2800000 \\ 1600000 \\ 3800000 \end{bmatrix}$$

Jadi, total biaya bahan bakar harian yang diperlukan untuk rute adalah Rute A adalah Rp2.800.000,00; Rute B adalah Rp1.600.000,00; dan Rute C adalah Rp3.800.000,00.

DAFTARPUSTAKA

- Abadir, K.M. and Magnus, J.R. (2005) *Matrix Algebra*. 1st edn. Cambridge University Press. Available at: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511810800>.
- Allmendinger, R.W., Cardozo, N. and Fisher, D.M. (2011) *Structural Geology Algorithms: Vectors and Tensors*. 1st edn. Cambridge University Press. Available at: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511920202>.
- Andari, A. (2017) *Aljabar Linier Elementer*. Cetakan Pertama. Malang, Indonesia: UB Press.
- Eisley, J.G. and Waas, A.M. (2011) *Analysis of Structures: An Introduction Including Numerical Methods*. 1st edn. Wiley. Available at: <https://doi.org/10.1002/9781119993278>.
- Fatwa, M. *et al.* (2022) 'Pengaplikasian Matlab pada Perhitungan Matriks', *Papanda Journal of Mathematics and Science Research*, 1(2), pp. 81–93. Available at: <https://doi.org/10.56916/pjmsr.v1i2.260>.
- Gibbs, B.P. (2011) *Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook*. 1st edn. Wiley. Available at: <https://doi.org/10.1002/9780470890042>.
- Goldsmith, A. (2005) *Wireless Communications*. 1st edn. Cambridge University Press. Available at: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511841224>.
- Malcata, F.X. (2020) *Mathematics for Enzyme Reaction Kinetics and Reactor Performance*. 1st edn. Wiley. Available at: <https://doi.org/10.1002/9781119490319>.

- Ruminta (2014) *MATRIKS Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Cetakan Pertama. Bandung: Rekayasa Sains.
- Salaka, L., Patty, H.W.M. and Talakua, M.W. (2013) 'Sifat-Sifat Dasar Matriks Skew Hermitian', *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 7(2), pp. 19–26. Available at: <https://doi.org/10.30598/barekengvol7iss2pp19-26>.
- Watt, J., Borhani, R. and Katsaggelos, A. (2016) *Machine Learning Refined: Foundations, Algorithms, and Applications*. 1st edn. Cambridge University Press. Available at: <https://doi.org/10.1017/CBO9781316402276>.
- Yang, W.Y. *et al.* (2005) *Applied Numerical Methods Using MATLAB®*. 1st edn. Wiley. Available at: <https://doi.org/10.1002/0471705195>.

BAB 4

MATRIKS-MATRIKS KHUSUS; TRANSFORMASI ELEMENTER

Oleh Hasniati

4.1 Pendahuluan

Matriks merupakan salah satu konsep fundamental dalam aljabar linear yang memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, seperti ilmu komputer, ekonomi, teknik, dan fisika. Salah satu aspek penting dalam kajian matriks adalah identifikasi matriks-matriks khusus serta penerapan transformasi elementer untuk menyederhanakan bentuk dan manipulasi matriks dalam berbagai perhitungan matematis.

Dalam teori matriks, dikenal sejumlah matriks dengan karakteristik khusus yang membedakannya dari matriks umum. Jenis-jenis matriks ini meliputi matriks nol, matriks simetris, matriks diagonal, matriks identitas, serta matriks segitiga atas dan bawah. Ciri khas matriks-matriks tersebut terletak pada anggota-anggotanya serta kemudahannya dalam operasi aljabar seperti perkalian matriks, perhitungan determinan, invers, dan operasi lainnya (Mursyidah, 2017).

Salah satu teknik utama dalam manipulasi matriks adalah transformasi elementer. Dalam kajian akademik, banyak penelitian telah dilakukan untuk mengeksplorasi sifat-sifat matriks khusus dan aplikasi transformasi elementer dalam

berbagai konteks. Misalnya, penelitian oleh Rindu Alriavindra Funny (2015) membahas penggunaan matlab untuk membantu siswa memahami metode Gauss-Jordan(Funny, 2017). Sementara itu, penelitian oleh Rituparna Maji, dkk (2017) mengkaji penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan konsep Algoritma Pencarian Grover: An IBM Quantum Experience(Maji, Behera and Panigrahi, 2021). Studi-studi ini menunjukkan bahwa pemahaman yang mendalam terhadap matriks khusus dan transformasi elementer sangat penting dalam pengembangan teori dan aplikasi aljabar linear.

4.2 Matriks-Matriks Khusus

Matriks-matriks khusus merupakan matriks dengan sifat atau bentuk tertentu yang memberikan kemudahan dalam berbagai operasi aljabar. Berikut adalah beberapa jenis matriks khusus yang umum digunakan dalam aljabar linear:

4.2.1 Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya bernilai nol. Matriks nol dapat dinotasikan dengan $\mathbf{0}$, bila penting dalam menyebutkan ukuran matriks nol berukuran $m \times n$ dapat ditulis sebagai $\mathbf{0}_{m \times n}$. Beberapa contoh matriks nol disajikan di bawah ini(Anton and Rorres, 2014):

$$\mathbf{0}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0}_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks nol digunakan dalam operasi matriks sebagai elemen identitas untuk penjumlahan.

Teorema 4.1: Dengan asumsi dimensi matriks sama sehingga operasi yang dinyatakan dapat dilakukan, maka berlaku aturan-aturan aritmetika matriks berikut ini berikut(Anton and Rorres, 2014).

- a. $Q+0=0+Q=Q$
- b. $Q-0=0-Q=Q$
- c. $Q-Q=Q+(-Q)=0$
- d. $0Q=0$

Jika $sQ=0$, maka $s=0$ atau $Q=0$

4.2.2 Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar yang memiliki elemen 1 pada diagonal utama dan 0 di luar diagonal utama. Matriks identitas dinotasikan dengan I , bila penting dalam menyebutkan ukuran matriks identitas berukuran $n \times n$ dapat ditulis sebagai I_n . Berikut ini beberapa contoh matriks identitas(Anton and Rorres, 2014):

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{dan seterusnya.} \\ I_2 & I_3 & I_4 & \end{matrix}$$

Matriks ini berperan sebagai elemen identitas dalam perkalian matriks. Secara umum, jika Q adalah matriks $m \times n$, maka berlaku(Anton and Rorres, 2014):

$$QI_n = Q \quad \text{dan} \quad I_m Q = Q$$

4.2.3 Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar di mana semua elemen di luar diagonal utama adalah nol. Salah satu contoh matriks diagonal adalah matriks identitas (Lay, Lay and McDonald, 2016). Secara umum matriks diagonal berukuran $n \times n$ dapat ditulis:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Contoh: matriks diagonal

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Pangkat dari matriks diagonal mudah untuk dihitung. Jika D adalah matriks diagonal dan k adalah bilangan bulat positif, maka (Anton and Rorres, 2014)

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Bukti pangkat matriks diagonal ditinggalkan sebagai latihan.

Hasil kali matriks yang melibatkan faktor diagonal sangat mudah dihitung,, perhatikan contoh.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ q_{31} & q_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 q_{11} & d_1 q_{12} \\ d_2 q_{21} & d_2 q_{22} \\ d_3 q_{31} & d_3 q_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 q_{11} & d_2 q_{12} & d_3 q_{13} \\ d_1 q_{21} & d_2 q_{22} & d_3 q_{23} \\ d_1 q_{31} & d_2 q_{32} & d_3 q_{33} \\ d_1 q_{41} & d_2 q_{42} & d_3 q_{43} \end{bmatrix}$$

Dengan kata lain, untuk mengalikan sebuah matriks Q di sebelah kiri dengan matriks diagonal D , kalikan baris-baris berurutan dari Q dengan anggota diagonal berurutan dari D , dan untuk mengalikan Q di sebelah kanan dengan D , kalikan kolom-kolom berurutan dari Q dengan entri-entri diagonal berurutan dari D (Anton and Rorres, 2014).

4.2.4 Matriks Segitiga

Matriks segitiga terdiri dari matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah, di mana semua elemen di bawah atau di atas diagonal utama adalah nol (Lay, Lay and McDonald, 2016).

Matriks segitiga atas adalah matriks yang semua elemen di bawah diagonal utama adalah nol, dapat ditulis:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1s} \\ 0 & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2s} \\ 0 & 0 & q_{33} & \cdots & q_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{rs} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah adalah matriks yang semua elemen di atas diagonal utama adalah nol, dapat ditulis:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{r1} & q_{r2} & q_{r3} & \cdots & q_{rs} \end{bmatrix}$$

Contoh : matriks segitiga

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -5 & 0 \\ -12 & 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.2 mencantumkan beberapa sifat dasar matriks segitiga.

Teorema 4.2:(Anton and Rorres, 2014)

(a) Transpose dari matriks segitiga bawah adalah segitiga atas, dan transpose dari matriks segitiga atas adalah segitiga bawah.

(b) Hasil kali matriks segitiga bawah adalah segitiga bawah, dan hasil kali matriks segitiga atas adalah segitiga atas.

(c) Sebuah matriks segitiga dapat dibalik jika dan hanya jika entri-entri diagonalnya tidak nol.

(d) Invers dari matriks segitiga bawah yang dapat dibalik adalah segitiga bawah, dan invers dari matriks segitiga atas yang dapat dibalik adalah segitiga atas.

4.2.5 Matriks Simetris

Pada sebuah matriks simetris, Transpose matriks Q menjadi Q^T tidak menghasilkan perubahan. Anggota (j,i) pada matriksnya sama dengan anggota (i,j) . Menurut Gilbert Strang, ini adalah matriks yang paling penting dari semua jenis matriks.

Definisi 4.1:

Matriks Q adalah matriks bujur sangkar, Q disebut matriks simetris jika $Q^T = Q$. Jika ditinjau elemen-elemen matriks Q bersifat simetris yaitu $a_{ij} = a_{ji}$ (Strang, 2022).

Contoh: matriks simetris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Tinjau suatu matriks R dan transpos-nya R^T . Hasil kali suatu matriks R dengan R^T adalah matriks simetris. Pilihlah matriks R , yang berbentuk persegi panjang. Kalikan R^T dengan R . Maka hasil kali $R^T R$ secara otomatis menjadi sebuah matriks bujur sangkar simetris (Strang, 2022):

$$\text{Transpos dari } R^T R \text{ adalah } R^T (R^T)^T = R^T R$$

Hal ini membuktikan dengan cepat dari matriks simetri untuk $R^T R$. Kita juga dapat melihat anggota (i, j) dari $R^T R$ adalah hasil perkalian titik dari baris i dari R^T (kolom i dari R) dengan kolom j dari R . Anggota (j, i) adalah hasil perkalian titik yang sama yaitu kolom j dengan kolom i , sehingga $R^T R$ simetris.

Matriks RR^T juga simetris. (Bentuk RR^T memungkinkan perkalian.) Tetapi RR^T adalah matriks yang berbeda dari $R^T R$ (Strang, 2022).

Contoh : Hitung perkalian $R^T R$ dan RR^T dari matriks:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 3 \end{bmatrix}$$

Pertama, tentukan transpos matriks R

$$R^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 11 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian hitung perkalian dari kedua matriks

$$RR^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 179 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R^T R = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 179 \end{bmatrix}$$

4.2.7 Matriks Dasar

Definisi 4.2:

Sebuah matriks E disebut matriks dasar jika dapat diperoleh dari matriks identitas dengan melakukan operasi baris elementer tunggal (Anton and Rorres, 2014). Contoh 4.6 mengilustrasikan tiga jenis matriks dasar.

Contoh:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.3, yang pembuktiannya dibiarkan sebagai latihan, bahwa ketika sebuah matriks Q dikalikan di sebelah kiri dengan sebuah matriks elementer E , efeknya adalah melakukan operasi baris elementer pada Q .

Teorema 4.3 : (Anton and Rorres, 2014)

Jika matriks elementer E dihasilkan dari melakukan operasi baris tertentu pada I_m dan jika Q adalah matriks $m \times n$, maka hasil kali EQ adalah matriks yang dihasilkan ketika operasi baris yang sama dilakukan pada Q .

Jadi tiga operasi dasar baris (dikemukakan pada bagian selanjutnya), dapat digunakan untuk menyederhanakan perkalian matriks EQ . Secara rinci hasil kali EQ diperoleh dengan cara sebagai berikut: (Yudistira and Nariswari, 2023)

1. Mengalikan baris ke- i matriks Q dengan konstanta tidak nol k , jika Matriks E diperoleh dengan mengalikan baris ke- i matriks identitas (I).
2. Menukar baris ke- i dengan baris ke- j matriks Q , jika matriks E diperoleh dari matriks I , dengan menukar baris ke- i dan baris ke- j .
3. Menambahkan baris ke- j dengan kelipatan k dari baris ke- i pada matriks Q , jika matriks E diperoleh dari matriks identitas I , yaitu dengan menambahkan baris ke- j dengan baris ke- i yang telah dikalikan dengan k .

Contoh:

Diberikan matriks Q dan matriks E_2 berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 12 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks E_2 diperoleh dari matriks I , dengan menukar baris pertama dan baris ke-3. Hasil kali E_2Q adalah

$$E_2Q = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 12 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

4.3 Transformasi Elementer

Transformasi elementer merupakan konsep penting dalam aljabar linear yang memungkinkan manipulasi matriks untuk berbagai tujuan, seperti menyelesaikan sistem persamaan linear, mencari invers matriks, dan dekomposisi matriks (Anton and Rorres, 2014). Transformasi ini terdiri dari tiga jenis utama: pertukaran baris, perkalian baris dengan skalar bukan nol, dan penjumlahan kelipatan suatu baris ke baris lainnya (Strang, 2022).

Dengan menerapkan transformasi elementer, kita dapat menyederhanakan bentuk matriks hingga mencapai bentuk eselon baris atau bentuk eselon baris tereduksi, yang sangat bermanfaat dalam analisis dan penyelesaian masalah matematis.

Transformasi elementer terdiri dari tiga operasi dasar yang dapat diterapkan pada baris matriks:

4.3.1 Pertukaran Baris (*Row Swapping*)

Operasi ini melibatkan pertukaran posisi dua baris dalam matriks. Pertukaran baris sering digunakan dalam metode eliminasi Gauss untuk menghindari pembagian dengan nol (Anton and Rorres, 2014).

Jika kita menukar baris ke- i dan baris ke- j , maka transformasi ini dapat dinyatakan sebagai:

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

Contoh: ketika baris kedua ditukar dengan baris ketiga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 8 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

4.3.2 Perkalian Baris dengan Skalar (*Row Scaling*)

Dalam operasi ini, setiap elemen dalam satu baris dikalikan dengan bilangan bukan nol, yang tidak mengubah solusi sistem linear (Lay, Lay and McDonald, 2016). Jika suatu baris ke- i dikalikan dengan konstanta k , transformasi ini dinyatakan sebagai:

$$R_i \rightarrow kR_i$$

Contoh : ketika baris pertama suatu matriks dikalikan dengan 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 8 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

4.3.3 Penjumlahan Kelipatan Baris (*Row Addition/Subtraction*)

Operasi ini melibatkan penjumlahan suatu kelipatan dari satu baris ke baris lainnya untuk mengeliminasi variabel tertentu dan menyederhanakan bentuk matriks (Strang, 2022). Jika kita ingin menggantikan baris ke- i dengan hasil penjumlahan baris ke- i dan kelipatan k dari baris ke- j , maka transformasi ini dinyatakan sebagai:

$$R_i \rightarrow R_i + kR_j$$

Contoh: jika baris pertama ditambahkan dengan (-1) kali baris ketiga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + (-1)R_3} \begin{bmatrix} -7 & 3 & -3 \\ 8 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

4.4 Penerapan Transformasi Elementer

4.4.1 Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

Digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan mengubah matriks koefisien menjadi bentuk eselon baris atau bentuk eselon baris tereduksi (Anton and Rorres, 2014). Eliminasi Gauss melibatkan kombinasi operasi transformasi elementer untuk mengubah matriks menjadi bentuk segitiga atas.

4.4.2 Penentuan Invers Matriks

Melalui operasi transformasi elementer, suatu matriks dapat diubah menjadi matriks identitas, sehingga inversnya dapat ditemukan. Metode ini melibatkan augmentasi matriks dengan matriks identitas dan menerapkan transformasi elementer hingga matriks awal berubah menjadi matriks identitas (Strang, 2022).

4.4.3 Faktorisasi LU

Faktorisasi LU digunakan dalam metode numerik untuk mendekomposisi matriks menjadi hasil kali dua matriks segitiga, yaitu matriks segitiga bawah (L) dan matriks segitiga atas (U). Transformasi elementer membantu dalam proses dekomposisi ini (Lay, Lay and McDonald, 2016).

4.4.4 Penyelesaian Determinan Matriks

Transformasi elementer membantu dalam penyederhanaan perhitungan determinan dengan cara membuat nol pada elemen-elemen tertentu sehingga memudahkan perhitungan determinan matriks segitiga (Anton and Rorres, 2014).

4.4.5 Aplikasi dalam Ilmu Komputer dan Teknik

Transformasi elementer banyak digunakan dalam algoritma grafis komputer, pengolahan citra digital, pembelajaran mesin, dan analisis data numerik. Metode seperti *Singular Value Decomposition* (SVD) juga bergantung pada transformasi elementer dalam dekomposisi matriks.

Latihan Soal.

1. Hitung perkalian matriks berikut:

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 23 \\ -7 & 6 \\ 17 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{b.} & \begin{bmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 15 \\ 1 & -5 & -4 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Tunjukkan jika matriks A simetris $n \times n$ dan matriks B adalah matriks $n \times m$, maka perkalian matriks berikut menghasilkan matriks simetris:

$$B^T B, \quad B B^T, \quad B^T A B$$

3. Diberikan matriks E dan matriks P . Identifikasi operasi yang berkorepondensi dengan E untuk menghitung perkalian EQ dengan operasi baris.

$$\text{a.} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 12 & 5 \\ -2 & 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 3 & -6 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Tentukan nilai konstanta agar matriks P simetris:

$$\text{a. } P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ a+3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } P = \begin{bmatrix} 2 & a+b-2c & 3a+b-4c \\ 7 & -5 & a+b \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. and Rorres, C. (2014) *Elementary Linear Algebra Applications Version (11th Edition)*. Canada: WileyPLUS.
- Funny, R.A. (2017) 'Using Matlab To Help Students Understanding Gauss-Jordan Methods', *Angkasa: Jurnal Ilmiah Bidang Teknologi*, 9(2), p. 75. Available at: <https://doi.org/10.28989/angkasa.v9i2.176>.
- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2016) *Linear algebra and its applications, Global Edition*.
- Maji, R., Behera, B.K. and Panigrahi, P.K. (2021) 'Solving Linear Systems of Equations by Using the Concept of Grover's Search Algorithm: an IBM Quantum Experience', *International Journal of Theoretical Physics*, 60(5), pp. 1980–1988. Available at: <https://doi.org/10.1007/s10773-021-04817-w>.
- Mursyidah, H. (2017) 'ALGORITMA POLINOMIAL MINIMUM UNTUK MEMBENTUK MATRIKS DIAGONAL DARI MATRIKS PERSEGI', *Journal of Materials Processing Technology*, 1(1), pp. 1–8.
- Strang, G. (2022) *Introduction to Linear Algebra Sixth Edition*. Massachusetts: Wellesley - Cambridge Press.
- Yudistira, I.G.A.A. and Nariswari, R. (2023) 'Operasi Dasar Baris/Kolom Matriks Secara Interaktif Dengan Menggunakan R', *Engineering, Mathematics and Computer Science (EMACS) Journal*, 5(1), pp. 25–32. Available at: <https://doi.org/10.21512/emacsjournal.v5i1.9206>.

BAB 5

DETERMINAN MATRIKS 2 X 2

Oleh Sutiyono

5.1 Definisi Determinan

Dalam matematika khususnya aljabar linear, determinan adalah suatu bilangan khusus yang dapat dicari dengan menghitung elemen-elemen sebuah matriks persegi. Matriks persegi merupakan matriks dimana jumlah baris sama dengan jumlah kolomnya, contoh suatu matriks A adalah matriks 2×2 dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

Elemen-elemen yang membentuk sebuah matriks disebut sebagai anggota dari matriks tersebut. Ukuran atau dimensi sebuah matriks dinyatakan dalam bentuk jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal). Matriks yang terdiri dari hanya satu kolom dikenal sebagai matriks kolom. (atau vektor kolom), sedangkan matriks yang hanya memiliki satu baris disebut matriks baris (atau vektor baris). Notasi penulisan matriks biasanya menunjukkan jumlah m baris dan n kolom. (Anton, 2000)

Kolom

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Baris -1} \\ \rightarrow \text{Baris -2} \\ \vdots \\ \rightarrow \text{Baris ke - n} \end{array}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 Kolom ke-1 Kolom ke-2 Kolom ke-n

dalam pembacaannya a_{11} tidak dibaca sebagai “a sebelas”, namun dibaca “a satu-satu”, yang mana mempunyai arti sebagai elemen matriks yang berada pada baris pertama dan kolom pertama.

contoh $D = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 98 \\ 5 & 1 & 7 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

Baris ke-2 kolom ke-1

Baris ke-3 kolom ke-3

Matriks D memiliki tiga baris dan empat kolom. Ukuran matriks D dapat ditulis 3×4 atau dituliskan sebagai $D_{3 \times 4}$. Elemen pada baris ke-2 dan kolom pertama = $d_{21} = 5$, sedangkan elemen pada baris ke-3 serta kolom ke-3 = $d_{33} = 16$

Konsep determinan pertama kali digunakan pada abad ke-17 dan ke-18 oleh matematikawan seperti Gottfried Wilhelm Leibniz dan Gabriel Cramer guna memecahkan sistem persamaan linear. Secara umum penulisan dari determinan dari matriks A dinyatakan dalam notasi $\det$, $\det A$, atau $|A|$ (Alpha C. Chiang, 2005). Bentuk determinan dari matriks (1) dapat dituliskan (Kreyszig, 2011)

Misalkan A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka determinan A dilambangkan sebagai $\det(A)$ atau $|A|$. Jika A

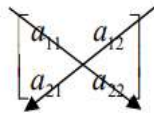
merupakan matriks bujur sangkar dengan ordo 2×2 , maka determinannya dapat dihitung dengan metode berikut (Masrurotullaily,2020; Tobias(2011));

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Perhitungan determinan matriks ordo 2×2 dapat dihitung dengan langkah sebagai berikut:

- Menuliskan bentuk matriksnya, misalkan $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- Mengalikan elemen-elemen diagonal yang berlawanan arah, hasil kali elemen pada diagonal yang terletak di pojok kiri atas (a_{11}) dan pojok kanan bawah (a_{22}), serta hasil kali elemen pada diagonal yang terletak di pojok kanan atas (a_{12}) dan pojok kiri bawah (a_{21})



- Mengurangi hasil kali diagonal

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Contoh: Berapakah determinan matriks A yang tertulis sebagai berikut;

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times (-5) - 1 \times 0$$

$$= -20$$

Harga determinan matriks A adalah -20.

5.2 Sifat-Sifat Determinan Matriks

Determinan adalah nilai skalar yang dihasilkan dari operasi tertentu pada elemen-elemen matriks persegi (matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama). Determinan memiliki berbagai sifat penting yang sangat berguna dalam berbagai bidang matematika dan ilmu terapan, seperti aljabar linear, geometri, dan analisis numerik. Tentunya memahami sifat-sifat determinan sangat penting untuk menguasai konsep-konsep lanjutan dalam matematika.

1. $|A| = |A^T|$

Determinan A sama dengan determinan transposenya atau yang disebut **sifat invariansi determinan terhadap transpos**. Sifat ini menunjukkan bahwa nilai determinan suatu matriks tidak berubah jika matriks tersebut di-transpos, atau dengan kata lain, determinan adalah invariant (tidak berubah) terhadap operasi transpos. Secara sederhana dapat dituliskan sebagai berikut:

matriks A berukuran $2 \times 2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka

Transpose dari matriks A adalah $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

maka $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Jika $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ maka $B^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

$$\text{maka } B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian determinan dari $|A|$ adalah $ad - bc$, dan determinan dari $|A^T|$ juga $ad - bc$, dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $|A| = |A^T|$.

Contoh buktikan bahwa suatu $|A|$ akan sama dengan $|A^T|$

nya. diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ maka $|A| = [(-1) \times 3]$

$$- [4 \times 2] = -11$$

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ bentuk } |A^T| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= [(-1) \times 3] - [4 \times 2] \\ &= (-3) - 8 = -11 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $|A|$ akan sama dengan $|A^T|$ nya.

2. Jika B adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap elemen baris matriks A dengan konstanta k , maka $|B| = k|A|$. Secara sederhana dapat dijelaskan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dengan determinannya $= |A|$ sedangkan B adalah matriks yang dihasilkan dengan mengalikan baris ke- i dari matriks A dengan konstanta sebesar k .

Contoh: diketahui matriks A berordo 2×2 , $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan

$k = 3$. Tentukan $|A|$ serta $|B|$

Penyelesaian : akan dihitung matriks hasil kali B terlebih dahulu dimana pada definisi sifat determinan ke 2

dimana matriks B merupakan matriks yang dihasilkan dari perkalian baris tunggal A dengan konstanta k , dengan demikian harga matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$|A| = (1 * 4) - (2 * 3) = -2$$

$$|B| = (3 * 4) - (2 * 3) = 6$$

3. Jika A adalah matriks segitiga atas/bawah atau matriks diagonal, maka determinan A merupakan perkalian dari elemen-elemen diagonal utamanya. ($|A| = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$).

Sebelum melanjutkan ke proses latihan soal harus dipahami terlebih dahulu apa yang dimaksud dengan matriks segitiga atas / bawah atau matriks diagonal.

- a. **Matriks Segitiga Atas:** Matriks segitiga atas adalah matriks persegi di mana semua elemen di bawah diagonal utama (elemen-elemen dengan indeks baris lebih besar dari indeks kolom) adalah nol. Dengan kata lain, semua elemen yang berada di atas diagonal utama boleh bernilai apa saja, tetapi elemen di bawah diagonal utama haruslah nol.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Contoh jika diketahui persamaan linier sebagai berikut :

$$x + 2y + 3z = 9$$

$$2x - y + z = 8$$

$$3x + y + 2z = 11$$

Penyelesaian: persamaan dari contoh soal tersebut dapat dituliskan dalam bentuk matriks *augmented* sebagai

berikut : $\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{array} \right|$ selanjutnya membuat elemen di

bawah $a_{11} = 0$ dengan

cara $R_2 = R_2 - 2 * R_1$



$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & 7 & -16 \end{array} \right|$$

$$R3 = R3 - 3 \cdot R1$$

Elemen dibawah a_{22} dibuat menjadi nol dengan cara $R3 = R3 - R2$ didapat;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right]$$

- b. Matriks Segitiga Bawah** : adalah jenis matriks bujursangkar di mana semua elemen yang berada di atas diagonal utama bernilai nol. Dengan kata lain elemen-elemen yang berada di bawah diagonal utama boleh mempunyai nilai berapa saja, tetapi elemen di atas diagonal utama haruslah nol.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Contoh jika diketahui persamaan linier sebagai berikut: $x + 0y + 0z = 2$

$$3x + 2y + 0z = 8$$

$$4x + 5y + 6z = 15$$

Penyelesaian:

persamaan dari contoh soal tersebut dapat dituliskan dalam bentuk matriks *augmented* sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{array} \right]$$

dari hasil penyelesaian sudah didapatkan bentuk matriks segitiga bawahnya.

- c. Matriks diagonal** adalah matriks persegi khusus di mana hanya elemen-elemen pada diagonal utamanya yang boleh memiliki nilai selain nol. Elemen di luar diagonal utama pasti bernilai nol.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A =$$

Contoh: diketahui matriks $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ hitunglah determinan dari matriks B tersebut.

Penyelesaian :

Dikarenakan sifat utama dari matriks diagonal adalah bahwa semua elemen di luar diagonal utama adalah nol, dan determinannya adalah hasil kali semua elemen pada diagonal utama.

Untuk matriks diagonal B, semua elemen pada diagonal utama adalah b_{11} , b_{22} , dan b_{33} dengan demikian cukup mengalikan elemen-elemen tersebut untuk mendapatkan hasil determinannya. Langkah-langkah pengerjaannya adalah ;

1. Mengidentifikasi nilai dari diagonal utama ;
 $b_{11}=7, b_{22}=-3, b_{33}=5$
2. Mengalikan elemen-elemen diagonal utama;
 $|B| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33}$
 $= 7 \cdot (-3) \cdot 5$
 $= -105$

Jadi determinan dari matriks B = -105

Dari ketiga contoh, untuk matriks segitiga atas, segitiga bawah, dan diagonal, nilai dari determinannya merupakan hasil dari perkalian semua elemen pada diagonal utama.

4. $\det(kA) = k^2 \det(A)$ untuk $A_{2 \times 2}$ juga $\det(kA) = k^3 \det(A)$ untuk $A_{3 \times 3}$

Sifat ini menyatakan bahwa jika akan mengalikan seluruh elemen dari sebuah matriks persegi A dengan suatu konstanta k, maka determinan dari matriks yang dihasilkan kA adalah k^n kali determinan dari matriks awalnya atau matriks A, di mana n adalah ukuran matriks (jumlah baris atau kolom).

Contoh: untuk matriks 2×2

misal matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $|A| = ad - bc$.

Sekarang dicoba matriks A dikalikan dengan suatu konstanta k maka bentuk matriksnya adalah :

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \text{ dengan demikian}$$

$$\begin{aligned} |kA| &= (ka)(kd) - (kb)(kc) \\ &= k^2(ad - bc) \end{aligned}$$

Karena $|A| = ad - bc$ maka $|kA| = k^2 \cdot |A|$

Jadi, untuk matriks 2×2 , sifat ini menyatakan bahwa determinan dari kA adalah k^2 kali determinan dari A. Demikian juga untuk $\det(kA) = k^3 \det(A)$ untuk $A_{3 \times 3}$, misal diketahui matriks 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| =$$

$$a((e \cdot i) - (f \cdot h)) - b((d \cdot i) - (f \cdot g)) + c((d \cdot h) - (e \cdot g))$$

Sekarang dicoba matriks A dikalikan dengan suatu konstanta k maka bentuk matriksnya adalah :

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

dengan demikian

$$\begin{aligned} |kA| &= (ka)((ke)(ki) - (kf)(kh)) - (kb)((kd)(ki) - (kf)(kg)) + (kc)((kd)(kh) - (ke)(kg)) \\ &= k^3(a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)) \end{aligned}$$

Karena $|A| = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$ maka $|A| = k^3 \cdot |A|$

Jadi, untuk matriks 3×3 , sifat ini menyatakan bahwa determinan dari kA adalah k^3 kali determinan dari A . Dengan demikian untuk matriks $n \times n$, jika A merupakan matriks tersebut dan k suatu konstanta, maka: $\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$

Ini menunjukkan bahwa ketika semua elemen yang terdapat didalam matriks A dikalikan dengan k , determinannya akan dikalikan dengan k^n , di mana n merupakan ukuran matriks.

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ Akan dihitung nilai determinan dari $A = (1 \times 4) - (2 \times 3) = -2$, dimisalkan matriks A akan dikalikan dengan $k=3$.

$$3A = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.3 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$|3A| = (3.12) - (6.9) = -18$$

$$\text{Jadi } |3A| = -18$$

5. Apabila semua elemen pada matriks A sama dengan 0 (=nol), maka $|A|=0$. Dari kalimat ini sudah jelas kalau suatu bilangan dikalikan dengan nol tentu hasilnya akan sama dengan nol.

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ maka $|A| = (0.0) - (0.0) = 0$

6. Apabila seluruh nilai dalam suatu baris atau kolom pada matriks A identik dengan nilai-nilai dalam baris atau kolom yang lain, maka $|A|=0$. Artinya ketika dua baris atau dua kolom dari matriks sama persis, itu berarti tidak ada informasi baru yang ditambahkan oleh baris atau

kolom tersebut. Secara geometris, ini berarti bahwa volume yang ditentukan oleh vektor-vektor kolom (atau baris) matriks tersebut adalah nol, karena vektor-vektor tersebut tidak dapat membentuk ruang yang independen. Akibatnya, determinan matriks tersebut menjadi nol, menunjukkan bahwa matriks tersebut tidak dapat dibalik (tidak memiliki invers).

Contoh :

Jika diketahui matriks 3×3 sebagai berikut;

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ tentukan nilai dari $|A|$ dari matriks tersebut.

$$\begin{aligned} \text{Determinan matriks } A = |A| &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (4 \cdot 7 - 5 \cdot 6) - 2 \cdot (4 \cdot 7 - 5 \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 6 - 4 \cdot 6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

7. Jika elemen - elemen yang terdapat didalam salah satu baris atau kolom matriks A merupakan kelipatan dari elemen pada baris atau kolom yang lain, maka $|A|=0$. Ketika elemen-elemen pada satu baris atau kolom merupakan kelipatan dari elemen-elemen pada baris atau kolom lain, baris atau kolom tersebut sebenarnya tidak memberikan pengertian (bentuk) baru, bnilai dari determinannya tetap $= 0$.

Contoh:

Diketahui matriks 3×3 dimana kolom ketiga merupakan 3 kali dari kolom pertama, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 12 \\ 7 & 8 & 21 \end{bmatrix}$ dari matriks ini akan dicari nilai dari $|A|$

$$\begin{aligned}
 |A| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 8 & 21 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 7 & 21 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (5 \cdot 21 - 12 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 21 - 12 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\
 &= 1 \cdot (105 - 96) - 2 \cdot (84 - 84) + 3 \cdot (32 - 35) \\
 &= 1 \cdot 9 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) \\
 &= 9 + 0 - 9 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

8. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Pengertian dari sifat tersebut adalah jika dua matriks A dan B yang memiliki ukuran yang sama (misalnya, keduanya adalah matriks $n \times n$, determinan dari hasil perkalian AB sama dengan hasil kali dari determinan masing-masing matriks.

Contoh :

Diketahui matriks A dan B berordo 2×2 , buktikan bahwa $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

akan dicari nilai dari $|A|$ dan $|B|$,

$$|A| = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 3) = 4 - 6 = -2$$

$$|B| = (2 \cdot 3) - (0 \cdot 1) = 6$$

selanjutnya menghitung perkalian dari matriks A dan B;

$$AB = \begin{bmatrix} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) & (1 \cdot 0 + 2 \cdot 3) \\ (3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) & (3 \cdot 0 + 4 \cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = (4 \cdot 12) - (6 \cdot 10) = 48 - 60 = -12$$

$$|A| \cdot |B| = (-2) \cdot 6 = -12 \quad \dots\dots\dots \text{terbukti}$$

9. $\det(A^n) = (\det(A))^n$

Untuk menghitung nilai dari pangkat matriks A^n dimana n adalah bilangan bulat positif, dengan cara mengalikan

matriks A dengan dirinya sendiri sebanyak n kali. Sehingga sifat perkalian determinan di atas, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\det(A^n) = \det(A \cdot A \cdot A \cdots A) = \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) \cdots \det(A)$$

Dikarena ada n kali perkalian, secara sederhana dapat dituliskan; $\det(A^n) = (\det(A))^n$

Contoh:

diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

determinan $A = |A| = (2 \cdot 4) - (3 \cdot 1) = 8 - 3 = 5$

Misalkan akan dihitung

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) & (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4) \\ (1 \cdot 2 + 4 \cdot 1) & (1 \cdot 3 + 4 \cdot 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}$$

$$|A^2| = (7 \cdot 19) - (18 \cdot 6) = 133 - 108 = 25$$

Hasil perhitungan $|A|^2 = 5^2 = 25$ terbukti

5.3 Aplikasi dari Determinan Matriks 2X2

Determinant matriks 2×2 adalah konsep fundamental dalam aljabar linear yang memiliki berbagai aplikasi penting dalam matematika dan ilmu terapan. Determinan memberikan nilai skalar yang memuat informasi krusial tentang sifat-sifat matriks, dan peranannya sangat luas dalam berbagai bidang.

1. Menentukan Keterbalikan (Inversibilitas) Matriks

- **Keterbalikan Matriks:** *Jika determinan dari matriks 2×2 tidak nol, matriks tersebut dapat dibalik (invertible). Jika determinan nol, matriks tersebut tidak dapat dibalik (singular).* Untuk dapat mengetahui apakah suatu matriks dapat dibalik (invertible), harus dihitung determinannya. Jika

determinan dari matriks tidak nol, maka matriks tersebut dapat dibalik. Sebaliknya, jika determinannya sama dengan nol, matriks tersebut tidak dapat dibalik.

Contoh dari matriks yang dapat dibalik, suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ buktikan matriks A tersebut dapat dibalik. Langkah-langkah yang dapat dilakukan adalah ;

Menghitung Determinan A

$$\det(A) = (2 \cdot 4) - (3 \cdot 1) = 8 - 3 = 5$$

Karena determinan A adalah 5 (tidak nol), maka matriks A dapat dibalik.

Menghitung Invers Matriks A

Invers dari matriks 2×2 A adalah $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$

$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, dengan memasukkan nilai dari matriks A

$$\text{didapat } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Contoh dari matriks yang tidak dapat dibalik

Matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = (2 \cdot 2) - (4 \cdot 1) = 4 - 4 = 0$

Karena $\det(B)=0$ maka tidak ada invers untuk matriks BBB. Matriks ini disebut sebagai matriks singular.

2. Sistem Persamaan Linear

Determinan dapat juga digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan aturan *Cramer*. Metode *Cramer* hanya digunakan untuk determinan matriks dengan ordo 2×2 .

Metode Cramer adalah metode yang efisien dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dengan jumlah variabel yang sama dengan jumlah persamaan. Dengan menggunakan determinan, metode ini menyediakan cara yang sistematis untuk menemukan solusi dari sistem persamaan, yang penting dalam berbagai aplikasi matematika dan teknik

Langkah penggunaan metoda cramer :

Diketahui persamaan linier $ax + by = e$

$$cx + dy = f$$

dari persamaan tersebut dapat ditulis $Ax = b$

$$\text{dimana } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{dan } b = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan aturan cramer didapat $x = \frac{|A_x|}{|A|}$ $y = \frac{|A_y|}{|A|}$

$$= \frac{|A_y|}{|A|}, \quad |A_x| = (e \cdot d) - (b \cdot f)$$

$$|A_y| = (a \cdot f) - (e \cdot c)$$

Contoh: diketahui persamaan linier $2x + 3y = 8$, $3x + 4y = 11$ akan dicari harga dari x dan y .

Pertama-tama persaaam linier tersebut dituliskan dalam

$$\text{bentuk matriks } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

kemudian di hitung nilai dari $|A| = (2 \cdot 4) - (3 \cdot 3) = 8 - 9 = -1$. Dibentuk matriks A_x yang diperoleh dengan mengganti kolom pertama dari matriks A dengan vektor b sehingga didapat $A_x = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ lalu matriks $A_y =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \text{ kemudian di hitung nilai dari } |A_x| = (8 \cdot 4) - (3 \cdot 11) = 32 - 33 = -1.$$

$$|A_y| = (2 \cdot 11) - (8 \cdot 3) = 22 - 24 = -2$$

Akhirnya dapat ditentukan harga x dan y dengan menggunakan $x = \frac{|A_x|}{|A|}$ $y = \frac{|A_y|}{|A|}$ didapat harga dari $X = 1$ dan $Y = 2$

3. Menghitung area lahan

Akan dihitung area lahan yang berbentuk jajaran genjang.

Lahan ini dibentuk dari 2 vektor yaitu vektor $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Tentukan area lahan tersebut.

Penyelesaian;

Langkah pertama menuliskan kedua vektor tersebut dalam matriks, di dapat matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ dari matriks ini dihitung $|A| = (5 \cdot 6) - (2 \cdot 3) = 30 - 6 = 24$

Karena area lahan dibentuk oleh vektor maka area lahan tersebut dituliskan sebagai harga mutlak dari $|A| = ||A|| = |24| = 24$ satuan luas

Beberapa contoh soal berikut penyelesaiannya.

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$, matriks $B = \begin{bmatrix} x + y & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix}$ dan matriks $C = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Apabila $B - A = C^T$ berapakah nilai dari x y.

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} x + y & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + y - 2 & 3 \\ 2 & y - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan ini didapat $y - 4 = 1$

$$y = 5$$

Nilai y dimasukkan kedalam persamaan $x + y - 2 = 7$

$$x + 5 - 2 = 7$$

$$x = 4$$

Dengan demikian nilai $xy = (4)(5) = 20$

2. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & 2x \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & x \end{bmatrix}$, agar determinan matriks A sama dengan 2 kali matriks B berakah nilai dari x .

Penyelesaian ;

Terlebih dahulu dihitung $|A| = ab - bc = 2x^2 - 6$

$$|B| = ab - bc = 4x - (-9) = 4x + 9$$

dikarenakan determinan matriks A sama dengan dua kali determinan B , maka besarnya $|A| = 2 |B|$. Dengan memasukkan persamaan dari masing-masing determinan didapat persamaan kuadrat $2x^2 - 6 = 2(4x + 9)$. Kemudian, menyederhanakan persamaan tersebut menjadi $2x^2 - 6 = 8x + 18$. Selanjutnya, memindahkan semua suku ke satu sisi persamaan untuk menggabungkan dan menyederhanakan lebih lanjut menjadi $2x^2 - 8x = 18 + 6$. Berikutnya dapat disederhanakan lagi menjadi $2x^2 - 8x = 24$. Persamaan ini disederhanakan lagi menjadi $2x^2 - 8x - 24 = 0$ kemudian disederhanakan lagi menjadi $x^2 - 4x - 12 = 0$ (2)

dari persamaan (2) dapat disederhanakan menjadi

$$(x-6)(x+2) = 0$$

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

maka nilai dari x adalah 6 dan -2

3. Farida beserta teman-temannya akan makan di depot sekolahnya, mereka memesan 3 porsi ayam penyet serta 2 gelas es jeruk. Tak lama kemudian, Dani dan teman-temannya datang dan memesan 5 porsi ayam penyet serta 3 gelas es jeruk. Berapakah harga satu porsi ayam penyet dan harga per gelas es jeruk, jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesannya.

Penyelesaian;

Misalkan x = harga ayam penyet per porsi

y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya: $3x + 2y = 70.000$

$$5x + 3y = 115.000$$

Jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{dp-bq}{ad-bc} \quad \text{dan} \quad y = \frac{aq-cp}{ad-bc} \quad \text{dengan syarat} \quad ad \neq bc$$

$$|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \quad x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 70.000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{70.000(3) - 115.000(2)}{3(3) - 2(5)} = \frac{-20.000}{-1} = 20.000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(3)115.000 - (5) 70.000}{3(3) - 2(5)} = \frac{-5.000}{-1}$$

$$= 5.000$$

Dari hasil perhitungan diatas didapat harga ayam penyet satu porsi (x) adalah Rp. 20.000 dan harga es jeruk per gelasnya (y) adalah Rp. 5.000.

DAFTAR PUSTAKA

- Alpha C. Chiang, K. W. (2005) *Dasar-dasar Matematika Ekonomi*. 4 edition.
- Anton, H. (2000) . *Elementary Linear Algebra*. First edit.
- Asih, E. M. (2023) *Buku Matriks untuk SMA/SMK*.
- Astuti, D. (2019) *e-modul Matematika*.
- Irfan, Y. (2020) *Modul Matematika Umum Kelas XISMAN 1*.

Banten.

Nurmalasari, M. (2018) *DETERMINAN MATRIKS*. Univ.Esa Unggul Jakarta.

Rapp, B. E. (2017) 'microfluidics-modeling-mechanics-and-mathematics'. Available at: <https://www.sciencedirect.com/book/9781455731411/microfluidics-modeling-mechanics-and-mathematics>.

Resmawan (2017) *Aljabar Linear Elementer Determinan*. Gorontalo.

Rosepa, W. M. (2023) *Super Referensi Materi Matriks*.

Tobias, M. J. (2011) *Matrices in Engineering Problems*. , JOHN WILEY & SONS, INC.

BAB 6

DETERMINAN MATRIKS 3×3

Oleh Moh. Nafis Husen Romadani

Bab ini akan membahas salah satu konsep penting dalam aljabar linear, yaitu determinan matriks berukuran 3×3 . Determinan merupakan bilangan yang dapat dihitung dari elemen-elemen matriks dan memiliki berbagai aplikasi dalam bidang matematika, fisika, serta teknik. Dalam matriks 3×3 , nilai determinan memberikan informasi penting mengenai sifat-sifat matriks, seperti apakah matriks tersebut memiliki invers atau tidak. Selain itu, determinan sering digunakan dalam sistem persamaan linear, transformasi geometris, dan analisis vektor. Pada bab ini, kita akan menguraikan cara menghitung determinan matriks 3×3 secara sistematis.

6.1 Mencari Determinan Matriks 3×3 Menggunakan Metode Sarrus

Misalkan diberikan matriks 3×3 X yaitu $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$, maka langkah mencari determinan dari matriks X dengan menggunakan metode Sarrus adalah sebagai berikut:

1. Tuliskan kembali elemen-elemen yang terletak pada kolom pertama dan kedua dari matriks X .
2. Buatlah sebuah beberapa garis diagonal utama yang membentang sepanjang kiri atas sampai kanan bawah dari matriks yang terbentuk dari langkah **1**. Kemudian kalikan elemen-elemen yang terdapat pada diagonal utama tersebut. Setelah dikalikan, maka langkah selanjutnya adalah menjumlahkan hasil perkalian tersebut.
3. Buatlah sebuah beberapa garis diagonal sekunder yang membentang sepanjang kiri bawah sampai kanan atas dari matriks yang terbentuk dari langkah **1**. Kemudian kalikan elemen-elemen yang terdapat pada diagonal utama tersebut. Setelah dikalikan, maka langkah

selanjutnya adalah menjumlahkan hasil perkalian tersebut.

4. Kurangkan hasil penjumlahan pada langkah ke 2 dengan hasil langkah ke 3.

Berikut adalah ilustrasi dari langkah-langkah metode Sarrus

$$\det(X) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

Keterangan : ---> hasil kalinya bertanda positif

---> hasil kalinya bertanda negatif

Sehingga akan didapatkan hasil determinan dari matriks A sebagai berikut.

$$\det(X) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} \quad (*)$$

Contoh 1:

Diberikan matriks $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan metode Sarrus, maka tentukan $\det(R)$!

Penyelesaian:

1. Tulis kembali elemen-elemen pada kolom pertama dan kedua.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array}$$

2. Buatlah garis diagonal utama pada matriks B kemudian kalikan elemen-elemen yang dilewati oleh diagonal utama.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array}$$

$$\text{Diagonal 1} = 1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$$

$$\text{Diagonal 2} = 2 \cdot 6 \cdot 7 = 84$$

$$\text{Diagonal 3} = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 96$$

3. Jumlahkan hasil perkalian dari diagonal utama pada langkah 2.

$$45 + 84 + 96 = 225$$

4. Buatlah garis diagonal sekunder pada matriks B kemudian kalikan elemen-elemen yang dilewati oleh diagonal sekunder.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array}$$

$$\text{Diagonal 1} = 7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$$

$$\text{Diagonal 2} = 8 \cdot 6 \cdot 1 = 48$$

$$\text{Diagonal 3} = 9 \cdot 4 \cdot 2 = 72$$

5. Jumlahkan hasil perkalian dari diagonal sekunder pada langkah 4.

$$105 + 48 + 72 = 225$$

6. Kurangkan hasil yang didapat dari langkah 3 dan 5.

$$225 - 225 = 0$$

7. Sehingga $\det(R) = 0$

Contoh 2:

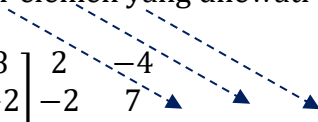
Diberikan matriks $T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan metode Sarrus, maka carilah nilai dari $\det(T)$!

Penyelesaian:

1. Tulis kembali elemen-elemen pada kolom pertama dan kedua.

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} 2 & -4 \\ -2 & 7 \\ 0 & 1 \end{array}$$

2. Buatlah garis diagonal utama pada matriks T kemudian kalikan elemen-elemen yang dilewati oleh diagonal utama.

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} 2 & -4 \\ -2 & 7 \\ 0 & 1 \end{array}$$


$$\text{Diagonal 1} = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$$

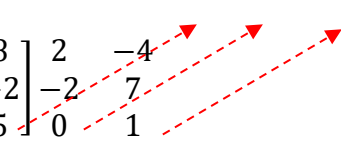
$$\text{Diagonal 2} = (-4) \cdot (-2) \cdot 0 = 0$$

$$\text{Diagonal 3} = 8 \cdot (-2) \cdot 1 = -16$$

3. Jumlahkan hasil perkalian dari diagonal utama pada langkah 2.

$$70 + 0 + (-16) = 54$$

4. Buatlah garis diagonal sekunder pada matriks T kemudian kalikan elemen-elemen yang dilewati oleh diagonal sekunder.

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} 2 & -4 \\ -2 & 7 \\ 0 & 1 \end{array}$$


$$\text{Diagonal 1} = 0 \cdot 7 \cdot 8 = 0$$

$$\text{Diagonal 2} = 1 \cdot (-2) \cdot 2 = -4$$

$$\text{Diagonal 3} = 5 \cdot (-2) \cdot (-4) = 40$$

5. Jumlahkan hasil perkalian dari diagonal sekunder pada langkah 4.

$$0 + (-4) + 40 = 36$$

6. Kurangi hasil pada langkah 3 dan 5.

$$54 - 36 = 18$$

7. Sehingga $\det(T) = 18$

6.2 Mencari Determinan Matriks 3×3 Menggunakan Metode Ekspansi Kofaktor

6.2.1 Pengertian Minor dan Kofaktor

Misalkan matriks X adalah matriks persegi $n \times n$. M_{ij} (minor baris ke i kolom ke j dari matriks X) adalah sebuah determinan dari submatriks X yang terbentuk dari hasil pencoretan baris ke i dan kolom ke j dari A (Anton & Rorres, 2014). Hasil perkalian dari $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dilambangkan dengan C_{ij} dan disebut sebagai **kofaktor entri x_{ij}** .

Contoh:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$. Misalkan kita ingin

mencari minor entri a_{11} , maka kita dapat melakukan beberapa langkah berikut.

1. Kita coret semua entri yang berada pada baris pertama dan kolom pertama, sehingga didapat matriks yang baru, yaitu $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.
2. Setelah itu, kita cari determinan dari matriks baru tersebut, yaitu.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 16 = M_{11}$$

Maka, minor dari entri a_{11} dari matriks A adalah 16

Sedangkan untuk mencari kofaktor dari entri a_{11} dapat dilakukan dengan cara:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\ &= (-1)^2 \cdot 16 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Jadi kofaktor dari entri a_{11} adalah 16.

Sekarang, misalkan kita ingin mencari minor dan kofaktor dari entri a_{32} , maka cara yang dapat kita lakukan adalah dengan melakukan langkah (1) dan (2) sehingga didapat

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

Sedangkan kofaktornya adalah:

$$\begin{aligned} C_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot M_{32} \\ &= (-1)^5 \cdot 26 \\ &= -26 \end{aligned}$$

Jika kita amati lebih detail, minor dan kofaktor elemen a_{ij} hanya berbeda dalam hal tanda, yaitu $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Perhatikan pola berikut untuk memudahkan penentuan penggunaan tanda + atau - yang menghubungkan C_{ij} dan M_{ij} pada baris ke- i dan kolom ke- j .

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

6.2.2 Menentukan Determinan Matriks 3×3

Menggunakan Metode Ekspansi Kofaktor

Tinjaulah matriks umum berordo 3×3 berikut.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Sarrus, maka kita dapat memperoleh:

$$\begin{aligned} \det(X) &= x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + \\ &\quad x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} \\ &\quad (*) \end{aligned}$$

Persamaan (*) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \det(X) &= x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) + x_{12}(x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33}) \\ &\quad + x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}) \\ &= x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) + \\ &\quad x_{12}((-1)(x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31})) + \\ &\quad x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}). \end{aligned}$$

Karena $(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) = C_{11}$, $(-1)(x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31}) = C_{12}$ dan $(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}) = C_{13}$, maka kita dapat menuliskan kembali $\det(X)$ sebagai berikut.

$$\det(X) = x_{11}C_{11} + x_{12}C_{12} + x_{13}C_{13} \quad (**)$$

Pada persamaan (**), terlihat bahwa determinan X dapat diperoleh dengan mengalikan setiap elemen pada baris pertama matriks X dengan masing-masing kofaktornya, kemudian menjumlahkan hasil perkalian tersebut. Cara menghitung $\det(X)$ ini dikenal sebagai metode **ekspansi kofaktor** sepanjang baris pertama.

Dengan menyusun kembali suku-suku pada (*), maka kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \det(X) &= x_{11}C_{11} + x_{12}C_{12} + x_{13}C_{13} \quad (\text{ekspansi sepanjang baris pertama}) \\ &= x_{21}C_{21} + x_{22}C_{22} + x_{23}C_{23} \quad (\text{ekspansi sepanjang baris kedua}) \\ &= x_{31}C_{31} + x_{32}C_{32} + x_{33}C_{33} \quad (\text{ekspansi sepanjang baris ketiga}) \\ &= x_{11}C_{11} + x_{21}C_{21} + x_{31}C_{31} \quad (\text{ekspansi sepanjang kolom pertama}) \\ &= x_{12}C_{12} + x_{22}C_{22} + x_{32}C_{32} \quad (\text{ekspansi sepanjang kolom kedua}) \\ &= x_{13}C_{13} + x_{23}C_{23} + x_{33}C_{33} \quad (\text{ekspansi sepanjang kolom ketiga}) \end{aligned}$$

Jika kita amati, semua entri dan kofaktor dalam persamaan di atas berasal dari baris atau kolom yang sama. Persamaan ini disebut **ekspansi kofaktor** dari $\det(X)$. Persamaan tersebut menghasilkan sebuah teorema yang berbunyi:

“Determinan matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri – entri dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor – kofaktornya dan menambahkan hasil – hasil kali yang dihasilkan: yakni, untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$ ”

Contoh 1:

Misalkan diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, maka

tentukan:

- Matriks M yang berisi seluruh minor dari entri – entri matriks A
- Matriks C yang berisi seluruh kofaktor dari entri – entri matriks A
- Determinan matriks A dengan menggunakan kofaktor sepanjang baris kedua.
- Determinan matriks A dengan menggunakan kofaktor sepanjang kolom ketiga.

Penyelesaian:

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

- Misalkan M adalah matriks yang berisi seluruh minor dari matriks A , maka:

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & -11 & -19 \\ 21 & 13 & -19 \\ 27 & -5 & 19 \end{bmatrix}$$

- b) Misalkan C adalah matriks yang berisi seluruh kofaktor dari matriks A dan karena $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, maka;

$$C = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 29 & (-1)^{1+2} (-11) & (-1)^{1+3} (-19) \\ (-1)^{2+1} \cdot 21 & (-1)^{2+2} \cdot 13 & (-1)^{2+3} (-19) \\ (-1)^{3+1} \cdot 27 & (-1)^{3+2} (-5) & (-1)^{3+3} \cdot 19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & 11 & -19 \\ -21 & 13 & 19 \\ 27 & 5 & 19 \end{bmatrix}$$

- c) Determinan matriks A dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris kedua.

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= (-2)(-21) + 7 \cdot 13 + 1 \cdot 19 \\ &= 152 \end{aligned}$$

- d) Determinan matriks A dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ketiga.

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \\ &= (-3)(-19) + 1 \cdot 19 + 4 \cdot 19 \\ &= 152 \end{aligned}$$

Contoh 2:

Diberikan matriks $T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor, maka carilah nilai dari $\det(T)$!

Penyelesaian:

1. Kita akan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ketiga. Terlebih dahulu kita akan mencari minor dari setiap entri di kolom ketiga.

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 - 0 \cdot 7 = -2$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot (-4) = 2$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-2) \cdot (-4) = 6$$

- Setelah itu, kita akan mencari kofaktor dari setiap entri di kolom ketiga.

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -2$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -2$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 6$$

- Langkah selanjutnya adalah mengalikan setiap entri pada kolom ketiga matriks T dengan pasangan kofaktornya.

$$t_{13} \cdot C_{13} = 8 \cdot (-2) = -16$$

$$t_{23} \cdot C_{23} = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$t_{33} \cdot C_{33} = 5 \cdot 6 = 30$$

- Langkah terakhir, adalah menjumlahkan semua hasil perkalian dari langkah 3.

$$-16 + 4 + 30 = 18$$

- Sehingga **$\det(T) = 18$**

6.3 Mencari Determinan Matriks 3×3 Menggunakan Metode Reduksi Baris

Selain menggunakan kedua cara (Metode Sarrus dan ekspansi kofaktor) yang sudah umum dipakai dalam menentukan determinan matriks 3×3 , terdapat satu metode lagi yang dapat digunakan untuk mencari determinan suatu matriks. Metode ini dilakukan dengan cara mereduksi matriks tersebut ke dalam bentuk eselon baris. Metode ini digunakan untuk memudahkan perhitungan dan menghindari kesalahan pada saat mencari determinan matriks.

Terdapat beberapa teorema penting yang dapat digunakan untuk memudahkan perhitungan pada metode reduksi baris, yaitu.

Teorema 6.1

Jika A adalah matriks persegi 3×3 yang terdapat satu baris dengan entri 0, maka $\det(A) = 0$

Bukti:

Misalkan diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris kedua, maka didapatkan:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Teorema 6.2

Jika A adalah matriks segitiga 3×3 , maka $\det(A)$ adalah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama.

Bukti 1:

Misalkan diberikan matriks segitiga bawah 3×3 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, maka didapatkan:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} c & 0 \\ e & f \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & 0 \\ d & f \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} \\ &= a \cdot (cf - 0) = acf \end{aligned}$$

Seperti yang kita ketahui, a , c dan f adalah elemen-elemen pada diagonal utama matriks A .

Bukti 2:

Misalkan diberikan matriks segitiga atas 3×3 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama, maka didapatkan:

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ 0 & f \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} \\ &= a(df - 0) = adf\end{aligned}$$

Seperti yang kita ketahui, a , d dan f adalah elemen-elemen pada diagonal utama matriks A .

Teorema 6.3 Misalkan A adalah matriks persegi 3×3

- Jika X' adalah matriks yang dihasilkan dari hasil perkalian salah satu baris pada matriks X dengan konstanta k , maka $\det(X') = k \cdot \det(X)$.
- Jika X' adalah matriks yang dihasilkan dari pertukaran dua baris pada matriks X , maka $\det(X') = -\det(X)$.
- Jika X' adalah matriks yang dihasilkan dari perkalian salah satu baris pada matriks X dan kemudian dijumlahkan dengan baris yang lain, maka $\det(X') = \det(X)$.

Bukti:

- Misalkan diberikan matriks $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$.

Misalkan terdapat konstanta k dan dikalikan dengan setiap entri pada baris kedua, maka didapatkan $X' =$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ kx_{21} & kx_{22} & kx_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan metode

Sarrus, maka didapatkan

$$\det(X')$$

$$\begin{aligned}&= kx_{11}x_{22}x_{33} + kx_{12}x_{23}x_{31} \\ &\quad + kx_{13}x_{21}x_{32} - kx_{13}x_{22}x_{31} - kx_{12}x_{21}x_{33} - kx_{11}x_{23}x_{32} \\ &= k(x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} \\ &\quad + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32}) \\ &= k \cdot \det(X)\end{aligned}$$

- b. Misalkan diberikan matriks $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$.

Misalkan X' adalah matriks yang dihasilkan dari menukar baris kedua dengan baris pertama pada X , sehingga $X' = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama matriks X' maka didapatkan:

$$\begin{aligned} \det(A') &= x_{21}(x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13}) \\ &\quad - x_{22}(x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13}) \\ &\quad + x_{23}(x_{11}x_{32} - x_{31}x_{12}) \\ &= x_{11}(x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33}) \\ &\quad + x_{12}(x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}) \\ &\quad + x_{13}(x_{22}x_{31} - x_{21}x_{32}) \\ &= -x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) \\ &\quad + x_{12}(x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}) \\ &\quad - x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}) \\ &= -(x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) \\ &\quad - x_{12}(x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}) \\ &\quad + x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22})) \\ &= -\det(X) \end{aligned}$$

- c. Misalkan diberikan matriks $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Misalkan A'

adalah matriks baru dengan menjumlahkan baris kedua dengan k kali baris ketiga matriks X , sehingga didapatkan

$$X' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d + kg & e + kh & f + ki \\ g & h & i \end{bmatrix}. \text{ Dengan menggunakan}$$

metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama matriks X' , maka didapat.

$$\begin{aligned} \det(X') &= a((e + kh)i - h(f + ki)) \\ &\quad - b((d + kg)i - g(f + ki)) \\ &\quad + c((d + kg)h - g(e + kh)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= aei + akhi - ahf - ahki - bdi - bkgi + bgf \\
 &\quad + bgki + cdh + ckgh - cge - cgkh \\
 &= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge) \\
 &= \det(X)
 \end{aligned}$$

Contoh Soal:

Dengan menggunakan metode reduksi baris, hitunglah determinan dari matriks berikut.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } R &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{b. } S &= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } R &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(Teorema 6.3.a)}
 \end{aligned}$$

Baris pertama ditukar dengan baris kedua

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(Teorema 6.3.b)}$$

Baris ketiga ditambah dengan -2 kali baris pertama

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{(Teorema 6.3.c)}$$

Baris ketiga ditambah -10 kali baris kedua

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \quad \text{(Teorema 6.3.c)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-55) = 165 \quad \text{(Teorema 6.2)}$$

Jadi $\det(R) = 165$

$$\text{b. } S = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Baris kedua ditambah dengan baris pertama

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(Teorema 6.3.c)}$$

Baris kedua ditambah dengan -3 kali baris ketiga

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(Teorema 6.3.c)}$$

Baris kedua ditukar dengan baris ketiga

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} \quad \text{(Teorema 6.3.b)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-9) = 18 \quad \text{(Teorema 6.2)}$$

Jadi $\det(S) = 18$

6.4 Beberapa Sifat Mengenai Determinan Matriks 3×3

Untuk memudahkan dalam menghitung nilai determinan matriks 3×3 , maka akan diberikan beberapa sifat dari determinan matriks 3×3 .

Teorema 6.4

Jika X adalah matriks 3×3 dan X^T merupakan matriks tranpose dari X , maka $\det(X) = \det(X^T)$

Bukti:

Diberikan matriks 3×3 X , yaitu $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$. Kemudian terdapat X^T sedemikian

sehingga $X^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix}$. Dengan

menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama X^T , maka didapat

$$\begin{aligned} \det(X^T) &= x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32}) - x_{21}(x_{12}x_{33} - x_{13}x_{32}) \\ &\quad + x_{31}(x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22}) \\ &= x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32}) - x_{12}(x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}) \\ &\quad + x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}) \\ &= \det(X) \end{aligned}$$

Teorema 6.5

Jika X dan Y adalah matriks 3×3 , maka $\det(XY) = \det(X) \det(Y)$

(Bukti sebagai latihan soal)

Contoh:

Diberikan matriks $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ dan $S = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan hasil dari $\det(AB)$!

Jawab:

Berdasarkan pada **Teorema 6.5**, kita tidak perlu melakukan banyak perhitungan untuk mencari nilai dari $\det(RS)$. Kita hanya perlu mengalikan $\det(R)$ dengan $\det(S)$.

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \right) = 165 \quad \text{Contoh pada subbab 6.3}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \right) = 18 \quad \text{Contoh pada subbab 6.3}$$

$$\text{Jadi } \det(RS) = \det(R) \det(S) = 165 \cdot 18 = 2970$$

Teorema 6.6

Jika X adalah matriks 3×3 dan k adalah konstanta, maka $\det(kX) = k^3 \det(X)$

Bukti:

Misalkan $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ dan k adalah sebuah

konstanta, maka $kX = \begin{bmatrix} kx_{11} & kx_{12} & kx_{13} \\ kx_{21} & kx_{22} & kx_{23} \\ kx_{31} & kx_{32} & kx_{33} \end{bmatrix}$. Dengan

menggunakan metode Sarrus, maka didapatkan

$$\begin{aligned} \det(kX) &= k^3 x_{11} x_{22} x_{33} + k^3 x_{12} x_{23} x_{31} \\ &+ k^3 x_{13} x_{21} x_{32} - k^3 x_{13} x_{22} x_{31} - k^3 x_{12} x_{21} x_{33} - k^3 x_{11} x_{23} x_{32} \\ &= k^3 (x_{11} x_{22} x_{33} + x_{12} x_{23} x_{31} \\ &+ x_{13} x_{21} x_{32} - x_{13} x_{22} x_{31} - x_{12} x_{21} x_{33} - kx_{11} x_{23} x_{32}) \\ &= k^3 \det(X) \end{aligned}$$

Contoh :

Diberikan matriks $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan

$\det(2R)$!

Jawab:

Berdasarkan **teorema 6.6**, maka kita dengan mudah menemukan $\det(2R)$ tanpa harus mengalikan 2 dengan R . Sehingga diperoleh:

$$\det(2R) = 2^3 \det(R) = 8 \cdot 165 = 1320$$

Teorema 6.7

Sebuah matriks 3×3 X memiliki invers (dapat dibalik) jika dan hanya jika $\det(X) \neq 0$

Bukti sebagai bahan latihan!

6.5 Latihan-Latihan Soal

1. Carilah determinan dari masing-masing matriks berikut!

a. $V = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

b. $W = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 22 & 0 & 41 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$

d. $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

2. Jika $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix} = 5$. Maka tentukan nilai dari

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d - 3a & e - 3b & f - 3c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}!$$

3. Diberikan matriks persegi 3×3 T . Buktikan beberapa pernyataan berikut.
 - a. Jika matriks tersebut mempunyai entri-entri bilangan bulat yang berurutan, maka $\det(T) = 0$.
 - b. Jika matriks tersebut mempunyai entri-entri yang sama, maka $\det(T) = 0$
 - c. Jika terdapat matriks 3×3 U , maka berlaku $\det(TU) = \det(T) \det(U)$.

- d. Matriks T mempunyai invers jika dan hanya jika $\det(T) \neq 0$.
4. Tentukan nilai t sedemikian sehingga matriks $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ t & 3 & 2 \end{bmatrix}$ tidak mempunyai invers!

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra: Application Version* (11 ed.). New Jersey: Wiley.

BAB 7

DETERMINAN MATRIKS N X N

Oleh Evi Sunarti Antu

7.1 Definisi dan Notasi Determinan

7.1.1 Pengertian Determinan

Determinan adalah suatu nilai skalar yang dapat dihitung dari sebuah matriks persegi (matriks berordo $n \times n$). Determinan memberikan informasi penting tentang sifat-sifat matriks, seperti:

- Apakah matriks *invertibel* (memiliki invers) atau tidak.
- Seberapa besar perubahan luas atau volume yang dihasilkan dari transformasi linear oleh matriks tersebut.
- Dalam bidang Teknik Elektro, determinan digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linear (misalnya dalam analisis rangkaian) dan studi kestabilan sistem dinamis.

7.1.2 Notasi Determinan

Determinan dari suatu matriks A biasanya ditulis dengan:

■ $\det(A)$

■ $|A|$

Jika : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Maka : $\det(A) = ad - bc$

Contoh: Perhitungan Determinan

a. Matriks 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (3.4) - (5.2) = 12 - 10 = \mathbf{2}$$

b. Matriks 3 x 3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gunakan ekspansi kofaktor baris pertama:

$$\det(B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Hitung Minor-minornya =

$$\blacksquare \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1 \times 0) - (4 \times 1) = -4$$

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (0 \times 0) - (4 \times 2) = -8$$

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (0 \times 1) - (-1 \times 2) = 2$$

Lanjut :

$$\det(B) = 1(-4) - 2(-8) + 3(2) = -4 + 16 + 6 = \mathbf{18}$$

7.1.3 Interpretasi Geometris Determinan

- a. Untuk matriks 2×2 , determinan menunjukkan *luas paralelogram* (bangun datar 2D) yang dibentuk oleh dua vektor.
- b. Untuk matriks 3×3 , determinan menunjukkan *volume paralelepiped* (bangun ruang 3D) yang dibentuk oleh tiga vektor.

Contoh: Aplikasi di Teknik Elektro

Dalam analisis rangkaian linear (misalnya menggunakan *metode mesh* atau *node voltage*), sistem persamaan yang dihasilkan bisa dituliskan dalam bentuk matriks. Determinan digunakan untuk:

- a. Menentukan apakah sistem memiliki solusi unik.
- b. Menyelesaikan sistem dengan aturan *Cramer*.
- c. Mengetahui kestabilan sistem dinamis melalui matriks karakteristik.

Latihan Soal**Soal 1:**

Hitunglah determinan dari matriks:

$$C = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Pembahasan :

Gunakan rumus matriks 2×2 :

$$\det(C) = (4)(3) - (1)(-2) = 12 + 2 = \mathbf{14}$$

Soal 2:

Diketahui:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Hitunglah determinan $\det(D)$ dengan ekspansi kofaktor baris pertama.

Pembahasan :

$$\det(D) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Hitung minornya :

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(0) - (-1)(2) = 2$$

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 1(1) = 6 - 1 = 5$$

$$\det(D) = 2(2) + 1(5) = 4 + 5 = \mathbf{9}$$

7.2 Metode Perhitungan Determinan

7.2.1 Metode Perhitungan Determinan

Untuk matriks berordo $n \times n$, terdapat beberapa metode yang umum digunakan untuk menghitung determinan:

a. Metode Ekspansi Kofaktor (*Laplace Expansion*)

Metode ini melibatkan:

- Memilih baris atau kolom tertentu (biasanya yang mengandung nol terbanyak untuk efisiensi).
- Menghitung minor dan kofaktor untuk tiap elemen.
- Menjumlahkan hasil dari setiap elemen dikalikan dengan kofaktornya.

Rumus umum untuk determinan 3×3 :

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

dimana :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \text{Minor}_{ij}$$

b. Metode Sarrus (*Khusus matriks 3×3*)

Langkah-langkah:

1. Salin dua kolom pertama ke sebelah kanan matriks.
2. Hitung hasil kali diagonal utama dan kurangi hasil kali diagonal minor.

Contoh:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Maka : $\det(A)$ “

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = aei + bfg + sdh - ceg - bdi - afh$$

c. Metode Eliminasi Baris (*Gauss Elimination*)

Mengubah matriks ke bentuk segitiga atas (*upper triangular*), lalu determinannya adalah:

$$\det(A) = (\text{perkalian elemen diagonal utama}) \times (-1)^k$$

dimana k adalah jumlah pertukaran baris..

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh Soal 1: Ekspansi Kofaktor

Hitunglah determinan matriks berikut menggunakan ekspansi kofaktor:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Pembahasan:

Gunakan ekspansi kofaktor pada baris pertama:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Hitung minor :

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (4)(3) = -12$$

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (0)(0) - (4)(2) = -8$$

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (0)(3) - (1)(2) = -2$$

Maka :

$$\det(A) = 1(-12) - 2(-8) + 3(-2) = -12 + 16 - 6 = -2$$

Contoh Soal 2: Metode Sarrus

Hitunglah determinan matriks:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Pembahasan:

Tulis ulang dua kolom pertama:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Hitung diagonal dari kiri atas ke kanan bawah:

$$\blacksquare 2 \cdot (-1) \cdot 0 = 0$$

$$\blacksquare 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4$$

$$\blacksquare 3 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

$$\text{Jumlah } 0 + 4 + 0 = 4$$

Hitung diagonal dari kanan atas ke kiri bawah:

$$\blacksquare 3 \cdot (-1) \cdot 1 = -3$$

$$\blacksquare 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$$

$$\blacksquare 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Jumlah } -3 + 16 + 0 = 13$$

Maka :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \text{Jumlah diagonal Utam} - \text{Jumlah diagonal bali} \\ &= 4 - 13 = -9 \end{aligned}$$

7.3 Sifat-sifat Determinan

7.3.1 Tujuan Memahami Sifat Determinan

Memahami sifat-sifat determinan sangat penting untuk:

- Mempercepat proses perhitungan.
- Menyederhanakan operasi-operasi pada matriks.
- Menentukan apakah matriks memiliki invers atau tidak (dalam konteks sistem linier dan transformasi sistem pada Teknik Elektro).

7.3.2 Sifat-sifat Penting Determinan

Berikut beberapa sifat penting dari determinan matriks persegi:

Sifat 1: Determinan identitas

$$\det(I_n) = 1$$

Matriks identitas (semua elemen diagonal = 1 dan lainnya 0) selalu memiliki determinan 1.

Sifat 2: Jika satu baris atau kolom semuanya nol

Maka:

$$\det(A) = 0$$

Sifat 3: Jika dua baris atau dua kolom identik

Maka:

$$\det(A) = 0$$

Sifat 4: Jika suatu baris/kolom dikalikan konstanta k

Maka determinan ikut dikalikan dengan k:

$$\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$$

untuk matriks berordo $n \times n$

Sifat 5: Pertukaran dua baris atau kolom

Jika kita menukar dua baris atau kolom:

$$\det(A) \rightarrow -\det(A)$$

Sifat 6: Matriks segitiga (atas, bawah, atau diagonal)

Determinan dari matriks segitiga adalah:

$$\det(A) = \text{perkalian semua elemen diagonal}$$

Sifat 7: Determinan hasil transpose

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Sifat 8: Determinan hasil perkalian dua matriks

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Sifat 9: Determinan matriks invers

Jika A invertibel:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Contoh Soal dan Pembahasan**Contoh Soal 1: Baris identik**

Diberikan:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Hitung determinan matriks A.

Pembahasan:

Baris pertama dan kedua **identik**, maka:

$$\det(A) = 0$$

Contoh Soal 2: Pertukaran baris

Misalkan:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \det(A) = (1)(3) - (0)(2) = 3$$

Tukar baris 1 dan 2:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \det(B) = (2)(0) - (3)(1) = -3$$

Jadi:

$$\det(A) \rightarrow -\det(B)$$

Contoh Soal 3: Matriks segitiga

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Karena ini matriks segitiga atas, maka:

$$\det(A) = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$

Contoh Soal 4: Determinan hasil perkalian

Diberikan:

$$\det(A) = 5, \quad \det(B) = -2$$

Maka:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 5 \cdot (-2) = -10$$

7.4 Aplikasi Determinan dalam Sistem Persamaan Linier (*Cramer's Rule*)

7.4.1 Pengantar

Dalam bidang Teknik Elektro, sistem persamaan linier sering muncul dalam analisis rangkaian listrik (misalnya, hukum Kirchoff), kontrol sistem, dan

pemodelan sinyal. Salah satu metode penyelesaian sistem persamaan linier adalah dengan menggunakan Aturan Cramer, yang berbasis pada determinan.

7.4.2 Aturan Cramer

Aturan Cramer menyatakan bahwa untuk sistem persamaan linier:

$$AX = B$$

Dengan :

- A adalah matriks koefisien berukuran $n \times n$
- X adalah vektor variabel ($x_1, x_2, \dots, x_n$)
- B adalah vektor konstanta

Jika $\det(A) \neq 0$, maka sistem memiliki solusi unik dan setiap variabel x_i dapat dihitung dengan :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

di mana:

A_i adalah matriks A yang kolom ke-i diganti dengan vektor B

7.4.3 Langkah-langkah Aturan Cramer

1. Tentukan determinan $\det(A)$
2. Gantilah kolom ke-i dari A dengan vektor B untuk mendapatkan A_i .
3. Hitung $\det(A_i)$
4. Gunakan rumus:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Contoh Soal dan Pembahasan**Contoh Soal 1: Sistem 2×2**

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan aturan Cramer:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

Pembahasan:

Langkah 1: Matriks Koefisien dan Vektor Konstanta

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 5 \\ 6 \end{vmatrix}$$

Langkah 2 : hitung $\det(A)$

$$\det(A) = (2)(-1) - (3)(4) = -2 - 12 = -14$$

Langkah 3 : Buat A_1 dan A_2

- A_1 : Ganti kolom ke-1 dengan B

$$A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \det(A_1) = (5)(-1) - (3)(6) \\ = -5 - 18 = -23$$

- A_2 Ganti kolom ke-2 dengan B

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow \det(A_2) = (2)(6) - (4)(5) = 12 - 20 \\ = -8$$

Langkah 4 : Hitung x dan y

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-23}{-14} = \frac{23}{14}$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-8}{-14} = \frac{4}{7}$$

Contoh Soal 2: Sistem 3×3

Selesaikan sistem:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

Pembahasan:

Langkah 1: Matriks Koefisien dan Vektor Konstanta

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 6 \\ 14 \\ 10 \end{vmatrix}$$

Langkah 2: Hitung $\det(A)$

Gunakan ekspansi baris pertama:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Minor :

- $(-1)(1) - (3)(2) = -1 - 6 = -7$
- $(2)(1) - (3)(1) = 2 - 3 = -1$
- $(2)(2) - (-1)(1) = 4 + 1 = 5$

$$\det(A) = 1(-7) - 1(-1) + 1(5) = -7 + 1 + 5 = -1$$

Langkah 3 : Hitung A_1, A_2, A_3 dan determinannya

$$\blacksquare A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \det(A_1) = -4$$

$$\blacksquare A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 14 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \det(A_2) = 5$$

$$\blacksquare A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 14 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} \rightarrow \det(A_3) = -4$$

Langkah 4 : Solusi

$$x = \frac{-4}{-1} = 4, \quad y = \frac{5}{-1} = -5, \quad z = \frac{-4}{-1} = 4$$

7.5 Aplikasi Determinan dalam Transformasi Linear dan Geometri

7.5.1 Pengantar

Determinan bukan hanya alat untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Dalam geometri dan transformasi linear, determinan juga memiliki makna geometris yang dalam, yaitu:

- Menentukan **luas** atau **volume** dari bangun hasil transformasi linear.
- Menunjukkan apakah suatu transformasi **membalik orientasi** ruang atau tidak (positif/negatif).
- Menggambarkan **skala perubahan** ukuran suatu objek setelah transformasi.

7.5.2 Makna Geometris Determinan

a. Luas Paralelogram (2D)

Jika dua vektor di $\mathbb{R}^2$, yaitu :

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix}$$

Dibentuk menjadi matriks :

$$A = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

maka, luas paralelogram yang dibentuk oleh $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah :
 $luas = |\det(A)|$

b. Volume Paralelopiped (3D)

jika vektor di R^3 :

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$$

Dibentuk menjadi matriks 3×3 (masing-masing kolom vektor), maka :

$$Volume = |\det(A)|$$

Dimana A adalah matriks dengan kolom $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

c. Efek Transformasi Linier

Untuk transformasi linier $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, determinan $\det(A)$ menunjukkan :

- $|\det(A)| > 1$: *membesar*
- $0 < |\det(A)| < 1$: *mengecil*
- $\det(A) < 0$: *membalik orientasi*

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh Soal 1: Luas Paralelogram di 2D

Diberikan dua vektor:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

Tentukan luas paralelogram yang dibentuk.

Pembahasan:

Bentuk matriks:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Hitung determinan:

$$\det(A) = (2)(4) - (1)(3) = 8 - 3 = 5$$

Maka:

$$Luas = |\det(A)| = 5$$

Contoh Soal 2: Volume Paralelopiped di 3D

Tiga vektor:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Hitung volume paralelopiped.

Pembahasan:

Bentuk matriks A:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Gunakan ekspansi baris pertama:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Hitung minor:

$$\blacksquare (3)(0) - (1)(1) = -1$$

$$\blacksquare (0)(1) - (3)(2) = -6$$

Maka :

$$\det(A) = 1(-1) + 0 + 4(-6) = -1 - 24 = -25$$

Volume :

$$|\det(A)| = 25$$

Contoh Soal 3: Efek Transformasi

Misalkan matriks transformasi:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Tentukan jenis transformasi.

Pembahasan : $\det(A) = (0)(0) - (-1)(1) = 1 \rightarrow$ skala tidak berubah, tetapi orientasi berubah (rotasi 90°).

Jadi, ini adalah rotasi 90° searah jarum jam, tanpa perubahan ukuran.

DAFTAR PUSTAKA

- A. Kurniawan, *Aljabar Linear dan Matriks untuk Teknik Elektro*, Andi Publisher, 2020.
- D. C. Lay, S. R. Lay, and J. J. McDonald, *Linear Algebra and Its Applications*, 5th ed., Pearson, 2015.
- G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 5th ed., Wellesley-Cambridge Press, 2016.
- H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, 11th ed., John Wiley & Sons, 2013.
- K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1971.
- R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2013.
- S. Lipschutz and M. Lipson, *Schaum's Outline of Linear Algebra*, 5th ed., McGraw-Hill Education, 2017.
- W. Wangsaputra, *Aljabar Linier Terapan untuk Mahasiswa Teknik*, Penerbit Erlangga, 2019.

BAB 8

PERHITUNGAN INVERS MATRIKS $N \times N$ DENGAN METODE ADJOINT DAN ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Oleh Nining Puji Lestari

8.1 Pendahuluan

Dalam dunia aljabar linear, matriks merupakan salah satu konsep fundamental yang memiliki banyak penerapan dalam berbagai bidang, seperti teknik, ekonomi, komputer, dan ilmu data. Salahsatu operasi penting yang sering dilakukan terhadap matriks adalah pencairan invers. Matriks invers berperan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, transformasi linear, hingga pemrograman komputer. Tidak semua matriks memiliki invers; hanya matriks persegi (berordo $N \times N$) yang tidak singular (determinan tidak nol) yang memenuhi syarat untuk dihitung inversnya.

Untuk menentukan invers suatu matriks, terdapat beberapa metode yang umum digunakan, di antaranya adalah metode **Adjoint** dan metode **Eliminasi Gauss-Jordan**. Metode Adjoint melibatkan proses perhitungan determinan, kofaktor, dan adjoint dari sebuah matriks untuk kemudian menghasilkan inversnya. Sementara itu, metode Gauss-Jordan menggunakan operasi baris elementer terhadap matriks yang telah digabungkan dengan matriks identitas, untuk

mendapatkan bentuk yang memungkinkan pembacaan invers secara langsung. Masing-masing metode memiliki kelebihan dan tantangan tersendiri dalam hal proses dan efisiensi.

Pemahaman tentang metode perhitungan invers matriks tidak hanya penting dari sisi teoretis, tetapi juga berguna dalam membangun kemampuan analisis dan berpikir logis mahasiswa dalam menyelesaikan masalah matematis yang kompleks. Dengan menguasai kedua metode ini, mahasiswa dapat memilih pendekatan yang paling sesuai berdasarkan kondisi matriks yang diberikan. Oleh karena itu, dalam materi ini akan dibahas secara sistematis langkah-langkah perhitungan invers matriks $N \times N$ menggunakan metode Adjoint dan Gauss-Jordan, disertai contoh soal, latihan, serta analisis perbandingan kedua metode.

8.1.1 Pengertian Matriks Invers

Matriks invers adalah suatu matriks yang apabila dikalikan dengan matriks asalnya (dalam urutan tertentu), akan menghasilkan matriks identitas. Secara matematis, jika A adalah sebuah matriks persegi berordo n , maka matriks A^{-1} disebut sebagai invers dari A jika memenuhi syarat:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

di mana I_n adalah matriks identitas berordo n , yaitu matriks dengan elemen diagonal utama bernilai 1 dan elemen lainnya 0. Matriks identitas berperan seperti bilangan 1 dalam operasi perkalian bilangan real.

Tidak semua matriks memiliki invers. Sebuah matriks memiliki invers jika memenuhi dua syarat utama: (1) matriks tersebut berbentuk persegi (jumlah baris dan kolom sama); dan (2) memiliki determinan

yang tidak sama dengan nol ($\det(A) \neq 0$). Jika suatu matriks tidak memiliki invers, maka matriks tersebut disebut sebagai **matriks singular**. Invers matriks sangat penting dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, terutama yang dapat dituliskan dalam bentuk matriks seperti $AX = B$, di mana solusi dari X dapat diperoleh dengan mengalikan $A^{-1} \cdot B$, asalkan A memiliki invers.

Invers matriks juga memiliki sifat-sifat khusus yang sejalan dengan operasi matriks lainnya. Misalnya, jika dua matriks A dan B keduanya **invertible** (memiliki invers), maka hasil perkalian keduanya juga **invertibel** dan memenuhi sifat:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Perlu diperhatikan bahwa urutan dalam perkalian matriks sangat penting, karena perkalian matriks pada umumnya tidak komutatif. Selain itu, invers dari transpos suatu matriks juga memiliki hubungan khusus, yaitu:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Sifat-sifat ini berguna dalam manipulasi aljabar linear, terutama saat menyederhanakan ekspresi atau menyusun solusi dalam bentuk yang lebih efisien. Dalam praktiknya, invers matriks tidak hanya digunakan dalam penyelesaian sistem linear, tetapi juga banyak diaplikasikan dalam bidang seperti kriptografi (untuk menyandikan dan memecahkan pesan), grafik komputer (transformasi objek), dan pembelajaran mesin (dalam perhitungan parameter model regresi linier). Memahami konsep dasar dari invers matriks tidak hanya penting sebagai bekal teori, tetapi juga membuka wawasan terhadap bagaimana struktur aljabar dapat digunakan

untuk menyelesaikan berbagai permasalahan nyata yang kompleks. Oleh karena itu, dalam materi selanjutnya akan dibahas dua metode yang sering digunakan untuk menghitung invers matriks secara sistematis dan akurat, yaitu metode Adjoint dan metode Eliminasi Gauss-Jordan.

8.1.2 Syarat Suatu Matriks Memiliki Invers

Tidak semua matriks dapat dihitung inversnya. Agar suatu matriks memiliki invers (disebut juga ***invertible*** atau ***nonsingular***), maka harus memenuhi beberapa syarat penting yang bersifat mutlak dalam aljabar linear. Tanpa memenuhi syarat ini, upaya mencari invers akan sia-sia karena hasilnya tidak akan pernah ada secara matematis.

Syarat pertama adalah **matriks harus berbentuk persegi**, artinya jumlah baris dan jumlah kolom harus sama. Matriks berbentuk persegi disebut sebagai matriks berordo $n \times n$. Ini penting karena hanya matriks persegi yang memungkinkan pembentukan matriks identitas I_n , yang merupakan syarat dari definisi invers itu sendiri.

Syarat kedua adalah **determinan dari matriks tersebut tidak boleh sama dengan nol**, atau ditulis $\det(A) \neq 0$. Jika determinan suatu matriks sama dengan nol, maka matriks tersebut bersifat ***singular*** dan tidak memiliki invers. Hal ini karena determinan mencerminkan apakah baris-baris atau kolom-kolom pada matriks saling independen. Jika $\det(A) = 0$, maka paling tidak satu baris atau kolom dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari baris atau kolom lain, yang artinya informasi dalam matriks tersebut “terduplikasi” dan tidak cukup unik untuk dapat dibalik.

Selain dua syarat utama tersebut, dalam konteks komputasi atau penerapan numerik, kita juga memperhatikan **kondisi numerik** dari matriks. Beberapa matriks mungkin secara teori memiliki invers, tetapi sangat tidak stabil untuk dihitung secara numerik karena nilainya sangat dekat dengan nol (kondisi hampir singular). Dalam kasus seperti ini, penggunaan metode numerik seperti regularisasi atau pendekatan invers lebih disarankan.

Dengan memastikan syarat-syarat ini terpenuhi, barulah proses perhitungan invers dapat dilakukan dengan metode tertentu, seperti metode Adjoint atau Gauss-Jordan, yang akan dibahas pada bagian selanjutnya.

8.1.3 Aplikasi Matriks Invers dalam Kehidupan Nyata dan Matematika

Matriks invers bukan hanya konsep abstrak dalam matematika, tetapi memiliki banyak aplikasi penting dalam berbagai bidang kehidupan nyata. Dalam bidang **matematika**, khususnya aljabar linear, matriks invers digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Misalnya, jika suatu sistem dapat direpresentasikan dalam bentuk $AX = B$, maka solusi dari sistem tersebut dapat diperoleh dengan mengalikan kedua sisi dengan invers dari matriks A , sehingga diperoleh $X = A^{-1}B$. Pendekatan ini sangat efisien untuk sistem yang melibatkan banyak persamaan dan variabel.

Dalam bidang **teknik dan ilmu komputer**, matriks invers digunakan dalam pemrosesan sinyal, pengolahan citra, dan pemodelan sistem. Contohnya, dalam dunia grafika komputer, invers matriks digunakan untuk

melakukan transformasi balik, seperti mengembalikan posisi objek 3D ke keadaan semula setelah dilakukan rotasi, translasi, atau penskalaan. Demikian pula dalam rekayasa kontrol (control engineering), invers matriks digunakan dalam desain sistem kontrol linier untuk mencari parameter yang membuat sistem stabil dan dapat diatur.

Salah satu aplikasi menarik lainnya adalah dalam bidang **kriptografi**, khususnya dalam kriptografi kunci simetris berbasis matriks Hill Cipher. Dalam metode ini, pesan dienkripsi dengan mengalikan matriks kunci dengan vektor pesan. Untuk mendekripsi pesan, digunakan invers dari matriks kunci. Tanpa invers tersebut, pesan tidak bisa dikembalikan ke bentuk semula. Selain itu, di dunia **ekonomi dan statistik**, invers matriks sering digunakan dalam metode regresi linier berganda untuk menghitung koefisien regresi secara analitik, serta dalam model input-output ekonomi untuk menganalisis keterkaitan antar sektor.

Dengan begitu banyak aplikasi praktis, pemahaman yang kuat terhadap konsep dan cara menghitung invers matriks sangat penting, tidak hanya untuk kepentingan akademik, tetapi juga sebagai bekal dalam menghadapi persoalan dunia nyata yang kompleks dan saling terkait.

8.2 Invers Matriks dengan Metode *Adjoint*

8.2.1 Pengertian *Adjoint* (*Adjoin/Adjugate*) Matriks

Adjoint matriks (yang juga dikenal sebagai *adjugate* atau kadang disebut *adjoin*) adalah sebuah matriks yang dibentuk dari kofaktor-kofaktor suatu matriks, yang kemudian disusun dan ditransposisikan. Adjoint ini memiliki peran penting dalam proses perhitungan invers suatu matriks dengan metode Adjoint. Secara umum, invers dari suatu matriks A dapat dihitung menggunakan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

dengan syarat $\det(A) \neq 0$, dan $\text{adj}(A)$ adalah matriks Adjoint dari A .

Untuk membentuk matriks Adjoint dari sebuah matriks A , langkah pertama adalah menghitung **kofaktor** dari setiap elemen dalam matriks. Kofaktor dari elemen a_{ij} adalah hasil kali antara determinan dari minor M_{ij} dan tanda $(-1)^{i+j}$. Setelah seluruh kofaktor dihitung, disusunlah matriks kofaktor. Kemudian, **transpose** dari matriks kofaktor inilah yang disebut sebagai **Adjoint** dari matriks A .

Sebagai contoh, jika diberikan matriks A berordo 3×3 , maka kita akan menghitung total 9 kofaktor untuk setiap elemen dalam matriks tersebut. Setelah itu, disusun menjadi matriks kofaktor berukuran 3×3 , lalu ditransposisikan (baris menjadi kolom dan sebaliknya) untuk memperoleh matriks Adjoint. Adjoint sangat berguna tidak hanya dalam mencari invers, tetapi juga

dalam ekspansi determinan dan teori matriks secara umum.

Konsep Adjoint sering kali menjadi jembatan antara teori determinan dan proses perhitungan invers secara eksplisit. Dengan memahami bagaimana kofaktor dan transpose bekerja dalam membentuk Adjoint, kita dapat menghitung invers matriks secara manual tanpa bergantung pada teknologi seperti kalkulator atau software. Hal ini sangat bermanfaat terutama dalam pembelajaran dasar-dasar aljabar linear.

Meskipun metode Adjoint cukup sistematis dan mudah dipahami secara konseptual, proses perhitungannya bisa menjadi cukup panjang dan rentan terhadap kesalahan hitung, terutama untuk matriks berordo besar (misalnya 4×4 atau lebih). Setiap elemen dari matriks Adjoint memerlukan perhitungan determinan minor, yang berarti semakin besar ukuran matriks, semakin besar pula jumlah operasi yang dibutuhkan. Oleh karena itu, metode ini lebih cocok digunakan untuk matriks dengan ordo kecil atau sedang, misalnya 2×2 dan 3×3 .

Namun demikian, Adjoint tetap menjadi metode penting yang diajarkan dalam pendidikan matematika karena memberikan pemahaman yang kuat mengenai struktur internal sebuah matriks. Proses penyusunan kofaktor dan penggunaan transpose tidak hanya menunjukkan hubungan antar elemen dalam matriks, tetapi juga mengajarkan tentang keteraturan dan logika dalam sistem matematis. Dalam praktiknya, pemahaman konsep Adjoint akan membantu siswa atau mahasiswa dalam memahami metode lain yang lebih efisien, seperti

Gauss-Jordan, serta membentuk dasar berpikir analitis dalam menyelesaikan persoalan numerik yang lebih kompleks.

8.2.2 Langkah-Langkah Perhitungan Invers dengan Metode *Adjoint*

Untuk menghitung invers suatu matriks persegi A menggunakan metode *Adjoint*, terdapat beberapa langkah sistematis yang harus dilakukan. Langkah-langkah ini melibatkan perhitungan determinan, penyusunan kofaktor, dan akhirnya pembentukan matriks *Adjoint* yang digunakan untuk memperoleh invers dari matriks tersebut. Berikut ini adalah tahapan lengkapnya:

1. Hitung Determinan Matriks A

Langkah pertama adalah menghitung determinan dari matriks A . Jika $\det(A) = 0$, maka matriks tersebut tidak memiliki invers, sehingga proses harus dihentikan. Untuk matriks 2×2 , determinan dapat dihitung dengan rumus sederhana. Sedangkan untuk matriks 3×3 atau lebih, perhitungan dilakukan dengan ekspansi kofaktor atau metode lainnya.

2. Tentukan Minor dan Kofaktor untuk Setiap Elemen

Minor dari elemen a_{ij} adalah determinan dari submatriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks A . Selanjutnya, kofaktor dihitung dengan rumus:

$$\text{Kofaktor}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$$

di mana M_{ij} adalah minor dari elemen a_{ij} .

3. Susun Matriks Kofaktor

Setelah semua kofaktor elemen dihitung, susunlah mereka menjadi sebuah matriks baru yang disebut **matriks kofaktor**. Matriks ini memiliki ordo yang sama dengan matriks asal A .

4. Transpos Matriks Kofaktor untuk Membentuk *Adjoint*

Lakukan transpose terhadap matriks kofaktor, yaitu tukar posisi baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Matriks hasil dari transpose inilah yang disebut sebagai ***Adjoint*** atau ***Adjugate*** dari matriks A , ditulis $adj(A)$.

5. Hitung Matriks Invers dengan Rumus

Setelah diperoleh *Adjoint* dan determinan, hitung invers dari matriks A menggunakan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$$

Kalikan setiap elemen dari matriks *Adjoint* dengan $\frac{1}{\det(A)}$ untuk memperoleh matriks invers A^{-1} .

8.2.3 Contoh Soal dan Penyelesaian

Diberikan matriks persegi 3×3 sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 1 : Hitung Determinan Matriks A

Gunakan ekspansi kofaktor baris pertama :

$$\begin{aligned}\det(A) &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (0 \cdot (-1) - 4 \cdot 2) - 3 \cdot (1 \cdot (-1) - 4 \cdot 5) + 1 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 5) \\ &= 49\end{aligned}$$

Langkah 2 : Hitung Kofaktor dari setiap elemen

Untuk membuatnya ringkas, berikut adalah hasil minor dan kofaktor langsung :

Matriks Kofaktor

$$= \begin{bmatrix} (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Hitung satu per satu :

$$C_{11} = (0)(-1) - (4)(2) = -8$$

$$C_{12} = -((1)(-1) - (4)(5)) = 21$$

$$C_{13} = (1)(2) - (0)(5) = 2$$

$$C_{21} = -((3)(-1) - (1)(2)) = 5$$

$$C_{22} = (2)(-1) - (5)(1) = -7$$

$$C_{23} = -((2)(2) - (5)(3)) = 11$$

$$C_{31} = (3)(4) - (1)(0) = 12$$

$$C_{32} = -((2)(4) - (1)(1)) = -7$$

$$C_{33} = (2)(0) - (3)(1) = -3$$

Maka, Matriks Kofaktor yang diperoleh yaitu :

$$\begin{bmatrix} -8 & 21 & 2 \\ 5 & -7 & 11 \\ 12 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

Langkah 3 : Transpos Matriks Kofaktor $\rightarrow$ Matriks Adjoint

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 12 \\ 21 & -7 & -7 \\ 2 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

Langkah 4 : Hitung Invers

Gunakan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{49} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 5 & 12 \\ 21 & -7 & -7 \\ 2 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

Hasil Akhir : Matriks Invers A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{49} & \frac{5}{49} & \frac{12}{49} \\ \frac{21}{49} & -\frac{7}{49} & -\frac{7}{49} \\ \frac{2}{49} & \frac{11}{49} & -\frac{3}{49} \end{bmatrix}$$

8.2.4 Kelebihan dan Kekurangan Metode *Adjoint*

Metode *Adjoint* adalah salah satu cara klasik dan sistematis dalam menghitung invers suatu matriks. Metode ini banyak diajarkan dalam pembelajaran aljabar linear karena memberikan pemahaman mendalam

tentang struktur internal matriks, terutama konsep determinan, minor, dan kofaktor. Namun, metode *Adjoint* memiliki kelebihan dan kekurangan yang perlu dipahami agar penggunaannya dapat tepat sasaran.

Kelebihan Metode Adjoint

1. Memberikan Pemahaman Konseptual yang Mendalam

Dengan menggunakan metode ini, siswa atau mahasiswa dapat memahami bagaimana kofaktor dan determinan berperan dalam membentuk invers. Hal ini sangat membantu dalam membangun logika berpikir matematis secara menyeluruh.

2. Cocok untuk Matriks Berukuran Kecil

Metode ini cukup efisien untuk matriks dengan ordo kecil, seperti 2×2 atau 3×3 . Perhitungannya masih bisa dilakukan secara manual dengan mudah tanpa bantuan teknologi.

3. Metode yang Terstruktur dan Sistematis

Langkah-langkah dalam metode Adjoint sangat jelas: mulai dari menghitung determinan, menyusun kofaktor, transpose, hingga mengalikan dengan $\frac{1}{\det(A)}$. Hal ini membuatnya mudah dipelajari dan diajarkan.

4. Tidak Bergantung pada Metode Eliminasi

Berbeda dengan metode Gauss-Jordan yang memerlukan manipulasi baris, metode Adjoint hanya melibatkan perhitungan determinan dan

transpose, sehingga lebih "statik" dan cocok untuk keperluan teoretis.

Kekurangan Metode *Adjoint*

1. Kurang Efisien untuk Matriks Berordo Besar

Saat matriks berukuran besar (misalnya 4×4 ke atas), perhitungan minor dan kofaktor menjadi sangat banyak dan rumit. Ini membuat metode *Adjoint* tidak praktis untuk komputasi skala besar.

2. Rentan terhadap Kesalahan Hitung Manual

Karena banyaknya langkah dan perhitungan determinan minor, kesalahan kecil seperti salah tanda atau salah hitung bisa mengakibatkan hasil invers yang keliru secara keseluruhan.

3. Bergantung pada Nilai Determinan

Jika determinan mendekati nol, meskipun matriks secara teori memiliki invers, pembagian dengan nilai kecil dapat menghasilkan kesalahan besar dalam komputasi numerik.

4. Tidak Ideal untuk Penggunaan Komputasi

Dalam praktik komputasi modern (seperti dalam pemrograman atau software numerik), metode ini hampir tidak pernah digunakan karena kurang efisien dibandingkan metode lain seperti Gauss-Jordan.

8.3 Invers Matriks dengan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

8.3.1 Konsep Dasar Eliminasi Gauss-Jordan

Metode **Eliminasi Gauss-Jordan** merupakan salah satu metode yang sering digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dan mencari invers matriks. Metode ini merupakan pengembangan dari metode **Eliminasi Gauss**, dengan penambahan proses reduksi lebih lanjut hingga terbentuk matriks identitas. Tujuan utama dari metode ini adalah mengubah suatu matriks menjadi **matriks identitas** melalui operasi baris elementer, sekaligus melakukan transformasi yang sama pada matriks identitas untuk memperoleh inversnya.

Dalam konteks mencari invers suatu matriks A berordo $n \times n$, metode Gauss-Jordan dilakukan dengan menyusun **matriks augmented** (gabungan) berupa:

$$[A|I]$$

di mana A adalah matriks asli dan I adalah matriks identitas yang memiliki ordo yang sama. Selanjutnya, dilakukan operasi baris elementer untuk mengubah sisi kiri (matriks A) menjadi matriks identitas. Jika proses berhasil, maka sisi kanan dari matriks tersebut akan berubah menjadi invers dari matriks A .

Tiga jenis **operasi baris elementer** yang diizinkan dalam metode ini adalah:

1. Menukar dua baris (swap).
2. Mengalikan satu baris dengan konstanta tak nol.

3. Menambahkan (atau mengurangi) suatu kelipatan dari satu baris ke baris lain.

Dengan operasi-operasi ini, setiap elemen di luar diagonal utama di-nol-kan, dan elemen diagonal utama dibuat menjadi 1. Proses ini berlanjut hingga matriks diubah seluruhnya menjadi identitas. Sementara itu, transformasi yang sama diterapkan pada matriks identitas, yang akhirnya menjadi invers dari A .

Metode Gauss-Jordan sangat efisien untuk komputasi dan dapat diterapkan pada matriks berukuran besar karena bersifat algoritmik dan lebih cocok diimplementasikan dalam program komputer. Metode ini juga tidak memerlukan perhitungan determinan atau kofaktor, sehingga cenderung lebih cepat dalam praktiknya.

8.3.2 Langkah-Langkah Perhitungan Invers dengan Gauss-Jordan

Metode **Eliminasi Gauss-Jordan** menawarkan pendekatan yang sistematis dan efisien untuk menghitung invers matriks. Berbeda dengan metode Adjoint yang bergantung pada determinan dan kofaktor, metode ini hanya menggunakan operasi baris elementer untuk mengubah suatu matriks menjadi bentuk identitas. Proses ini dapat diterapkan secara manual maupun menggunakan alat bantu komputasi. Berikut langkah-langkah umum dalam menghitung invers matriks menggunakan metode Gauss-Jordan:

1. **Menyusun Matriks Gabungan (*Augmented Matrix*)**

Gabungkan matriks A dengan matriks identitas I yang memiliki ordo yang sama. Bentuknya adalah:

$$[A|I]$$

Sebagai contoh, untuk matriks A berordo 3×3 , bentuk gabungannya adalah :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

2. Lakukan Operasi Baris Elementer

Gunakan tiga jenis operasi baris berikut untuk mengubah sisi kiri (matriks A) menjadi matriks identitas:

- Menukar dua baris.
- Mengalikan suatu baris dengan bilangan tak nol.
- Menambahkan/mengurangkan kelipatan baris lain ke suatu baris.

Setiap operasi yang dilakukan pada sisi kiri juga harus diterapkan secara **simultan** pada sisi kanan (matriks identitas) dari matriks gabungan.

3. Ubah Matriks AAA Menjadi Matriks Identitas

Lanjutkan operasi baris hingga sisi kiri dari matriks gabungan berubah menjadi matriks identitas. Proses ini disebut **reduksi ke bentuk eselon baris tereduksi (Reduced Row Echelon Form/ RREF)**.

4. Dapatkan Invers Matriks A

Setelah sisi kiri berubah menjadi matriks identitas, maka sisi kanan dari matriks gabungan akan menjadi **invers dari matriks A** . Hasil akhirnya berupa:

$$[I|A^{-1}]$$

8.3.3 Contoh Soal dan Penyelesaian

Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan invers dari matriks A menggunakan metode Eliminasi Gauss-Jordan.

Langkah 1 : Buat Matriks Gabungan $[A|I]$

Gabungkan matriks A dengan matriks identitas I berordo 2 :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Langkah 2 : Ubah Baris Pertama agar Elemen $[1,1] = 1$

Kali baris pertama dengan $\frac{1}{2}$:

$$R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Langkah 3 : Eliminasi Elemen di bawah Pivot (Kolom 1, Baris 2)

Eliminasi elemen 5 di baris kedua :

$$R_2 \leftarrow R_2 - (5 \times R_1) \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right]$$

Langkah 4 : Ubah Elemen [2,2] menjadi 1

Kali baris kedua dengan 2 :

$$R_2 \leftarrow 2R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right]$$

Langkah 5 : Eliminasi Elemen di Atas Pivot (Kolom 2, Baris 1)

$$R_1 \leftarrow R_1 - (\frac{1}{2} \times R_2) \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right] = [I|A^{-1}]$$

Hasil Akhir : Matriks Invers A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks di sisi kanan dari bentuk akhir menunjukkan invers dari matriks A . Hasil ini dapat dicek kebenarannya dengan mengalikan $A \times A^{-1}$, yang seharusnya menghasilkan matriks identitas.

8.4 Perbandingan Metode *Adjoint* dan Gauss-Jordan

8.4.1 Kelebihan dan Kekurangan Masing-masing Metode

Dalam menghitung invers matriks, baik metode *Adjoint* maupun Eliminasi Gauss-Jordan, memiliki kelebihan dan kekurangannya masing-masing. Pemilihan

metode yang digunakan sebaiknya disesuaikan dengan tujuan perhitungan, serta ukuran matriks.

Berikut ini diberikan kelebihan dan kekurangan dari kedua metode tersebut :

1. Metode Adjoint

Kelebihan:

- a. Dapat sekaligus digunakan untuk memperkenalkan konsep penting seperti determinan, minor, dan kofaktor.
- b. Dapat diaplikasikan langsung untuk matriks berordo kecil (misal 2×2 atau 3×3).
- c. Struktur langkahnya sangat sistematis dan mudah diikuti.

Kekurangan:

- a. Tidak efisien untuk matriks berordo besar karena membutuhkan banyak perhitungan determinan dan kofaktor.
- b. Sangat rentan terhadap kesalahan hitung, terutama saat menghitung minor atau tanda kofaktor.
- c. Jika determinan mendekati nol, hasil perhitungan dapat sangat tidak akurat (secara numerik).
- d. Kurang praktis dalam penerapan komputasi karena kompleksitasnya tinggi.

2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Kelebihan:

- a. Efisien dan sangat cocok untuk matriks berukuran besar.
- b. Lebih cepat dan praktis saat diterapkan dalam program komputer atau kalkulator ilmiah.
- c. Tidak membutuhkan perhitungan determinan atau kofaktor.

- d. Dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear sekaligus mencari invers dalam proses yang sama.

Kekurangan:

- a. Prosesnya dapat terlihat rumit karena melibatkan banyak operasi baris elementer.
- b. Dalam kasus tertentu, terutama bila ada pembagi nol atau angka sangat kecil, proses perlu disesuaikan untuk menghindari kesalahan.
- c. Butuh ruang kerja lebih besar karena menggunakan matriks *Augmented* (matriks gabungan).

8.4.2 Kapan Menggunakan Metode *Adjoint* atau Gauss-Jordan

Pemilihan metode dalam menghitung invers matriks sangat bergantung pada **konteks, ukuran matriks**, serta **tujuan penggunaannya**. Baik metode *Adjoint* maupun Gauss-Jordan memiliki tempat dan peran masing-masing dalam dunia matematika, pendidikan, dan aplikasi komputasi. Berikut ini adalah panduan umum untuk menentukan kapan sebaiknya masing-masing metode digunakan:

Gunakan Metode *Adjoint*, jika:

1. **Ukuran Matriks Kecil (2×2 atau 3×3)**
Perhitungan determinan dan kofaktor masih sederhana dan mudah dilakukan secara manual.
2. **Tujuan Pembelajaran Konseptual**
Cocok untuk memahami struktur dasar dari matriks, seperti minor, kofaktor, transpose, dan determinan.
3. **Tidak Diperlukan Efisiensi Waktu Tinggi**
Karena langkah-langkahnya panjang dan banyak, metode ini kurang cocok untuk situasi yang membutuhkan hasil cepat.

4. Ingin Melatih Ketelitian dan Logika Matematika

Prosesnya yang teliti melatih kecermatan serta pemahaman terhadap operasi-operasi dasar aljabar matriks.

Gunakan Metode Gauss-Jordan, jika:

1. Ukuran Matriks Menengah hingga Besar

Metode ini jauh lebih efisien dan cepat dibanding Adjoint untuk matriks 3×3 ke atas.

2. Menggunakan Bantuan Komputasi / Software

Cocok digunakan dalam pemrograman, spreadsheet, atau kalkulator ilmiah karena operasinya berbasis algoritma sederhana.

3. Mencari Solusi Sistem Persamaan Linear Sekaligus Invers

Gauss-Jordan memungkinkan untuk menyelesaikan sistem persamaan dan menemukan invers dalam satu proses melalui matriks augmented.

4. Menghindari Perhitungan Determinan

Metode ini tidak memerlukan determinan sehingga lebih aman dari kesalahan akibat determinan nol atau mendekati nol.

Dalam mempelajari invers matriks, terdapat berbagai metode yang dapat digunakan sesuai dengan kebutuhan dan konteksnya. Dua metode yang telah dibahas secara mendalam dalam materi ini adalah **metode Adjoint** dan **metode Eliminasi Gauss-Jordan**. Keduanya memiliki keunggulan dan kelemahan masing-masing, baik dari sisi pemahaman konsep maupun efisiensi perhitungan.

Metode Adjoint lebih menekankan pada aspek teoritis dan sangat baik digunakan dalam proses

pembelajaran untuk memahami struktur dasar matriks, seperti determinan, minor, dan kofaktor. Sementara itu, metode **Gauss-Jordan** lebih unggul dalam hal efisiensi dan kecepatan perhitungan, terutama pada matriks berukuran besar atau saat diterapkan dalam sistem komputasi.

Dengan memahami langkah-langkah perhitungan, syarat keberadaan invers, serta kelebihan dan kekurangan masing-masing metode, diharapkan pembaca dapat lebih bijak dalam memilih metode yang sesuai. Kemampuan untuk menentukan metode yang tepat tidak hanya akan mempermudah proses penyelesaian soal, tetapi juga memperkuat pemahaman terhadap konsep aljabar matriks secara menyeluruh.

Latihan Soal:

1. Diberikan matriks sebagai berikut:

- a. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

- b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan invers dari matriks A dan B menggunakan metode Adjoint.

2. Tentukan invers dari matriks berikut dengan menggunakan metode Gauss-Jordan

- a. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

- b. $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Sebuah matriks E didefinisikan sebagai berikut:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan invers matriks E dengan menggunakan metode Gauss-Jordan. Bandingkan hasilnya jika diselesaikan dengan menggunakan metode Adjoint.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., & Rorres, C. 2010. *Elementary Linear Algebra* (10th ed.). Hoboken: John Wiley & Sons.
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. 2016. *Linear Algebra and Its Applications* (5th ed.). Boston: Pearson Education.
- Lipschutz, Seymour & Marc Lars Lipson. 2004. *Aljabar Linear Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga
- Srinadi, I. G. A. M., & Nilakusumawati, D. P. E. 2014. *Aljabar Linear Elementer*. Jurusan ILKOM Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Udayana.
- Susanti, Y., dkk. 2023. *Aljabar Linear Elementer*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

BAB 9

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DENGAN DETERMINAN MATRIKS

Oleh Suprihatin

9.1 Pengertian Sistem Persamaan Linier (SPL)

Persamaan linier merupakan suatu persamaan yang mempunyai variabel berpangkat satu dan dikenal sebagai persamaan linier atau disebut sebagai persamaan berderajat satu dan bila digambarkan dalam koordinat kartesius sebagai garis lurus.

Sistem persamaan linier merupakan sebuah sistem dan terdapat lebih dari satu persamaan linier.

Bentuk umum persamaan linier adalah $y = m x + c$

Dimana :

y : titik koordinat berdasarkan sumbu y

m : gradien garis (kemiringan garis)

x : titik kordinat berdasarkan sumbu x

c : konstanta

9.2 Jenis- jenis dari Sistem Persamaan linier

Persamaan linier terdapat beberapa jenis :

1. Sistem Persamaan Linier Satu Variabel

Persamaan linier adalah sebuah kalimat terbuka yang melibatkan variabel dengan derajat satu dan dihubungkan " sama dengan" (=). Persamaan linier satu variabel adalah persamaan yang hanya memiliki satu variabel.

Persamaan linier satu Variabel bentuk umumnya :

$$a x + b = 0$$

dimana : a dan b konstanta yang merupakan bilangan bulat dan bukan nol.

Contoh :

$$1. x + 3 = 10 \text{ maka } x = 10 - 3 = 7$$

$$2. 2 (4x - (x + 3)) = 2x + 6$$

Untuk menentukan harga x :

$$2 (4x - (x+3)) = 2x + 6$$

$$8x - 2x - 6 = 2x + 6$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

2. Sistem Persamaan Linier dengan Dua Variabel

Sistem Persamaan Linier dua variabel adalah sekumpulan dua persamaan linier yang melibatkan dua variabel dan memiliki satu penyelesaian .

Persamaan Linier Dua variabel dapat dituliskan sebagai berikut :

$$a x + b y = c$$

dimana : a , b merupakan bilangan bulat bukan nol dan c adalah konstanta.

3. Sistem Persamaan Linier Tiga variabel

Sistem Persamaan linier dengan tiga variabel adalah serangkaian persamaan yang melibatkan tiga variabel, umumnya dinyatakan sebagai x , y dan z .

Bentuk Umum dari Sistem Persamaan Linier ini dapat dituliskan sebagai berikut :

$$a x + b y + c z = d$$

dimana : a , b dan c adalah bilangan bulat bukan nol dengan d merupakan konstanta.

9.3 Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Untuk penyelesaian dari sistem persamaan linier terdapat beberapa metode yang bisa digunakan antara lain :

a. Metode substitusi

Metode substitusi dimulai dengan menyatakan salah satu variabel dalam sistem dua variabel persamaan linier sebagai fungsi dari variabel lainnya.

Contoh :

Selesaikan sistem persamaan linier berikut

$$x + 4y = 6$$

$$x + 2y = 4$$

Pembahasan :

$$x + 4y = 6 \quad \longrightarrow \quad x = 6 - 4y \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$x + 2y = 4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Substitusi pers (1) ke (2)

$$(6 - 4y) + 2y = 4$$

$$-2y = -2$$

$$y = 1$$

Gantikan nilai y ke pers (1)

$$x = 6 - 4y$$

$$x = 6 - 4 \cdot 1 = 2$$

b. Metode Eliminasi

Metode eliminasi adalah suatu teknik yang digunakan untuk menentukan nilai pengganti suatu variabel dengan cara menghilangkan variabel lainnya.

Contoh :

$$\begin{array}{rcl}
 4x + 2y = 6 & \times 1 & \\
 x - 2y = -1 & \times 4 & \\
 \hline
 4x + 2y = 6 & \rightarrow & 4x + 2y = 6 \\
 4x - 8y = -4 & & 4x - 8y = -4 \\
 \hline
 & & -6y = 2 \\
 & & y = -1/3
 \end{array}$$

Gantikan nilai y ke persamaan

$$4x + 2y = 6$$

$$4x + 2 \cdot (-1/3) = 6$$

$$4x - 2/3 = 6$$

$$4x = 6 + 2/3$$

$$x = 5/3$$

c. Metode Grafik

Penyelesaian Sistem persamaan linier dengan menggambarkan persamaan linier dan mencari perpotongan dari kedua garis yang terjadi dari persamaan linier tersebut.

d. Determinan Matriks

Salah satu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linier adalah dengan menggunakan Determinan Matriks.

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan Determinan Matriks maka sistem persamaan linier tersebut disusun dalam bentuk matriks sehingga bisa menentukan nilai dari determinan Matriks tersebut.

Persamaan Linier dua variabel :

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

dari persamaan linier tersebut dapat dibentuklah sebuah matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Dari matriks tersebut dihitung nilai determinan

$$D : \det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - b_1 c_2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - c_1 a_2$$

$$\text{Maka : } x = \frac{D_x}{D} \quad \text{dan} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Contoh :

- Gunakan Metode Determinan Matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier
 $2x - 3y = 5$ dan $x + 2y = -3$

Penyelesaian :

Sistem Persamaan Linier :

$$3x - 2y = 6$$

$$x + y = 4$$

Dibentuk menjadi determinan Matriks

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (-2)(1) = 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (6)(1) - (-2)(4) = 14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (6)(1) = -6$$

Sehingga nilai :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{5} \quad \text{dan} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{5}$$

2. Gunakan Metode Determinan Matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier
 $2y = x + 10$ dan $3x + 18 = 2y$

Penyelesaian :

Sistem Persamaan linier :

$$2y = x + 10$$

$$3x + 18 = 2y$$

Persamaan tersebut bisa juga ditulis menjadi

$$x - 2y = -10$$

$$3x - 2y = -18$$

Determinan :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-2) - (3)(-2) = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -18 & -2 \end{vmatrix} = (-10)(-2) - (-18)(-2) = -16$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & -18 \end{vmatrix} = (1)(-18) - (3)(-10) = 12$$

$$\text{Nilai : } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-16}{4} = -4 \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{12}{4} = 3$$

Soal :

Tentukan penyelesaian sistem persamaan linier menggunakan determinan Matriks

1. $2y - 3x = -4$ dan $2x + y = 5$

2. $x - y = 3$ dan $2x + 3y = 4$

3. $x = 4 + \frac{1}{2}y$ dan $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 4$
4. $3x = 2 + 5y$ dan $3y + 7x = 12$
5. $2x - 3y = -6$ dan $4y - 5x = 1$

Persamaan Linier tiga variabel :

Penyelesaian sistem persamaan linier menggunakan determinan matriks dilakukan dengan menentukan koefisien matriks dari persamaan tersebut. Sehingga didapatkan empat nilai determinan yang perlu dihitung yaitu :

- 1) D yakni determinan matriks yang dibentuk oleh koefisien persamaan linier
- 2) D_x yakni determinan matriks dimana koefisien x diganti dengan konstanta
- 3) D_y yakni determinan matriks dimana koefisien y diganti dengan konstanta
- 4) D_z yakni determinan matriks dimana koefisien z diganti dengan konstanta

Dengan menghitung keempat nilai determinan ini, sehingga dapat menyelesaikan persamaan linier dengan lebih mudah.

Bentuk umum sistem persamaan linier :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

diperoleh nilai determinan :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = d_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 d_3 + c_1 d_2 b_3 - c_1 b_2 d_3 - d_1 c_2 b_3 - b_1 d_2 c_3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = a_1 d_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 d_3 - c_1 d_2 a_3 - a_1 c_2 d_3 - d_1 a_2 c_3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 + d_1 a_2 b_3 - d_1 d_2 a_3 - a_1 d_2 b_3 - b_1 a_2 d_3$$

Sehingga nilai $x = \frac{D_x}{D}$; $y = \frac{D_y}{D}$ dan $z = \frac{D_z}{D}$

Contoh soal :

1. Gunakan metode Determinan matriks untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier

$$2x - 3y + 2z = -3$$

$$x + 2y + z = 2$$

$$2x - y + 3z = 1$$

Penyelesaian :

Determinan Matriks :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D = (2)(2)(3) + (-3)(1)(2) + (2)(1)(-1) - (2)(2)(2) - (-1)(1)(2) - (3)(1)(-3)$$

$$D = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D_x = (-3)(2)(3) + (-3)(1)(1) + (2)(2)(-1) - (1)(2)(2) - (-1)(1)(-3) - (3)(2)(-3)$$

$$D_x = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = (2)(2)(3) + (-3)(1)(2) + (2)(1)(-1) - (2)(2)(2) - (-1)(1)(2) - (3)(1)(-3)$$

$$D_y = 7$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_z = (2)(2)(1) + (-3)(2)(2) + (-3)(1)(-1) - (2)(2)(-3) - (-1)(2)(2) - (1)(1)(-3)$$

$$D_z = 14$$

Sehingga nilai :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{7} = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

2. Gunakan metode Determinan matriks untuk menyelesaikan Persamaan Linier

$$x + 2y = -z + 2$$

$$x - y = 2z - 1$$

$$x + y = z + 3$$

Penyelesaian :

Persamaan linier dibentuk menjadi :

$$x + 2y + z = 2$$

$$x - y - 2z = -1$$

$$x + y - z = 3$$

Bentuk Determinan Matriks

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = (1)(-1)(-1) + (2)(-2)(1) + (1)(1)(1) - (1)(-1)(1) - (1)(-2)(1) - (-1)(1)(2) = 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_x = (2)(-1)(-1) + (2)(-2)(3) + (1)(-1)(1) - (3)(-1)(1) - (1)(-2)(2) - (-1)(-1)(2) = -6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = (1)(-1)(-1) + (2)(-2)(1) + (1)(1)(3) - (1)(-1)(1) - (3)(-2)(1) - (-1)(1)(2) = 9$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_z = (1)(-1)(3) + (2)(-1)(1) + (2)(1)(1) - (1)(-1)(2) - (1)(-1)(1) - (3)(1)(2) = -6$$

Jadi nilai :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{3} = -2 \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{dan}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{3} = -2$$

Soal :

Tentukan Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan metode Determinan

1. $2x + 2y + 3z = 4$
 $-x + y + 3z = 1$
 $-2x + y + 2z = -3$
2. $2x - 2y - z = 3$
 $3x + y + 2z = 7$
 $2x + 3y + 4z = 8$
3. $2x - 3y = -3 - 2z$
 $x + 2y = 2 - z$
 $2x - y = 1 - 3z$
4. $3x + y = -2z + 6$
 $2x + 4y = 3z + 4$

$$x - 2y = -z + 3$$

5. $x + 3y + z = -1$
 $2x + y + 2z = 3$
 $2x - y + 3z = 8$

DAFTAR PUSTAKA

- Pujiyanta, A. (2007). Komputasi Numerik dengan Matlab. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kreyszig, E. (1988). Advanced Engineering Mathematics (Edisi ke-6). Singapore: John Wiley & Sons.
- Baisuni, H. M. H. (2015). Kalkulus. Depok: Universitas Indonesia.
- Anton, H. (2000). Dasar-Dasar Aljabar Linier (Edisi ke-7, Jilid 1).
- Spiegel, M. R. Advanced Mathematics for Engineers and Scientists.

BAB 10

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL) DENGAN INVERS MATRIKS

Oleh Fajriana

10.1 Pendahuluan

Sistem persamaan Linier (SPL) merupakan salah satu materi pembelajaran yang sangat mendasar dalam mata kuliah Aljabar Linier. SPL biasanya digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan berbagai persoalan nyata. Contoh yang sangat sederhana adalah perhitungan arus listrik dalam rangkaian, optimasi produksi, distribusi sumber daya, pengolahan citra dan lain-lain.

Solusi atau penyelesaian dalam sistem persamaan linier salah satunya adalah dengan metode invers Matriks. Pendekatan dengan metode ini biasanya untuk sistem persamaan linier yang ukuran lebih kecil dan sederhana.

10.2 Sistem Persamaan Linier

Sistem Persamaan Linier adalah suatu sistem yang terdiri atas dua atau lebih persamaan linier yang saling berkaitan, dimana setiap persamaan memiliki variabel-variabel yang

sama. Maksud dari kata linier adalah pangkat dari variabel dalam persamaan linier ini sama dengan 1.

Secara umum persamaan linier dapat diutiskan adalah sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

.....

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Sistem persamaan linier simultan sering disebut sebagai sistem persamaan linier non-homogen. Sistem persamaan Linier simultan non-homogen dapat dibentuk dalam bentuk matrik adalah

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ddots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk, $AX = B$

Dimana,

A = matriks koefisien persamaan linier simultan

X = matriks kolom bilangan x

B = matriks kolom sisi sebelah kanan tanda

Dengan,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Jika $AX = B$, dikedua ruas dikalikan dengan A^{-1} , maka

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Karena $A^{-1}A = I$, maka

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Perlu diperhatikan bahwa suatu matriks memiliki invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

10.3 Metode Invers Matriks

Jika A matriks berukuran $n \times n$ dan B matriks kolom berukuran $n \times 1$ serta X matriks kolom berukuran $n \times 1$ yang tidak diketahui, maka persamaan matriks adalah $AX = B$. Matriks kolom X dapat dicari dengan menggunakan salah satu metode penyelesaian yaitu metode invers matriks.

Teorema 1:

Jika A adalah invertible matriks $n \times n$, maka untuk setiap $n \times 1$ matriks B , sistem persamaan $AX = B$ memiliki hanya satu solusi yaitu $X = A^{-1}B$.

10.3.1 Langkah-Langkah Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Invers Matriks

Adapun langkah langkah dalam penyelesaian sistem persamaan linier adalah sebagai berikut :

Langkah pertama	:	mengubah SPL menjadi sebuah matriks yang diperbesar
Langkah kedua	:	mencari A^{-1} dengan menggunakan metode Adjoint

Langkah ketiga	:	mendapatkan solusi SPL dengan menggunakan rumus $X = A^{-1}B$
Langkah keempat	:	Membuat kesimpulan

10.3.2 Metode *Adjoint* Matriks

Ada beberapa definisi dan teorema dalam menyelesaikan menggunakan metode Adjoint adalah sebagai berikut (M. Eka K Putra, 2017):

Definisi 1.

Jika matriks A berukuran $n \times n$, maka transpos dari matriks A dinyatakan dengan A^T , didefinisikan sebagai matriks $n \times n$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A ; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A , kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A , dan seterusnya (M. Eka K Putra, 2017); (Anton 2004).

Definisi 2.

Misalkan A adalah matriks bujursangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A . Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A (M. Eka K Putra, 2017); (Anton 2004).

Definisi 3.

Misalkan $A_{n \times n} = [a_{ij}]$, maka minor dari a_{ij} , yang dilambangkan oleh M_{ij} , adalah determinan dari submatriks yang diperoleh dengan cara membuang semua entri pada baris ke- i dan semua entri pada kolom ke- j . Sedangkan

kofaktor dari a_{ij} yang dilambangkan oleh C_{ij} adalah $(-1)^{i+j}M_{ij}$ (M. Eka K Putra, 2017); (Imrona, M, 2012).

Teorema 2.

Determinan dari matriks A , $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali-hasil kali yang diperoleh; dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

1. Ekspansi kofaktor sepanjang baris i :

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in}$$

2. Ekspansi kofaktor sepanjang kolom j :

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}$$

Teorema 3.

Jika adalah suatu matriks bujursangkar dengan dua baris atau dua kolom yang proporsional, maka $\det(A) = 0$.

Definisi 4.

Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} , maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A . Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $\text{adj}(A)$.

Teorema 4.

Jika adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Contoh 1 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linier berikut :

$$3x + 5y - 7 = 0$$

$$4x - 3y - 19 = 0$$

Penyelesaian :**Langkah 1 ;**

Tulis persamaan dalam bentuk $a_1x + b_1y = c$, sehingga persamaan dari soal adalah

$$3x + 5y = 7$$

$$4x - 3y = 19$$

Langkah 2 ;

Ubah SPL menjadi matriks yang diperbesar :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Langkah 3 ;

Mencari invers matriks dari $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ adalah

➤ Determinan dari matrik $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ adalah

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -29$$

- Cofaktor dari elemen dapat menggunakan rumus Definisi 3 :

$$Adj(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Maka Cofaktor dari Matiks A adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1} (-3) = -3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} (4) = -4$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} (5) = -5$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} (3) = 3$$

Sehingga

Cofaktor dari elemen 3 adalah $+(-3)$

Cofaktor dari elemen 5 adalah $-(4)$

Cofaktor dari elemen 4 adalah $-(5)$

Cofaktor dari elemen -3 adalah (3)

Sehingga Matriks Cofaktor adalah $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Maka untuk $Adj(A)$ adalah dengan menggunakan Definisi 4.

$$Adj(A) = (C_{ij})^T$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Mencari A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) \text{ sehingga}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-29} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Langkah 4 ;

Dapatkan Solusi SPL,

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-29} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-29} \begin{pmatrix} -3(7) + (-5)(19) \\ (-4)(7) + (3)(19) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-29} \begin{pmatrix} -21 - 95 \\ -28 + 57 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Langkah 5 ;

Menarik kesimpulan. Dengan melihat elemen yang sesuai dan seletak

$$x = 4 \text{ dan } y = -1$$

Contoh 2 :

Dapatkan solusi dari spl berikut

$$x + y + z - 4 = 0$$

$$2x - 3y + 4z - 33 = 0$$

$$3x - 2y - 2z - 2 = 0$$

Penyelesaian:**Langkah 1:**

Tulis persamaan ke dalam bentuk $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, sehingga persamaan dari soal adalah:

$$x + y + z = 4$$

$$2x - 3y + 4z = 33$$

$$3x - 2y - 2z = 2$$

Langkah 2:

Ubah persamaan spl menjadi matriks persamaan adalah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Langkah 3:

Mencari Invers matriks

$$\text{Misalkan } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Mencari } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A),$$

maka

- **Mendapatkan** $\det(A)$ yaitu dengan menggunakan metode ekspansi baris:

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1(14) - 1(-16) + 1(5) \\ &= 35\end{aligned}$$

- **Mendapatkan** Cofaktor dari elemen dapat menggunakan rumus Definisi 3 :

$$\text{Adj}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Maka Cofaktor dari Matiks A adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$$

Sehingga matriks Cofaktor adalah $\begin{pmatrix} 14 & 16 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

Maka untuk $\text{Adj}(A)$ adalah dengan menggunakan Definisi 4, yaitu $\text{Adj}(A) = (C_{ij})^T$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 7 \\ 16 & -5 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

➤ **Mendapatkan** $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 7 \\ 16 & -5 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Langkah 4 :

Dapatkan Solusi SPL,

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 7 \\ 16 & -5 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 14(4) + 0(33) + 7(2) \\ 16(4) + (-5)(33) + (-2)(2) \\ 5(4) + 5(33) + (-5)(2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 70 \\ -105 \\ 175 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{70}{35} \\ \frac{-105}{35} \\ \frac{175}{35} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Langkah 5 ;

Menarik kesimpulan, dengan melihat elemen yang sesuai

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$x = 2, y = -3 \text{ dan } z = 5 \blacksquare$$

Soal :

Rangkaian arus searah terdiri dari tiga loop tertutup. Penerapan hukum Kirchhoff pada loop tertutup menghasilkan persamaan berikut untuk aliran arus miliampere:

$$\begin{aligned} 2 I_1 + 3 I_2 - 4 I_3 &= 26 \\ I_1 - 5 I_2 - 3 I_3 &= -87 \\ -7 I_1 + 2 I_2 + 6 I_3 &= 12 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Invers Matriks untuk mendapatkan I_1, I_2 , dan I_3

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. Edisi kedelapan. Erlangga, Jakarta.
- Aryani Fitri dan Corazon C.M. 2016. Inverse of Tridiagonal Toeplitz Matrix by Adjoint Method. *Proceeding IcoSTechS*, Pekanbaru.
- Bird, J. 2006. Higher Engineering Mathematics. Elsevier Ltd
- Imrona, Mahmud. 2012. *Aljabar Linear Dasar*. Edisi Kedua. Erlangga: Bandung.
- Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta.
- M.Eka Karnian Putra., dan Fitri Aryani. 2017. Invers Matriks Positif Menggunakan Metode Adjoint. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. Vol. 3 No. 1.

BAB 11

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL) DENGAN METODE GAUSS DAN GAUSS JORDAN

Oleh Ida Kurnia Waliyanti

11.1 Sistem Persamaan Linear

Persamaan linear adalah persamaan yang memuat satu atau lebih variabel yang hanya memperkenankan adanya operasi perkalian dengan bilangan riil dan penjumlahan antar suku, atau dengan kata lain, persamaan linear merupakan kalimat matematika yang dihubungkan dengan tanda “sama dengan”, yang melibatkan satu atau lebih variabel dengan derajat maksimal satu. Sebagai contoh $5x - y = 2$ dan $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4$ merupakan persamaan linear dengan dua dan tiga variabel. Berikut ini dituliskan bentuk umum persamaan linear dua variabel:

$$ax + by = c \dots\dots\dots(1)$$

dengan x dan y adalah dua variabel berbeda, a dan b koefisien tak nol, serta c adalah konstanta. Persamaan ini dapat digambarkan pada system koordinat dua dimensi. Selanjutnya untuk persamaan dengan tiga variabel dapat

digambarkan pada system koordinat tiga dimensi, dan dinyatakan secara umum sebagai berikut:

$$ax + by + cz = d \dots\dots\dots (2)$$

dengan x, y , dan z adalah tiga variabel berbeda, a, b , dan c koefisien tak nol, serta d adalah konstanta.

Secara umum persamaan linear dengan n -variabel dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \dots\dots\dots (3)$$

dengan x_i sebagai variabel ke- i dan a_i adalah koefisien ke- i , serta b adalah konstanta.

Contoh:

Berdasarkan bentuk umum persamaan linear baik (1), (2), maupun (3) menunjukkan bahwa persamaan linear tidak melibatkan perkalian atau akar variabel-variabelnya. Semua variabel hanya muncul pada pangkat pertama (derajat satu) dan tidak muncul sebagai pernyataan trigonometri, logaritma, atau eksponensial. Berikut ini adalah contoh persamaan linear:

$$\begin{aligned} 5x - y &= 2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m &= 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3}x - 3y + 2z$$

Selanjutnya disajikan contoh persamaan yang bukan merupakan persamaan linear, antara lain:

$$5x^2 - y = 2$$

$$\sqrt{x_1} + 2x_2 - 3x_3 = -4$$

Sekumpulan berhingga persamaan linear disebut dengan sistem persamaan linear (SPL). Apabila persamaan linear yang terbentuk dalam system mempunyai variabel dua maka disebut system persamaan linear dengan dua variabel (SPLDV), jika tiga variabel maka disebut system persamaan linear dengan tiga variabel (SPLTV) dan seterusnya sampai untuk n -variabel. Perhatikan system persamaan (4) berikut:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ x + 3y &= 5 \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

merupakan SPLDV dengan dua persamaan dan variabel x dan y . Perhatikan juga system persamaan (5) berikut:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 6 \\ 3x + y + z &= 8 \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

merupakan SPLTV yang terdiri dari dua persamaan dan tiga variabel x , y , dan z . Selanjutnya secara umum, system persamaan linear dengan n -variabel dan m -persamaan, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots\dots\dots (6) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_{m2} \end{aligned}$$

Permasalahan yang muncul dalam suatu system persamaan linear adalah bagaimana mencari solusinya. Solusi SPL adalah nilai pengganti bagi variabel yang tidak diketahui atau dapat dituliskan sebagai

$$x_1 = k_1; \quad x_2 = k_2; \quad \dots \quad ; \quad x_n = k_n.$$

sehingga masing-masing persamaan bernilai benar. Sebagai contoh solusi untuk pernyataan (4) adalah

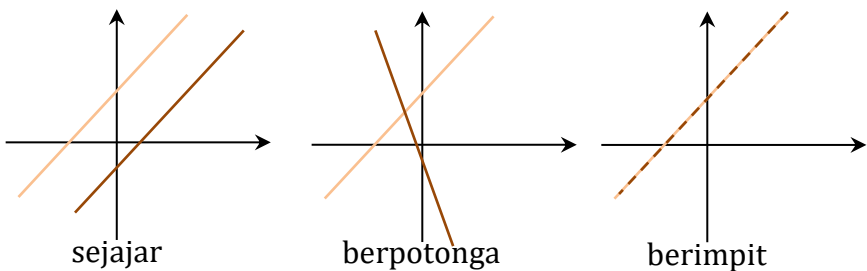
$$x = 2 \quad \text{dan} \quad y = 1.$$

Sedangkan solusi untuk pernyataan (5) adalah

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad \text{dan} \quad x_3 = 1.$$

Penyelesaian tersebut dapat juga dituliskan sebagai pasangan bilangan berurut, yaitu $(2,1)$ dan $(3,-2,1)$, berturut-turut merupakan solusi bagi pernyataan (4) dan (5). Sehingga solusi untuk SPL dengan n -variabel dapat juga dituliskan sebagai pasangan berurutan n -tupel bilangan, yaitu $(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Apakah setiap system persamaan linear mempunyai solusi. Dapat diperhatikan terlebih dahulu sebagai motivasi awal, yaitu pada system persamaan linear dua variabel (SPLDV). Pada SPLDV, jelas bahwa system tersebut memuat persamaan-persamaan linear dua variabel, artinya ini juga merupakan persamaan garis lurus di dimensi dua. Jika digambarkan pada diagram koortesiis dimensi dua, dua atau lebih garis lurus mempunyai 3 kemungkinan posisi, yaitu:



Kondisi geometri ini mempengaruhi solusi pada SPL. Titik temu atau irisan titik-titik yang beririsan merupakan solusi dari SPL tersebut. Apabila dalam suatu system

persamaan linear, semua garis sejajar, maka system persamaan linear tersebut tidak mempunyai solusi. Jika semua garis berpotongan di satu titik yang sama, maka system persamaan linear tersebut mempunyai tepat satu solusi yaitu pada titik potongnya, sehingga untuk system yang semua garisnya berimpit, karena setiap titik pada garis tersebut berpotongan pada setiap titik yang dilaluinya, yang artinya system persamaan linear mempunyai banyak solusi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa jika persamaan-persamaan yang ada dalam suatu system itu konsisten, maka system persamaan linear mempunyai solusi, namun jika persamaan-persamaannya tidak konsisten maka SPL tidak mempunyai solusi.

Contoh: Sistem Persamaan Linear Tanpa Solusi

$$x + y = 2$$

$$x + y = 5$$

Lakukan eliminasi x dengan mengurangkan persamaan pertama dengan persamaan kedua, diperoleh:

$$x + y = 2$$

$$0 = -3$$

Terjadi kontradiksi antar dua persamaan, sehingga tidak bisa ditemukan nilai x dan y yang memenuhi SPL tersebut. Dengan demikian SPL tidak mempunyai solusi. Apabila digambarkan pada diagram koordinat kedua garis sejajar.

Contoh: Sistem Persamaan Linear Tepat Satu Solusi

$$x + y = 3$$

$$2x - y = 3$$

Lakukan eliminasi y dengan menjumlahkan kedua persamaan, diperoleh

$$x + y = 3$$

$$3x = 6$$

Dari persamaan $3x = 6$, diperoleh $x = 2$. Dengan menggunakan persamaan $x + y = 3$ didapatkan $y = 1$. Jadi solusi SPL adalah $(2,1)$. Apabila digambarkan dalam sistem koordinat kedua garis berpotongan pada suatu titik yaitu $(2,1)$.

Contoh: Sistem Persamaan Linear Dengan Banyak Solusi

$$x + y = 3$$

$$-2x - 2y = -6$$

Lakukan eliminasi dengan menjumlahkan persamaan kedua dengan -2 kali persamaan pertama akan diperoleh

$$x + y = 3$$

$$0 = 0$$

Nampak bahwa persamaan kedua tidak memberikan makna apapun dalam system persamaan linear yang terbentuk, sehingga apabila digambarkan pada system koordinat kedua garis berimpit, artinya mempunyai banyak solusi. Solusi-solusi tersebut antara lain $(0,3)$, $(3,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, dan masih banyak yang lainnya.

Banyak metode atau cara untuk mencari solusi/penyelesaian suatu system persamaan linear. Pada BAB ini akan dibahas secara khusus penyelesaian SPL dengan Metode Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss-Jordan.

11.2 Metode Eliminasi Gauss

11.2.1 Matrik *Augment* (Matriks Diperbesar)

Penyelesaian sistem persamaan linear (SPL) dengan metode eliminasi Gauss diperkenalkan pertama kali oleh Carl Friedrich Gauss saat memprediksi orbit asteroid Ceres dari data yang terbatas, yang terjadi pada tahun 1801. Perhitungan tersebut akhirnya dikenal dengan Metode Eliminasi Gauss. Penyelesaian suatu SPL dengan metode eliminasi Gauss dapat dilakukan dengan merepresentasikan suatu SPL pada bentuk matriks. Perlu diketahui bahwa setiap SPL dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Perhatikan SPL pada pernyataan (5) dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

dimana $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan kumpulan semua koefisien pada SPL dan disebut matriks koefisien (dilambangkan A), $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ merupakan matriks kolom yang berisi semua variabel pada SPL (dilambangkan X), dan $\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ merupakan matriks kolom yang berisi semua konstanta atau

hasil pada SPL (dilambangkan B), sehingga diperoleh $AX = B$. Selanjutnya, untuk mencari solusi suatu SPL dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, perlu dibentuk matriks *augmented* atau matriks diperbesar yang merupakan gabungan dari matriks koefisien dengan matriks hasil/konstanta, sehingga matriks diperbesar pada pernyataan (7) adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Secara umum sesuai pernyataan (6), diperoleh matriks koefisien:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matriks variabel dan matriks hasil/konstanta berturut-turut:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sehingga matriks diperbesarnya adalah:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Setelah mendapatkan matriks diperbesar, akan dilakukan manipulasi aljabar yang mana tidak mengubah makna atau kondisi sebenarnya pada system tersebut atau ekuivalen. Manipulasi aljabar ini dikenal dengan reduksi

baris/kolom atau operasi baris/kolom elementer. Pada metode eliminasi Gauss, reduksi/operasi baris/kolom elementer berakhir sampai berubahnya matriks koefisien menjadi matriks segitiga atas, yaitu matriks dengan semua elemen di bawah diagonal utama bernilai nol. Operasi/manipulasi aljabar yang diperkenankan pada tahapan reduksi antara lain:

1. mengalikan suatu baris dengan sebarang skalar tak nol, hal ini bisa dilakukan karena setiap persamaan linear apabila dikalikan dengan skalar tak nol tidak mengubah arti atau ekuivalen atau masih konsisten,
2. menukar baris/kolom dengan baris/kolom lainnya, hal ini bisa dilakukan karena pada suatu system persamaan linear tidak memperhatikan urutan masing-masing persamaan linearnya,
3. menjumlahkan hasil kali scalar suatu baris/kolom ke baris/kolom lainnya, hal ini bisa dilakukan karena persamaan yang terbentuk tetap konsisten dan tidak mengubah arti.

Agar lebih memudahkan dalam memahami konsep metode eliminasi Gauss, berikut disajikan contoh tahapan reduksi pada metode eliminasi Gauss dengan operasi baris elementer.

Contoh:

Diberikan suatu system persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 2 \\2x - 3y + z &= -1 \\3x + y - 2z &= -1\end{aligned}$$

Matriks diperbesar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan reduksi/operasi baris pada matriks diperbesar.

Tambahkan hasil kali -2 dengan baris pertama ke baris kedua dan tambahkan hasil kali -3 dengan baris pertama ke baris ketiga, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Tambahkan hasil kali $-\frac{5}{7}$ dengan baris kedua ke baris ketiga, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{24}{7} \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ketiga dengan -7 dan baris kedua dengan $-\frac{1}{7}$, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi variabelnya akan diperoleh

$$\begin{aligned}z &= 3 \\y - \frac{3}{7}z &= \frac{5}{7} \\x + 2y - z &= 2\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi nilai $z = 3$ pada persamaan 2 dan 3, akan diperoleh $y = 2$ dan $x = 1$. Jadi solusinya adalah (1,2,3).

11.2.2 Tahapan Metode Eliminasi Gauss

Berdasarkan contoh dan penjelasan sebelumnya, bahwa penyelesaian suatu SPL dengan metode eliminasi Gauss diperlukan manipulasi atau operasi aljabar yang bertujuan membawa matriks diperbesar menjadi bentuk matriks yang lebih sederhana atau dikenal dengan membawa ke dalam bentuk eselon baris/kolom tereduksi. Dari penjelasan tersebut, diperoleh bahwa matriks diperbesar menjadi bentuk eselon baris/kolom tereduksi jika mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

1. jika suatu baris mempunyai elemen nol semua, maka diletakkan pada baris paling akhir,
2. entri tak nol pertama dari kiri adalah 1 dan disebut satu utama (pivot),
3. untuk baris berikutnya, letak satu utama berada lebih ke kanan dari baris sebelumnya.

Berikut ini disajikan contoh-contoh matriks berbentuk eselon baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proses menghasilkan bentuk eselon baris disebut dengan eliminasi Gauss, sedangkan kelanjutannya untuk mencari solusi SPL disebut eliminasi Gauss-Jordan yang akan dijelaskan pada sub bab berikut.

11.3 Metode Eliminasi Gauss-Jordan

11.3.1 Pengenalan Metode Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss sebagai penyelesaian sistem persamaan linear (SPL) disempurnakan oleh Wilhelm Jordan, dengan melanjutkan proses reduksi sehingga didapatkan eselon baris tereduksi atau lebih sederhananya menemukan bentuk matriks identitas pada matriks koefisien dari matriks diperbesar bagi suatu system persamaan linear. Sehingga terdapat perbedaan yang sangat menyolok, yaitu pada metode eliminasi Gauss diperlukan substitusi yang lebih kompleks sementara pada eliminasi Gauss-Jordan tidak diperlukan substitusi.

11.3.2 Langkah Penyelesaian SPL dengan Metode Gauss-Jordan

Untuk memahami algoritma atau langkah-langkah metode eliminasi, akan disajikan tahapan eliminasi sebagai berikut:

1. bentuk matriks *augment* atau matriks diperbesar
Ubah sistem persamaan linear menjadi bentuk matriks *augment*/diperbesar. Setiap persamaan menjadi satu baris pada matriks, dan koefisien variabel serta konstanta menjadi elemen-elemen dalam matriks.
2. tentukan elemen satu utama atau pivot untuk baris pertama
 - a. Pilih elemen pertama pada baris pertama sebagai pivot.
 - b. Bagi seluruh elemen pada baris tersebut dengan nilai pivot agar elemen pivot menjadi 1.
3. eliminasi elemen di bawah pivot
Lakukan operasi baris elementer untuk membuat semua elemen di bawah pivot menjadi 0. Caranya adalah dengan

- menambahkan kelipatan baris yang mengandung pivot ke baris-baris dibawahnya
4. eliminasi elemen di atas pivot
Langkah ini merupakan adalah langkah tambahan dalam metode Gauss-Jordan. Setelah semua elemen di bawah pivot menjadi 0, lakukan operasi baris elementer untuk membuat semua elemen di atas pivot menjadi 0
 5. Ulangi langkah 2-4 untuk baris berikutnya
Pilih elemen pivot berikutnya (elemen pertama yang tidak nol pada baris berikutnya) dan ulangi langkah 2-4 hingga semua baris telah diproses.
 6. normalisasi setiap baris
Pastikan setiap elemen pivot bernilai 1 dengan membagi seluruh elemen pada baris tersebut dengan nilai elemen pivot

Setelah semua langkah di atas selesai, matriks akan berada dalam bentuk eselon baris tereduksi. Pada bentuk ini, setiap variabel akan memiliki koefisien 1 dan semua elemen lain pada kolom yang sama akan bernilai 0. Solusi dari sistem persamaan linear dapat langsung dibaca dari matriks ini.

Contoh:

Diberikan system persamaan linear seperti pada Contoh 11.2.1, yang mana diperoleh matriks eselon barisnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pada metode eliminasi Gauss-Jordan, masih dilakukan reduksi sampai ditemukan matriks koefisiennya sebagai matrik identitas.

Tambahkan -3 kali baris ketiga pada baris kedua,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris kedua dengan -7,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan baris ketiga ke baris pertama,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -2 kali baris kedua pada baris pertama,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi variabelnya akan diperoleh

$$x = 1; \quad y = 2; \quad z = 3$$

Jadi solusi untuk SPL tersebut adalah (1,2,3).

Kasus di atas berlaku jika jumlah persamaan sama dengan jumlah variabel dan system persamaan mempunyai tepat satu solusi. Bagaimana untuk SPL yang tidak mempunyai solusi atau solusi banyak atau dengan jumlah persamaan yang tidak sama dengan jumlah variabel?

Untuk itu perlu dilakukan perumuman kasus penyelesaian system persamaan linear. Pada dasarnya perumuman tersebut tetap sama, yaitu mengacu pada operasi baris elementer dengan memperkenankan tiga manipulasi aljabar seperti dijelaskan pada subbab sebelumnya. Menentukan satu utama pada masing-masing baris tak nol (baris elemennya tidak semuanya nol), atau sampai ditemukannya matriks identitas pada salah satu partisi matriks. Perhatikan contoh berikut:

Contoh 11.3.2

Diberikan system persamaan linear

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$$

$$8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1$$

Matriks diperbesar:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris pertama dengan $\frac{1}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$
--	---

Jumlahkan baris kedua dengan 2 kali baris pertama dan jumlahkan baris ketiga dengan -8 baris pertama	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{bmatrix}$
--	--

Jumlahkan baris ketiga dengan baris kedua	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
---	---

Kalikan baris kedua dengan $\frac{1}{7}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jumlahkan baris pertama dengan
minus baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh penyelesaian

$$x_2 + \frac{4}{7}x_3 = \frac{1}{7} \rightarrow x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3$$

$$x_1 + \frac{3}{7}x_3 = -\frac{1}{7} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}x_3$$

Dengan demikian diperoleh banyak Solusi tergantung nilai x_3 . Jika x_3 disimbulkan dengan suatu parameter katakanlah s , maka diperoleh solusi:

$$x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}s \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}s; \quad x_3 = s$$

Dari contoh nampak ciri untuk suatu SPL mempunyai banyak solusi, terdapat baris nol atau baris yang semua elemennya nol (0). Selanjutnya akan dilihat bagaimana ciri suatu SPL yang tidak mempunyai solusi. Perhatikan contoh berikut:

Contoh:

Diberikan system persamaan linear

$$-2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2$$

$$6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 5$$

Matriks diperbesar:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Tukarkan baris pertama dengan baris kedua

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Tukarkan baris pertama dengan baris kedua

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Jumlahkan baris ketiga dengan -2 kali baris pertama

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris pertama dengan skalar

$\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Kalikan baris kedua dengan skalar $-\frac{1}{2}$

Kalikan baris ketiga dengan skalar $-\frac{1}{6}$

Tambahkan minus baris dua ke baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SPL tersebut tidak mempunyai solusi.

Dari contoh ditemukan ciri suatu SPL yang tidak mempunyai solusi, yaitu ditunjukkan dengan adanya baris yang tidak konsisten atau suatu baris yang mana representasi untuk matriks koefisiennya bernilai nol, namun bagian hasil/konstantanya bernilai tak nol (0).

11.4 Soal Latihan

Tentukan solusi dari system persamaan linear berikut dengan metode eliminasi Gauss-Jordan

1. $x + y - z = 1$
 $3x - y + z = 0$
 $x - 3y + 3z = -2$
2. $x - y + 2z - w = -1$
 $2x + y - 2z - 2w = -2$
 $-x + 2y - 4z + w = 1$
 $3x - 3w = -3$
3. $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 1$
 $2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1$
 $5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$
 $2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6$
4. $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 62$
 $-4x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 9$
 $5x_1 + 9x_2 + 13x_3 - x_4 = 179$
 $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 67$
5. $5x_1 - 5x_2 - 15x_3 - 3x_4 = -34$
 $-2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 12$
 $x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 8$

DAFTAR PUSTAKA

- Andrilli, S. and Hecker, D., 2023, *Elementary Linear Algebra*, Sixth Edition, Elsevier, Academic Press, USA.
- Anton, H., Rorres, C., dan Kaul, A., 2019, *Elementary Linear Algebra: Application Version*, 12th Edition, Wiley, United States of America.
- Lorson, R. 2016. *Elementary Linear Algebra*, 8th edition, Cengage, Australia.
- Wijayanti, I., E & Sutjiyana, A, 2012, *Aljabar Linear Elementer*, Bahan Ajar: Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada.

BIODATA PENULIS

Ir. Abdul Azis, S.T., M.T.

Dosen Program Studi Teknik Elektro
Fakultas Teknik dan Informatika
Universitas PGRI Palembang

Penulis lahir di Palembang pada 17 Juli 1974. Penulis menyelesaikan pendidikan D3, S1, dan S2 di Universitas Sriwijaya, serta Pendidikan Profesi Insinyur di Universitas Katolik Indonesia Atma Jaya. Sejak tahun 2000, Penulis menjadi dosen di Program Studi Teknik Elektro Fakultas Teknik dan Informatika Universitas PGRI Palembang, mengampu berbagai mata kuliah di bidang ketenagalistrikan. Penulis aktif dalam penelitian dan pengabdian masyarakat, khususnya di bidang Sistem Tenaga Listrik, Energi Terbarukan, dan Teknologi Terapan, serta telah menerima berbagai hibah penelitian dan melaksanakan program pengabdian di berbagai sekolah. Selain itu, Penulis juga menulis di jurnal ilmiah.

BIODATA PENULIS



Putri Anugrah Cahya Dewi, M.Pd.

Dosen Program Studi Sistem Informasi
Fakultas Teknologi Informasi dan Desain
Universitas Primakara

Penulis lahir di Timor-Timur tanggal 28 Agustus 1994. Penulis asli Bali ini adalah dosen tetap pada Program Studi Sistem Informasi Universitas Primakara. Penulis menyelesaikan studi S1 dan S2 bidang Pendidikan Matematika di Universitas Pendidikan Ganesha. Jabatan fungsional terakhirnya adalah Lektor. Penulis turut aktif dalam melakukan publikasi ilmiah pada jurnal terakreditasi nasional dengan fokus penelitian pada bidang pendidikan matematika. Selain sebagai dosen tetap, penulis juga menjabat sebagai Wakil Rektor III Bidang Kemahasiswaan dan Alumni Universitas Primakara.

BIODATA PENULIS**Hasniati, S.Si., M.Si.**

Dosen Program Studi Teknik Informatika
STMIK KHARISMA Makassar

Penulis merupakan lulusan dari program studi S1 dan S2 Matematika Universitas Hasanuddin. Setelah menyelesaikan studi S1 pada tahun 2009, penulis menjadi tenaga pengajar di STMIK KHARISMA Makassar. Penulis telah mempublikasikan lebih dari 20 artikel ilmiah baik nasional maupun internasional. Penulis mulai menekuni bidang menulis pada Tahun 2023. Buku Chapter ini adalah buku kelima yang penulis tekuni. Saat ini penulis menjabat sebagai kepala pusat penelitian dan pengabdian kepada masyarakat di STMIK KHARISMA Makassar.

BIODATA PENULIS



Sutiyono

Dosen Fakultas Teknik Prodi Teknik Mesin
Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur

Penulis lahir di Surabaya tanggal 13 Juli 1960. Penulis hingga saat ini menjadi dosen tetap Fakultas Teknik prodi Teknik Mesin Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur. Alhamdulillah Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada tahun 1986 di jurusan Teknik Kimia Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur kemudian melanjutkan S2 pada Jurusan Teknik Kimia Universitas Gadjah Mada Yogyakarta lulus tahun 1995. Sampai saat ini Penulis menjadi pengurus Badan Pembina Olahraga Mahasiswa Indonesia (Bapomi) Jawa Timur periode 2023-2027. Semoga materi yang penulis berhasil selesaikan menjadi buku ini dapat bermanfaat.

BIODATA PENULIS

Moh. Nafis Husen Romadani, S.Pd., Gr.
Junior Web Developer and Math Tutor

Penulis lahir di Pamekasan pada tanggal 30 November 2000. Merupakan lulusan Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Madura pada tahun 2023. Setelah menyelesaikan studi sarjana, penulis mendapatkan kesempatan untuk mengikuti Program Pendidikan Profesi Guru (PPG) Prajabatan di Universitas Katolik Widya Mandala Surabaya (UKWMS) pada tahun 2024. Saat ini, penulis aktif sebagai freelancer di bidang les privat Matematika serta tengah mengembangkan keterampilan di bidang pemrograman.

BIODATA PENULIS



Evi Sunarti Antu, S.T., M.T..

Dosen Fakultas Teknik
Universitas Ichsan Gorontalo

Penulis lahir di Padang tanggal 29 Desember 1983. Penulis adalah dosen tetap pada Fakultas Teknik, Universitas Ichsan Gorontalo. Penulis menyelesaikan pendidikan terakhir pada Program Studi Teknik Fisika Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya.

BIODATA PENULIS**Nining Puji Lestari, M.Pd.**

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Tarbiyah IAIN Fattahul Muluk Papua

Penulis lahir di Keerom, 29 November 1988. Penulis adalah dosen Pendidikan Matematika pada Fakultas Tarbiyah, IAIN Fattahul Muluk Papua. Menyelesaikan pendidikan S1 Pendidikan Matematika di Universitas Cenderawasih (2007-2012) dan melanjutkan S2 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya (2015-2017). Memiliki ketertarikan yang besar dalam bidang matematika, khususnya dalam pengembangan media pembelajaran dan penulisan bahan materi ajar. Dengan pengalaman dalam mengajar dan menyusun materi pendidikan, penulis berharap karya ini dapat menjadi salah satu referensi yang bermanfaat dalam memahami konsep invers matriks secara menyeluruh. Untuk korespondensi, dapat dihubungi melalui email: lestaning1129988@gmail.com.

BIODATA PENULIS



Ir. Suprihatin, MT

Dosen Program Studi Teknik Kimia
Fakultas Teknik & Sains,
Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur

Penulis lahir di Surabaya tanggal 8 Mei 1963. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Kimia , Fakultas Teknik & Sains, Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Teknik Kimia dan melanjutkan S2 pada Jurusan Teknik Kimia. Penulis menekuni bidang Menulis. Perpindahan Panas, Kalkulus, Fermentasi

BIODATA PENULIS



Dr. Fajriana, S.Si., M.Si

Dosen Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, serta
Teknik Informatika Fakultas Teknik
Universitas Malikussaleh

Penulis lahir di Lhokseumawe tanggal 20 Juli 1976. Penulis adalah dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, dan Teknik Informatika Fakultas Teknik, Universitas Malikussaleh. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Syiah Kuala, dan melanjutkan S2 serta S3 pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sumatera Utara.

BIODATA PENULIS



Dr. Ida Kurnia Waliyanti, S.Si., M.Sc.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Khairun

Penulis lahir di Magetan tanggal 11 Februari 1981. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Khairun. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya (2003), melanjutkan S2 Matematika FMIPA UGM (2011) dan S3 Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada (2022). Penulis menekuni bidang aljabar, khususnya teori modul.