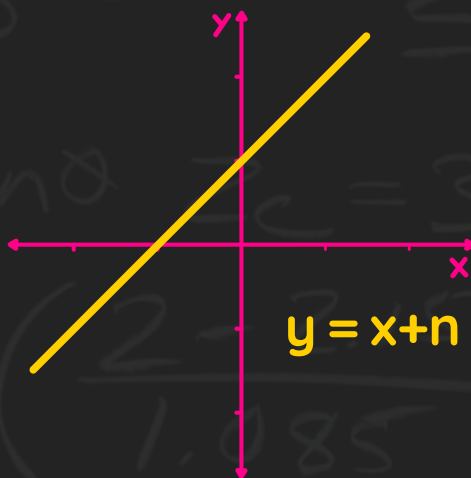


ALJABAR LINEAR



PENULIS :

JONI WILSON SITOPU

HANNA HILYATI AULIA

AHMAD LUTFI

IFAN WIRANTO

AFNARIA

PRIDA N. L. Taneo

RAHMA FAELASOFI

THERESIA MONIKA SIAHAAN

SUTIYONO

ALJABAR LINEAR

**Joni Wilson Sitopu
Hanna Hilyati Aulia
Ahmad Lutfi
Ifan Wiranto
Afnaria
Prida N. L. Taneo
Rahma Faelasofi
Theresia Monika Siahaan
Sutiyono**



GETPRESS INDONESIA

ALJABAR LINEAR

Penulis :

Joni Wilson Sitopu
Hanna Hilyati Aulia
Ahmad Lutfi
Ifan Wiranto
Afnaria
Prida N. L. Taneo
Rahma Faelasofi
Theresia Monika Siahaan
Sutiyono

ISBN :

Editor : Dr. Oktavianis, M.Biomed.
Tri Putri Wahyuni, S.Pd.

Penyunting: Yuliatrini Novita, M.Hum.

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd.

Penerbit: CVGETPRESS INDONESIA
Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi:

Jl. Palarik RT 01 RW 06, Kelurahan Air Pacah
Kecamatan Koto Tengah, Padang, Sumatera Barat

website: www.getpress.co.id
email: adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, Mei 2024

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayahNya, maka Penulisan Buku dengan judul Aljabar Linear dapat diselesaikan dengan kerjasama tim penulis. Aljabar Linear merupakan buku yang membahas mengenai konsep dasar penerapan aljabar linear dengan topik pembahasan, yaitu, konsep dasar, sistem persamaan linier, matriks, determinan, ruang vektor euclidean, ruang vektor umum, diagonalisasi dan bentuk kuadrat, metode numerik dan aplikasi aljabar linier.

Buku ini masih banyak kekurangan dalam penyusunannya. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan dan kesempurnaan buku ini selanjutnya. Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam proses penyelesaian Buku ini. Semoga Buku ini dapat menjadi sumber referensi dan literatur yang mudah dipahami.

Padang, Mei 2024
Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....i

DAFTAR ISIii

DAFTAR GAMBAR.....vi

DAFTAR TABELviii

BAB 1 KONSEP DASAR.....1

1.1 Pendahuluan.....1

1.2 Persamaan Linear.....2

1.3 Fungsi Linear.....4

1.4 Fungsi Komposisi7

1.5 Fungsi Invers.....9

1.6 Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi11

DAFTAR PUSTAKA13

BAB 2 SISTEM PERSAMAAN LINIER.....15

2.1 Persamaan Linier.....15

2.2 Sistem Persamaan Linier.....15

2.3 Bentuk Umum Sistem Persamaan Linier17

2.4 Sistem Persamaan Linier Dua-Tiga Variabel.....18

2.5 Matriks Augmentasi dan Operasi Baris Elementer23

DAFTAR PUSTAKA27

BAB 3 MATRIKS29

3.1 Pendahuluan.....29

3.2 Defenisi dan Ordo Matriks.....30

3.3 Jenis-Jenis Matriks32

3.4 Operasi dengan Matriks.....34

DAFTAR PUSTAKA38

BAB 4 DETERMINAN.....	39
4.1 Definisi Determinan	39
4.2 Sifat-sifat Umum Determinan.....	42
4.3 Teorema Cramer (Solusi sistem persamaan linier melalui determinan).....	46
4.4 Kebalikan Suatu Matriks (Invers Matriks).....	47
4.5 Ringkasan	50
DAFTAR PUSTAKA.....	51
BAB 5 RUANG VEKTOR EUCLIDEAN	53
5.1 Pendahuluan.....	53
5.2 Vektor di Dimensi-2, Dimensi-3 dan Dimensi-n.....	54
5.2.1 Geometri Vektor	54
5.2.2 Operasi pada Vektor	58
5.2.3 Vektor Paralel dan Kolinier	62
5.2.4 Vektor dalam Sistem Koordinat.....	63
5.2.5 Ruang – n (R_n).....	64
5.2.6 Operasi Vektor di R_n	65
5.3 Norm, Perkalian Titik, dan Jarak di R_n	68
5.3.1 Norm dari sebuah Vektor	68
5.3.2 Vektor Unit Standar	70
5.3.3 Jarak di R_n	71
5.3.4 Perkalian Titik.....	73
5.3.5 Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz.....	75
5.4 Ortogonalitas.....	76
5.4.1 Vektor Ortogonal.....	76
5.4.2 Vektor Normal pada Garis dan Bidang.....	77
5.4.3 Proyeksi Orthogonal.....	79
5.4.4 Jarak Titik ke Garis dan Bidang.....	81

2.5 Geometri pada Sistem Linier	82
2.5.1 Vektor dan persamaan parametrik pada garis di R^2 dan R^3	82
2.5.2 Persamaan Vektor dan Parametrik dari Bidang di R^3	83
2.5.3 Garis melalui Dua Titik di R^n	84
2.5.4 Sistem Linier dalam Perkalian Titik.....	85
2.6 Perkalian Silang.....	87
2.6.1 Bentuk Determinan Perkalian Silang.....	89
2.6.2 Interpretasi Geometri dari Perkalian Silang.....	90
2.6.3 Interpretasi Geometri dari Determinan	93
DAFTAR PUSTAKA	94
BAB 6 RUANG VEKTOR UMUM.....	95
6.1 Ruang Vektor Real.....	95
6.2 Sub Ruang.....	96
6.2.1 Ruang Penyelesaian Sistem Homogen	97
6.2.2 Merentang.....	97
6.3 Kebebasan Linear	98
6.4 Basis dan Dimensi	99
6.5 Ruang Baris, Ruang Kolom Dan Ruang Nul.....	101
6.6 Rank Dan Nulitas	103
DAFTAR PUSTAKA	109
BAB 7 DIAGONALISASI DAN BENTUK KUADRAT	111
7.1 Pendahuluan.....	111
7.2 Diagonalisasi	112
7.3. Diagonalisasi Ortogonal.....	122
DAFTAR PUSTAKA	128

BAB 8 METODE NUMERIK.....	129
8.1 Deskripsi Metode Numerik	129
8.2 Sistem Persamaan Linear (SPL)	134
DAFTAR PUSTAKA.....	147
BAB 9 APLIKASI ALJABAR LINIER.....	149
9.1 Pengertian Aljabar Linier	149
9.2 Penerapan Aljabar Linear	150
9.3 Aplikasi Aljabar Linier	156
DAFTAR PUSTAKA.....	167
BIODATA PENULIS.....	169

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1 Contoh membuat grafik, (2024) 5

Gambar 1. 2 Contoh membuat grafik, (2024) 6

Gambar 1. 3 Fungsi Komposisi (John A. Dossey et al. (2006)) 8

Gambar 1. 4 Fungsi Invers (John A. Dossey et al. (2006)) 9

Gambar 1. 5 Fungsi Invers Dari Fungsi Komposisi (K.H. Rosen, (1995))..... 11

Gambar 2. 1 Kemungkinan solusi sistem dua persamaan dua variabel
 (a) Tidak ada solusi, (b) Satu solusi, (c) Solusi banyak tak
 terhingga..... 19

Gambar 2. 2 Kemungkinan solusi sistem tiga persamaan tiga variabel
 (a)(b)(c)(d) Tidak ada solusi, (e) Satu solusi, (f)(g)(h)
 Solusi banyak tak terhingga 20

Gambar 2. 3 Grafik solusi sistem di titik (2 0)..... 21

Gambar 5. 1 Besar dan Arah Vektor 54

Gambar 5. 2 Komponen Vektor 55

Gambar 5. 3 Vektor Posisi..... 56

Gambar 5. 4 Vektor-Vektor Ekuivalen 58

Gambar 5. 5 Aturan Jajargenjang Penjumlahan Vektor 58

Gambar 5. 6 Aturan Segitiga Penjumlahan Vektor 59

Gambar 5. 7 Penjumlahan Dua Vektor secara Geometri 59

Gambar 5. 8 Penjumlahan Tiga Vektor secara Geometri 60

Gambar 5. 9 Pengurangan Vektor 60

Gambar 5. 10 Perkalian Vektor dengan Skalar..... 60

Gambar 5. 11 Perkalian Vektor Secara Geometri..... 61

Gambar 5. 12 Vektor Paralel..... 62

Gambar 5. 13 a Vektor 63

Gambar 5. 14 Vektor di R^2 dan R^3 63

Gambar 5. 15 Vektor Posisi titik awalnya bukan di titik 0 (0,0)..... 64

Gambar 5. 16 a Norm u di R^2 68

Gambar 5. 17 b Norm u di R^3 68

Gambar 5. 18 Jarak antara dua titik..... 71

Gambar 5. 19 Sudut Antara Dua Vektor 73

Gambar 5. 20 Ketidaksamaan Segitiga..... 76

Gambar 5. 21 Vektor Normal pada Garis dan Bidang..... 77

Gambar 5. 22 Proyeksi Orthogonal Vektor u pada v..... 79

Gambar 5. 23 Jarak Titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ Ke Bidang..... 82

Gambar 5. 24 Garis Paralel dengan Vektor v..... 83

Gambar 5. 25 Persamaan Bidang Paralel Dengan Bidang W	83
Gambar 5. 26 Translasi $Ax = 0$ menjadi $Ax = b$	87
Gambar 5. 27 $u \times v$ Orthogonal Dengan u Dan v	90
Gambar 5. 28 Interpretasi Geometri dari Perkalian Silang.....	90
Gambar 5. 29 Interpretasi Determinan pada Perkalian Silang	93
Gambar 9. 1 Jaringan Empat Node	157

DAFTAR TABEL

Tabel 3. 1 Jumlah Mahasiswa 31

Tabel 9. 1 Penyetaraan unsur kimia..... 159

BAB 1

KONSEP DASAR

Oleh Joni Wilson Sitopu

1.1 Pendahuluan

Matematika sebagai alat untuk meningkatkan kemampuan berpikir secara umum, dapat dideskripsikan sebagai disiplin ilmu yang mengeksplorasi pola dari struktur, perubahan dan ruang, (dalam Joni Wilson Sitopu., dkk., 2024)). Matematika sebagai suatu ilmu mempunyai ciri-ciri yaitu (1) memiliki objek-objek abstrak, (2) berlandaskan pada kesepahaman, (3) memiliki pola pikir deduktif, (4) memiliki simbol/lambang yang hampa makna, (5) memperhatikan semesta. diskusi, dan (6) konsisten dalam sistem. Aljabar linier adalah salah satu bidang matematika yang paling dapat diterapkan di semua disiplin ilmu. Aljabar linier adalah bagian dari matematika yang membahas tentang sistem persamaan linier seperti pemetaan linier dan representasinya dalam ruang vektor atau dengan matriks. Sebagai contoh, penerapan aljabar linier dalam landasan geometri modern, yang mencakup definisi objek dasar seperti garis, bidang, dan rotasi. Analisis fungsional, yang termasuk dalam matematika analitik, dapat dianggap sebagai implementasi aljabar linier pada ruang fungsi. Aljabar linier juga sering digunakan secara luas dalam bidang sains dan teknik, karena mampu memodelkan berbagai fenomena alam dan memberikan solusi secara efisien terhadap model-model tersebut. Dalam sistem nonlinier, aljabar linier kerap digunakan sebagai pendekatan linier, didasarkan pada konsep bahwa turunan fungsi multivariabel pada suatu titik dapat dianggap

sebagai pemetaan linier terbaik untuk memproyeksikan nilai fungsi di sekitar titik tersebut.

Buku teks ini dimaksudkan sebagai pengantar aljabar linier abstrak yang lengkap dan teliti secara matematis untuk mahasiswa sarjana, bahkan mungkin mahasiswa tahun pertama, yang berspesialisasi dalam matematika.

Aljabar linier adalah salah satu bidang matematika yang paling dapat diterapkan. Ini digunakan oleh ahli matematika murni dan oleh ilmuwan matematika yang terlatih dari semua disiplin ilmu. Buku ini lebih ditujukan kepada pembaca pertama dibandingkan pembaca kedua, namun diharapkan tulisannya cukup jelas dan cukup detail sehingga siapa pun yang membaca teksnya dapat memahaminya. Meskipun buku ini ditulis dalam gaya informal dan memiliki banyak contoh dasar, proposisi dan teorema umumnya dibuktikan dengan cermat, dan siswa yang tertarik pasti akan dapat merasakan gaya teks pembuktian teorema.

1.2 Persamaan Linear

Pada aljabar linear dibahas tentang yang disebut persamaan linear. Misalnya, kita ingin mencari semua bilangan real x sehingga $x = x^2 - 6$. Untuk menyelesaikannya, kita dapat menulis ulang persamaan kita menjadi $x^2 - x - 6 = 0$ lalu memfaktorkan ruas kirinya. Maka diperoleh $(x - 3)(x + 2) = 0$, sehingga $x = 3$ atau $x = -2$ karena $x - 3$ atau $x + 2$ harus sama dengan nol. Mencari akar-akar polinomial merupakan permasalahan nonlinier, sedangkan topik yang akan kita bahas adalah teori persamaan linier. Persamaan linear yang paling sederhana adalah persamaan $ax = b$, dimana x merupakan variabel, dan a dan b ialah konstanta. Misalnya, $4x = 3$. solusinya adalah $x = 3/4$.

Secara umum, jika $a \neq 0$, maka $x = b/a$, dan solusi ini unik. Jika $a = 0$ dan $b \neq 0$, tidak ada penyelesaian karena persamaannya menyatakan $0 = b$. Dan jika a dan b sama-sama 0, setiap bilangan real x adalah solusinya. Ini menunjukkan sifat umum persamaan linear. Entah terdapat solusi unik (yaitu tepat satu), tidak ada solusi, atau banyak solusi.

Secara umum, jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ ialah variabel dan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan c bilangan real tetap, maka persamaannya dapat ditulis sebagai berikut ;

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

disebut persamaan linier.

Dimana :

a_i : koefisien ke i

x_i : variable ke i

c : konstanta.

Contoh :

Perhatikan persamaan linier berikut:

$$x + 3y = 7$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - y + 3z = -1$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

Berikut ini bukan persamaan linear

$$x + 3y^2 = 4$$

$$3x + 2y - xy = 5$$

$$\sin x + y = 0$$

$$\sqrt{x} + 2x^2 + x^3 = 1$$

1.3 Fungsi Linear

Fungsi linier adalah jenis fungsi matematika di mana variabel independennya memiliki pangkat tertinggi yang sama dengan satu (dalam Joni Wilson Sitopu., dkk., 2023)). Fungsi linier merupakan jenis fungsi matematika yang berbentuk $f(x) = ax + b$, dengan a dan b ialah bilangan real. Dimana a melambangkan gradient garis dan b ialah titik potong sumbu y (kadang disebut perpotongan vertical). (dalam Meilida Eka Sari, dkk., 2022)

Persamaan linier dua variabel x dan y merupakan persamaan dalam bentuk $y = mx + b$, dengan m dan b adalah konstanta. Grafik persamaan linear berbentuk garis. Demikian pula fungsi linier adalah fungsi yang grafiknya berupa garis tidak vertikal. Fungsi linier memiliki laju perubahan yang konstan dan dapat direpresentasikan dengan persamaan linier dua variabel.

Contoh ;

Persamaan $3x + 4y - 2 = 0$. y diubah sebagai subjek sebagai berikut :

$$3x + 4y = 2$$

$$4y = 2 - 3x$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

Maka, karena $y = f(x)$, maka $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

gradien sebesar $-\frac{3}{4}$ dan titik potong pada sumbu y sebesar $\frac{1}{2}$.

Gambar fungsi linier berikut

$$(a) y = 3x + 1$$

$$(b) y = 1 - 3x$$

Penyelesaian

(a) $y = 3x + 1$

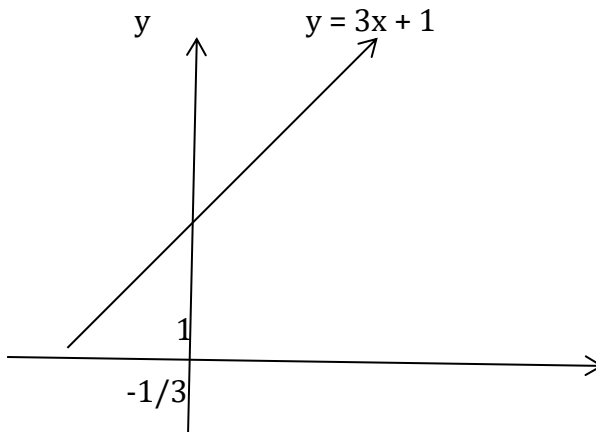
- titik potong sumbu x, maka $y = 0$

diperoleh $3x + 1 = 0, x = -\frac{1}{3}$

melalui titik $(-\frac{1}{3}, 0)$

- titik potong sumbu y, maka $x = 0$

diperoleh $y = 1$ melalui titik $(0,1)$



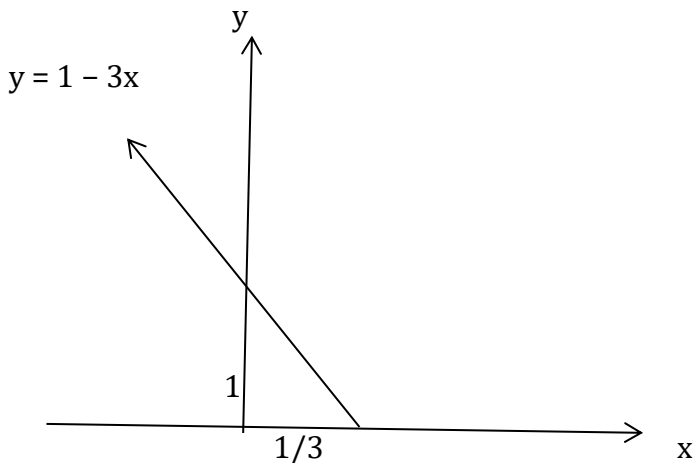
Gambar 1. 1 Contoh membuat grafik, (2024)

(b) $y = 1 - 3x$

- titik potong sumbu x, maka $y = 0$, diperoleh $1 - 3x = 0, x = \frac{1}{3}$, melalui titik $(\frac{1}{3}, 0)$

- titik potong sumbu y, maka $x = 0$, diperoleh $y = 1$, melalui titik $(0,1)$

Grafiknya adalah sebagai berikut ;



Gambar 1. 2 Contoh membuat grafik, (2024)

Contoh

Tentukan gradien dan titik potong vertikal setiap fungsi linier berikut dengan menyusunnya kembali menjadi bentuk $f(x) = ax + b$ (catatan: $y = f(x)$)

(a) $3y + 2x = 6$

(b) $6x - 3 = \frac{y}{2} + 5$

Penyelesaian

a. $3y + 2x = 6$

$$3y = 6 - 2x$$

$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

Gradien = $-\frac{2}{3}$, titik potong vertikal = 2.

$$b. \quad 6x - 3 = \frac{y}{2} + 5$$

$$6x - 3 - 5 = \frac{y}{2}$$

$$6x - 8 = \frac{y}{2}$$

$$12x - 16 = y$$

$$f(x) = 12x - 16$$

Gradient = 12, titik potong vertikal = -16.

1.4 Fungsi Komposisi

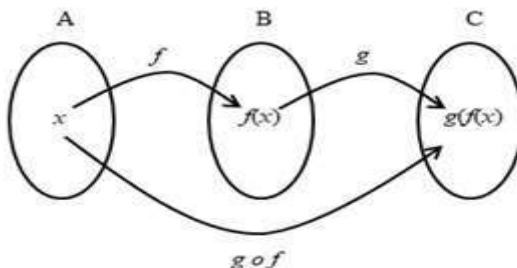
Dua buah fungsi atau lebih dapat dipadukan atau dikombinasikan, dengan syarat-syarat tertentu, untuk membentuk suatu fungsi baru. Dengan menggunakan operasi komposisi yang disimbolkan dengan tanda “o”, fungsi baru dapat dibentuk berdasarkan fungsi-fungsi awal $f(x)$ dan $g(x)$. (dalam Lulut Alfaris, dkk., 2022)).

a. $(f \circ g)(x)$ dibaca : f bundaran gx atau fgx

b. $(g \circ f)(x)$ dibaca : g bundaran fx atau gfx

Hal penting yang perlu diingat ketika mencari fungsi komposisi adalah urutan penulisan fungsi: $fg(x)$ artinya terapkan dulu fungsi g ke x , lalu terapkan fungsi f ke hasilnya.

Perhatikan gambar berikut ;



Gambar 1. 3 Fungsi Komposisi (John A. Dossey et al. (2006))

Secara matematis

$$\left. \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ g: B \rightarrow C, \end{array} \right\} \text{ maka } f: A \rightarrow C \text{ disebut fungsi komposisi}$$

Secara matematis ditulis:

$$f: A \rightarrow C \text{ atau } f: x \rightarrow g(f(x)) \text{ maka } f(x) = g(f(x)). \text{ atau}$$

$$f: x \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Contoh ;

Fungsi f, g dan h didefinisikan oleh:

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = 3x + 1 \text{ dan } h(x) = x^2$$

Tentukan:

- $(fog)(x)$ dan $(goh)(x)$
- $((fog)oh)(x)$ dan $(fo(goh))(x)$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \text{a. } (fog)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x + 1) \\ &= (3x + 1) + 2 \\ &= 3x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (goh)(x) &= g(h(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

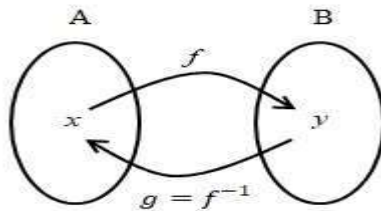
$$\begin{aligned} \text{b. } ((f \circ g) \circ h)(x) &= ((f \circ g) h(x)) \\ &= (f \circ g)(x^2) \\ &= 3x^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ h))(x) &= f(g(h(x))) \\ &= f(3x^2 + 1) \\ &= (3x^2 + 1) + 2 \\ &= 3x^2 + 3 \end{aligned}$$

1.5 Fungsi Invers

Apabila terdapat relasi antara fungsi $f: A \rightarrow B$ dan fungsi $g: B \rightarrow A$, maka fungsi g dianggap sebagai invers dari f dan dilambangkan dengan f^{-1} atau $g = f^{-1}$.

Jika f^{-1} berbentuk fungsi, maka fungsi tersebut disebut sebagai fungsi invers. (dalam Nazariah., dkk., 2022)



Gambar 1. 4 Fungsi Invers (John A. Dossey et al. (2006))

Secara matematis

$f: x \rightarrow y$ atau $y: f(x)$, maka $f^{-1}: y \rightarrow x$ atau $x = f^{-1}(y)$.

Invers dari fungsi $y = f(x)$ adalah $x = f^{-1}(y)$

Contoh :

Fungsi $f(x)$ didefinisikan oleh:

a. $5x - 7$ b. $2x^2 - 5$

tentukan $f^{-1}(x)$.

Penyelesaian:

a. $y = f(x)$

$$y = 5x - 7$$

$$5x - 7 = y$$

$$5x = y + 7$$

$$x = \frac{y+7}{5}, x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{5}$$

b. $y = f(x)$

$$y = 2x^2 - 5$$

$$2x^2 - 5 = y$$

$$2x^2 = y + 5$$

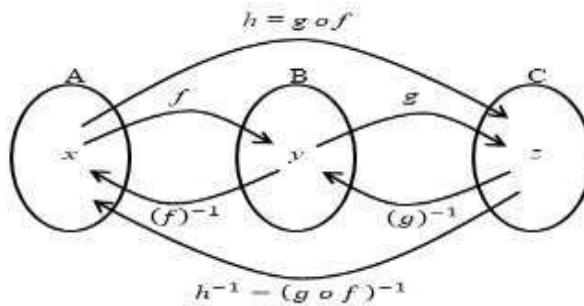
$$x^2 = \frac{y+5}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{y+5}{2}}, x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x) = \pm \sqrt{\frac{y+5}{2}}$$

1.6 Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

Perhatikan diagram vektor berikut ini.



Gambar 1. 5 Fungsi Invers Dari Fungsi Komposisi (K.H. Rosen, (1995))

Secara matematis

$f: A \rightarrow C$ atau $f: x \rightarrow g(f(x))$ maka $f(x) = g(f(x))$. atau

$f: x \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f: C \rightarrow A$ atau $f: x \rightarrow (g \circ f)^{-1}(x)$

Contoh ;

Diketahui fungsi

$$f(x) = 5x + 3$$

$$g(x) = 4 - 3x.$$

carilah $(g \circ f)(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$

Penyelesaian;

$$1) (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(5x + 3)$$

$$= 4 - 3 (5x + 3)$$

$$= 4 - 15x - 9$$

$$= -5 - 15x$$

$$(g \circ f)(x) = y$$

$$-5 - 15x = y$$

$$-15x = y + 5$$

$$x = \frac{y+5}{-15}$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+5}{-15}$$

DAFTAR PUSTAKA

- John A. Dossey et al. (2006). *Discrete Mathematics*, fifth edition. Addition-Wesley. Pearson Education, Inc.
- Joni Wilson Sitopu., dkk., (2023). Matematika Pertanian. PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI. Padang. Sumatera Barat.
- Joni Wilson Sitopu., dkk., (2024). Matematika Dasar. Kita Menulis. Medan.
- K.H. Rosen, (1995). Discrete Mathematics and its Applications, McGraw Hill
- Lulut Alfari, dkk., (2022). LOGIKA DAN STRUKTUR DISKRIT. PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI. Padang. Sumatera Barat.
- Meilida Eka Sari, dkk., (2022). Matematika Dasar. PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI. Padang. Sumatera Barat,
- Nazariah., dkk.,(2022). Konsep Dasar Matematika. PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI. Padang. Sumatera Barat.

BAB 2

SISTEM PERSAMAAN LINIER

Oleh Hanna Hilyati Aulia

2.1 Persamaan Linier

Persamaan linier merupakan fundamental dari sistem persamaan linier. Suatu persamaan dikatakan linier apabila variabel berderajat satu dan tidak ada perkalian antar variabel. Bentuk umum dari persamaan linier dituliskan sebagai berikut

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (1)$$

dengan x y merupakan variabel. Koefisien a_1 a_2 $\cdots$ a_n dan konstanta b adalah bilangan real atau kompleks.¹

2.2 Sistem Persamaan Linier

Dalam matematika, sistem persamaan linier (atau sistem linier) adalah kumpulan dari satu atau lebih persamaan linier yang melibatkan variabel yang sama. Sebagai contoh, diberikan suatu sistem persamaan linier yang terdiri dari dua persamaan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned} \quad (2)$$

dengan a_{11} a_{12} $\cdots$ a_{2n} merupakan bilangan konstan, Persamaan di atas merupakan sistem dari dua variabel

¹ David C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, 5th ed. (Pearson Education, 2016).

$x_1 \cdots x_n$. Solusi sistem linier (2) adalah penentuan nilai pada variabel sedemikian rupa sehingga semua persamaan terpenuhi secara bersamaan.

Contoh 2.1

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 4x - 6y &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Penyelesaian:

Salah satu metode untuk menyelesaikan sistem di atas adalah dengan manipulasi aljabar dan substitusi. Pertama, tuliskan x dalam bentuk y pada persamaan pertama sebagai berikut

$$x = 5 - y$$

Kemudian, substitusikan pada persamaan bawah sehingga menjadi persamaan satu variabel.

$$4(5 - y) - 6y = 0$$

Persamaan tersebut dapat dipengan mudah diselesaikan karena hanya memuat variabel y . Diperoleh $y = 2$. Selanjutnya, solusi ini dapat kita substitusikan ke persamaan untuk menentukan nilai x , diperoleh $x = 3$,

Sistem linier adalah dasar dari aljabar linier, suatu mata pelajaran yang digunakan dalam sebagian besar matematika modern. Algoritme komputasi untuk mencari solusi merupakan bagian penting dari aljabar linier numerik, dan memainkan peran penting dalam bidang teknik, fisika, kimia, ilmu komputer, dan ekonomi.

2.3 Bentuk Umum Sistem Persamaan Linier

Bentuk umum dari sistem dari m persamaan linier dengan n variabel dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (4)$$

dimana $x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n$ adalah variabel, $a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{mn}$ (tidak semuanya nol) adalah koefisien dan $b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m$ konstanta.²

Sistem persamaan linier juga dapat dituliskan dalam bentuk vektor seperti berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

ataupun dalam bentuk matriks

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pada kondisi tertentu ketika $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, sistem persamaan linier disebut **sistem persamaan linier homogen**.

² Howard Anton; Chris Rorres, *Elementary Linear Algebra Applications Version*, 11th ed. (Wiley, 2014), <https://doi.org/10.1201/b17671-9>.

Solusi dari sistem persamaan linier dengan n variabel $x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n$ adalah barisan dari n buah $s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_n$ yang memenuhi

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad \cdots, x_n = s_n$$

sehingga membuat pernyataan benar. Kumpulan solusi dalam notasi geometri dapat dituliskan sebagai

$$(s_1, s_2, \cdots, s_n)$$

Solusi di atas dinamakan n -tupel terorder. Dengan notasi ini, dipahami bahwa semua variabel muncul dalam urutan yang sama di setiap persamaan. Jika $n = 2$, maka tupel ke- n disebut terurut berpasangan, dan jika $n = 3$, maka disebut tripel terurut.

Sebagai contoh, pada sistem (3) memiliki solusi berikut:

$$x = 3 \quad y = 2$$

solusi tersebut dapat dituliskan sebagai $(3 \ 2)$,

2.4 Sistem Persamaan Linier Dua-Tiga Variabel

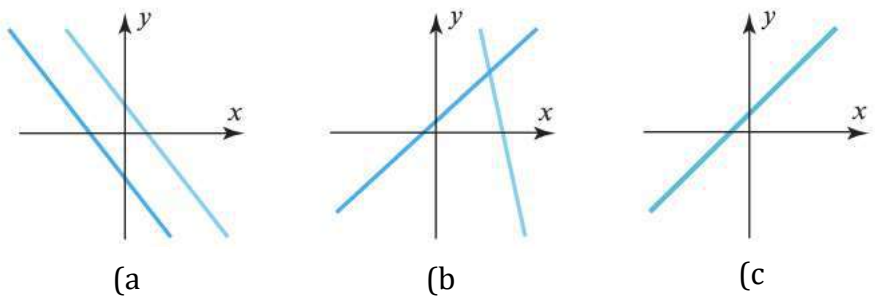
Sistem persamaan linier dua variabel berhubungan dengan perpotongan dua garis. Misal diberikan sistem linier berikut:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad (7)$$

yang grafik persamaannya berupa garis pada bidang xy . Setiap solusi $(x \ y)$ dari sistem bersesuaian dengan titik potong garis, jadi ada tiga kemungkinan (Gambar 2.1):

1. Tidak ada solusi, garis-garisnya mungkin sejajar dan berbeda, dalam hal ini tidak ada perpotongan.
2. Satu solusi, garis-garis tersebut hanya boleh berpotongan di satu titik, dalam hal ini sistem mempunyai tepat satu titik.
3. Solusi banyak tak terhingga, Garis-garisnya mungkin berhimpitan, dalam hal ini terdapat banyak titik potong

yang tak terhingga (titik-titik pada garis yang sama) dan akibatnya banyak sekali penyelesaiannya.



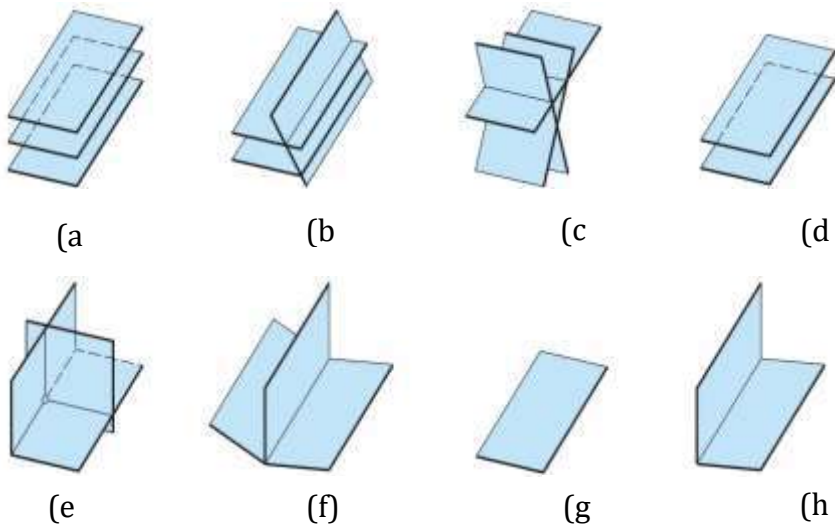
Gambar 2. 1 Kemungkinan solusi sistem dua persamaan dua variabel (a) Tidak ada solusi, (b) Satu solusi, (c) Solusi banyak tak terhingga

Secara umum, kita menyatakan bahwa suatu sistem linier dikatakan konsisten jika sistem tersebut memiliki setidaknya satu solusi, dan tidak konsisten jika tidak memiliki solusi sama sekali. Dengan demikian, sistem linear konsisten yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel yang tidak diketahui dapat memiliki satu solusi tunggal atau berbagai solusi tak terhingga, sementara kemungkinan tidak ada solusi sama sekali dikecualikan. Prinsip yang sama berlaku untuk sistem linier yang terdiri dari tiga persamaan dengan tiga variabel yang tidak diketahui. Diberikan sistem berikut:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Persamaan-persamaan di atas apabila digambarkan secara geometri berbentuk bidang pada Gambar 2.2. Eksistensi solusi

dari sistem (8) di atas sama seperti sebelumnya, yakni: tidak ada solusi, satu solusi dan solusi banyak tak terhingga.



Gambar 2. 2 Kemungkinan solusi sistem tiga persamaan tiga variabel (a)(b)(c)(d) Tidak ada solusi, (e) Satu solusi, (f)(g)(h) Solusi banyak tak terhingga

Contoh 2.2 Sistem Linier Satu Solusi

Tentukan penyelesaian sistem linier berikut

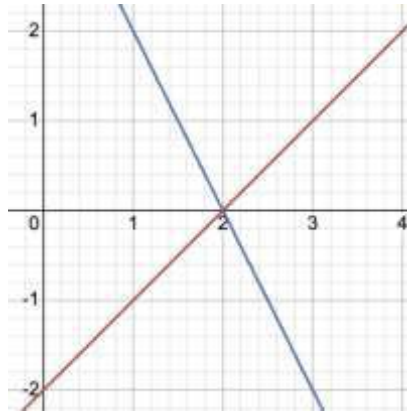
$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\ 2x + y &= 4\end{aligned}$$

Kita dapat menghilangkan x dari persamaan kedua dengan menambahkan -2 kali persamaan pertama persamaan ke yang kedua. Ini menghasilkan sistem yang disederhanakan

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\ y &= 0\end{aligned}$$

dari persamaan-persamaan tersebut diperoleh solusi unik $x = 2$ dan $y = 0$. Secara geometris, garis-garis ini diwakili oleh

persamaan-persamaan dalam sistem berpotongan di satu titik (2 0).



Gambar 2. 3 Grafik solusi sistem di titik (2 0).

(<https://www.mathway.com/Graph>)

Contoh 2.3 Sistem Linier Tanpa Solusi

Tentukan penyelesaian sistem linier berikut

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\4x + 4y &= 2\end{aligned}$$

Kita dapat menghilangkan x dari persamaan kedua dengan menambahkan -4 kali persamaan pertama persamaan ke yang kedua. Ini menghasilkan sistem yang disederhanakan

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\0 &= -10\end{aligned}$$

Persamaan kedua kontradiktif, sehingga sistem yang diberikan tidak mempunyai solusi. Secara geometris, artinya garis-garis yang bersesuaian dengan persamaan pada sistem asal adalah sejajar dan berbeda. Hal ini dapat diperiksa dengan membuat

grafik garis atau dengan menunjukkan bahwa keduanya memiliki kemiringan yang sama tetapi titik potong y berbeda.

Contoh 2.4 Sistem Linier dengan Solusi Banyak Tak Berhingga

Tentukan penyelesaian sistem linier berikut

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 6x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Dengan menambahkan -2 kali persamaan pertama ke persamaan kedua, kita dapat menghilangkan variabel x dari persamaan kedua. Langkah ini menghasilkan sistem yang lebih sederhana

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan kedua tidak memberikan batasan spesifik pada nilai x dan y . Oleh karena itu, solusi dari sistem ini adalah setiap pasangan nilai x dan y yang memenuhi persamaan tunggal

$$3x + y = 1$$

Secara geometris, hal ini mengindikasikan bahwa garis-garis yang mewakili dua persamaan asli sistem tersebut saling bersinggungan. Salah satu pendekatan untuk menggambarkan himpunan solusinya adalah dengan menyelesaikan salah satu persamaan untuk variabel x dalam bentuk y , diperoleh $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y$ dan menetapkan suatu nilai sebarang t terhadap y .

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \quad y = t$$

Dengan mengambil nilai $t = 1$, diperoleh solusi khusus/spesifik $x = \frac{2}{3}$ dan $y = 1$, atau $\left(\frac{2}{3} \ 1\right)$.

Contoh 2.5 Sistem Linier dengan Solusi Banyak Tak Berhingga

Tentukan penyelesaian sistem linier berikut

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 2 \\2x - 4y + 2z &= 4 \\3x - 6y + 3z &= 6\end{aligned}$$

Sistem ini dapat diselesaikan dengan inspeksi, karena persamaan kedua dan ketiga merupakan kelipatan persamaan pertama. Secara geometris, ini berarti ketiga bidang tersebut berimpit dan nilai x , y , dan z yang memenuhi persamaan

$$x - 2y + z = 2 \quad (9)$$

secara otomatis memenuhi ketiga persamaan. Oleh karena itu, cukup mencari solusi dari persamaan (9). Cara untuk melakukannya adalah dengan pertama-tama menyelesaikan persamaan ini untuk x dalam bentuk y dan z , kemudian menetapkan nilai arbitrer r dan s (sebagai parameter) untuk kedua variabel ini, dan kemudian menyatakan solusi dengan tiga persamaan parametrik

$$x = 2 + 2r - s \quad y = r \quad z = s$$

Solusi spesifik dapat diperoleh dengan memilih nilai numerik untuk parameter r dan s . Misalnya, mengambil $r = 1$ dan $s = 1$ menghasilkan solusi $(3 \ 1 \ 1)$.

2.5 Matriks Augmentasi dan Operasi Baris Elementer

Untuk sistem yang melibatkan banyak persamaan dan variabel, kompleksitas aljabar dalam menentukan solusi juga meningkat. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan perhitungan yang dapat menyederhanakan notasi dan standarisasi prosedur. Salah satu pendekatan yang umum digunakan adalah

menggunakan matriks, seperti yang terlihat pada sistem persamaan (6) dan metode operasi baris elementer. Matriks augmentasi dari sistem linier m persamaan dan n variabel dapat dituliskan sebagai berikut³

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Metode baris elementer (elementary row operation) pada matriks adalah teknik dasar untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan melakukan operasi aljabar pada matriks tersebut. Operasi tersebut tidak mengubah himpunan solusi dan menghasilkan serangkaian matriks yang semakin sederhana. Tujuan akhirnya adalah mencapai suatu titik di mana kita dapat menentukan apakah sistem tersebut konsisten, dan jika iya, apa solusinya. Beberapa operasi aljabar yang digunakan dalam metode ini antara lain::

1. Mengalikan persamaan dengan konstanta bukan nol
2. Menukarkan dua persamaan
3. Menambahkan suatu konstanta kali satu persamaan ke persamaan lainnya

Karena baris (horizontal) dari matriks augmentasi sesuai dengan persamaan dalam sistem terkait, ketiga operasi ini bersesuaian dengan

1. Mengalikan baris dengan konstanta bukan nol
2. Menukarkan dua baris

³ Grey Ballard et al., 'Linear Algebra', *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 32, no. 3 (2011): 866–901, <https://doi.org/10.1137/090769156>.

3. Menambahkan suatu konstanta kali satu baris ke baris lainnya

Berikut ini akan dijelaskan cara menggunakan operasi baris elementer dan matriks augmentasi untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga variabel. Prosedur yang lebih sistematis akan dijelaskan lebih lanjut, namun pada tahap ini kita akan menggunakan contoh sederhana untuk memperjelas pemahaman tentang perhitungannya.

Contoh 2.6 Operasi Baris Elementer

Tentukan penyelesaian sistem linier berikut

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 2 \\ 2x + 4y + 3z &= 3 \\ 3x + 2z &= 1\end{aligned} \quad (10)$$

Matriks augmentasi dari sistem di atas adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer, tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, tambahkan -3 kali baris pertama ke baris ketiga, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Tambahkan baris ketiga ke baris kedua, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris kedua dengan $\frac{1}{14}$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6/14 \\ 0 & 6 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Tambahkan baris pertama dengan 2 kali baris kedua dan baris ketiga dengan -6 kali baris kedua, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 16/14 \\ 0 & 1 & 0 & -6/14 \\ 0 & 0 & -1 & -71/14 \end{bmatrix}$$

Tambahkan baris pertama dengan baris ketiga, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -55/14 \\ 0 & 1 & 0 & -6/14 \\ 0 & 0 & -1 & -71/14 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ketiga dengan -1, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -55/14 \\ 0 & 1 & 0 & -6/14 \\ 0 & 0 & 1 & 71/14 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa matriks augmentasi hasil operasi baris elementer di atas ekuivalen dengan $x = -55/14$ $y = -6/14$ $z = 71/14$, yang merupakan solusi dari sistem linier (10).

DAFTAR PUSTAKA

- Ballard, Grey, James Demmel, Olga Holtz, and Oded Schwartz. 'Linear Algebra'. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 32, no. 3 (2011): 866–901. <https://doi.org/10.1137/090769156>.
- Howard Anton; Chris Rorres. *Elementary Linear Algebra Applications Version*. 11th ed. Wiley, 2014. <https://doi.org/10.1201/b17671-9>.
- Lay, David C. *Linear Algebra and Its Applications*. 5th ed. Pearson Education, 2016.

BAB 3 MATRIKS

Oleh Ahmad Lutfi

3.1 Pendahuluan

Menurut Pertiwi (2018) konsep matriks selalu digunakan dalam kehidupan sehari-hari, baik secara sadar maupun tidak sadar. Ini terutama berlaku bagi orang-orang yang pernah bersekolah. Teori matriks adalah salah satu bahagian dari ilmu Aljabar Linear yang sangat penting bagi matematika. Matriks adalah kumpulan bilangan real atau kompleks yang disusun berdasarkan aturan baris dan kolom dan berbentuk persegi Panjang (Ilhamsyah, Helmi and Fran, 2017)

Arthur Carley (1821-1895) pertama kali memperkenalkan gagasan matriks pada tahun 1859 ketika dia menyelidiki sistem persamaan linear dan transformasi linear. Matriks pada awalnya hanya dianggap sebagai permainan karena tidak dapat digunakan. Matriks masih digunakan dalam mekanika kuantum hingga tahun 1925, 30 tahun setelah kematian Cayley. Selain itu, matriks berkembang pesat dan digunakan di banyak bidang (Asih, Putra and Andriani, 2023)

2Dalam keseharian menjalankan aktivitas kehidupan, kita sering menghadapi masalah yang ternyata merupakan masalah matematika. Persoalan akan lebih mudah diselesaikan jika Anda mengubahnya menjadi bahasa atau persamaan matematika. Namun, jika suatu persoalan seringkali terdiri dari lebih dari dua persamaan atau variabel, kita juga sering mengalami kesulitan. Bahkan di negara-negara maju, model ekonomi sering

memerlukan sistem persamaan yang memiliki puluhan atau bahkan ratusan variabel. Pada dasarnya, matriks membantu kita membuat analisis yang mencakup hubungan variabel-variabel dari persoalan tersebut.

Matriks biasa digunakan untuk menyatakan bilangan-bilangan dalam jajaran empat persegi Panjang atau persegi, dan mereka dapat diperoleh dari suatu sistem persamaan linier dan sebaliknya. Dalam kehidupan yang dijalankan keseharian, matriks dapat digunakan dalam mempermudah seseorang dalam melakukan penyajian data dari tabel dan selanjutnya mampu melakukan operasi bilangan yang ada didalamnya. Dalam bab 3 ini akan dibahas yaitu defnisi matriks, ordo matriks, jenis matriks, operasi matriks dan sifat-sifatnya.

3.2 Defenisi dan Ordo Matriks

Matriks adalah susunan bilangan yang disusun antara kurung biasa atau siku. Susunan ini terdiri dari baris dan kolom berbentuk persegi atau persegi panjang. Matriks adalah kumpulan bilangan yang dapat berfungsi dalam hubungan tertentu dan dikenal sebagai elemen, unsur, atau entri. Matriks adalah alat yang efektif untuk menganalisis keadaan yang terdiri dari berbagai komponen yang saling berhubungan.

Karena matriks banyak berasal dari sistem persamaan, terutama sistem persamaan linear (SPL). SPL dengan dua, tiga, atau empat variabel mudah diselesaikan dengan metode eliminasi atau substitusi, tetapi SPL dengan lima variabel atau lebih kurang efektif dan rumit. Matriks yang biasa kita lihat dalam kehidupan sehari-hari adalah tabel yang dapat dilihat di kampus. Tabel berikut menunjukkan data universitas dalam bentuk matriks.

Contoh: tabel matrikulasi yang memuat data jumlah mahasiswa disuatu universitas

Tabel 3. 1 Jumlah Mahasiswa

Angkatan	Pria	Perempuan
I	130	200
II	140	210
III	150	220

Dari tabel di atas, apabila angka-angka saja dan ditulis dalam tanda siku, bentuknya akan menjadi $\begin{bmatrix} 130 & 200 \\ 140 & 210 \\ 150 & 220 \end{bmatrix}$. Bentuk sederhana inilah yang kita sebut sebagai suatu matriks. Selanjutnya Huruf kapital digunakan untuk menunjukkan matriks. (A, C, D, E) dan sebagainya.

Contoh Matriks $D = \begin{bmatrix} 44 & 55 \\ 77 & 66 \\ 88 & 99 \end{bmatrix}$

Bilangan-bilangan tersebut diatas tersusun dalam baris dan kolom yang dinamakan suatu unsur atau elemen.

Suatu matriks biasanya dinyatakan dengan Ordo. Ordo suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan diikuti dengan banyaknya kolom.

1. $E = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ adalah matriks dengan 2x2
2. $F = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$ adalah matriks dengan ordo 3x1
3. $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 \\ -3 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ adalah matriks dengan ordo 3x3

Matriks D dapat ditulis secara umum dengan: Jika D adalah matriks, simbol untuk unsur-unsur pada baris i dan baris j adalah D_{ij} . maka matriks D dapat ditulis secara umum dengan:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, jika diletakkan dalam bentuk umum, matriks D dengan unsur pada baris ke i dan kolom j akan terlihat sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } D_{m \times n} = [a_{ij}]$$

Keterangan:

D = Matriks D

$D_{m \times n}$ = Matriks D berordo $m \times n$

a_{11} = elemen baris 1 kolom 1

a_{mn} = elemen baris m kolom n.

3.3 Jenis-Jenis Matriks

Didasarkan pada ordo dan unsur-unsurnya, matriks dibagi menjadi berbagai jenis. Berikut adalah beberapa jenis matriks:

1) Matriks Baris

Matriks baris elemennya terdiri dari satu baris saja

$$D = [0 \quad 1 \quad 1]$$

2) Matriks kolom

Matriks kolom memiliki elemen satu kolom saja

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

3) Matriks bujur sangkar

matriks persegi yang memiliki ordo sama 2×2 atau 3×3 dan lainnya

$$D = \begin{bmatrix} 24 & 44 & 34 \\ 54 & 22 & 54 \\ 77 & 78 & 45 \end{bmatrix}$$

4) Matriks diagonal

Matriks diagonal elemen bilangan di atas dan di bawah diagonal adalah 0

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

5) Matriks Skalar

Jenis matriks diagonal yang memiliki unsur bilangan yang sama pada diagonalnya disebut matriks skalar.

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6) Matriks identitas

Matriks identitas adalah elemen didiagonalnya satu

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7) Matriks transpose

Matriks transpose merupakan aturan yang bisa dibuat dengan mengubah letak elemen pada baris menjadi kolom atau sebaliknya. Simbol yang digunakan untuk menunjukkan matriks transpose dari matriks D adalah D^T , sebagai contoh:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow D^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

8) Matriks Simetris

Matriks simetris adalah jenis matriks persegi yang transposenya identik dengan matriks semula. Berikut adalah contohnya:

$$D = D^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

9) Matriks singular

Singular adalah matriks persegi dengan determinan 0 dan setelah dilakukan perhitungan tidak memiliki inversnya.

3.4 Operasi dengan Matriks

Sebagai pendahuluan, definisi kesamaan (equality) dua matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ dikatakan sama jika dan hanya jika mempunyai ordo dan elemen identik dalam susunan lokasi yang sesuai. Dengan kata lain, $A = B$ jika dan hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk seluruh nilai i dan j . Sebagai contoh,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh yang lain, bila $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, ini berarti $x = 7$ dan $y = 4$

Penjumlahan Matriks

Dua buah matriks dapat ditambah jika dan hanya jika mempunyai dimensi yang sama. Jika dimensinya telah sama, maka matriks ini dikatakan telah memenuhi untuk penjumlahan. Dalam kasus seperti ini, penjumlahan dua matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ didefinisikan sebagai penjumlahan dari setiap pasang dari elemen yang berpadanan

Sebagai contoh,

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & 9+0 \\ 2+0 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Contoh lain,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{21} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Secara umum, aturannya adalah

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}] \text{ dimana } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Perhatikan bahwa jumlah matriks $[c_{ij}]$ harus mempunyai ordo yang sama dengan matriks $[a_{ij}]$ dan $[b_{ij}]$

Perhatikan matriks matriks berikut :

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

Namun $P + R$ atau $Q + R$ tidak dapat ditentukan karena ordonya saling berbeda

Selanjutnya, adapun sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan matriks adalah

- a. $P + Q = Q + P$ (Sifat Komutatif)
- b. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ (Sifat Asosiatif)
- c. $P + 0 = 0 + P = P$ (memiliki matriks identitas yaitu matriks 0)

Pengurangan Matriks

Operasi pengurangan $P - Q$ dapat didefinisikan sama, jika dan hanya jika P dan Q mempunyai ordo yang sama. Aturannya adalah sebagai berikut :

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [d_{ij}] \text{ dimana } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Sebagai contoh,

$$\begin{bmatrix} 19 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19-6 & 3-8 \\ 2-1 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Operasi pengurangan $A - B$ dapat pula menggunakan cara operasi penjumlahan matriks A dan matriks $(-1)B$.

Perhatikan matriks matriks berikut :

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$P - Q = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Namun $P - R$ atau $Q - R$ tidak dapat ditentukan karena ordonya saling berbeda

Perkalian Skalar Pada Matriks

Untuk mengalikan suatu matriks dengan bilangan atau dalam istilah aljabar matriks dengan suatu skalar adalah mengalikan setiap elemen dari matriks dengan skalar yang diberikan.

Sebagai contoh,

$$7 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -7 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$$

Contoh lainnya,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{22} \end{bmatrix}$$

Dari contoh di atas, penggunaan bilangan harus jelas, apakah untuk memperbesar atau mengecilkan elemen matriks dengan pengali tertentu. Bilangan pengalinya dapat pula negatif.

Perhatikan matriks berikut :

$$R = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$3R = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 21 & 24 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \text{ dan } (-1)R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -8 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Secara intuitif, jika R sebarang matriks maka $-R$ menyatakan $(-1)R$. R dan S adalah dua matriks dengan ordo yang sama, maka berlaku $R - S = R + (-S) = R + (-1)S$

Selanjutnya, sifat-sifat yang berlaku pada perkalian skalar dengan matriks adalah sebagai berikut :

- $(-1)R = -R$
- $R + (-S) = R + (-1)S$
- $R + (-R) = R - R$
- $cR = Rc$ (sifat komutatif)
- $c(R + S) = cR + cS$ (sifat distributif)

- f. $c(R - S) = cR - cS$
- g. $(c + d)R = cR + dR$
- h. $(cd)R = c(dR)$ (sifat asosiatif)

Perkalian dalam Matriks

Jika A dan B adalah matriks yang berukuran $m \times r$ dan $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks yang berukuran $m \times n$. Entri baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks AB diperoleh dengan cara mengalikan baris ke- i dan kolom ke- j kemudian dijumlahkan.

Definisi di atas mensyaratkan bahwa banyak kolom dari matriks pertama harus sama dengan banyak baris pada matriks kedua. Jika kondisi ini tidak dipenuhi, maka perkalian matriks tidak bisa didefinisikan.

Contoh,

Matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan Matriks $Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Matriks hasil perkalian $P \times Q$ adalah ...

$$P \times Q = \begin{bmatrix} 1(-2) + 3(1) & 1(1) + 3(3) \\ 4(-2) + 2(1) & 4(1) + 2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Berikut sifat-sifat yang berlaku pada perkalian matriks dengan matriks adalah sebagai berikut :

- a. $P(QR) = (PQ)R$ (sifat asosiatif)
- b. $P(Q + R) = PQ + PR$ (sifat distributif)
- c. $(Q + R)P = QP + RP$
- d. $P(Q - R) = PQ - PR$
- e. $(Q - R)P = QP - RP$
- f. $PI = IP = P$ (memiliki matriks identitas)

DAFTAR PUSTAKA

- Asih, E.M., Putra, R.W.Y. and Andriani, S. (2023) *Matriks*. Bandar Lampung.
- Ilhamsyah, Helmi and Fran, F. (2017) 'Determinan dan Invers Matriks Blok 2×2 ', *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya*, 06(3), pp. 193–202.
- Pertiwi, W. (2018) 'Analisis kemampuan berpikir kritis matematis peserta didik SMK pada materi matriks', *Jurnal Pendidikan Tambusai*, 2(4), pp. 821–831.

BAB 4

DETERMINAN

Oleh Ifan Wiranto

Pada awalnya, konsep determinan diperkenalkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Meskipun secara komputasi metode ini tidak praktis, namun determinan memiliki aplikasi teknik yang penting, seperti dalam masalah nilai eigen, persamaan diferensial, dan aljabar vektor. Konsep determinan dapat dijelaskan dengan beberapa cara yang setara. Dalam tulisan ini, definisi determinan khusus untuk menangani sistem persamaan linier.

4.1 Definisi Determinan

Determinan *ordo* n ialah suatu skalar yang terkait dengan sebuah matriks bujursangkar $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ yang berordo n . Determinan ini dilambangkan dengan (Kreyszig, 2011)

$$D = \det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ , & , & \dots & , \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

dan didefinisikan untuk $n = 1$ adalah

$$D = a_{11} \quad (2)$$

dan untuk $n \geq 2$ didefinisikan sebagai,

$$D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \dots + a_{jn}C_{jn} \quad (j = 1, 2, \dots, \text{atau } n) \quad (3)$$

atau

$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \dots + a_{nk}C_{nk} \quad (k = 1, 2, \dots, \text{atau } n) \quad (4)$$

dengan

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk} ; \quad C_{jk} \text{ disebut kofaktor dari unsur } a_{jk}$$

$$M_{jk} \text{ disebut minor dari unsur } a_{jk}$$

M_{jk} adalah determinan ordo $n - 1$, yakni determinan anak-matriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke- j dan kolom ke- k .

Misalnya, di dalam determinan ordo-tiga

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kita mempunyai kofaktor dan minor

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{11} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \text{ dan seterusnya.}$$

Determinan juga dapat dituliskan dalam minor, yaitu

$$D = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \quad (j = 1, 2, \dots, \text{atau } n) \quad (5)$$

atau

$$D = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \quad (k = 1, 2, \dots, \text{atau } n) \quad (6)$$

Contoh:

Tentukanlah $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Jawab :

Misalnya kita ambil $j = 1$, maka

$$D = \sum_{k=1}^2 (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} \\ + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = ad - bc$$

$$\text{Jadi } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh:

Hitunglah

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Jawab :

Penguraian menurut baris pertama menghasilkan

$$D = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ = 1(12 - 0) - 3(4 + 4) + 0(0 + 6) = -12$$

Penguraian menurut kolom ketiga menghasilkan

$$D = 0 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 0 = -12$$

Penguraian menurut baris ketiga menghasilkan

$$D = -1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 0 - 6 = -12$$

Semuanya memiliki hasil yang sama yaitu -12 . Perhitungan akan lebih mudah dilakukan jika kita memilih baris atau kolom yang memiliki unsur 0 (nol) yang lebih banyak.

4.2 Sifat-sifat Umum Determinan

Sifat-sifat umum determinan (Stroud dan Booth, 2013)

1. Nilai suatu determinan tidak berubah jika baris-barisnya dituliskan sebagai kolom dalam urutan yang sama.

Contoh :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -12$$

2. Jika di dalam suatu determinan semua suku pada satu baris (atau satu kolom) dikalikan dengan factor k yang sama maka nilai determinan yang baru itu menjadi k kali nilai determinan semula.

Contoh :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ kali baris kedua})$$

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ kali kolom kedua})$$

$$2,3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,3,2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ kali kolom ketiga})$$

$$12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

3. Jika semua suku pada suatu baris (atau kolom) sebuah determinan adalah nol maka nilai determinannya nol.

Contoh :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

4. *Jika dua baris (atau dua kolom) suatu determinan dipertukarkan, maka nilai determinannya harus dikalikan -1.*

Contoh :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 \quad \text{maka} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-12) = 12$$

5. *Jika unsur-unsur yang berpadanan pada dua baris (atau dua kolom) sebuah determinan sebanding maka nilai determinannya nol.*

Contoh :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2.3 & 2.1 & 2.2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

6. *Nilai determinan tetap tidak berubah jika unsur-unsur pada suatu baris (atau kolom) diubah dengan menambahkan kepadanya kelipatan unsur-unsur pada baris (atau kolom) yang lain.*

Misalnya untuk matriks ordo-tiga :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

7. Jika **A** dan **B** masing-masing berukuran $n \times n$ maka

$$\det (\mathbf{AB}) = \det (\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

Menghitung determinan melalui penyederhanaan ke “bentuk segitiga”

Dengan menggunakan sifat determinan nomor 6, kita dapat membuat bentuk determinannya menjadi “bentuk segitiga (segitiga atas atau segitiga bawah)”. Misal bentuk segitiga atas berikut,

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & , & \dots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} & , & \dots & p_{2n} \\ , & , & , & \dots & , \\ 0 & , & , & \dots & , \\ 0 & 0 & , & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} ,$$

Penguraian menurut kolom pertama diperoleh,

$$D = p_{11} \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} & , & \dots & p_{2n} \\ 0 & p_{33} & , & \dots & p_{3n} \\ , & , & , & \dots & , \\ 0 & , & , & \dots & , \\ 0 & 0 & , & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} + \text{penjumlahan dengan nol}$$

$$D = p_{11}p_{22} \begin{vmatrix} p_{33} & p_{34} & . & \dots & p_{3n} \\ 0 & p_{44} & . & \dots & p_{4n} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & . & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} + \text{penjumlahan dengan nol}$$

$$D = p_{11}p_{22}p_{33} \begin{vmatrix} p_{44} & p_{45} & . & \dots & p_{4n} \\ 0 & p_{55} & . & \dots & p_{5n} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & . & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} + \text{penjumlahan dengan nol}$$

.....

.....

$$D = p_{11}p_{22}p_{33}\cdots p_{nn}$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa, determinan suatu matriks segitiga adalah perkalian dari seluruh unsur-unsur pada diagonal utama.

Contoh :

Hitunglah

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Jawab :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Lakukan langkah-langkah berikut:

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \text{baris2} - 2 \times \text{baris1} \\ \square & \square \\ \square & \text{baris4} + 1,5 \times \text{baris1} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \text{baris3} - 0,4 \times \text{baris2} \\ \square & \text{baris4} - 1,6 \times \text{baris2} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2,4 & 3,8 \\ 0 & 0 & -11,4 & 29,2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \text{baris4} + 4,75 \times \text{baris3} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2,4 & 3,8 \\ 0 & 0 & 0 & 47,25 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 5 \times 2,4 \times 47,25 = 1134$$

4.3 Teorema Cramer (Solusi sistem persamaan linier melalui determinan)

Jika determinan $D = \det \mathbf{A} \neq 0$, sistem n persamaan linier

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

dalam $x_1, \dots, x_n$ mempunyai tepat satu solusi. Solusi ini diberikan oleh rumus

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D} \quad \textbf{(kaidah Cramer)}$$

dengan D_k adalah determinan yang diperoleh dari D dengan mengganti kolom ke- k di dalam D dengan kolom yang berunsur $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Contoh :

Pecahkan dengan kaidah Cramer sistem persamaan linier simultan berikut,

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -3$$

Jawab :

Persamaan matriksnya adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Determinan sistem tersebut adalah

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46$$

Determinan pembilangnya adalah

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 92, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -46$$

Jadi diperoleh, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{92}{46} = 2$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{46} = 0$,

dan $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-46}{46} = -1$

4.4 Kebalikan Suatu Matriks (Invers Matriks)

Kebalikan (*invers*) matriks $A = [a_{jk}]$ berukuran $n \times n$, dilambangkan dengan A^{-1} ,

ialah suatu matriks $n \times n$ sedemikian rupa sehingga

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

dengan I adalah matriks satuan atau matriks identitas yang berukuran $n \times n$.

Jika $\mathbf{A}$ mempunyai kebalikan maka $\mathbf{A}$ disebut **matriks tak singular**. Jika $\mathbf{A}$ tidak mempunyai kebalikan maka $\mathbf{A}$ disebut **matriks singular**.

Menentukan invers matriks menggunakan determinan dan matriks adjoin (Lay, 2012), (Singh, 2014)

Jika masing-masing unsur dari matriks adjoin $\mathbf{A}$ dibagi dengan harga determinan $\mathbf{A}$, yaitu $|\mathbf{A}|$, (asal saja $|\mathbf{A}| \neq 0$), maka diperoleh invers matriks $\mathbf{A}$. Jadi

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj } \mathbf{A}$$

Matriks adjoin dari matriks $\mathbf{A}$, dituliskan $\text{adj } \mathbf{A}$, didefinisikan sebagai

$$\text{Adj } \mathbf{A} = \mathbf{C}^T$$

dimana matriks $\mathbf{C}$ adalah matriks kofaktor dari $\mathbf{A}$ yaitu matriks yang unsur-unsurnya adalah kofaktor unsur $|\mathbf{A}|$. Jadi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan $C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$ dan $\mathbf{C}^T$ adalah transpose matriks $\mathbf{C}$.

Contoh :

Tentukanlah matriks adjoin dari

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -24 ,$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 ,$$

$$C_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15 , \quad C_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 20 ,$$

$$C_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 , \quad C_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 ,$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 13 , \quad C_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 8 ,$$

$$C_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = -10$$

maka matriks kofaktornya adalah

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks adjoin dari matriks $\mathbf{A}$ adalah

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Sehingga, untuk mendapatkan invers dari matriks bujursangkar $\mathbf{A}$ dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Hitung determinan $\mathbf{A}$, yaitu $|\mathbf{A}|$.
2. Bentuk matriks $\mathbf{C}$, yaitu matriks kofaktor dari $\mathbf{A}$.
3. Tuliskan transpose matriks $\mathbf{C}$, yaitu $\mathbf{C}^T$, untuk memperoleh adjoin $\mathbf{A}$.
4. Bagilah $\mathbf{C}^T$ dengan $|\mathbf{A}|$ untuk mendapatkan $\mathbf{A}^{-1}$.

Contoh :

Carilah invers dari,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 45$$

dari contoh sebelumnya diperoleh,

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-24}{45} & \frac{20}{45} & \frac{13}{45} \\ \frac{6}{45} & \frac{-5}{45} & \frac{8}{45} \\ \frac{15}{45} & \frac{-5}{45} & \frac{-10}{45} \end{bmatrix}$$

4.5 Ringkasan

- Determinan ordo n ialah suatu skalar yang terkait dengan sebuah matriks bujursangkar yang berordo n .
- Determinan suatu matriks segitiga diperoleh dengan mengalikan semua unsur-unsur pada diagonal utama.
- Kaidah Cramer adalah suatu metode untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan linier simultan dengan menggunakan determinan.
- Invers suatu matriks dapat diperoleh dengan menggunakan konsep determinan, yaitu dengan membagi adjoint matriks dengan determinan matriks tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Kreyszig, E., Kreyszig, H., and Norminton, E.J., 2011. *Advanced Engineering Mathematics 10th ed.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Lay, D.C., 2012. *Linear Algebra and Its Applications 4th ed.* New Jersey: Pearson Education, Inc.
- Singh, K., 2014. *Linear Algebra Step by Step.* Oxford: Oxford University Press..
- Stroud, K.A., Booth, D.J., 2013. *Engineering Mathematics 7th ed.* New York: Palgrave Macmillan.

BAB 5

RUANG VEKTOR EUCLIDEAN

Oleh Afnaria

5.1 Pendahuluan

Ruang vektor Euclidean adalah kerangka kerja matematika yang penting dalam aljabar linier dan geometri. Pemahaman yang mendalam tentang konsep ini tidak hanya memberikan dasar bagi banyak teori matematika, tetapi juga memiliki aplikasi luas dalam berbagai disiplin ilmu, termasuk fisika, komputer, dan statistika.

Terdapat dua jenis besaran dalam fisika, yaitu skalar dan vektor. Skalar merupakan besaran yang hanya memiliki nilai numerik namun tidak memiliki arah, seperti suhu, tinggi badan, massa, percepatan, dll. Sedangkan vektor merupakan besaran yang memiliki nilai numerik dan arah, seperti kecepatan, gaya, dll. Disini akan dibangun struktur mengenai skalar dan vektor yang nantinya dapat diterapkan dalam berbagai bidang seperti genetika, ilmu komputer, ekonomi, telekomunikasi dan ilmu lingkungan (Anton & Rorres, 2019).

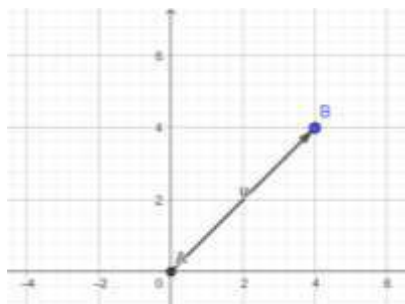
Sebuah ruang vektor Euclidean adalah himpunan vektor, dilengkapi dengan dua operasi dasar: penjumlahan vektor, perkalian skalar dan perkalian vektor. Operasi-operasi ini mematuhi serangkaian properti matematis tertentu, yang selanjutnya akan kita bahas secara rinci (Andrily & Hecker, 2023).

5.2 Vektor di Dimensi-2, Dimensi-3 dan Dimensi- n

Pada bagian ini akan dibahas mengenai sifat-sifat dasar vektor di R^2 dan R^3 untuk kemudian dapat dikembangkan ke R^n .

5.2.1 Geometri Vektor

Vektor digambarkan sebagai anak panah (ruas garis yang berarah). Panjang panah adalah besarnya vektor, arah panah adalah arah dari vektor. Gambar 5.1 menunjukkan Panjang vektor 5,66 satuan dengan arah 45° dari arah sumbu-x positif.



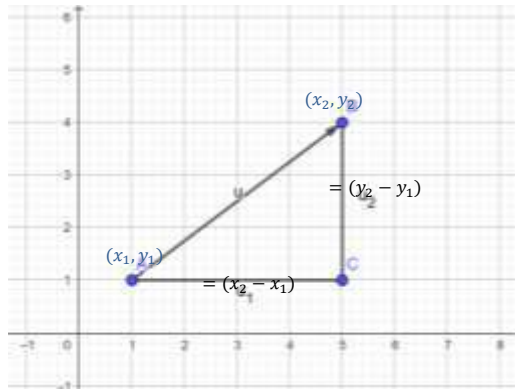
Gambar 5. 1 Besar dan Arah Vektor

Anak panah memiliki pangkal (*initial point*) dan ujung panah (*terminal point*). Biasanya vektor dinotasikan dengan huruf kecil tebal ***a***, ***b***, ***c***, dll, atau dapat pula dinotasikan dengan huruf yang diberi ruas garis berarah di atasnya, seperti $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}$, dll.

Pada gambar 5.1 digambarkan sebuah vektor ***u*** dengan A sebagai titik pangkal dan B titik ujungnya. Maka dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$$

Misalkan vektor $\mathbf{u}$ merupakan vektor yang berawal dari titik $A(x_1, y_1)$ menuju titik $B(x_2, y_2)$. Perhatikan gambar 5.2, panjang garis sejajar sumbu x adalah $u_1 = x_2 - x_1$ dan panjang garis sejajar sumbu y adalah $u_2 = y_2 - y_1$ merupakan komponen-komponen vektor $\mathbf{u}$.



Gambar 5. 2 Komponen Vektor

Komponen vektor $\mathbf{u}$ dapat ditulis untuk menyatakan vektor secara aljabar yaitu:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Besarnya atau panjangnya vektor $\mathbf{u}$ dinyatakan sebagai $|\mathbf{u}|$, dimana :

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Contoh 1:

Dari gambar 5.1, diketahui titik $A(1,1)$ dan titik $B(5,4)$, maka:

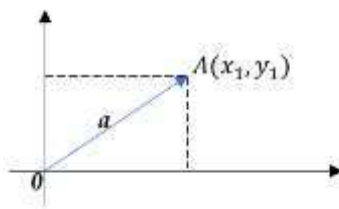
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ satuan } \square$$

Ada beberapa jenis vektor khusus yaitu:

1. Vektor Posisi

Suatu vektor yang posisi titik awalnya di titik $\mathbf{0}$ $(0,0)$ dan titik ujungnya di $A(x_1, y_1)$, dan dinotasikan sebagai vektor $\mathbf{a}$.



Gambar 5.3 Vektor Posisi

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \mathbf{a} - \mathbf{0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

2. Vektor Nol

Suatu vektor yang panjangnya nol dan dinotasikan sebagai $\mathbf{0}$. Vektor nol tidak memiliki arah vektor yang jelas.

$$\text{Untuk } \mathbb{R}^2, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dan untuk } \mathbb{R}^3, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Vektor satuan

Suatu vektor yang panjangnya satu satuan. Vektor satuan dari $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ adalah:

$$\varepsilon_{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Dimana $|\varepsilon_{\mathbf{u}}| = 1$.

Contoh 2:

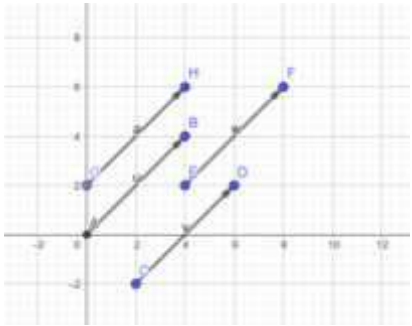
Vektor satuan dari $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ adalah:

$$\varepsilon_{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

4. Vektor basis

Vektor basis merupakan vektor satuan yang saling tegak lurus. Dalam vektor ruang dua dimensi R^2 memiliki dua vektor basis yaitu $\mathbf{i} = (1 \ 0)$ dan $\mathbf{j} = (0 \ 1)$. Sedangkan dalam tiga dimensi R^3 memiliki tiga vektor basis yaitu $\mathbf{i} = (1 \ 0 \ 0)$; $\mathbf{j} = (0 \ 1 \ 0)$ dan $\mathbf{k} = (0 \ 0 \ 1)$.

Vektor-vektor yang memiliki panjang dan arah yang sama, disebut **ekivalen**. Karena sebuah vektor hanya akan ditentukan oleh panjang dan arahnya, maka vektor yang ekivalen dianggap **sama**, walaupun vektor-vektor tersebut mungkin terletak pada posisi yang berbeda (gambar 5.4).



Gambar 5. 4 Vektor-Vektor Ekuivalen

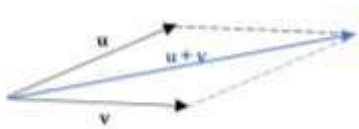
5.2.2 Operasi pada Vektor

Terdapat beberapa operasi aljabar penting pada vektor yang memiliki hukum tertentu dalam fisika.

a. Penjumlahan Vektor

Aturan Jajargenjang

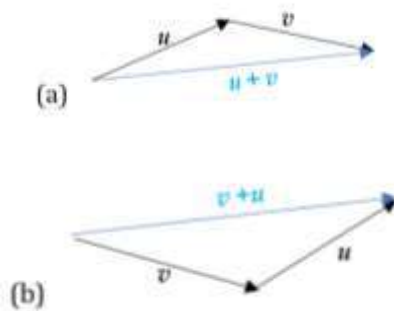
Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dua vektor di $\mathbb{R}^2$ atau di $\mathbb{R}^3$ yang diposisikan sedemikian hingga kedua pangkalnya berhimpit, selanjutnya kedua vektor membentuk sisi sejajar jajargenjang, maka jumlah dua vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ merupakan diagonal jajargenjang yang dimulai dari titik pangkal kedua vektor tersebut.



Gambar 5. 5 Aturan Jajargenjang Penjumlahan Vektor

Aturan Segitiga

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dua vektor di $\mathbb{R}^2$ atau di $\mathbb{R}^3$ yang diposisikan sedemikian hingga pangkalnya berhimpit dengan ujung $\mathbf{u}$. Maka $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah vektor yang menghubungkan pangkal $\mathbf{u}$ dengan ujung $\mathbf{v}$.



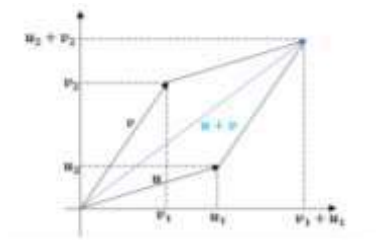
Gambar 5. 6 Aturan Segitiga Penjumlahan Vektor

Dari gambar 5.6.a dan b dapat diamati bahwa

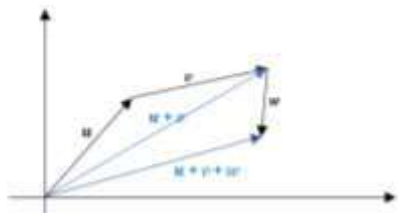
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

dengan demikian dalam penjumlahan vektor berlaku hukum komutatif.

Diketahui vektor, $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2)$, $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2)$ penjumlahan dua vektor secara geometri dapat dilihat pada gambar 5.7, dan penjumlahan tiga vektor secara geometri dapat dilihat pada gambar 5.8.



Gambar 5. 7 Penjumlahan Dua Vektor secara Geometri



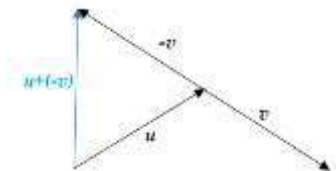
Gambar 5. 8 Penjumlahan Tiga Vektor secara Geometri

b. Pengurangan vektor

Jika u dan v dua vektor di R^2 atau di R^3 , maka:

$$u - v = u + (-v)$$

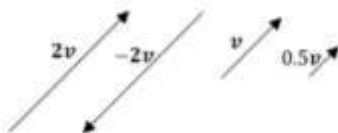
Dimana $-v$ merupakan vektor yang memiliki besar yang sama dengan vektor v dengan arah yang



Gambar 5. 9 Pengurangan Vektor

c. Perkalian vektor dengan skalar

Perkalian vektor dengan skalar $kv = k(v_1 \ v_2) = (kv_1 \ kv_2)$ secara geometri dapat dilihat pada gambar 5.10.



Gambar 5. 10 Perkalian Vektor dengan Skalar

Jika $\mathbf{v}$ adalah vektor tak nol dan k bilangan riil tak nol (skalar), maka hasil kali $k\mathbf{v}$ didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya $|k|$ kali panjang $\mathbf{v}$, dimana arahnya sama dengan $\mathbf{v}$ jika $k > 0$ dan berlawanan dengan arah $\mathbf{v}$ jika $k < 0$.

Didefinisikan bahwa

$$k\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

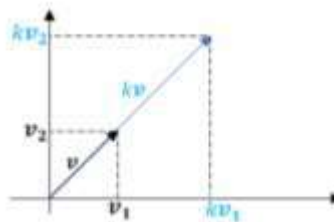
Jika $k = 0$ atau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Selanjutnya, dapat dituliskan sifat-sifat aljabar pada vektor, sebagai berikut:

Teorema 5.1

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^2$ atau di $\mathbb{R}^3$, dan k dan m adalah skalar, maka:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$



Gambar 5. 11 Perkalian Vektor Secara Geometri

Contoh 3:

Misalkan diketahui vektor $\mathbf{u} = (-3 \ 5)$ $\mathbf{v} = (2 \ -1)$. Tentukan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, dan $5\mathbf{v}$.

Solusi:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

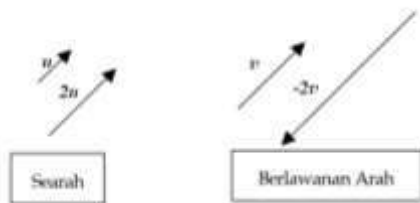
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

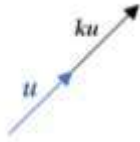
$$5\mathbf{v} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} \square$$

5.2.3 Vektor Paralel dan Kolinier

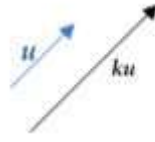
Dua vektor disebut **sama**, jika memiliki besar dan arah yang sama. Jika dua vektor memiliki arah yang sama namun besarnya berbeda, maka dinamakan **vektor paralel**. Vektor paralel bisa berupa vektor yang saling sejajar maupun berlawanan arah (gambar 5.12).

Selanjutnya, jika vektor merupakan kelipatan dari vektor yang lain, maka vektor tersebut berada pada garis yang sama, yang disebut sebagai **kolinier** (Gambar 5.13a). Jika vektor tersebut ditranslasikan maka tidak lagi kolinier (Gambar 5.13b)

**Gambar 5.12 Vektor Paralel**



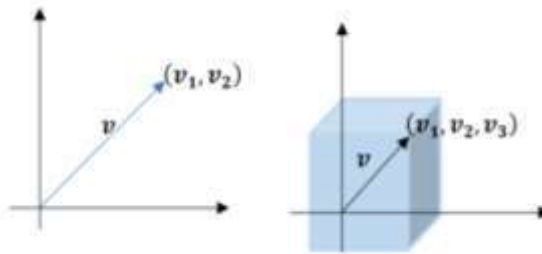
Gambar 5. 13 a Vektor



Gambar 5.13b

5.2.4 Vektor dalam Sistem Koordinat

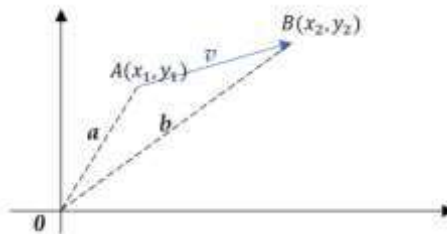
Dalam ruang dimensi 2 dituliskan vektor $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2)$ dan dalam dimensi 3 dituliskan vektor $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3)$.



Gambar 5. 14 Vektor di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$

Jika suatu vektor yang posisi titik awalnya bukan di titik $\mathbf{0}$ (0,0), maka dapat ditentukan sebagai berikut (Gambar 5.15).

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$



Gambar 5. 15 Vektor Posisi titik awalnya bukan di titik 0 (0,0)

5.2.5 Ruang - n (R^n)

Jika pada R^2 vektor $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)$, dan pada R^3 vektor $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)$, maka sebuah vektor $\mathbf{u}$ di R^n didefinisikan sebagai n-tupel bilangan riil $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ dengan n adalah bilangan bulat positif. Dalam ruang vektor Euclidean, $(u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ tidak hanya berperan sebagai titik, namun juga sebagai vektor.

Definisi 5.1:

Jika n adalah bilangan bulat positif, pasangan n-tuple merupakan barisan n bilangan riil $(u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$, maka himpunan semua pasangan n-tuple disebut ruang- n . dinotasikan sebagai R^n .

Beberapa aplikasi n-tuple :

1. Data eksperimen

Peneliti melakukan suatu eksperimen dengan membuat pengukuran pada setiap eksperimennya. Hasil dari percobaan itu merupakan sebuah vektor $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$, Dimana $u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n$ merupakan nilai dari hasil pengukuran

2. Penyimpanan dan Gudang

Sebuah Perusahaan distribusi memiliki 15 gudang, Dimana pada setiap kegiatan distribusinya, truk akan mengantar logistiknya ke setiap 15 gudang tersebut. Maka $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{15})$. Dimana u_1 menyatakan jumlah truk pada Gudang 1, u_2 menyatakan jumlah truk pada gudang 2, dst.

3. Ekonomi

Dalam Analisa ekonomi salah satu pendekatannya adalah dengan membaginya menjadi beberapa sektor, seperti manufaktur, utilitas, layanan, dll. Maka output dari setiap sektor-sektor ini dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$.

5.2.6 Operasi Vektor di $\mathbb{R}^n$

Operasi vektor di $\mathbb{R}^n$ merupakan perluasan dari operasi vektor di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$. Vektor di $\mathbb{R}^n$ dinotasikan sebagai :

$$\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$$

Dan $\mathbf{0} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$ disebut sebagai vektor nol.

Definisi 5.2:

Vektor $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ dikatakan ekuivalen (sama), jika

$$u_1 = v_1; u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

Dinotasikan sebagai $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

Contoh 4:

Jika vektor $\mathbf{u} = (3 \ 2 \ a \ -2)$, dan $\mathbf{v} = (b \ 2 \ 1 \ -2)$ adalah ekuivalen, tentukan nilai a dan b .

Solusi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

$$(3 \ 2 \ a \ -2) = (b \ 2 \ 1 \ -2)$$

Maka $b = 3$ dan $a = 1$ □

Definisi 5.3:

Jika vektor $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$, maka

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) + (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \\ &= (u_1 + v_1 \ u_2 + v_2 \ \dots \ u_n + v_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} - \mathbf{v} &= (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) - (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \\ &= (u_1 - v_1 \ u_2 - v_2 \ \dots \ u_n - v_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\mathbf{u} &= k(u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \\ &= (ku_1 \ ku_2 \ \dots \ ku_n)\end{aligned}$$

Contoh 5:

$\mathbf{u} = (3 \ 2 \ 1 \ -2)$ dan $\mathbf{v} = (-3 \ 1 \ 5 \ 2)$, tentukan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ dan $3\mathbf{u}$.

Solusi:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3 - 3.2 + 1.1 + 5. -2 + 2) = (0.3.6.0)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (3 + 3.2 - 1.1 - 5. -2 - 2) = (6.1. -4. -4)$$

$$3\mathbf{u} = 3(3,2,1,-2) = (9,6,3,-6) \square$$

Teorema 5.2:

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ adalah vektor di R^n , dan k , m , adalah scalar, maka:

- a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- e) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
- f) $k\mathbf{u} + m\mathbf{u} = (k + m)\mathbf{u}$
- g) $(km)\mathbf{u} = k(m\mathbf{u})$
- h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Teorema 5.3:

Jika $\mathbf{u}$ adalah vektor di R^n , dan k adalah skalar, maka:

- a) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Penjumlahan, pengurangan dan perkalian dengan skalar seringkali digunakan untuk membentuk vektor baru. Misalkan $\mathbf{u}_1$ $\mathbf{u}_2$ $\mathbf{u}_3$ adalah vektor di R^n , maka vektor baru disusun dengan cara seperti berikut:

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3; \text{ dan } \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3.$$

Secara umum, diberikan definisi sebagai berikut:

Definisi 5.4

Jika $\mathbf{u}$ adalah vektor di R^n , maka $\mathbf{u}$ dikatakan kombinasi linier dari $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ di R^n jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_r\mathbf{u}_r$$

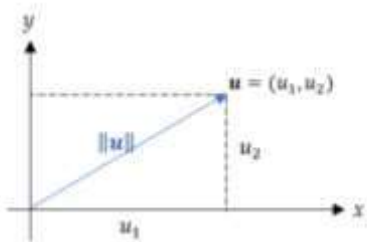
Dimana $k_1, k_2, \dots, k_r$ adalah skalar. Skalar ini disebut

Dalam hal, dimana $r = 1$, maka $\mathbf{u} = k_1 \mathbf{u}_1$, sedemikian hingga kombinasi linier dari satu vektor merupakan perkalian scalar dari vektor tersebut.

5.3 Norm, Perkalian Titik, dan Jarak di R^n

5.3.1 Norm dari sebuah Vektor

Panjang sebuah vektor $\mathbf{u}$ dinotasikan sebagai $\|\mathbf{u}\|$, yang dibaca norm $\mathbf{u}$, panjang $\mathbf{u}$, atau magnitude $\mathbf{u}$. Namun lazimnya dibaca norm $\mathbf{u}$.

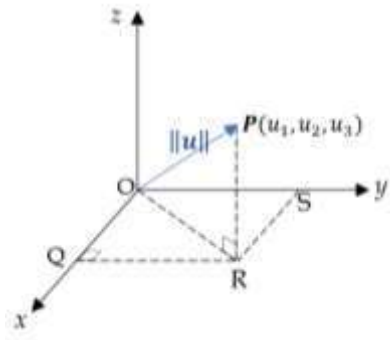


Gambar 5. 16 a Norm $\mathbf{u}$ di R^2

Gambar 5.16a, dari teorema Phytagoras, norm vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ di R^2 adalah:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

(1)



Gambar 5. 17 b Norm $\mathbf{u}$ di R^3

Dengan cara yang sama, dari gambar 5.16b, dua aplikasi dari teorema Pythagoras, yakni

$$\|\mathbf{u}\|^2 = OR^2 + RP^2 = OQ^2 + QR^2 + RP^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Dengan demikian, norm vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ di R^3 adalah:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), disusunlah definisi berikut:

Definisi 5.5

Jika vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ di R^n , maka **norm $\mathbf{u}$** disebut sebagai Panjang $\mathbf{u}$ atau magnitude $\mathbf{u}$ dan dinotasikan sebagai $\|\mathbf{u}\|$ didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Contoh 6:

Tentukan norm dari vektor $\mathbf{u} = (2 \ -3 \ 1)$.

Solusi:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \square$$

Teorema 5.4:

Jika vektor $\mathbf{u}$ adalah vektor di R^n , dan Jika vektor k adalah skalar, maka:

- a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
- b) $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

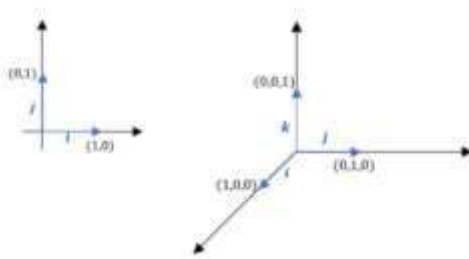
5.3.2 Vektor Unit Standar

Vektor yang norm-nya 1 disebut sebagai vektor unit. Vektor unit kearah sumbu positif dalam sistem koordinat di R^2 dan R^3 disebut sebagai vektor unit Standar. Di R^2 vektor ini dinotasikan sebagai:

$$\mathbf{i} = (1,0) \text{ dan } \mathbf{j} = (0,1)$$

Sedangkan di R^3 , vektor satuan standar dinotasikan sebagai (gambar 5.17):

$$\mathbf{i} = (1,0,0) ; \mathbf{j} = (0,1,0) \text{ dan } \mathbf{k} = (0,0,1)$$



Gambar 5.17 Vektor Satuan Standar di R^2 dan R^3

Setiap vektor $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)$ di R^2 dan vektor $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)$ di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor satuan standar, yaitu di R^2 :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) = u_1(1,0) + u_2(0,1) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$

Dan di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (u_1, u_2, u_3) = u_1(1,0,0) + u_2(0,1,0) + u_3(0,0,1) \\ &= u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan ini dapat diformulasikan ke dalam bentuk yang lebih umum, dengan mendefinisikan vektor satuan standar di $\mathbb{R}^n$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1(1,0, \dots, 0) + u_2(0,1, \dots, 0) + \dots + u_n(0,0, \dots, 1) \\ \mathbf{u} &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n\end{aligned}$$

Contoh 7

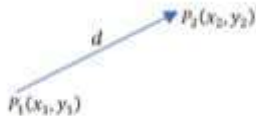
Vektor $\mathbf{u} = (3,2,4) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Vektor $\mathbf{v} = (5, -1, 3, 7) = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 7\mathbf{e}_4$

5.3.3 Jarak di $\mathbb{R}^n$

Jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah titik di $\mathbb{R}^2$, maka panjang vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ sama dengan jarak d antara dua titik (Gambar 5.18), yaitu:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Gambar 5. 18 Jarak antara dua titik

Demikian pula, jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah titik di R^3 , maka panjang vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ sama dengan jarak d antara dua titik

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh definisi sebagai berikut:

Definisi 5.6

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah dua titik di R^n , maka jarak antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dinotasikan sebagai $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ didefinisikan sebagai:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Contoh 8:

Jika $\mathbf{u} = (3, -1, 4, 5)$ dan $\mathbf{v} = (-2, 3, 1, 7)$

Jarak antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah:

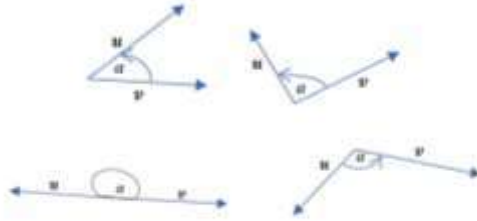
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(3 + 2)^2 + (-1 - 3)^2 + (4 - 1)^2 + (5 - 7)^2}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{25 + 16 + 9 + 4}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{54} = 2\sqrt{13} \quad \square$$

5.3.4 Perkalian Titik

Misalkan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$ yang ditempatkan sedemikian hingga kedua titik pangkalnya berpotongan. Sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan sudut yang dibentuk oleh kedua vektor yang memenuhi pertidaksamaan $0 \leq \alpha \leq \pi$ (gambar 5.19).



Gambar 5. 19 Sudut Antara Dua Vektor

Definisi 5.7

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, dan α adalah sudut antara vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka perkalian titik (disebut juga perkalian euclidean dalam) dinotasikan sebagai $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$$

Rumus diatas dapat ditulis menjadi:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

Selanjutnya, misalkan $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3)$, maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Contoh 9:

Jika $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$ dan $\mathbf{v} = (-2, 3, 1)$

Sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah :

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 1}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\cos \alpha = \frac{-5}{\sqrt{224}} = \frac{-5}{14,97} = 0,33$$

$$\alpha = 70,48^\circ \square$$

Selanjutnya, dapat didefinisikan formula sebagai berikut:

Definisi 5.8

c maka perkalian titik (disebut juga perkalian euclidean dalam) dinotasikan sebagai $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$$

Contoh 10:

Jika $\mathbf{u} = (3, -1, 4, 5)$ dan $\mathbf{v} = (-2, 3, 1, 7)$

Maka perkalian titik antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 30 \square$$

Teorema 5.5

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k adalah skalar, maka:

- a. $\mathbf{u}, \mathbf{v} = \mathbf{v}, \mathbf{u}$ (sifat simetris)
- b. $\mathbf{u}, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w}$ (sifat distributif)
- c. $k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}), \mathbf{v}$ (Sifat homogenitas)

5.3.5 Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz

Dari formula $\cos \alpha = \frac{\mathbf{u}, \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$, dapat diturunkan rumus:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \right)$$

Nilai invers cosinus terdefinisi dalam interval

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

Ketidaksamaan ini berlaku untuk semua vektor di $\mathbb{R}^n$, yang disebut sebagai ketidaksamaan Cauchy-Schwarz.

Teorema 5.6 (Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz)

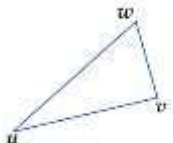
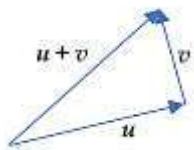
Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^n$, maka:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| < \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Teorema 5.7

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^n$, maka:

- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
(ketidaksamaan segitiga untuk vektor)
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$
(ketidaksamaan segitiga untuk jarak)



(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

(b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

Gambar 5. 20 Ketidaksamaan Segitiga

5.4 Ortogonalitas

5.4.1 Vektor Ortogonal

Sudut antara dua vektor tak nol $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ diformulasikan sebagai

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u}, \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|} \right)$$

Maka $\alpha = \pi/2$ jika dan hanya jika $\mathbf{u}, \mathbf{v} = 0$.

Definisi 5.9

Dua vektor tak nol $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ dikatakan ortogonal (saling tegak lurus) jika $\mathbf{u}, \mathbf{v} = 0$.

Contoh 11:

Tunjukkan bahwa $\mathbf{u} = (2, -3, 1, 4)$ dan $\mathbf{v} = (1, 2, 0, 1)$.

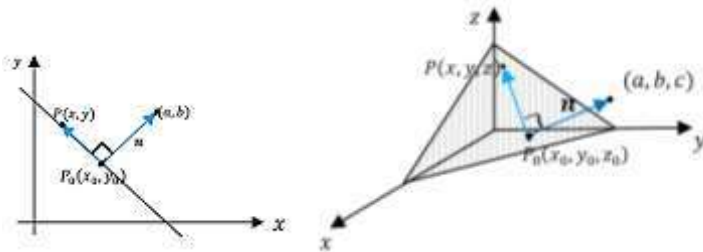
Solusi:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2, -3, 1, 4) \cdot (1, 2, 0, 1) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 0$$

Karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, maka kedua vektor adalah orthogonal. $\square$

5.4.2 Vektor Normal pada Garis dan Bidang

Sebuah vektor $\mathbf{n}$ disebut sebagai *vektor normal* merupakan sebuah vektor yang orthogonal dengan garis atau bidang. Gambar 5.21 menunjukkan sebuah garis yang melalui sebuah titik $P_0(x_0, y_0)$ mempunyai sebuah vektor normal $\mathbf{n} = (a, b)$, dan sebuah bidang yang melalui sebuah titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ yang mempunyai sebuah vektor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$.



Gambar 5. 21 Vektor Normal pada Garis dan Bidang

Selanjutnya, baik pada garis maupun bidang mengikuti persamaan berikut:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Dimana untuk garis, $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Sedangkan untuk bidang, $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh:

$$\mathbf{n}, \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Teorema 5.8

- a. Jika a dan b adalah konstanta tak nol, maka persamaan dalam bentuk

$$ax + by + c = 0$$

Merupakan persamaan garis di $\mathbb{R}^2$ dengan normal

$$\mathbf{n} = (a, b).$$

- b. Jika a, b dan c adalah konstanta tak nol, maka persamaan dalam bentuk

Contoh 12:

Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(3, -2)$, dimana vektor normalnya $\mathbf{n} = (6, 5)$.

Solusi:

Diketahui: $\mathbf{n} = (6, 5)$ dan $P_0 = (3, -2)$, maka persamaan garisnya adalah

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

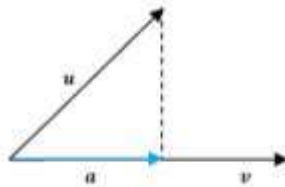
$$6(x - 3) + 5(y + 2) = 0$$

$$6x - 18 + 5y + 10 = 0$$

$$6x + 5y = 8 \quad \square$$

5.4.3 Proyeksi Orthogonal

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^2$ diletakkan sedemikian hingga titik pangkalnya berhimpit di titik P , maka vektor $\mathbf{a}$ merupakan proyeksi orthogonal vektor $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$, dapat dilihat pada gambar 5.22.



Gambar 5. 22 Proyeksi Orthogonal Vektor $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$

Dengan demikian misalkan vektor $\mathbf{a}$ merupakan proyeksi orthogonal vektor $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$, maka $\mathbf{a}$ dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}, \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}, \mathbf{v}$$

Contoh 12:

Tentukan proyeksi vektor $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$ pada $\mathbf{v} = (3, 5, 2)$.

Solusi:

Misalkan vektor $\mathbf{a}$ merupakan proyeksi orthogonal vektor $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$, maka:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}, \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}, \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 2,3 + 3,5 + (-1),2 = 19$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = 38$$

Maka,

$$\mathbf{a} = \frac{19}{38}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 1/2, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

Selanjutnya, untuk menentukan panjang vektor proyeksi orthogonal $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$, dinotasikan sebagai $\|\mathbf{a}\|$, dirumuskan sebagai:

$$\|\mathbf{a}\| = \frac{\mathbf{u}, \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Contoh 13:

Tentukan panjang vektor dari hasil proyeksi orthogonal vektor $\mathbf{u} = (2 \ -3 \ 1 \ 4)$ pada $\mathbf{v} = (3 \ 5 \ 7 \ -2)$.

Solusi:

Misalkan vektor $\mathbf{a}$ merupakan proyeksi orthogonal vektor $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$, maka:

$$\|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{u}, \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$|\mathbf{u}, \mathbf{v}| = |(2, -3, 1, 4), (1, 5, 3, -2)| = |-18| = 18$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{39}$$

Maka $\|\mathbf{a}\| = \frac{18}{\sqrt{39}} \square$

5.4.4 Jarak Titik ke Garis dan Bidang

Salah satu aplikasi dari proyeksi orthogonal dapat digunakan untuk menentukan jarak titik ke garis maupun bidang (gambar 5.23).

Teorema 5.9

- 1) Di $\mathbb{R}^2$, jarak titik $P_0(x_0 \ y_0)$ ke garis $ax + by + c = 0$ ditentukan sebagai:

$$D = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- 2) Di $\mathbb{R}^3$, jarak titik $P_0(x_0 \ y_0 \ z_0)$ ke bidang $ax + by + cz + d = 0$ ditentukan sebagai:

$$D = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Contoh 14:

Tentukan jarak titik $(3, -2, 1)$ ke bidang $3x - 5y + z = -4$.

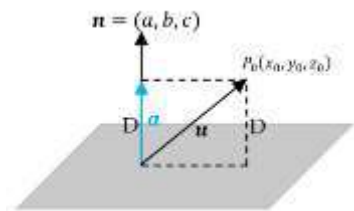
Solusi:

Diketahui : titik $P_0(x_0, y_0, z_0) = (3, -2, 1)$, dan $\mathbf{n} = (a, b, c) = (3, -5, 1)$

Maka jarak titik $(3, -2, 1)$ ke bidang adalah:

$$D = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$D = \frac{3 \cdot 3 + (-5)(-2) + 1 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{35}}$$



Gambar 5. 23 Jarak Titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ Ke Bidang

5.5 Geometri pada Sistem Linier

5.5.1 Vektor dan persamaan parametrik pada garis di R^2 dan R^3

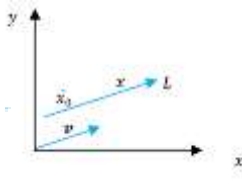
Misalkan x dan x_0 adalah titik pada garis L , dimana L paralel dengan vektor $\mathbf{v}$, maka dapat dinyatakan:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = k\mathbf{v}$$

$$\mathbf{x} = k\mathbf{v} + \mathbf{x}_0$$

Teorema 5.10

Misalkan L garis di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$, yang memuat titik x_0 serta paralel dengan vektor v . Maka persamaan garis yang melalui titik x_0 serta paralel dengan vektor v , adalah



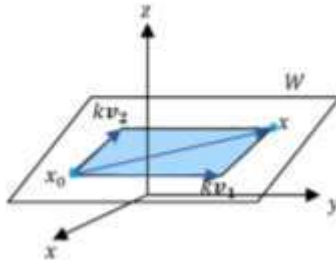
Gambar 5. 24 Garis Paralel dengan Vektor v

5.5.2 Persamaan Vektor dan Parametrik dari Bidang di $\mathbb{R}^3$

Titik x_0 terletak pada bidang W yang paralel dengan vektor nonkolinier v_1 dan v_2 . Jika x adalah sebarang titik pada bidang (gambar 5.25), maka dapat dirumuskan:

$$x - x_0 = kv_1 + kv_2$$

$$x = kv_1 + kv_2 + x_0$$



Gambar 5. 25 Persamaan Bidang Paralel Dengan Bidang W

Teorema 5.11

Misalkan titik x_0 berada pada bidang W di R^3 , dimana bidang W parallel dengan vektor nonkolinier v_1 dan v_2 . Maka persamaan bidang melalui titik x_0 dan paralel dengan v_1 dan v_2 adalah:

Contoh 15

Tentukan persamaan vektor dan parametrik dari bidang $3x - 5y + 2z = 4$,

Solusi:

$$3x - 5y + 2z = 4$$

$$x = \frac{1}{3}(4 + 5y - 2z)$$

Misalkan $y = k_1$ dan $z = k_2$, maka persamaan parametriknya dapat ditulis sebagai

$$x = \frac{1}{3}(4 + 5k_1 - 2k_2); y = k_1 \text{ dan } z = k_2$$

Selanjutnya persamaan vektor untuk bidang tersebut diperoleh:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}(4 + 5k_1 - 2k_2); k_1; k_2\right) \square$$

5.5.3 Garis melalui Dua Titik di R^n

Jika x_0 dan x_1 adalah dua titik di R^n , maka garis yang melalui dua titik ini paralel dengan vektor $v = x_1 - x_0$.

Dengan demikian dapat dituliskan

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$$

$$x = (1 - t)x_0 + tx_1$$

Definisi 5.10

Jika x_0 dan x_1 adalah dua titik di R^n , maka persamaan

$$x = (1 - t)x_0 + tx_1$$

Untuk $0 \leq t \leq 1$, merupakan segmen garis dari x_0 ke x_1 .

Contoh 16:

Segmen garis di R^2 dari titik $x_0 = (-3, 2)$ dan $x_1 = (1, 4)$ dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$x = (1 - t)x_0 + tx_1$$

$$x = (1 - t) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1 \quad \square$$

5.5.4 Sistem Linier dalam Perkalian Titik

Persamaan linier dalam variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat ditulis sebagai:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Dimana $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$.

Persamaan homogen :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

untuk $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$.

Dengan demikian dapat ditulis dalam bentuk vektor sebagai berikut:

Misalkan $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$; dan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Maka:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

$$\mathbf{a}, \mathbf{x} = b$$

Dan

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

$$\mathbf{a}, \mathbf{x} = 0$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa setiap vektor solusi $\mathbf{x}$ dari persamaan homogen adalah orthogonal terhadap vektor $\mathbf{a}$. Selanjutnya, misalkan sistem homogen sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

Selanjutnya dimisalkan vektor baris sebagai matriks koefisien $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$, maka sistem diatas dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}_2, \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

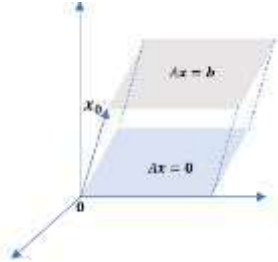
$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_m, \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Dari sini dapat dilihat bahwa vektor solusi $\mathbf{x}$ orthogonal terhadap semua vektor baris matrik koefisien. Ringkasnya, diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 5.12

Jika A adalah sebuah matrik $m \times n$, maka himpunan Solusi dari system linier homogen $Ax = \mathbf{0}$ terdiri dari semua vektor di $\mathbb{R}^n$ yang orthogonal dengan setiap baris dari vektor A .



Gambar 5. 26 Translasi $Ax = \mathbf{0}$ menjadi $Ax = b$

Selanjutnya, Gambar 5.26 menunjukkan hubungan antara $Ax = b$ dan $Ax = \mathbf{0}$ yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 5.13

Solusi umum dari suatu system linier konsisten $Ax = b$ dapat diperoleh dengan menambahkan Solusi tertentu dari $Ax = b$ ke Solusi umum dari

5.6 Perkalian Silang

Berbeda dengan perkalian titik yang menghasilkan skalar, perkalian silang menghasilkan sebuah vektor.

Definisi 5.11

Jika $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^3$, maka:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = ((u_2 \cdot v_3 - u_3 v_2), -(u_1 v_3 - u_3 v_1), (u_1 v_2 - u_2 v_1))$$

Contoh 15

Jika $\mathbf{u} = (2, 3, -7)$ dan $\mathbf{v} = (-1, 2, 5)$ Tentukan nilai $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Solusi:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (3 \cdot 5 - (-7 \cdot 2), -(2 \cdot 5 - (-7) \cdot (-1)), 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1))$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (15 + 14, -(10 - 7), 4 + 3)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (29, -3, 7)$$

Teorema 5.14

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^3$, dan k adalah skalar, maka:

- a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- d) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

Teorema berikut menunjukkan hubungan penting antara perkalian titik dan perkalian silang.

Teorema 5.15

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^3$, dan k adalah scalar, maka:

$$\text{a) } \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ orthogonal dengan } \mathbf{u}$$

$$\text{b) } \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ orthogonal dengan } \mathbf{v}$$

Contoh 16:

Dari contoh 15, tentukan $\mathbf{u}$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ dan $\mathbf{v}$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

Solusi:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 2,29 + 3,(-3) + (-7),7 = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = -1,29 + 2,(-3) + 5,7 = 0 \quad \square$$

5.6.1 Bentuk Determinan Perkalian Silang

Perkalian silang dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

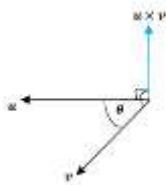
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Contoh 17:

$$\mathbf{u} = (2, -1, 3) \text{ dan } \mathbf{v} = (3, 0, -2),$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \quad \square$$

Dari teorema 5.15 diketahui bahwa $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ orthogonal dengan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$. Dengan demikian arah vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dapat ditunjukkan dengan aturan tangan kanan (gambar 5.24).



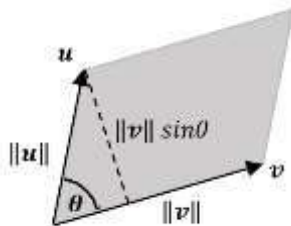
Gambar 5. 27 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ Orthogonal Dengan $\mathbf{u}$ Dan $\mathbf{v}$

5.6.2 Interpretasi Geometri dari Perkalian Silang

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^3$, identitas Lagrange dari teorema 5.15, dinyatakan sebagai:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

Dari gambar 5.28, jika θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$.



Gambar 5. 28 Interpretasi Geometri dari Perkalian Silang

Dengan demikian,

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

Dapat ditulis menjadi

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta)^2$$

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (1 - \cos^2 \theta) \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \sin^2 \theta \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

Karena $0 < \theta < \pi/2$, maka

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \quad \square$$

Dari gambar 5.28 dapat dilihat bahwa $\|\mathbf{v}\| \sin \theta$ merupakan tinggi dari jajargenjang, dan $\|\mathbf{u}\|$ adalah alasnya. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ merupakan luas dari jajargenjang, yakni:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$$

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \text{alas} \times \text{tinggi}$$

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \text{Luas} = A$$

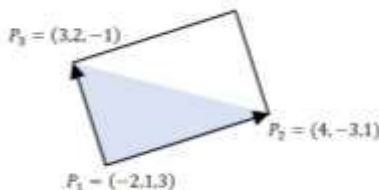
Teorema 5.16

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^3$, maka $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ sama dengan luas daerah jajargenjang.

Contoh 18:

Tentukan luas daerah segitiga yang dibatasi oleh titik $P_1 = (-2, 1, 3)$, $P_2 = (4, -3, 1)$ dan $P_3 = (3, 2, -1)$

Solusi:



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \mathbf{v}$$

$$A = 1/2 \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

$$A = 1/2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A = 1/2 \cdot \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{matrix} \right\|$$

$$A = 1/2 \cdot \left\| \mathbf{i} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$A = 1/2 \cdot \|(16 - 3)\mathbf{i} - (-24 - 15)\mathbf{j} + (6 + 20)\mathbf{k}\|$$

$$A = 1/2 \cdot \|13\mathbf{i} + 39\mathbf{j} + 26\mathbf{k}\|$$

$$A = 1/2 \cdot \sqrt{169 + 1521 + 676} = 1/2 \cdot 48.64 = 24.32$$

5.6.3 Interpretasi Geometri dari Determinan

Interpretasi geometri dari determinan disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 5.17

- a) Jika $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2)$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^2$, nilai absolut dari determinan :

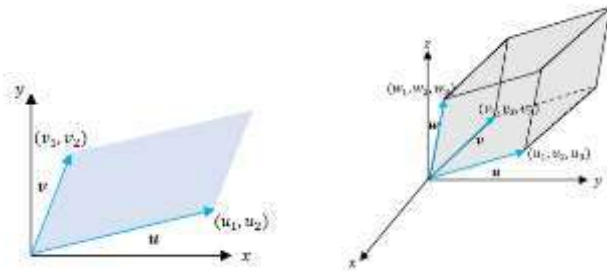
$$\left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|$$

merupakan luas jajargenjang (gambar 5.29a).

- b) Jika $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ dan $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2 \ w_3)$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^3$, nilai absolut dari determinan :

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

merupakan volume balok jajargenjang (gambar 5.29b).



Gambar 5. 29 Interpretasi Determinan pada Perkalian Silang

DAFTAR PUSTAKA

Andrily, S., & Hecker, D. (2023). *Elementary Linear Algebra*. USA: Academic Press, Elsevier Inc.

Anton, H., & Rorres, C. K. (2019). *Elementry Linear Algebra, Application version*. USA: Wiley.

BAB 6

RUANG VEKTOR UMUM

Oleh Prida N. L. Taneo

6.1 Ruang Vektor Real

Definisi:

Misalkan himpunan A beranggotakan sebarang objek dan tak kosong. Terdapat operasi penjumlahan serta perkalian dengan skalar (bilangan) yang didefinisikan pada A dimana aturan penjumlahan berarti menghubungkan masing-masing pasangan objek a serta b dalam A dengan objek $a + b$, yang dinamakan jumlah a dan b . Aturan perkalian berarti menghubungkan skalar m maupun objek a dalam A dengan objek ma , yang dinamakan kelipatan skalar dari a oleh m . Jika semua objek a, b, c dalam A serta semua skalar m dan n memenuhi aksioma di bawah ini, maka A dinamakan ruang vektor (*vector space*) dan setiap objek dalam A dinamakan vektor:

- 1) Jika a dan b merupakan objek dalam A , maka $a + b$ juga terdapat di A
- 2) $a + b = b + a$
- 3) $a + (b + c) = (a + b) + c$
- 4) Terdapat sebuah objek 0 di A , dimana $0 + a = a + 0 = a$ untuk semua a di A . Objek 0 dinamakan vektor 0 untuk A .

- 5) Untuk masing-masing anggota a di A , terdapat sebuah objek $-a$ di A yang disebut negatif dari a , dimana berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- 6) Jika sebarang skalar m dan sebarang objek a terdapat dalam A , maka ma juga berada dalam A .
- 7) $m(a + b) = ma + mb$
- 8) $(m + n)a = ma + na$
- 9) $m(na) = (mn)a$
- 10) $1a = a$

Teorema:

Misalkan terdapat ruang vektor A , dimana a vektor pada A , serta m merupakan skalar, maka:

- a) $0a = 0$
- b) $m0 = 0$
- c) $(-1)a = -a$
- d) Jika $ma = 0$ maka $m = 0$ atau $a = 0$,

6.2 Sub Ruang

Definisi:

Himpunan bagian B dari suatu ruang vektor A disebut subruang (*subspace*) A apabila B juga merupakan ruang vektor dengan operasi penjumlahan maupun perkalian skalar yang sama dengan A .

Teorema:

Apabila himpunan B memiliki minimal satu vektor dari ruang vektor A , maka B merupakan subruang dari A jika dan hanya memenuhi kondisi-kondisi:

- a) Apabila vektor a serta b dalam B , maka $a + b$ juga dalam B

- b) Apabila sebarang skalar m serta sebarang vektor a dalam B , maka ma juga dalam B .

6.2.1 Ruang Penyelesaian Sistem Homogen

Teorema:

Apabila terdapat sistem linear homogen $Ax=0$ dengan banyaknya persamaan j serta banyaknya faktor yang belum diketahui k , maka himpunan vektor penyelesaian sistem tersebut merupakan subruang R^k ,

Definisi:

Vektor x merupakan kombinasi linear dari vektor $a_1, a_2, \dots, a_r$ jika dapat dinyatakan $x = m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_ra_r$ dimana $m_1, m_2, \dots, m_r$ adalah skalar.

6.2.2 Merentang

Teorema:

Jika vektor $a_1, a_2, \dots, a_r$ terdapat dalam ruang A maka:

- Subruang dari A merupakan himpunan B yang memuat semua kombinasi linear $a_1, a_2, \dots, a_r$,
- B merupakan subruang paling kecil yang memuat $a_1, a_2, \dots, a_r$ sehingga untuk subruang lain yang juga memuat $a_1, a_2, \dots, a_r$ pasti memuat B .

Definisi:

Jika $C = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, $a_i \in A$ maka B sebagai subruang A yang memuat seluruh kombinasi linear dari vektor dalam C dinamakan ruang yang direntang oleh $a_1, a_2, \dots, a_r$ atau vektor $a_1, a_2, \dots, a_r$ merentang B .

$$B = \text{rentang}(C) \quad \text{atau} \quad B = \text{rentang}\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$$

Teorema:

Jika $C = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ dan $C' = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ berada dalam A , maka kedua himpunan memiliki rentang yang sama jika dan hanya jika masing-masing vektor dalam himpunan C

merupakan kombinasi linear dari vektor dalam himpunan C' dan sebaliknya.

6.3 Kebebasan Linear

Definisi:

Apabila $C = \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \neq \emptyset$ maka persamaan $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_r a_r$ minimal mempunyai satu penyelesaian yaitu $m_1 = 0, m_2 = 0, \dots, m_r = 0$,

Jika tidak ada lagi penyelesaian lain maka C dinamakan himpunan bebas linear. Jika masih ada penyelesaian lain, C disebut sebagai himpunan tak bebas linear.

Teorema:

Himpunan C yang memiliki minimal dua vektor adalah:

- a) Tak bebas linear jika dan hanya jika paling tidak salah satu dari vektor pada C dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada C .
- b) Bebas linear jika dan hanya jika tidak ada vektor pada C yang dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada C .

Teorema:

- 1) Suatu himpunan terhingga vektor-vektor yang mengandung vektor nol adalah tidak bebas linear
- 2) Suatu himpunan dengan tepat dua vektor adalah bebas linear jika dan hanya jika tidak satupun dari vektornya merupakan kelipatan skalar dari vektor lainnya.

Teorema:

Misalkan $C = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada R^k , Jika $r > k$, maka C tidak bebas linear.

6.4 Basis dan Dimensi

Definisi:

Jika A sebarang ruang vektor dimana $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_i \in A$ maka C merupakan basis untuk A apabila memenuhi kondisi:

- 1) C bebas linear
- 2) A direntang oleh C

Teorema:

Jika $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ merupakan basis A , maka semua vektor dalam A bisa dituliskan sebagai:

$a = m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n$ dengan tepat satu cara.

Definisi:

Apabila ruang vektor A yang takkosong memuat himpunan vektor terhingga yakni $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ yang membentuk suatu basis maka A dikatakan mempunyai dimensi terhingga, sebaliknya apabila tidak ada himpunan seperti itu maka A dikatakan memiliki dimensi yang tidak terhingga. Ruang vektor nol dianggap berdimensi terhingga.

Misalkan ruang vektor A memiliki dimensi yang terhingga dan $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ basis sebarang.

- 1) Himpunan dikatakan tidak bebas linear bila jumlah vektor dalam himpunan tersebut lebih besar n .
- 2) Himpunan dikatakan tidak merentang A bila jumlah vektor dalam himpunan tersebut kurang dari n .

Teorema:

Banyaknya vektor pada seluruh basis dari ruang vektor yang dimensinya terhingga selalu sama.

Definisi:

Jumlah vektor dalam suatu basis ruang vektor A dengan dimensi terhingga dilambangkan sebagai $\dim(A)$. Dimensi untuk ruang vektor nol adalah nol.

Teorema:

Misalkan C himpunan taknol dan terdiri dari vektor-vektor dalam ruang vektor A .

- a) Apabila C bebas linear dan a merupakan vektor dalam A yang ada di luar rentang (C) maka himpunan $C \cup \{a\}$ juga bebas linear.
- b) apabila a merupakan vektor dalam C yang bisa dibentuk menjadi kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya dalam C maka C serta $C - \{a\}$ merentang pada ruang yang sama.

Teorema:

Apabila ruang vektor A berdimensi k dan C merupakan himpunan dalam A dengan jumlah k vektor, maka C merupakan basis untuk A bila memenuhi syarat C merentang A atau C bebas linear.

Teorema:

Misal himpunan terhingga dari vektor-vektor dalam suatu ruang vektor A yang memiliki dimensi terhingga:

- a) Bila C bukan basis A tetapi merentang A , maka dengan mengeluarkan vektor yang bersesuaian dari C akan menjadikan C sebagai basis.
- b) Bila C bebas linear dan bukan basis A , maka dengan menambahkan vektor yang bersesuaian dalam C akan menjadikannya sebagai basis.

Teorema:

Jika B adalah suatu subruang dari suatu ruang vektor A yang berdimensi terhingga, maka $\dim(B) \leq \dim(A)$, Jika $\dim(B) = \dim(A)$. maka $B = A$.

6.5 Ruang Baris, Ruang Kolom Dan Ruang Nul.

Definisi:

Untuk Matriks A berukuran $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

baris-baris A dalam R^n dinamakan vektor baris dari A yakni

$$r_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

$$r_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}]$$

$\vdots$

$$r_m = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}]$$

kolom-kolom B dalam R^m dinamakan vektor kolom dari A yakni

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdot \cdots \cdot c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi:

Untuk matriks $A_{m \times n}$. ruang baris A adalah subruang R^n yang direntang oleh vektor baris dari A dan ruang kolom A merupakan subruang R^m yang direntang oleh vektor-vektor kolom. Ruang penyelesaian sistem persamaan homogen $Ax = 0$ sebagai subruang R^n dinamakan ruang nul A.

Teorema:

Sistem persamaan linear $Ax = b$ dikatakan konsisten apabila memenuhi syarat bikondisional yaitu b berada dalam ruang kolom A.

Teorema:

Apabila sebarang penyelesaian tunggal dari $Ax = b$ adalah y dan jika $a_1, a_2, \dots, a_k$ membentuk ruang penyelesaian untuk sistem homogen $Ax = 0$ yakni basis ruang nul A , maka masing-masing penyelesaian $Ax = b$ bisa berbentuk

$$x = y + m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_k a_k$$

Kebalikannya untuk semua skalar $m_1, m_2, \dots, m_k$, vektor x diatas merupakan penyelesaian untuk $Ax = b$.

Teorema:

Ruang nul dari sebuah matriks tidak berubah jika pada matriks tersebut diterapkan operasi baris elementer.

Teorema:

Ruang baris dari suatu matriks tidak mengalami perubahan apabila pada matriks tersebut diterapkan operasi baris elementer.

Teorema:

Jika dua matriks P dan Q ekuivalen baris maka:

- Himpunan vektor kolom matriks P bebas linear bila dan hanya bila vektor kolom yang sesuai pada matriks Q juga bebas linear.
- Himpunan vektor kolom matriks P membentuk basis ruang kolom dari P bila dan hanya bila vektor kolom yang sesuai pada matriks Q juga membentuk basis ruang kolom dari Q .

Teorema:

Basis untuk ruang baris dari S dibentuk oleh vektor-vektor baris dengan 1 utama (yakni vektor baris bukan nol) serta basis untuk ruang kolom S dibentuk oleh vektor kolom dengan 1 utama dari vektor baris ketika matriks S berbentuk eselon baris.

6.6 Rank dan Nulitas

Teorema:

Jika P sebarang matriks maka P memiliki ruang baris serta ruang kolom yang berdimensi sama.

Definisi:

Rank matriks P adalah dimensi umum dari ruang baris serta ruang kolom matriks P dan dinotasikan dengan $\text{rank}(P)$. Nulitas dari matriks P adalah dimensi ruang nul matriks P dan dinotasikan dengan nulitas (P) .

Teorema:

Jika P sebarang matriks maka matriks P dan matriks P transpos memiliki rank yang sama.

Teorema:

Jumlah kolom suatu matriks P bernilai sama dengan penjumlahan dari rank dan nulitas matriks P .

Teorema:

Apabila P matriks persegi berlaku:

- 1) Rank P sama dengan jumlah variabel utama pada penyelesaian $Ax = 0$.
- 2) Nulitas P sama dengan jumlah paramater pada penyelesaian umum $Ax = 0$.

Teorema:

Jika sistem linear $Ax = b$ dengan s persamaan dan t faktor yang belum diketahui, maka beberapa pernyataan dibawah ini ekuivalen:

- a) $Ax = b$ konsisten
- b) b berada dalam ruang kolom A

- c) Rank dari matriks koefisien A dan rank matriks yang diperbesar sama.

Contoh soal:

1. Diketahui $p = (1. -1. 4)$ dan $q = (3. 6. 1)$ pada R^3 , Tunjukkan bahwa $r = (5. 4. 9)$ merupakan kombinasi linear dari p dan q .

Penyelesaian:

r merupakan kombinasi linear dari p dan q jika terdapat skalar m_1 dan m_2 sedemikian sehingga

$$r = m_1 p + m_2 q$$

$$(5. 4. 9) = m_1(1. -1. 4) + m_2(3. 6. 1)$$

$$(5. 4. 9) = (m_1 + 3m_2. -m_1 + 6m_2. 4m_1 + m_2)$$

Diperoleh sistem persamaan berikut:

$$m_1 + 3m_2 = 5$$

$$-m_1 + 6m_2 = 4$$

$$4m_1 + m_2 = 9$$

Penyelesaian dari sistem diatas adalah $m_1 = 2$ dan $m_2 = 1$ sehingga $r = (5. 4. 9)$ merupakan kombinasi linear dari p dan q yaitu $r = 2p + q$,

2. Tentukan apakah vektor-vektor berikut merentang pada R^3 :
- $f = (2. 2. 2)$, $g = (0. 0. 3)$ dan $h = (0. 1. 1)$
 - $j = (2. -1. 3)$, $k = (4. 1. 2)$. dan $l = (8. -1. 8)$

Penyelesaian:

- a. Misalkan sebarang vektor $i = (i_1. i_2. i_3)$ pada R^3 . Vektor i dikatakan sebagai kombinasi linear dari f, g dan h jika $i = m_1 f + m_2 g + m_3 h$; $m_1. m_2. m_3$ merupakan skalar.

$$i = m_1 f + m_2 g + m_3 h$$

$$(i_1. i_2. i_3) = m_1(2. 2. 2) + m_2(0. 0. 3) + m_3(0. 1. 1)$$

$$(i_1. i_2. i_3) = 2m_1. 2m_1 + m_3. 2m_1 + 3m_2 + m_3)$$

Diperoleh sistem:

$$2m_1 = i_1$$

$$2m_1 + m_3 = i_2$$

$$2m_1 + 3m_2 + m_3 = i_3$$

Sistem di atas konsisten untuk nilai i_1, i_2, i_3 jika dan hanya jika matriks koefisiennya $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ mempunyai determinan bukan nol.

Dengan metode ekspansi baris satu diperoleh determinannya adalah -6 sehingga vektor vektor-f, g dan h merentang pada R^3 ,

- b. Misalkan sebarang vektor $i = (i_1, i_2, i_3)$ pada R^3 . Vektor i dikatakan sebagai kombinasi linear dari j, k, l jika

$$i = m_1j + m_2k + m_3l$$

dimana m_1, m_2, m_3 merupakan skalar

$$i = m_1j + m_2k + m_3l$$

$$(i_1, i_2, i_3) = m_1(2, -1, 3) + m_2(4, 1, 2) + m_3(8, -1, 8)$$

Diperoleh sistem:

$$2m_1 + 4m_2 + 8m_3 = i_1$$

$$-m_1 + m_2 - m_3 = i_2$$

$$3m_1 + 2m_2 + 8m_3 = i_3$$

Sistem di atas konsisten untuk nilai i_1, i_2, i_3 jika dan hanya jika

matriks koefisiennya $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ mempunyai determinan

bukan nol.

Dengan metode ekspansi baris kedua diperoleh determinannya adalah 0 sehingga vektor vektor j, k dan l tidak merentang pada R^3 ,

3. Periksalah apakah vektor $p_1 = (2, 4, -3)$ dan $p_2 = (8, 16, -12)$ bebas linear pada R^3 .

Penyelesaian:

p_2 adalah kelipatan skalar dari p_1 yaitu $p_2 = 4p_1$ sehingga menurut teorema, kedua vektor tidak bebas linear.

4. Tentukan basis dan dimensi untuk ruang solusi dari sistem

$$a - 3b + c = 0$$

$$2a - 6b + 2c = 0$$

$$3a - 9b + 3c = 0$$

Penyelesaian

Dengan eliminasi Gauss Jordan dicari solusi dari sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$a - 3b + c = 0$$

$$a = 3b - c$$

$$b = b$$

$$c = c$$

Himpunan solusi: $\left\{ a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Maka basis untuk ruang solusi adalah $(3 \ 1 \ 0)$ $(-1 \ 0 \ 1)$ dan dimensi=2.

5. Tentukan rank dan nulitas dari $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$

Penyelesaian:

Mencari bentuk eselon baris tereduksi dari B dengan menggunakan operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 5R_1 \\ R_3 - 7R_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 1 & -19 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 - R_2 \rightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_1 \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena terdapat dua baris tak nol, ruang baris dan ruang kolom memiliki dimensi dua sehingga rank $B = 2$.

Selanjutnya mencari solusi dari $BX = 0$ dengan mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk eselon baris tereduksi seperti di atas dengan tambahan kolom nol pada bagian akhir. Sistem persamaan yang bersesuaian yaitu:

$$a - 16c = 0$$

$$b - 19c = 0$$

Sehingga solusi umum adalah

$$a = 16c$$

$$b = 19c$$

$$c = c$$

Atau ekuivalen dengan $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 16 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$,

vektor ini membentuk basis ruang solusi sehingga nulitas $(B) = 1$.

Soal Latihan

1. Tentukan apakah himpunan berikut ini adalah ruang vektor dibawah operasi tersebut, jika bukan tuliskan aksioma mana yang tidak terpenuhi:
 - a. Himpunan semua bilangan real positif dengan operasi $p + q = pq$ dan $kp = p^k$,
 - b. Himpunan semua matriks 2×2 berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ dengan penjumlahan dan perkalian scalar matriks.
 - c. Himpunan semua pasangan bilangan real (a, b) dengan operasi $(a \ b) + (a' \ b') = (a + a' \ b + b')$ dan $k(a + b) = (2ka \ 2kb)$,
2. Tentukan apakah vektor-vektor berikut ini merentang R^3 ,
 - a. $u = (3, 1, 4), v = (2, -3, 5), w = (5, -2, 9), x = (1, 4, -1)$.
 - b. $p = (1, 2, 6), q = (3, 4, 1), w = (4, 3, 1), x = (3, 3, 1)$.
3. Periksa apakah himpunan vektor $(0 \ 0 \ 2 \ 2) \ (3 \ 3 \ 0 \ 0)$ dan $(1 \ 1 \ 0 \ -1)$ pada R^4 bebas linier atau tidak.

4. Tentukan basis dan dimensi untuk ruang solusi dari sistem

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\3x + 2y - 2z &= 0 \\4x + 3y - z &= 0 \\6x + 5y + z &= 0\end{aligned}$$

5. Tentukan rank dan nulitas dari matriks:

a. $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. 2005. Aljabar Linear Elementer. Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga,
- Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2004. Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi. Edisi Kedelapan Jilid 1. Jakarta: Erlangga.

BAB 7

DIAGONALISASI DAN BENTUK KUADRAT

Oleh Rahma Faelasofi

7.1 Pendahuluan

Diagonalisasi matriks sebagai konsep dalam aljabar linear dengan berbagai aplikasi dalam matematika, fisika, teknik, dan bidang lainnya (Jachmann and Wirth, 2010). Diagonalisasi adalah proses mengubah matriks persegi Q menjadi matriks diagonal yang semua elemen diluar diagonal adalah nol. Matriks diagonal yang dihasilkan D , menangkap sifat-sifat penting dari matriks Q dalam bentuk yang lebih sederhana (Zúñiga Anaya, 2010). Matriks diagonal adalah matriks persegi dalam algebra linear struktur yang memiliki struktur sederhana (Ballantine, 1965).

Dalam aljabar linear, matriks merupakan konsep dasar. Konsep diagonalisasi menggabungkan persamaan nilai eigen dari vektor eigen berbeda menjadi satu persamaan matriks. Hal tersebut dapat dilihat pada suatu matriks Q berordo $m \times m$ dengan vektor eigen bebas linear $u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_k$ yang sesuai pada nilai eigen $\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_k$, maka:

$$Qu_1 = \lambda_1 u_1, \quad Au_2 = \lambda_2 u_2, \dots, \quad Au_k = \lambda_k u_k$$

Atau

$$Qu_r = \lambda_r u_r \text{ dengan } r = 1 \ 2 \ \cdots \ k \tag{1}$$

Kumpulan vektor u_k digabungkan menjadi matriks $m \times k$, yang ditulis sebagai matriks partisi yaitu

$$P = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_k)$$

u_k matriks kolom ke- k dari P , sehingga persamaan (1) diperoleh:

$$QP = (Au_1 \ Au_2 \ \cdots \ Au_k) = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_k)D$$

D sebagai matriks diagonal $k \times k$ pada unsur $\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_k$, diperoleh:

$$QP = PD \text{ atau } PD = QP \quad (2)$$

Ini merupakan persamaan sederhana pada persamaan nilai eigen untuk k vektor eigen.

Andaikan terdapat matriks Q berordo $m \times m$ memiliki m vektor eigen, sehingga $k = m$. Akibatnya matriks P berordo $m \times m$, dengan kolom vektor eigen bebas linear, dan P yang invertibel. Selanjutnya kali persamaan (2) dengan P^{-1} dari sebelah kiri, akan diperoleh:

$$D = P^{-1}QP \quad (3)$$

Sehingga matriks Q berordo $m \times m$ mempunyai m vektor eigen bebas linear, maka ada matriks P yang invertibel dan matriks diagonal D , sehingga D dapat difaktorkan dalam bentuk persamaan (3). Kondisi ini disebut matriks Q dapat **didiagonalkan**.

7.2 Diagonalisasi

Definisi 7.1 Ada matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama sebagai Q dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks P yang *invertible* sehingga $P^{-1}QP$ adalah matriks diagonal, matriks P disebut **mendiagonalisasi** matriks Q .

Penjelasannya dapat diketahui bahwa masalah diagonalisasi dari vektor Q berordo $m \times m$ adalah ekuivalen, berikut tahapan mendiagonalkan matriks berordo $m \times m$:

Tahap 1

Identifikasi m vektor eigen bebas linear dari matriks Q berordo $m \times m$, misal $p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_m$

Tahap 2

Jadikan matriks P yang memiliki $p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_m$ sebagai vektor kolom

Tahap 3

Matriks $D = P^{-1}QP$ sebagai matriks diagonal dengan $\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_m$ merupakan unsur diagonal berurutan dan λ_i sebagai nilai eigen bersesuaian dengan p_i untuk $i = 1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ m$

Contoh 1:

Terdapat matriks Q :

Dapatkan:

- a. Matriks P diagonalisasi Q
- b. $D = P^{-1}QP$

Penyelesaian:

- a. Persamaan karakteristik matriks Q

$$\det(\lambda I - Q) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left[\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -4 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

diperoleh nilai-nilai eigen Q :

$$\lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

Untuk $\lambda_1 = 1$, sistem persamaan linear homogen:

$$(\lambda I - Q)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -4 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - 1 & 0 \\ -4 & 1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -4x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x_1 = -2x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

Jika $x_2 = t$, maka

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t \\ x_2 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah

$$p_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_2 = -1$, sistem persamaan linear homogen:

$$(\lambda I - Q)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -4 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 - 1 & 0 \\ -4 & -1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ -4x_1 = 0 \end{cases}$$

Jika $x_2 = t$, maka

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$ adalah $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Diperoleh bahwa $(p_1 \ p_2)$ bebas linear, sehingga $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ akan mendiagonalkan matriks Q .

b. memeriksa bahwa $D = P^{-1}QP$

Diketahui :

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{\det(P)} \times \text{Adj}(P) = \frac{1}{1/2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D = P^{-1}QP &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan matriks P diagonal matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Diketahui:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan dicari nilai eigen matriks B dengan cara Hamilton:

$$tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} = 4 + 1 + 1 = 6$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - (-2) = 6$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$$

$$\begin{aligned}
 |B| &= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 0 - 0) - (0 - 0 - 2) = 4 + 2 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

Substitusikan $tr(B)$, B_{11} , B_{22} , B_{33} dan $|B|$ ke Δt

$$\Delta t = t^3 - tr(B)t^2 + (B_{11} + B_{22} + B_{33})t - |B|$$

$$= t^3 - 6t^2 + (1 + 6 + 4)t - 6$$

$$= t^3 - 6t^2 + 11t - 6$$

Selanjutnya persamaan tersebut dicarikan nilai faktornya

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_3 = 3$$

Jadi nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$

Untuk $\lambda_1 = 1$, sistem persamaan linear homogen

$$(\lambda I - B)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3x_1 - x_3 = 0$$

$$2x_1 = 0$$

$$2x_3 = 0$$

Misal $x_2 = t \in R$, maka

$$x_1 = 0 \text{ dan } x_2 = 0$$

Jadi vektor untuk $\lambda_1 = 1$ adalah $p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = 2$, sistem persamaan linear homogen

$$(\lambda I - B)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 = 0$$

$$2x_1 + x_3 = 0$$

Selanjutnya

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{b_2 + b_1 \\ b_3 + b_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Diperoleh persamaan

$$-2x_1 - x_3 = 0 \rightarrow -2x_1 = x_3 \rightarrow x_1 = -x_3/2$$

$$x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_2 = x_3$$

Karena $x_3 = t \in R$, maka

$$x_1 = -\frac{t}{2}; x_2 = t; x_3 = t \in R$$

$$\text{Jadi vektor untuk } \lambda_2 = 2 \text{ adalah } p_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_3 = 3$, sistem persamaan linear homogen

$$(\lambda I - B)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + 2x_3 = 0$$

Selanjutnya

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{b_2 + 2b_1 \\ b_3 + 2b_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{1/2 b_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Diperoleh persamaan

$$-x_1 - x_3 = 0 \rightarrow -x_1 = x_3 \rightarrow x_1 = -x_3$$

$$x_2 - (-x_1) = 0 \rightarrow x_2 + x_1 = 0 \rightarrow x_2 = -x_1$$

Karena $x_3 = t \in R$, maka

$$x_1 = -t$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = t$$

Jadi vektor untuk $\lambda_2 = 3$ adalah $p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dengan diperolehnya vektor-vektor yang bebas linear:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; p_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \text{ dan } p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pada nilai eigen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$ dari matriks B .

Jadi, diperoleh matriks P adalah

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mencari matriks diagonal sekaligus memeriksa bahwa $D = P^{-1}BP$

Diketahui :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \times \text{Adj}(P)$$

Dengan

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\begin{aligned} \det(P) &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (-1/2) + (-1) - (-1/2) - 0 - 0 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} kof(P) &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Berarti

$$Adj(P) = (kof(P)^t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \times Adj(P) = -1 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

7.3. Diagonalisasi Ortogonal

Definisi 7.2 Matriks Q berordo $m \times m$ dinyatakan dapat **didiagonalisasi secara ortogonal** jika ada matriks P yang ortogonal, dan matriks P diasumsikan **mendiagonalisasi Q secara ortogonal** (Koad and Jaroensutasinee, 2019).

Ada dua isu penting yang muncul dari definisi ini:

1. Matriks yang dapat diortogonalisasi?
2. Bagaimana cara menentukan matriks ortogonal untuk melakukan diagonalisasi?

Langkah-langkah untuk melakukan diagonalisasi suatu matriks, yaitu:

Tahap 1

Temukan basis pada setiap ruang eigen dari matriks Q .

Tahap 2

Tetapkan basis ortonormal untuk setiap ruang eigen yang diterima dengan proses Gram-Schmidt diterapkan pada setiap basis.

Tahap 3

Bentuklah matriks P yang kolom-kolomnya merupakan vektor basis yang ditempatkan pada Tahap 2, matriks ini secara ortogonal mendiagonalisasi Q .

Contoh:

Dimisalkan terdapat matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

- a. Diagonalisasi C ortogonal dari hasil identifikasi matriks P
- b. Identifikasi hasil matriks $P^{-1}CP$

Solusi:

- a. Persamaan karakteristik matriks C adalah

$$\det(C - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

nilai-nilai eigen dari matriks C adalah

$$\lambda_1 = 3 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

$$\text{Misal } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sebagai vektor eigen C bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah penyelesaian non trivial dari sistem persamaan linear:

$$(C - \lambda I)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_1 = 3$, diperoleh

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 - 2x_2 = 0 \rightarrow 4x_1 = 2x_2 \rightarrow 2x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2}$$

Jika $x_2 = t \in \mathbb{R}$, maka

$$x_1 = \frac{t}{2}$$

Vektor eigen C yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Membentuk basis untuk ruang tiga.

Selanjutnya, proses Gram-Schmidt diterapkan akan dihasilkan vektor eigen orthonormal, yaitu:

$$v_1 = \frac{p_1}{|p_1|} = \frac{(1/2 \ 1)}{\left| \sqrt{1/2^2 + 1^2} \right|} = \frac{(1/2 \ 1)}{\left| \sqrt{1/4 + 4/4} \right|} = \frac{(1/2 \ 1)}{\left| \sqrt{5/4} \right|}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/2 / \sqrt{5/4} \\ 1 / \sqrt{5/4} \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_2 = -1$, diperoleh

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - (-1) & 1 \\ 4 & 1 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 + 2x_2 = 0 \rightarrow 4x_1 = -2x_2 \rightarrow 2x_1 = -x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{x_2}{2}$$

Jika $x_2 = t \in R$, maka

$$x_1 = -\frac{t}{2}$$

diperoleh vektor eigen C dengan $\lambda = -1$ adalah

$$p_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Membentuk basis untuk ruang tiga.

Selanjutnya, proses Gram-Schmidt diterapkan akan dihasilkan vektor eigen orthonormal, yaitu:

$$v_2 = \frac{p_2}{|p_2|} = \frac{(-1/2 \ 1)}{\left| \sqrt{(-1/2)^2 + 1^2} \right|} = \frac{(-1/2 \ 1)}{\left| \sqrt{1/4 + 4/4} \right|} = \frac{(-1/2 \ 1)}{\left| \sqrt{5/4} \right|}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 / \sqrt{5/4} \\ 1 / \sqrt{5/4} \end{bmatrix}$$

Dengan hasil v_1 dan v_2 adalah vektor kolom, diperoleh diagonalisasi C orthogonal, yaitu:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 / \sqrt{5/4} & -1/2 / \sqrt{5/4} \\ 1 / \sqrt{5/4} & 1 / \sqrt{5/4} \end{bmatrix}$$

b. Menentukan matriks $D = P^{-1}CP$

$$D = P^{-1}CP$$

Diketahui:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 / \sqrt{5/4} & -1/2 / \sqrt{5/4} \\ 1 / \sqrt{5/4} & 1 / \sqrt{5/4} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \times \text{Adj}(P)$$

Diperoleh:

$$\det(P) = ad - bc = 0.8$$

Maka:

$$\begin{aligned}
 P^{-1} &= \frac{1}{\det(P)} \times \text{Adj}(P) = \frac{1}{0.8} \times \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5/4} & 1/2/\sqrt{5/4} \\ -1/\sqrt{5/4} & 1/2/\sqrt{5/4} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1.25 & 0.625 \\ -1.25 & 0.625 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Ballantine, C. S. (1965) 'Stabilization by a Diagonal Matrix', *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71(3), p. 510. doi: 10.1090/S0002-9904-1965-11298-8.
- Jachmann, K. and Wirth, J. (2010) 'Diagonalisation schemes and applications', *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 189(4), pp. 571–590. doi: 10.1007/s10231-009-0125-6.
- Koad, P. and Jaroensutasinee, K. (2019) 'Reconstruction and Prediction', *Walailak Journal of Science and Technology*, 18(3), pp. 1–21. Available at: <https://wjst.wu.ac.th/index.php/wjst/article/view/7115/2078>.
- Zúñiga Anaya, J. C. (2010) 'Diagonalization of quadratic matrix polynomials', *Systems and Control Letters*, 59(2), pp. 105–113. doi: 10.1016/j.sysconle.2009.12.005.

BAB 8

METODE NUMERIK

Oleh Theresia Monika Siahaan

8.1 Deskripsi Metode Numerik

Metode numerik dapat dideskripsikan sebagai suatu cara/teknik dalam menyelesaikan masalah yang dirumuskan menurut pola matematis menggunakan mekanisme perhitungan. Akibatnya dalam pelaksanaannya memerlukan bantuan alat berupa komputer guna menuntaskan perhitungannya. Jika tidak ada komputer sebagai alat bantu, maka metode numerik ini tidak dapat memberikan keuntungan.

Metode numerik dapat diartikan sebagai alat yang paling efektif dalam penyelesaian masalah untuk berbagai jenis bidang. Metode numerik juga dapat menuntaskan suatu sistem persamaan linear, persamaan tidak linear serta persamaan kompleks yang mustahil dapat dituntaskan dengan cara sistematis. Metode numerik ini dapat dipergunakan untuk berbagai jenis bidang ilmu pengetahuan, misalnya dalam bidang teknik (meliputi teknik mesin, sipil, elektro, kimia dan lain sebagainya), medis/kedokteran, kemasyarakatan, perekonomian serta bidang-bidang yang lainnya. Beragam permasalahan yang muncul dari berbagai jenis bidang ilmu pengetahuan tersebut dapat diilustrasikan ke dalam bentuk matematika untuk jenis peristiwa yang saling mempengaruhi. Contohnya, pergerakan air dan polutan pada salurannya, sungai dan laut dan perambatan panas. Pada umumnya peristiwa yang mempengaruhi tersebut cukuplah banyak dan sangatlah kompleks, untuk

mempermudahnya dibutuhkan suatu asumsi yang mengakibatkan sebagiannya dapat diabaikan. Walaupun sudah dipermudah, tetapi sering pula persamaan tersebut tidaklah dapat dilakukan penyelesaiannya secara sistematis. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu metode numerik dalam penyelesaiannya.

1. Kesalahan (*error*)

Dalam menyelesaikan sebuah persamaan matematika secara metode numerik cuma memberi nilai perkiraan yang mendekati dari nilai yang sesungguhnya (nilai eksak). Artinya ketika menyelesaikan secara numerik didapat adanya kesalahan terhadap nilai yang sebenarnya. Terdapat 3 jenis kesalahan, yakni: kesalahan bawaan, kesalahan pembulatan dan kesalahan pemotongan.

Pengertian kesalahan bawaan adalah kesalahan yang dilihat berdasarkan nilai datanya. Timbulnya kesalahan tersebut dikarenakan adanya kelalaian dalam menuliskan data-data, kesalahan dalam membaca skala dan kesalahan dalam memahami hukum fisika dari data yang akan diukur.

Adapun pengertian kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang muncul dikarenakan tidak memperhitungkan beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Terjadinya kesalahan ini jika bilangan perkiraan tersebut dipergunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Bilangan dapat dibulatkan menjadi posisi ke- n dengan cara menjadikan seluruh angka yang di sebelah kanan dari posisi tersebut sama dengan nol. Sementara itu angka yang terletak pada posisi ke- n tersebut tetap dan tidak dinaikkan satu digit. Sebagai contoh: 76584232, bisa dibulatkan menjadi 76584000 3,1415926, bisa dibulatkan menjadi 3,14

Terdapat peraturan dalam pembulatan bilangan n sampai dengan n angka, yang artinya mengeluarkan seluruh angka yang disebelah kanan dari angka ke-n tersebut. Berikut ini peraturan yang dimaksud tersebut:

- a. Apabila bilangannya yang akan dibuang jumlahnya kurang dari setengah satuan dari bilangan ke-n, maka angka ke-n menjadi tetap saja tidak berubah. Misalnya: 27,74243 bisa dibulatkan menjadi 27,74
- b. Apabila bilangannya yang akan dibuang jumlahnya lebih dari setengah satuan dari bilangan ke-n, maka angka ke-n dapat dinaikkan satu tingkat. Misalnya: 73,9882 bisa dibulatkan menjadi 73,98
- c. Apabila bilangannya yang akan dibuang jumlahnya tepat setengah satuan dari bilangan yang ke-n, maka angka ke-n tetap saja tidak berubah asalkan angka yang ke-n tersebut adalah bilangan genap dan dapat dinaikkan satu digit asalkan bilangan tersebut adalah bilangan ganjil. Akibatnya angka yang ke-n tersebut akan selalu bilangan genap. Misalnya: 56,35 bisa dibulatkan menjadi 56,447,45 bisa dibulatkan menjadi 47,4

Sedangkan pengertian dari kesalahan pemotongan adalah kesalahan yang timbul dikarenakan tidak dilaksanakannya perhitungan yang sebanding dengan prosedur matematika yang tepat. Berikut contoh suatu proses yang tidak terhingga digantikan dengan proses hingga:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Terdapat kesalahan apabila persamaan di atas dibagi atau dipotong menjadi beberapa suku:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

2. Kesalahan Absolut dan Relatif

Adapun korelasi diantara nilai eksak, nilai perkiraan dan kesalahan dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$p = p^* + E_e$$

dimana : p = nilai eksak

p^* = nilai perkiraan

E_e = kesalahan terhadap nilai eksak

Indeks e menyatakan kesalahan yang dibandingkan dengan nilai eksak. Berdasarkan persamaan tersebut, dapat dilihat bahwa kesalahan merupakan perbedaan diantara nilai eksak dan nilai perkiraan.

$$E_e = p - p^* \quad \dots\dots\dots (a)$$

Persamaan (a) diatas merupakan salah satu bentuk kesalahan, yang disebut sebagai kesalahan absolut. Adapun pada kesalahan absolut tidak dapat memperlihatkan berapa besar tingkatan kesalahan. Misalnya, kesalahan 1 cm pada pengukuran pensil akan sangat terasa dibandingkan dengan kesalahan yang sama disaat pengukuran panjang dari sebuah jembatan.

Besar atau kecilnya tingkat kesalahan yang diperoleh diperlihatkan dalam bentuk kesalahan relatif, yakni dengan membandingkan kesalahan yang telah terjadi dengan nilai eksak.

$$\mathcal{E}_e = \frac{E_e}{p} \quad \dots\dots\dots (b)$$

dimana $\mathcal{E}_e$ merupakan kesalahan relatif terhadap nilai eksak.

Dalam bentuk persen, kesalan relatif dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathcal{E}_e = \frac{E_e}{p} \times 100\% \quad \text{..... (c)}$$

Pada persamaan (a), (b) dan (c), dapat dilihat bahwa kesalahan diperbandingkan terhadap nilai eksak. Untuk mengetahui nilai eksak tersebut, maka fungsinya diselesaikan dengan cara sistematis karena pada umumnya nilai eksak itu tidak diketahui. Oleh sebab itu, kesalahan ditunjukkan berdasarkan dari nilai perkiraan paling baik dari nilai eksak, yang dapat dinyatakan dalam bentuk berikut ini:

$$\mathcal{E}_e = \frac{p^{*n+1} - p^{*n}}{p^{*n+1}} \times 100\% \quad \text{..... (d)}$$

dimana: ε = kesalahan terhadap nilai perkiraan yang paling baik

p^* = nilai perkiraan yang paling baik

Indeks a memperlihatkan perbandingan antara kesalahan dengan nilai perkiraan (*approximate value*).

Pendekatan dengan cara interaktif selalu dilakukan pada metode numerik, dimana dalam pendekatan tersebut perkiraan saat ini dibentuk dari perkiraan yang sebelumnya. Sehingga dapat dinyatakan bahwa kesalahan merupakan perbedaan antara perkiraan yang sebelumnya dengan perkiraan saat ini. Kesalahan relatif dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\mathcal{E}_e = \frac{p^{*n+1} - p^{*n}}{p^{*n+1}} \times 100\% \quad \text{..... (e)}$$

dimana: p^{*n} = nilai perkiraan pada iterasi ke-n

p^{*n+1} = nilai perkiraan pada iterasi n+

Contoh Soal:

Pada pengukuran panjang jembatan dan pensil menghasilkan 9999 cm dan 9 cm. Jika panjang yang benar (eksak) adalah 10.000 cm dan 10 cm, hitunglah kesalahan absolut dan relatif!

Penyelesaian:

a. Kesalahan Absolut

$$\text{Jembatan: } E_e = 10.000 - 9999 = 1 \text{ cm}$$

$$\text{Pansil: } E_e = 10 - 9 = 1 \text{ cm}$$

b. Kesalahan relatif

$$\text{Jembatan: } \mathcal{E}_e = \frac{E_e}{P} \times 100\% = \frac{1}{10000} \times 100\% = 0,01\%$$

$$\text{Pensil: } \mathcal{E}_e = \frac{E_e}{P} \times 100\% = \frac{1}{10} \times 100\% = 10\%$$

Pada contoh soal tersebut memperlihatkan bahwa walaupun pada kedua kesalahannya sama yakni 1 cm, namun kesalahan relatif pensil sangat besar. Maka, kesimpulannya adalah pada pengukuran jembatan memberikan hasil yang memuaskan (baik), sedangkan hasil pengukuran pada pensil tidak memuaskan (tidak baik).

8.2 Sistem Persamaan Linear (SPL)

Pada umumnya persamaan linier dengan n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ diartikan sebagai suatu persamaan yang ditunjukkan dalam bentuk $ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n = b$, dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta real. Adapun persamaan linier tidak mengandung hasil kali atau akar variabel. Seluruh variabel hanya dalam bentuk pangkat pertama dan bukan variabel bebas dari fungsi trigonometri, logaritma, atau eksponensial.

Contoh:

$$x + y = 5$$

Persamaan linier dengan 2 peubah

$$x + y + 2z = 7$$

Persamaan linier dengan 3 r

$$\log x + \log y = 3$$

Bukan persamaan linier

$$2e^x = 3x + 5$$

Bukan persamaan linier

Sistem persamaan linier merupakan sekelompok persamaan yang pangkat tertinggi dalam variabelnya adalah satu.

Contoh:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + 7y + 2z = 3$$

$$2x + 4y + 5z = 6$$

Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

1. Metode Eliminasi Gauss

Definisi metode Eliminasi Gauss adalah salah satu metode untuk mendapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan Linier dengan memanfaatkan Operasi Baris Elementer (OBE), sampai pada matriks tersebut memiliki baris eselon. Jika baris eselon sudah terbentuk, maka matriks tersebut akan dikembalikan ke dalam bentuk sistem Linear dan selanjutnya dilakukan substitusi dimulai dari bawah. Untuk mendapatkan bentuk tersebut, matriks haruslah memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- a. Apabila pada seluruh baris tidak semuanya terdiri dari nol, maka angka tidak nol pertama dalam baris tersebut adalah angka 1 (disebut utama satu atau pivott).
- b. Apabila terdapat sembarangan baris yang semuanya terdiri dari nol, maka baris tersebut dapat digolongkan bersama-sama dengan di bagian bawah matriks tersebut.
- c. Apabila terdapat sembarangan 2 baris yang berturut-turut yang tidak semuanya terdiri dari nol, maka utama 1 pada baris yang lebih bawah terletak disebelah kana utama 1 pada baris yang lebih atas.
- d. Setiap kolom yang berisikan sebuah utama memiliki nol di tempat yang Lainnya.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix} \quad \text{Upper Triangular System}$$

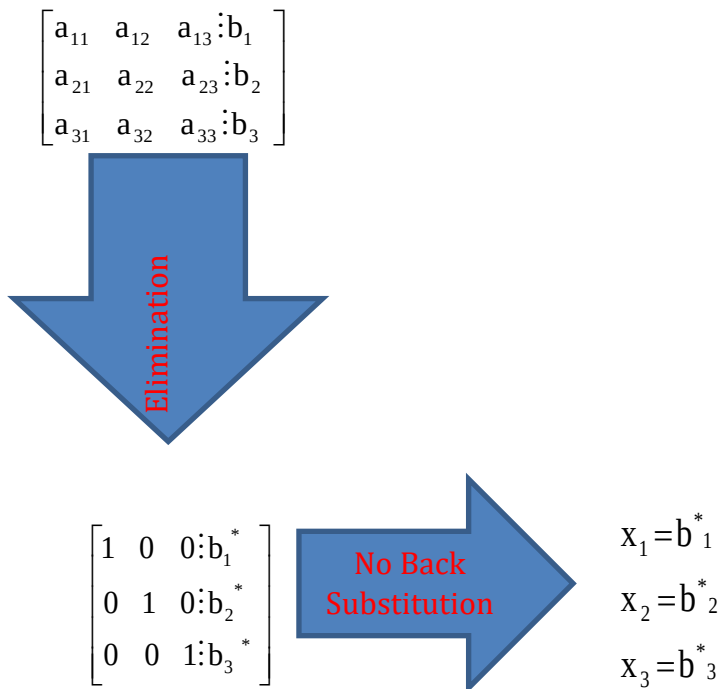
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} : b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} : b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} : b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} : b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} : b'_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} : b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{a_{32}}{a'_{22}} R_2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} : b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} : b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} : b''_3 \end{bmatrix}$$

$R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1$

$R_3 - \frac{a_{32}}{a'_{22}} R_2$

$$\begin{aligned} x_3 &= b''_3 / a''_{33} \\ x_2 &= (b'_2 - a'_{23} x_3) / a'_{22} \\ x_1 &= (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3) / a_{11} \end{aligned}$$

2. Metode Eliminasi Gauss Jordan



3. Metode Gauss-Siedel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]$$

Pengertian dari metode Gauss-Siedel adalah salah satu dari metode iterasi ataupun aproksimasi yang memperkirakan bahwa permasalahan dianalogikan sebagai matriks $[A]\{B\}=[B]$, dimana matriks tersebut adalah matriks 3 x 3, elemen diagonalnya tidak lah sama dengan nol serta persamaannya sifatnya konvergen.

Berikut ini langkah-langkah cara menyelesaikan persamaan linier pada metode Gauss-Siedel:

Sistem Persamaan Linier:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \quad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \quad x_1 = \frac{b_1 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2}{a_{11}}$$

Iterasi Pertama:

- Mencari nilai x_1 dengan menganggap $x_2 = 0$ dan $x_3 = 0$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2}{a_{11}} \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

- Mencari nilai x_2 dengan mengasumsikan $x_3 = 0$ dan x_1 (baru)

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

- Mencari nilai x_3 dengan menggunakan nilai x_2 (baru) dan x_1 (baru)

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

Iterasi Kedua:

- Mencari nilai x_1 dengan menggunakan x_3 (baru) dan x_2 (baru)

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2}{a_{11}}$$

- Mencari nilai x_2 dengan menggunakan x_1 (baru) dan x_3 (baru)

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

➤ Mencari nilai x_3 dengan menggunakan nilai x_2 (baru) dan x_1 (baru)

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

Iterasi Selanjutnya.....

Contoh:

1. Diketahui Sistem Persamaan Linier tiga variabel:

$$4x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$6x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

Tentukan nilai dari variabel-variabel Sistem Persamaan Linier di atas !

Penyelesaian:

a. Dengan cara Eliminasi Gauss

Sistem Persamaan:
Persamaan:

Matriks

Sistem

$$4x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$6x_1 + x_2 + x_3 = 6$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Pivot



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

$$R_3 - \frac{6}{4}R_1$$

$$R_2 - \frac{5}{4}R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4,00 & 1,00 & -1,00 & -2,00 \\ 0,00 & -0,25 & 3,25 & 6,50 \\ 0,00 & 0,00 & -4,00 & -4,00 \end{array} \right]$$

Pivot



$$R_3 - \frac{-0,50}{-0,25}R_2$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4,00 & 1,00 & -1,00 & -2,00 \\ 0,00 & -0,25 & 3,25 & 6,50 \\ 0,00 & 0,00 & -4,00 & -4,00 \end{array} \right]$$

$$x_3 = \frac{-4,00}{-4,00} = 1$$

$$-0,25x_2 + 3,25x_3 = 6,50$$

$$-0,25x_2 + 3,25(1) = 6,50$$

$$-0,25x_2 = 3,25$$

$$x_2 = \frac{3,25}{-0,25} = -13$$

$$x_2 = \frac{3,25}{-0,25} = -13$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 = -2,00$$

$$4x_1 + (-13) - 1 = -2,00$$

$$4x_1 - 14 = -2,00$$

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3$$

b. Dengan cara Gauss Jordan

Sistem persamaan: Matriks Sistem Persamaan:

$$4x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$6x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

Pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

$$R_2 - \frac{5}{1}R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{R_1}{4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1,00 & 0,25 & -0,25 & -0,50 \\ 5,00 & 1,00 & 2,00 & 4,00 \\ 6,00 & 1,00 & 1,00 & 6,00 \end{array} \right]$$

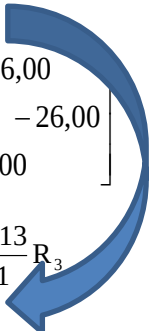
$$R_3 - \frac{6}{1}R_1$$

Pivot

$$\frac{R_2}{-0,25}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1,00 & 0,25 & -0,25 & -0,50 \\ 0,00 & 1,00 & -13,00 & -26,00 \\ 0,00 & -0,50 & 2,50 & 9,00 \end{array} \right] \leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1,00 & 0,25 & -0,25 & -0,50 \\ 0,00 & -0,25 & 3,25 & 6,50 \\ 0,00 & -0,50 & 2,50 & 9,00 \end{array} \right]$$

$$R_1 - \frac{0,25}{1}R_2 \quad \bigg| \quad R_3 - \frac{0,5}{1}R_2$$

$$\begin{array}{c}
 R_1 - \frac{3}{1}R_3 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1,00 & 0,00 & 3,00 & 6,00 \\ 0,00 & 1,00 & -13,00 & -26,00 \\ 0,00 & 0,00 & -4,00 & -4,00 \end{array} \right] \xrightarrow[-4,00]{R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1,00 & 0,00 & 3,00 & 6,00 \\ 0,00 & 1,00 & -13,00 & -26,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 \end{array} \right] \\
 \qquad \qquad \qquad R_2 - \frac{-13}{1}R_3
 \end{array}$$


$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 3,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & -13,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -13$$

$$x_3 = 1$$

c. Metode Gauss-Siedel

Sistem Persamaan :

$$4x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$6x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 = \frac{-2 + x_3 - x_2}{4} \quad x_2 = \frac{4 - 5x_1 - 2x_3}{1} \quad x_3 = \frac{6 - 6x_1 - x_2}{1}$$

Iterasi Pertama:

➤ Mencari nilai x_1 dengan menganggap $x_2 = 0$ dan $x_3 = 0$

$$x_1 = \frac{-2+0-0}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-2}{4} = -0,5$$

- Mencari nilai x_2 dengan mengasumsikan $x_3=0$ dan $x_1=-0,5$

$$x_2 = \frac{4-5(-0,5)-2(0)}{1} \Rightarrow x_2 = \frac{4+7,5}{1} = 11,50$$

- Mencari nilai x_3 dengan mengasumsikan $x_2=11,50$ dan $x_1=-0,5$

$$x_3 = \frac{6-6(-0,5)-(11,5)}{1} \Rightarrow x_3 = \frac{6+3-11,5}{1} = -2,5$$

Iterasi Kedua:

- Mencari nilai x_1 dengan mengasumsikan $x_2=11,50$ dan $x_3=-2,50$

$$x_1 = \frac{-2+(-2,5)-(11,5)}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-16}{4} = -4$$

- Mencari nilai x_2 dengan mengasumsikan $x_1=-4$ dan $x_3=-2,50$

$$x_2 = \frac{4-5(-4)-2(2,5)}{1} \Rightarrow x_2 = \frac{29}{1} = 29$$

- Mencari nilai x_3 dengan mengasumsikan $x_2=29$ dan $x_1=-4$

$$x_3 = \frac{6-6(-4)-(29)}{1} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{1} = 1$$

Iterasi Ketiga :

- Mencari nilai x_1 dengan mengasumsikan $x_2 = 29$ dan $x_3 = 1$

$$x_1 = \frac{-2 + (1) - (29)}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-30}{4} = -7,5$$

- Mencari nilai x_2 dengan mengasumsikan $x_1 = -7,5$ dan $x_3 = 1$

$$x_2 = \frac{4 - 5(-7,5) - 2(1)}{1} \Rightarrow x_2 = \frac{39,5}{1} = 39,5$$

- Mencari nilai x_3 dengan mengasumsikan $x_2 = 39,5$ dan $x_1 = -7,5$

$$x_3 = \frac{6 - 6(-7,5) - (39,5)}{1} \Rightarrow x_3 = \frac{11,5}{1} = 11,5$$

2. Selesaikanlah Sistem Persamaan Linier berikut dengan Eliminasi Gauss

$$x + 2y + z = 6$$

$$x + 3y + 2z = 9$$

$$2x + y + 2z = 12$$

Penyelesaian:

Matriks yang diperbesar untuk sistem persamaan linier tersebut sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \end{array} \right]$$

$$R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xleftarrow{R_3 \left(\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xleftarrow{R_3 + 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y + z = 6$$

$$y + z = 3$$

$$z = 3$$

Selanjutnya dilakukan substitusi balik, yakni:

$$z=3 \qquad y+3=3 \qquad y=0$$

$$x+2.0+3=6$$

$$x=6-0-3=3$$

Jadi, diperoleh nilai dari $x=3$, $y=0$ dan $z=3$

DAFTAR PUSTAKA

- Azizah, Nuril Lutvi & Ariyanti, Novia. 2020.. *Aljabar Linier*. Sidoarjo: Umsida Press.
- Bambang Triatmojo. 1995. *Metode Numerik* Beta Offset.
- Chapra, SP., Canale, RP. 1985. "Numerical Method for Engineers", McGraw-Hill Book Company, New York.
- Carl Erik Froberg. 1969. "Introduction to Numerical Analysis", Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Syarifuddin, dkk.2016. *Aljabar Linear*. Mataram: LPP Mandala.

BAB 9

APLIKASI ALJABAR LINIER

Oleh Sutiyono

9.1 Pengertian Aljabar Linier

Aljabar berasal dari Bahasa Arab "al-jabr" yang memiliki arti "pertemuan", atau "hubungan". Aljabar linier adalah cabang dari ilmu matematika yang sangat penting. Aljabar linier pada dasarnya adalah ilmu yang mempelajari vektor dan fungsi linier. Ini adalah konsep kunci untuk hampir semua bidang matematika. Aljabar linier memiliki banyak penerapan di berbagai bidang, antara lain ilmu komputer, ilmu informasi, fisika, ekonomi, teknik, teknologi, dan banyak lagi lainnya. Salah satu penggunaan umum aljabar linier adalah dalam menyelesaikan permasalahan optimisasi. Dalam konteks ini, aljabar linier digunakan untuk menemukan solusi optimal dalam situasi yang memiliki batasan dan kendala tertentu. Penerapan aljabar linier secara luas membuatnya menjadi suatu alat matematika yang sangat berharga dalam analisis dan penyelesaian masalah di berbagai bidang ilmu. Pemahaman yang mendalam tentang aljabar linier menjadi sangat penting bagi semua lulusan, terutama dalam bidang teknik, karena penguasaan Aljabar linier membantu mereka menganalisis, merancang, dan mengoptimalkan berbagai aspek operasional dalam industri. Selain itu, pemahaman ini memungkinkan lulusan untuk berkontribusi secara lebih efektif dalam pengembangan dan manajemen sistem industri yang kompleks.

9.2 Penerapan Aljabar Linear

Banyak persamaan-persamaan yang melibatkan fungsi-fungsi (persamaan-persamaan differensial) dan turunannya yang digunakan dalam ilmu-ilmu teknik. Demikian pula dalam mengkaji suatu grafik Banyak materi matematika lanjut yang erat kaitannya dengan konsep-konsep aljabar linear. Dalam pengembangan dan pengayaan materi matematika tingkat lanjut, banyak aspek yang memerlukan penerapan konsep-konsep aljabar linear, seperti contohnya penggunaan persamaan linear dalam geometri dua dimensi (R2), integrasi kurva ke dalam data percobaan, penyelesaian masalah aproksimasi, deret Fourier, dan pengukuran galat hingga pemodelan permukaan kuadratik dalam konteks geometri analitik baik dalam bidang maupun ruang.

Pemahaman materi dasar dalam pembelajaran aljabar linear menjadi sangat penting untuk memperkuat pemahaman khusus terkait aljabar linear dan matematika tingkat lanjut lainnya. Keseluruhan, pemahaman ini dianggap sebagai pondasi yang esensial, sebagai pendalaman, dan sebagai pengayaan dalam mempelajari materi-materi matematika lanjut lainnya.

Secara umum Persamaan linear didefinisikan sebagai persamaan yang tidak mengandung elemen eksponensial, trigonometri (seperti sin, cos, dll.), perkalian, pembagian, dan sejenisnya dalam variabel-variabelnya. Oleh karena itu, sistem persamaan linear merupakan serangkaian persamaan linear yang melibatkan sejumlah variabel bebas yang saling terhubung. dapat dituliskan sebagai,

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n &= b_1 \\ a_2 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots(1) \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

dimana, a – koefisien

x – variabel yang tidak diketahui

b – konstanta

Apabila dalam suatu persamaan linier terdapat sejumlah m persamaan dan n peubah maka dalam menyelesaikan sistem persamaan tersebut akan mengalami kesulitan. Dengan demikian sistem persamaan dengan m persamaan dan n peubah dapat diganti atau diselesaikan dengan mengubah kedalam susunan angka dalam bentuk suatu matriks dan biasanya yang paling mudah adalah bentuk matrik segiempat .

Seperti yang sudah diketahui bahwa matriks adalah suatu himpunan bilangan-bilangan atau elemen yang disusun dalam bentuk baris dan kolom. Secara umum, matriks dapat didefinisikan sebagai suatu tabel atau susunan berupa array dua dimensi yang terdiri dari elemen-elemen yang disusun dalam baris dan kolom. Oleh karenanya persamaan (1) diatas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau $AX = B$

Dalam konteks ini, matriks koefisien disebut sebagai matriks A, matriks peubah disebut sebagai matriks X, dan matriks konstanta disebut sebagai matriks B.

Contoh :

Tuliskan sistem persamaan linear berikut dalam bentuk perkalian matriks

$$2x - y + 3z = 0 \quad \text{.....(2)}$$

$$4p + 2q - z = 2 \quad \text{.....(3)}$$

Jawab: bentuk matrik dari persamaan (2) dan (3) adalah;

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ p \\ q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aljabar linier merupakan cabang matematika yang melibatkan studi tentang sistem persamaan linear dan transformasi linear. Berikut adalah tiga konsep utama yang merupakan prasyarat dalam menyelesaikan persamaan linier:

1. Ruang Vektor:

Definisi: Ruang vektor adalah himpunan objek matematika yang disebut vektor, vektor adalah besaran fisis yang mempunyai besar dan arah. Ruang vektor didefinisikan sebagai kumpulan objek yang disebut vektor, yang dapat dijumlahkan dan dikalikan (yaitu diskalakan) dengan angka, yang disebut besaran skalar dilengkapi dengan dua operasi, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian vektor dengan skalar. Secara umum, istilah ruang vektor dapat digunakan untuk mendefinisikan bahwa besaran skalar dapat berupa adalah bilangan real atau bilangan kompleks .

Contoh : * Komutatif atau penjumlahan : $a + b = b + a$

* Asosiatif dari penjumlahan : $a + (b + c) = (a + b) + c$

* Vektor Identitas : $a + 0 = 0 + a = a$, dimana 0 adalah elemen dalam V yang disebut vektor nol.

2. Fungsi Linear

Definisi: Merupakan sebuah persamaan aljabar dimana setiap sukunya merupakan konstanta atau hasil kali dari konstanta dengan variabel bebas berpangkat 1.

Secara matematis bentuk fungsi linier dapat dituliskan sebagai berikut :

Suatu fungsi $L : R^n \rightarrow R^m$ disebut linier jika

(a). $L(x + y) = L(x) + L(y)$

$$(b). L(\alpha x) = \alpha L(x)$$

dimana semua $x, y \in R^n, \alpha \in R$

Dalam hal ini x dan y adalah vektor dalam R^n (ruang vektor n -dimensi), α adalah skalar (konstanta) dalam R (bidang skalar), dan $L(x)$ adalah vektor hasil transformasi dari x dalam R^m (ruang vektor m -dimensi).

Contoh ;

1. Fungsi linier sebagai fungsi Identitas

Misalkan $L: R^n \rightarrow R^n$ dengan $L(x) = x$. Fungsi ini disebut fungsi identitas.

$$x + y = L(x + y) \text{ dimana } \alpha x = L(\alpha x).$$

2. Fungsi linier dalam bentuk Matriks Transformasi

Jika diketahui A adalah matriks $m \times n$ dan $L: R^n \rightarrow R^m$ dengan $L(x) = Ax$.

$$L(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = L(x) + L(y) \text{ dan } L(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha L(x).$$

Contoh lain memodelkan fungsi linier $L: R^n \rightarrow R^m$ dalam bentuk matriks, maka kita dapat menggunakan matriks transformasi. Bentuk umum dari matriks transformasi A adalah matriks $m \times n$, matriks $n \times 1$ mewakili vektor dalam R^n dan $m \times 1$ akan mewakili vektor dalam R^m .

$$\begin{aligned} Av &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}v_1 & a_{12}v_2 & \cdots & a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 & a_{22}v_2 & \cdots & a_{2n}v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}v_1 & a_{m2}v_2 & \cdots & a_{mn}v_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ tunjukkan dimensi R_n dan R_m yang diwakili oleh matriks tersebut.

Penyelesaian : matriks A dapat dituliskan dengan $Av =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks tersebut adalah 3×3 dengan demikian dapat didefinisikan bahwa matriks tersebut bentuk transformasi dari R^3 ke R^3 .

3. Matriks dan Sistem Persamaan Linear

Matriks dan persamaan linear memiliki hubungan erat, dan matriks sering digunakan untuk menyajikan sistem persamaan linear. Matriks memainkan peran penting dalam penyelesaian sistem persamaan linier. Setiap matriks mewakili transformasi linier tertentu dan digunakan untuk menampilkan koefisien persamaan linier tersebut secara ringkas dan terstruktur, sehingga lebih mudah untuk dimanipulasi dan diselesaikan. Seperti yang sudah dijelaskan apabila terdapat sejumlah m persamaan dengan n peubah maka penyelesaian dari sistem persamaan seperti ini tentunya cukup sulit. Persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan mudah jika dirubah dalam bentuk matriks.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\ \text{.....} & & & & & & & & (4) \end{array}$$

Dari persamaan (4) tentunya akan sulit diselesaikan, dengan demikian persamaan 4 tersebut drubah kedalam bentuk matriks sebagai berikut;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5)$$

Persamaan (5) merupakan bentuk matriks diperbanyak (ber suku mn). Sistem ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks : $Ax=b$ dimana A disebut matriks koefisien, x adalah matriks variabel, dan b adalah matriks konstan (konstanta).

Cara pokok dalam menyelesaikan sistem persamaan linear adalah melaksanakan operasi-aljabar yang tepat pada sistem tersebut sehingga tidak mengubah himpunan solusi, sambil menghasilkan sistem persamaan yang lebih sederhana. Umumnya, operasi-aljabar yang dilakukan mencakup langkah-langkah berikut:

1. Mengalikan suatu persamaan dengan konstanta non-nol.
2. Menukar posisi dua persamaan.
- 3 Mengalikan suatu konstanta dengan satu persamaan dan menambahkannya ke persamaan lain.

Contoh :

1). Diketahui persamaan $x + 2y = 5$
 $2x + 5y = 12$

Bentuk matriksnya $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$

Selanjutnya melakukan operasi pada matrik A dengan *mengurangi baris kedua dengan 2 kali baris pertama.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{B2-2B1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dilanjutkan dengan *mengurangi baris pertama dengan 2 kali baris kedua* sehingga menjadi;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B1-2B2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bentuk matrik yang berwarna biru disubstitusikan kedalam persamaan (soal) akan didapat besarnya $x = 1$ dan $y = 2$

9.3 Aplikasi Aljabar Linier

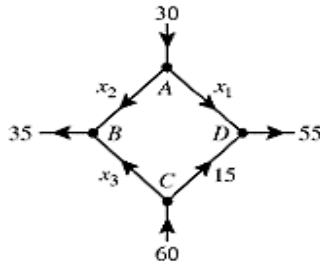
Beberapa contoh penggunaan aljabar linier didalam berbagai macam mata kuliah yang dipelajari sehari-hari.

1. Analisis suatu sistem jaringan

Cabang-cabang dari sistem jaringan misalnya Kabel listrik membawa aliran listrik, pipa menyampaikan air atau minyak, jalur lalu lintas memberikan jalur untuk kendaraan bergerak, dan hubungan ekonomi memungkinkan aliran uang, sebagai beberapa contoh kemungkinan. Dalam banyak sistem jaringan, cabang-cabang ini saling terhubung di titik-titik yang disebut node atau persimpangan, tempat aliran dibagi. Contohnya, pada jaringan listrik, node muncul ketika tiga atau lebih kabel bergabung; pada jaringan lalu lintas, cabang terbentuk di persimpangan jalan; dan dalam jaringan keuangan, cabang-cabangnya terletak di pusat-pusat perbankan tempat uang didistribusikan kepada individu atau lembaga lain.

Dalam penelitian jaringan, terdapat ukuran numerik untuk tingkat aliran melalui cabang-cabang tersebut. Sebagai ilustrasi, arus listrik diukur dalam ampere, sementara aliran air atau minyak diukur dalam galon per menit. Selain itu, laju lalu lintas diukur dalam jumlah kendaraan per jam, dan aliran mata uang Eropa diukur dalam jutaan Euro per hari. Poin utama yang ditekankan adalah pada jaringan di mana prinsip konservasi aliran dijaga di setiap simpul, yang berarti bahwa laju aliran ke dan dari setiap simpul tetap seimbang. Hal ini memastikan bahwa aliran medium tidak mengakumulasi di node dan menghalangi pergerakan bebas melalui seluruh

jaringan. Salah satu tantangan umum dalam analisis jaringan adalah menggunakan laju aliran yang diketahui di cabang-cabang tertentu untuk menentukan laju aliran di seluruh cabang.



Gambar 9. 1 Jaringan Empat Node

Sumber MATEMATIKA – TEKNIK

Dari gambar 9.1 dapat dituliskan besarnya arus pada simpul A = $x_1 + x_2 = 30$

simpul B = $x_2 + x_3 = 35$

simpul C = $x_3 + 15 = 60$

simpul D = $x_1 + 15 = 55$

Ke empat persamaan dari masing-masing simpul dapat disederhanakan menjadi bentuk

$$\text{persamaan linier } x_1 + x_2 = 30$$

$$x_2 + x_3 = 35$$

$$x_3 = 45$$

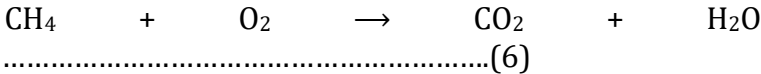
$$x_1 = 40$$

Dengan mensubstitusikan harga x_1 dan x_3 didapat harga $x_1 = 40$, $x_2 = -10$, $x_3 = 45$, karena nilai dari x_2 negatif maka arah aliran yang ditunjukkan dalam gambar 1 tidak benar.

2. Menyeimbangkan Persamaan Kimia

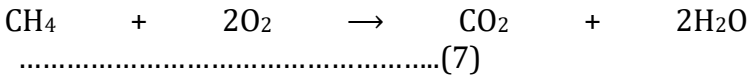
Senyawa kimia dapat diidentifikasi melalui rumus kimia yang mencerminkan susunan atom-atomnya. Contohnya, air memiliki rumus kimia H_2O , yang menunjukkan bahwa Terbentuk oleh dua atom hidrogen dan satu atom oksigen.. Begitu pula, oksigen dalam keadaan stabil direpresentasikan oleh rumus kimia O_2 , menandakan adanya dua atom oksigen dalam molekulnya.

- a. Saat senyawa kimia dicampur dalam kondisi yang sesuai, atom-atom dalam molekul tersebut mengalami restrukturisasi untuk membentuk senyawa baru. Sebagai contoh, saat metana mengalami pembakaran, metana (CH_4) dan oksigen yang stabil (O_2) bereaksi membentuk karbon dioksida (CO_2) dan air (H_2O). Bentuk persamaan kimianya dituliskan:

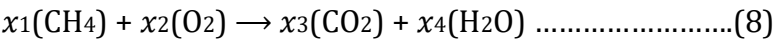


Molekul pada sisi kiri panah disebut sebagai reaktan, sedangkan yang berada di sisi kanan adalah produknya. Dalam persamaan ini, simbol plus digunakan untuk memisahkan molekul dan tidak diinterpretasikan sebagai operasi aljabar.

Akan tetapi kita dapat melihat dari sisi kanan dalam persamaan kimia tersebut Untuk setiap atom karbon, diperlukan tiga atom oksigen dalam satu molekul karbon dioksida dan satu molekul air.. Namun, dari perspektif yang berlawanan (sisi kiri (1)), terlihat Bahwa untuk setiap atom karbon dalam satu molekul metana dan satu molekul oksigen yang stabil, terdapat dua atom oksigen. Oleh karena itu, pada sisi reaktan, Rasio metana terhadap oksigen yang stabil tidak seimbang. Jika setiap jenis atom dalam suatu reaksi kimia memiliki jumlah yang identik, maka persamaan kimia dianggap seimbang baik di dalam reaktan maupun produk. Jika reaksi sudah dalam keadaan seimbang dapat dituliskan :



Dari persamaan (7) dapat dikatakan Satu molekul metana bersatu dengan dua molekul oksigen yang stabil untuk membentuk satu molekul karbon dioksida dan dua molekul air. Untuk menjelaskan cara menyeimbangkan persamaan reaksi tersebut dapat digunakan cara sebagai berikut. Untuk mencapai keseimbangan dalam persamaan ini, kita perlu menemukan bilangan bulat positif, x_1 , x_2 , x_3 dan x_4 sedemikian sehingga:



Agar lebih mudah memahami dalam persamaan (7) dibuat bentuk tabel sebagai berikut.

Tabel 9. 1 Penyetaraan unsur kimia

Unsur	Sebelah kiri		Sebelah kanan
Karbon	x_1	=	x_3
Hidrogen	$4x_1$	=	$2x_4$
Oksigen	$2x_2$	=	$2x_3 + x_4$

dari tabel 9.1 dapat dituliskan bentuk persamaannya; $x_1 - x_3 = 0$
 $4x_1 - 2x_4 = 0$
 $2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$

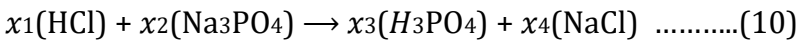
dilanjutkan penulisannya dalam bentuk matriks
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ di rubah menjadi matrik
Identitas $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ dengan demikian nilai dari
 $x_1 = \frac{t}{2}$, $x_2 = t$, $x_3 = \frac{t}{2}$, $x_4 = t$ untuk t adalah bilangan

bulat positif. Jika dimasukkan $t = 2$ maka harga dari $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Apabila nilai-nilai dari $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ dan $x_4 = 2$ dimasukkan kedalam persamaan (8) akan persamaan kesetimbangan kimia seperti yang dituliskan dalam persamaan (7).

b. Seimbangkan persamaan kimia berikut ini;



Penyelesaian: dikarenakan dalam persamaan (9) terdapat 4 senyawa, dapat menggunakan x_1 , x_2 , x_3 , dan x_4 sebagai bilangan bulat positif yang akan digunakan dalam menyeimbangkan persamaan (9) sehingga persamaan tersebut dapat dituliskan



langkah selanjutnya menyamakan unsur-unsur yang terdapat pada ruas kiri dan kanan.

Unsur Hidrogen (H)	$1x_1 = 3x_3$
Unsur Klorin	$1x_1 = 1x_4$
Unsur Na	$3x_2 = 1x_4$
Unsur P	$1x_2 = 1x_3$
Unsur Oksigen	$4x_2 = 4x_3$

Jika dituliskan dalam bentuk persamaan linier;

$x_1 - 3x_3 = 0$
 $x_1 - x_4 = 0$
 $3x_2 - x_4 = 0$
 $x_2 - x_3 = 0$
 $4x_2 - 4x_3 = 0$

Dari bentuk persamaan linier dirubah bentuknya kedalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kemudian dijadikan bentuk matrik identitas sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dari bentuk matrik identitas didapatkan $x_1 = t, x_2 = \frac{t}{3}, x_3 = \frac{t}{3}, x_4 = t$ dengan t adalah bilangan bulat positif. Apabila ditentukan $t = 3$ lalu disubstitusikan kedalam $x_1 = t, x_2 = \frac{t}{3}, x_3 = \frac{t}{3}, x_4 = t$ akan diperoleh $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 3$. Selanjutnya di substitusikan kedalam persamaan (10) akan didapat persamaan kesetimbangan dari reaksi kimia yang baru $3HCl + Na_3PO_4 \rightarrow H_3PO_4 + 3NaCl$ (11)

3. Aplikasi Aljabar linier dalam kehidupan sehari-hari

Uang saku Kakak melebihi uang saku adik sebesar 2.000 rupiah. Setiap hari, Ibunya memberikan uang kepada Opiq dan adiknya, dengan batas maksimal 15.000 rupiah. Berapakah jumlah maksimum uang saku yang bisa diterima oleh Kakak dan adiknya?

Jawab:

Misalkan uang saku Kakak adalah x , maka uang saku adik adalah $(x-2000)$, dengan demikian uang saku Kakak + uang saku adik ≤ 15.000

$$x + (x-2.000) \leq 15.000$$

$$2x - 2.000 \leq 15.000$$

$$2x \leq 17.000$$

$$x \leq 8.500$$

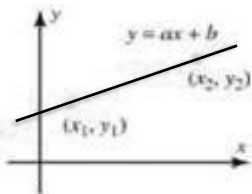
Jadi, batas maksimum uang saku Kakak adalah Rp. 8.500,00, sementara uang saku Adik maksimum adalah Rp. 6.500,00.

4. Interpolasi Polinomial

Interpolasi polinomial merupakan salah satu aplikasi bentuk aljabar linier yang digunakan untuk membuat suatu persamaan yang melewati sejumlah titik data yang diketahui dengan tujuan untuk mencari persamaan yang mendekati atau melewati setiap titik data dalam himpunan data yang diberikan. Secara umum, interpolasi polinomial dapat dilakukan dengan menggunakan titik-titik data yang diketahui untuk membentuk suatu persamaan.

Contoh : tuliskan bentuk polinomial linier dari persamaan $p(x) = ax + b$ (12)

Jika digambarkan dalam bentuk grafik yang mana grafiknya akan melewati dua titik berbeda yang diketahui, (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) , dalam bidang xy



Persamaan garis $y = ax + b$
Sumber MATEMATIKA – TEKNIK

akan ditentukan persamaan polinomial yang melewati n titik dengan koordinat x yang berbeda, koordinat polinomialnya dapat dituliskan

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n) \dots\dots\dots (12.a)$$

dikarenakan terdapat n kondisi yang harus dicari maka persamaan (12) dapat dituliskan

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \dots\dots\dots(14)$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} & = & y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} & = & y_n \end{array}$$

diasumsikan nilai dari x dan y adalah bilangan bulat positif, dengan demikian nilai $a_0, a_1, \dots, a_n$ akan dapat dicari namun bentuk nya dirubah menjadi bentuk matrik seperti berikut;

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & y_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

Aplikasi sederhana dari persamaan (12) – (15) adalah “Tentukan bentuk polinomial menggunakan Eliminasi Gaus-Jordan”. Diketahui grafik polinomial akan melewati titik (1, 3), (2, -2), (3, -5), (4,0) dengan derajat $n = 3$. Persamaan polinomial dapat dituliskan

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots\dots\dots(16)$$

Nilai x dan y adalah $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ dan $y_1 = 3, y_2 = -2, y_3 = -5, y_4 = 0$.

Nilai x dan y dibentuk matrik untuk mencari harga a

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{bmatrix}$$

bentuk matriks identitasnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & I & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 & I & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 & I & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

dari matrik (17) didapat $a_0 = 4, a_1 = 3, a_2 = -5,$ dan $a_3 = 1.$
.....(18)

substitusi persamaan (18) kedalam persamaan (16) =
 $p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$

5. Grafika Komputer

Didalam dunia grafika komputer aljabar linier sangatlah penting, di mana objek 3D sering dituliskan dalam bentuk matriks dan vektor. Transformasi linear digunakan untuk memanipulasi objek dalam ruang 3D, seperti translasi, rotasi, dan scaling. Misalnya, jika kita memiliki matriks transformasi T, kita dapat mengalikan vektor posisi objek dengan matriks tersebut untuk mendapatkan posisi objek yang baru setelah transformasi.

Contoh Soal: vektor posisi dari suatu objek diberikan oleh titik P (2,3,4) dengan matrik transformasinya T =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan letak objek setelah melakukan proses transformasi.

$$\text{Penyelesaian: } T \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jadi, posisi objek setelah transformasi adalah $P'(2, 6, 4)$.

6. Pemrosesan Citra Digital dalam ilmu Komputer

Aljabar linier juga diterapkan dalam pemrosesan citra digital. Yang dimaksud dengan citra disini adalah kombinasi (gabungan) dari titik, garis,bidang dan warna untuk menciptakan suatu image dari sebuah objek. Citra dapat diartikan juga sebagai gambaran mengenai objek yang diamati. Misalnya, ketika kita ingin meningkatkan kecerahan atau kontras suatu citra, kita dapat menggunakan transformasi linier pada setiap piksel

Contoh Soal: dalam suatu objek pada setiap titik x dan y diberikan citra *grayscale* dengan intensitas piksel I sebesar 120. Ingin ditingkatkan kecerahan citra dengan faktor skalar C dimana $C > 1$.

Berapakah besarnya intensitas piksel yang baru pada titik x dan y , diasumsikan faktor kecerahan = 1,5.

$$I \text{ baru} = 1,5 \times 120 = 180$$

Jadi besarnya intensitas piksel yang baru pada titik x dan $y = 180$.

7. Aplikasi Aljabar Linier dalam Statistika

Didalam mempelajari statistik tentu akan selalu ditemui persamaan-persamaan regresi. Aljabar linier digunakan secara luas dalam analisis statistika, terutama dalam pembentukan dan solusi sistem persamaan linear yang muncul dalam menentukan metode regresi linier dan analisis data multivarian. Contohnya tentukan nilai x dan y dalam persamaan berikut.

$$3x + 2y = 5$$

$$-2x + 4y = 8$$

Dengan menggunakan aplikasi dari ilmu aljabar, persamaan tersebut dapat disederhanakan dalam bentuk persamaan $Ax = B$ dimana

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{dan } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

dari bentuk matrik tersebut dilakukan penyederhanaan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* dengan tahapan:

- (a). Langkah pertama : elemen / baris pertama dari matrik A dirubah menjadi 1 dengan cara dibagi dengan 3

$$\text{sehingga didapat } \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 8 \end{bmatrix}$$

- (b). Langkah kedua : elemen / baris kedua kolom pertama dirubah = 0 dengan cara ditambahkan 2 kali baris pertama demikian didapatkan bentuk matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{38}{3} \end{bmatrix}$$

- (c). Langkah terakhir : melakukan substitusi untuk mencari nilai x dan y

$$\frac{14}{3}y = \frac{38}{3} \dots\dots\dots y = 2$$

$$1x + \frac{2}{3}(2) = \frac{5}{3} \dots\dots\dots x = 1$$

DAFTAR PUSTAKA

- Anita T. Kurniawati (2020) *Diktat Aljabar Linier*.
- Azizah, N. L. and Ariyanti, N. (2020) *Buku Ajar Mata Kuliah Dasar-Dasar Aljabar Linear, Buku Ajar Mata Kuliah Dasar-Dasar Aljabar Linear*.
- Iverson, B. L. and Dervan, P. B. (no date) *Elementary-Linear-Algebra-Applications*. 1st edn. 2013.
- Na, D. E. C. and Hipertensiva, C. (2013) *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. 2nd edn. Canada.
- Resti, N. C. (2017) 'Aljabar Linear Dasar', *Fakultas Teknik Universitas Nusantara PGRI Kediri*, pp. 23–30.
- Sibaroni, Y. (no date) *Buku Ajar Aljabar Linear*.
- Soebagyo, J., Maarif, S. and Purwanto, S. E. (2020) 'Matematika Teknik: Aljabar Linier & Matriks', *Manggu Makmur Tanjung Lestari*, p. 186.
- Syarifuddin, Mikrayanti, & M. (2016) *BUKU aljabar linear 2016*.
- Tamba, I. . (2018) 'Modul aljabar linier'.
- TENAYA, I. G. N. P. (2017) *DIKTAT ALJABAR LINIER*.

BIODATA PENULIS



Joni Wilson Sitopu
Dosen Universitas Simalungun

Joni Wilson Sitopu, lahir di Medan, Pendidikan S1 Prodi Matematika FMIPA USU Medan, S2 Prodi Pendidikan Matematika UNIMED Medan dan S3 Prodi Ilmu Matematika FMIPA USU Medan. Dosen di Teknik Sipil, SPS Prodi S2 PW, IPS dan Manajemen, serta Kepala Lembaga Akreditasi Internal (LAI) Universitas Simalungun. Penulis aktif mengikuti sebagai pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional dan aktif menulis Buku, Jurnal OJS, Sinta, dan Scopus.

BIODATA PENULIS



Hanna Hilyati Aulia, M.Si.

Dosen Program Studi Ekonomi Syari'ah Fakultas Ekonomi dan
Bisnis Islam

Penulis lahir di Metro Lampung pada 18 Desember 1995. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Ekonomi Syari'ah, IAIN Metro Lampung. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan MIPA Matematika Universitas Jenderal Soedirman dan melanjutkan S2 pada Jurusan FMIPA Matematika Institut Teknologi Bandung peminatan Matematika Industri dan Keuangan. Penulis menekuni pemodelan matematika dalam bidang epidemi dan ekonomi. Penulis menggemari kegiatan pengajaran dan seni sejak bangku sekolah dengan membuat Komik Matematika selama SMA hingga Kuliah.

BIODATA PENULIS



Ahmad Lutfi, M.Pd

Dosen Program Studi Perbankan Syariah
Sekolah Tinggi Ekonomi Syariah Manna Wa Salwa
Sumatera Barat

Penulis merupakan bahagian dari pengajaran di Pondok Pesantren Modern Nurul Ikhlas Tanah Datar Sumatera Barat. Penulis merasa bahagia karena melalui tulisan ini penulis bisa berbagi tulisan untuk bisa di lihat khalayak ramai. Melalui tulisan ini penulis berharap mampu memberikan pandangan dan masukan terhadap salah satu bahasan materi dalam aljabar yaitu matriks, yang mana pada bab 3 ini penulis berfokus kepada definisi matriks, jenis matriks, operasi dan sifat pada matriks

Penulis buku ini lahir di Bandung 23 Desember 1991. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Perbankan Syariah Sekolah Tinggi Ekonomi Syariah Manna Wa Salwa Sumatera Barat. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika di kampus Universitas Jambi dan melanjutkan S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika juga di kampus Universitas Negeri Yogyakarta.

BIODATA PENULIS



Ifan Wiranto, S.T., M.T.

Dosen Program Studi Sarjana Teknik Elektro
Fakultas Teknik Universitas Negeri Gorontalo

Penulis lahir di Manado pada tanggal 28 Januari 1972. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sarjana Teknik Elektro, Jurusan Teknik Elektro dan Komputer, Fakultas Teknik, Universitas Negeri Gorontalo. Menyelesaikan pendidikan Sarjana pada Program Studi Teknik Elektro di Universitas Gadjah Mada dan melanjutkan program Magister pada Program Studi Instrumentasi dan Kontrol di Institut Teknologi Bandung. Penulis menekuni bidang Rekayasa Kontrol dan Kecerdasan Tiruan. Beberapa mata kuliah yang diampu penulis baik di dalam program studi maupun diluar program studi adalah Kalkulus, Matematika Teknik, Fisika Dasar, Aljabar Linier, Teknik Kendali Dasar, Isyarat dan Sistem, Medan Elektromagnetis, Kecerdasan Buatan, Pengantar logika Fuzzy, Kontrol Optimal, serta Probabilitas dan Statistika.

BIODATA PENULIS



Dr. Afnaria, S.Si, M.Si

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Islam Sumatera Utara

Penulis lahir di Medan tanggal 16 Januari 1981. Penulis adalah dosen tetap LLDIKTI Wilayah I dpk FKIP UISU, bertugas sejak tahun 2005 sampai dengan sekarang. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika, FMIPA USU pada tahun 2004. Menyelesaikan pendidikan S2 pada jurusan matematika, FMIPA USU pada tahun 2010. Dan menyelesaikan pendidikan S3 pada jurusan matematika, FMIPA USU pada tahun 2020.

BIODATA PENULIS



Prida N. L. Taneo, S.Pd., M.Pd

Dosen Pendidikan Matematika

Institut Pendidikan Soe

Penulis lahir di Besnam tanggal 19 Oktober 1979. Penulis adalah dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika Institut Pendidikan Soe. Menyelesaikan pendidikan S1 pada program studi pendidikan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana Salatiga tahun 2010 dan menyelesaikan pendidikan S2 pada program studi pendidikan matematika Universitas Negeri Semarang tahun 2015. Penulis sementara melanjutkan studi S3 di program studi pendidikan matematika Universitas Pendidikan Indonesia. Penulis menekuni bidang kajian matematika sekolah, aljabar, matematika diskrit, geometri dan etnomatematika dalam pelaksanaan tridharma perguruan tinggi. Buku Ajar yang pernah ditulis antara lain Kalkulus Integral Berbasis Maple (2018), Teori Graf (2019), Teori Bilangan (2023), dan Dasar Matematika (2023).

BIODATA PENULIS



Rahma Faelasofi, S.Si., M.Sc.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan UMPRI

Penulis adalah Rahma Faelasofi, lahir di Tanjung Karang Barat pada tanggal 2 Februari 1985, merupakan anak keempat dari lima bersaudara, dari pasangan H. Sunanto (alm) dan Hj. Siti Chotijah. Semasa kecil melewati jenjang Pendidikan di SD N 8 Gedong Air pada tahun 1991 – 1997, SMP N 16 Bandar Lampung 1998 – 2000, SMA N 3 Bandar Lampung 2001 – 2003, selanjutnya melanjutkan S1 di Universitas Lampung tahun 2004 – 2007 dan melanjutkan S2 di Universitas Gadjah Mada pada tahun 2008 – 2010. Riwayat pekerjaan adalah dosen tetap di Universitas Muhammadiyah Pringsewu (UMPRI) pada tahun 2010 sampai sekarang. Amanah yang pernah diemban adalah sebagai staf Pusat Penjaminan Mutu 2014 - 2018, kepala Pusat Penjaminan Mutu 2018 – 2019, dan Dekan FKIP UMPRI tahun 2019-2023. Saat ini, penulis sedang menempuh studi lanjut S3 di Universitas Lampung.

BIODATA PENULIS



Theresia Monika Siahaan, S.Pd., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas HKBP Nommensen Pematangsiantar

Penulis lahir di Pematangsiantar tanggal 26 Nopember 1986. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar Universitas HKBP Nommensen Pematangsiantar. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas HKBP Nommensen lulus pada tahun 2008 dan melanjutkan S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan lulus pada tahun 2014. Penulis mengampu mata kuliah Kalkulus Diferensial, Kalkulus Integral, Statistika pendidikan, Pengembangan telaah kurikulum dan Aljabar linier.

BIODATA PENULIS



Sutiyono

Dosen Prodi Teknik Mesin Fakultas Teknik
Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur

Penulis lahir di Surabaya tanggal 13 Juli 1960. Penulis hingga saat ini menjadi dosen tetap Fakultas Teknik prodi Teknik Mesin Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur. Alhamdulillah Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada tahun 1986 di jurusan Teknik Kimia Universitas Pembangunan Nasional “Veteran” Jawa Timur kemudian melanjutkan S2 pada Jurusan Teknik Kimia Universitas Gadjah Mada Yogyakarta lulus tahun 1995. Sampai saat ini Penulis menjadi pengurus Badan Pembina Olahraga Mahasiswa Indonesia (Bapomi) Jawa Timur periode 2023-2027. Semoga materi yang penulis berhasil selesaikan menjadi buku ini dapat bermanfaat.