

ALJABAR ELEMENTER



**Nazariah
Zainal Azis
Nanang**

Noviyanti

Suvriadi Panggabean

Agung Prasetyo

Nurul Asma

Syahrullah Asyari

Wanda Nugroho Yanuarto

Novian Riskiana Dewi

Lulut Alfaris

Helma Mustika

ALJABAR ELEMENTER

**Nazariah
Zainal Azis
Nanang
Noviyanti
Suvriadi Panggabean
Agung Prasetyo
Nurul Asma
Syahrullah Asyari
Wanda Nugroho Yanuarto
Novian Riskiana Dewi
Lulut Alfaris
Helma Mustika**



GET PRESS INDONESIA

ALJABAR ELEMENTER

Penulis :

Nazariah
Zainal Azis
Nanang
Noviyanti
Suvriadi Panggabean
Agung Prasetyo
Nurul Asma
Syahrullah Asyari
Wanda Nugroho Yanuarto
Novian Riskiana Dewi
Lulut Alfari
Helma Mustika

ISBN : 978-623-198-024-3

Editor : Ari Yanto. M.Pd.

Penyunting : Tri Putri Wahyuni, S.Pd

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd

Penerbit : GET PRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :

Jln. Palarik Air Pacah No 26 Kel. Air Pacah
Kec. Koto Tangah Kota Padang Sumatera Barat

Website : www.getpress.co.id Email :

adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, 26 Januari 2023

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Segala Puji dan syukur atas kehadiran Allah SWT dalam segala kesempatan. Sholawat beriring salam dan doa kita sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW. Alhamdulillah atas Rahmat dan Karunia-Nya penulis telah menyelesaikan Buku Aljabar Elementer ini.

Buku ini membahas Persamaan Dan Fungsi Linear Serta Grafiknya, Sistem Persamaan Linear Dengan Dua Atau Tiga Peubah, Persamaan Kuadrat, Fungsi Kuadrat Dan Grafiknya, Pertidaksamaan Kuadrat, Persamaan Irrasional, Fungsi Irrasional, Dan Grafiknya, Eksponen, Fungsi Eksponen, Dan Grafiknya, Persamaan Logaritma, Fungsi Logaritma, Dan Grafiknya, Persamaan Pangkat Tinggi, Dalil Sisa Dan Hasil Bagi Istimewa, Barisan Berhingga Dan Tak Hingga, Deret Berhingga Dan Tak Hingga, Bilangan Kompleks.

Proses penulisan buku ini berhasil diselesaikan atas kerjasama tim penulis. Demi kualitas yang lebih baik dan kepuasan para pembaca, saran dan masukan yang membangun dari pembaca sangat kami harapkan.

Penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung dalam penyelesaian buku ini. Terutama pihak yang telah membantu terbitnya buku ini dan telah mempercayakan mendorong, dan menginisiasi terbitnya buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi masyarakat Indonesia.

Padang, 26 Januari 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	v
DAFTAR TABEL	vi
BAB 1 PERSAMAAN LINEAR DAN FUNGSI LINEAR SERTA GRAFIKNYA.....	1
1.1 Persamaan Linear	1
1.2 Fungsi Linear	4
1.3 Grafik Linear.....	7
DAFTAR PUSTAKA.....	15
BAB 2 SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN DUA ATAU TIGA PEUBAH.....	17
2.1 Sistem Persamaan Linear	17
2.2 Sistem Persamaan Linear Dua Peubah.....	20
2.2.1 Metode Substitusi	20
2.2.2 Metode Eliminasi	22
2.2.3 Metode Gabungan (Eliminasi dan Substitusi).....	22
2.2.4 Metode Grafik.....	24
2.2.5 Metode Cramer (Determinan)	25
2.3 Sistem Persamaan Linear Tiga Peubah	26
2.3.1 Metode Gabungan (Eliminasi dan Substitusi).....	27
2.3.2 Metode Cramer (Determinan)	29
2.3.3 Metode Eliminasi Gauss	31
DAFTAR PUSTAKA.....	35
BAB 3 PERSAMAAN KUADRAT, FUNGSI KUADRAT DAN GRAFIKNYA.....	37
3.1 Persamaan Kuadrat	37
3.1.1 Pengertian.....	37
3.1.2 Jenis-Jenis Akar Persamaan Kuadrat.....	40
3.1.3 Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat.....	41

3.1.4 Menyusun Persamaan Kuadrat	42
3.1.5 Latihan 1:	43
3.2 Fungsi Kuadrat	45
3.2.1 Pengertian.....	45
3.2.2 Karakteristik Grafik Fungsi Kuadrat.....	47
3.2.3 Latihan 2:	49
3.2.4 Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat.....	50
3.2.5 Bentuk Fungsi Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat.....	52
3.2.6 Persamaan Fungsi Kuadrat yang Kurvanya Melalui Tiga Titik Tak Segaris	54
3.2.7 Latihan 3:	55
3.3 Aplikasi Fungsi Kuadrat	57
3.3.1 Pengertian.....	57
3.3.2 Latihan 4:.....	58
DAFTAR PUSTAKA.....	60
BAB 4 PERTIDAKSAMAAN KUADRAT	61
4.1 Pengertian Pertidaksamaan Kuadrat.....	61
4.2 Bentuk Umum Persamaan Kuadrat.....	61
4.3 Sifat-Sifat Pertidaksamaan Kuadrat	62
4.3.1 Sifat Aditif.....	62
4.3.2 Sifat Multiplikatif	62
4.4 Langkah Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat.....	63
4.5 Tabel Himpunan Penyelesaian Garis Bilangan	63
4.6 Contoh Penyelesaian Pertidaksamaan	64
4.7 Contoh Soal Beserta Penyelesaiannya	65
DAFTAR PUSTAKA.....	70
BAB 5 PERSAMAAN IRRASIONAL, FUNGSI IRRASIONAL DAN GRAFIKNYA.....	71
5.1 Persamaan Irrasional.....	71
5.2 Fungsi Irrasional.....	76
5.3 Grafik Fungsi Irrasional	77
DAFTAR PUSTAKA.....	81

BAB 6 PERSAMAAN EKSPONEN, FUNGSI

EKSPONEN, DAN GRAFIKNYA.....	83
6.1 Pendahuluan	83
6.2 Fungsi Eksponen	85
6.3 Grafik Fungsi Eksponen.....	86
6.4 Persamaan Eksponen	90
DAFTAR PUSTAKA.....	94

BAB 7 PERSAMAAN LOGARITMA, FUNGSI

LOGARITMA, DAN GRAFIKNYA	95
7.1 Pendahuluan	95
7.2 Konsep Dasar Logaritma.....	96
7.2.1 Sifat-Sifat Logaritma.....	96
7.2.2 Pembuktian Sifat.....	97
7.2.3 Contoh Soal Sifat-sifat Logaritma	97
7.3 Persamaan Logaritma	98
7.3.1 Bentuk Persamaan Logaritma.....	99
7.3.2 Contoh Soal Persamaan Logaritma	100
7.4 Fungsi Logaritma.....	101
7.5 Grafik Fungsi Logaritma.....	103
7.5.1 Contoh Soal Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $0 < \alpha < 1$	103
7.5.2 Contoh Soal Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $\alpha > 1$	105
DAFTAR PUSTAKA.....	107

BAB 8 PERSAMAAN PANGKAT TINGGI..... 109

8.1 Pendahuluan	109
8.2 Perkalian Bentuk Polinomial	111
8.3 Menyelesaikan Persamaan Pangkat Tinggi	115
8.4.1 Solusi Umum Persamaan Kubik, Jika Semua Akarnya Tidak Diketahui	119
8.4.2 Solusi Persamaan Kubik, Jika Salah Satu Akarnya Diketahui	124

8.4.3 Solusi Umum Persamaan Kubik, Jika Semua Akarnya Tidak Diketahui	126
8.4.4 Solusi Persamaan Kuintik.....	129
8.4.5 Solusi Persamaan Sekstik.....	132
DAFTAR PUSTAKA.....	143
BAB 9 DALIL SISA DAN HASIL BAGI ISTIMEWA.....	145
9.1 Teorema Sisa.....	145
9.2 Teorema Faktor.....	147
9.3 Akar Rasional dari Suku Banyak	148
9.4 Definisi Akar Rasional	149
9.4.1 Bilangan Irasional.....	149
9.4.2 Bilangan Irasional dari $p(x)$	150
9.4.3 Akar Bilangan Rasional Suku Banyak $p(x) = 0$	150
9.5 Kesimpulan, Implikasi, Dan Saran.....	152
9.5.1 Kesimpulan.....	152
9.5.2 Saran	152
DAFTAR PUSTAKA.....	153
BAB 10 BARISAN BERHINGGA DAN TAK HINGGA.....	155
10.1 Pendahuluan	155
10.2 Barisan.....	156
10.2.1 Barisan Berhingga	156
10.2.2 Barisan Tak Hingga.....	160
DAFTAR PUSTAKA.....	166
BAB 11 DERET BERHINGGA DAN TAK HINGGA	167
11.1 Pendahuluan	167
11.2 Deret Geometri Tak Hingga.....	167
11.3 Deret Geometri Tak Hingga Konvergen.....	169
11.4 Deret Geometri Tak Hingga Divergen	170
11.5 Teorema the nth term test.....	171
11.6 Kriteria Cauchy	171
DAFTAR PUSTAKA.....	173

BAB 12 BILANGAN KOMPLEKS.....	175
12.1 Pendahuluan	175
12.1.1 Pengertian Bilangan Kompleks	176
12.1.2 Sifat-sifat Bilangan Kompleks	177
12.2 Operasi pada Bilangan Kompleks	178
12.2.1 Operasi Penjumlahan Bilangan Kompleks	178
12.2.2 Operasi Pengurangan Bilangan Kompleks	179
12.2.3 Operasi Perkalian Bilangan Kompleks	180
12.2.4 Operasi Pembagian Bilangan Kompleks	181
12.3 Modulus dan Bilangan Sekawan	181
12.3.2 Bilangan Sekawan	183
12.3.3 Sifat Modulus dan Bilangan Sekawan	183
DAFTAR PUSTAKA.....	187
BIODATA PENULIS	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 6.1 : Rantai penyebaran virus korona.....	83
Gambar 6.2 : Kasus harian virus korona di Afrika.....	84
Gambar 6.3 : Grafik fungsi $g(x) = 1^x$	86
Gambar 6.4 : Grafik $g(x) = a^x, a > 1$	88
Gambar 6.5 : Grafik $g(x) = a^x, 0 < a < 1$	89
Gambar 6.6 : Grafik fungsi $g(x) = 1^x$	90
Gambar 7.1 : Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $0 < a < 1$	104
Gambar 7.2 : Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $a > 1$	105
Gambar 10.1 : Susunan segitiga	155
Gambar 11.1 : Jarak antar suku dari barisan semakin kecil seiring Bergeraknya barisan, Barisan Cauchy.....	172
Gambar 11.2 : Suatu barisan yang bukan barisan Cauchy. Suku dari barisan tidak saling mendekat seiring Bergeraknya barisan.....	172

DAFTAR TABEL

Tabel 6.1 : $g(x) = a^x, x > 1$	87
Tabel 7.1 : Hubungan antara x dan y	104
Tabel 7.2 : Hubungan antara x dan y	105

BAB 1

PERSAMAAN LINEAR DAN FUNGSI LINEAR SERTA GRAFIKNYA

Oleh Nazariah

1.1 Persamaan Linear

Persamaan atau identitas adalah suatu pernyataan yang memuat ungkapan “sama dengan” dan diberi notasi “=” tetapi tidak memuat variabel. Dalam artian, Persamaan merupakan kalimat matematika terbuka yang memuat tanda “=” (Wagiyo, 2008). Kalimat matematika terbuka adalah suatu pernyataan yang memuat variable (berubah) yang nilainya belum jelas atau belum bisa ditentukan (Nuharini, 2008). Dalam menyelesaikan suatu persamaan harus dicari suatu bilangan sehingga persamaan tersebut menjadi nilai atau proporsi yang tepat. Jika bilangan tersebut menghasilkan proporsi yang benar maka himpunan penyelesaian diperoleh.

Persamaan linear merupakan suatu persamaan di mana pangkat variabelnya yaitu satu. Adapun bentuk umum dari persamaan linear, seperti:

$$ax + b = c, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Sekarang, perhatikan beberapa persamaan berikut:

(1) $2x + 3 = 9$

(2) $4 - 5x = 14$

(3) $x^2 + 5x = -6$

Persamaan (1) dan (2) masih satu jenis, sedangkan persamaan (3) jenis yang lain. Pada persamaan (1) dan (2)

pangkat tertinggi pada variabel x adalah 1, sedangkan pada persamaan (3) pangkat tertinggi pada variabel x adalah 2. Persamaan (1) dan (2) dinamakan persamaan linear, sedangkan persamaan (3) persamaan bukan linear.

Pada persamaan (1) di atas bentuknya dapat disajikan seperti bentuk umum, yaitu dengan cara sebagai berikut:

$$2x + 3 = 9 \quad \text{ekuivalen dengan}$$

$$2x + 3 - 9 = 9 - 9 \quad \text{ekuivalen dengan}$$

$$2x - 6 = 0$$

Bentuk terakhir ini sama dengan bentuk umum, di mana $A = 2$ dan $B = -6$.

Pada persamaan (2) di atas bentuknya dapat disajikan seperti bentuk umum juga, yaitu dengan cara sebagai berikut:

$$4 - 5x = 14 \quad \text{ekuivalen dengan}$$

$$4 - 5x - 14 = 14 - 14 \quad \text{ekuivalen dengan}$$

$$4 - 14 - 5x = 0 \quad \text{ekuivalen dengan}$$

$$-10 - 5x = 0 \quad \text{ekuivalen dengan}$$

$$-5x - 10 = 0$$

Bentuk terakhir ini sama dengan bentuk umum, di mana $A = -5$ dan $B = -10$.

Menyelesaikan suatu persamaan berarti mencari suatu bilangan yang apabila disubstitusikan ke variabel pada persamaan itu, persamaan itu berubah menjadi kalimat tertutup yang mempunyai nilai kebenaran “benar”. Banyak cara mencari bilangan yang cocok itu, mulai dari mencoba-coba sampai dengan mengikuti algoritma dan memanfaatkan sifat-sifat operasi aljabar. Salah satu cara menentukan penyelesaian suatu persamaan akan ditunjukkan melalui contoh soal berikut. Tentukan himpunan penyelesaian (Hp) dari masalah-masalah berikut:

Contoh 1:

Tentukan $3x + 8 = 35$:

Penyelesaian:

$$3x + 8 = 35$$

$$3x + 8 - 8 = 35 - 8$$

$$3x = 27$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{27}{3}$$

$$x = 9$$

Jika hasil ini ($x = 9$) kita substitusikan ke persamaan

$$3x + 8 = 35 \text{ maka diperoleh kesamaan } 3 \times 9 + 8 = 35$$

Contoh 2:

Tentukan $6 - 4x = 34$

Penyelesaian:

$$6 - 4x = 34$$

$$6 - 4x - 6 = 34 - 6$$

$$-4x = 28$$

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{28}{-4}$$

$$x = -7$$

Jika hasil ini ($x = -7$) kita substitusikan ke persamaan $6 - 4x = 34$ maka diperoleh kesamaan $6 - (4 \times (-7)) = 38$.

Contoh 3:

Tentukan $2(x - 2) + 3(x + 1) = 3x + 1$!

Penyelesaian:

Jumlah dua bilangan berutan adalah 25 tentukanlah bilangan tersebut!

$$2(x - 2) + 3(x + 1) = 3x + 1$$

$$2x - 4 + 3x + 3 = 3x + 1$$

$$5x - 1 = 3x + 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$Hp = \{1\}$$

Jika hasil ini ($x = 1$) kita substitusikan ke persamaan $2(x - 2) + 3(x + 1) = 3x + 1$ maka diperoleh kesamaan $2(1 - 2) + 3(1 + 1) = 3(1) + 1$

Contoh 4:

Misalkan bilangan pertama adalah n . Jadi bilangan ke dua adalah ...

Penyelesaian:

$$(n + 1)$$

$$n + (n + 1) = 25$$

$$(n + n) + 1 = 25$$

$$2n + 1 = 25$$

$$2n = 24$$

$$n = 12$$

Dengan demikian bilangan-bilangan itu adalah 12 dan 13. Hp = {12, 13}

1.2 Fungsi Linear

Fungsi adalah hubungan antara dua buah variabel atau lebih. Masing-masing dari dua buah variabel atau lebih tersebut saling pengaruh mempengaruhi (Assauri, 2004). Salah satu konsep dalam matematika yang paling penting adalah konsep fungsi. Dengan konsep fungsi, para matematikawan maupun para ahli di bidang yang lain dengan jelas dapat mengetahui apakah suatu struktur identik dengan struktur yang lain. Dan hampir semua cabang matematika menggunakan konsep fungsi dalam pengembangannya. Fungsi linear dan fungsi kuadrat merupakan salah satu fungsi yang banyak digunakan dalam kehidupan. Banyak masalah sehari-hari menjadi lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan konsep fungsi linear dan fungsi kuadrat. Diharapkan mahasiswa dapat menerapkan konsep fungsi baik fungsi linear maupun fungsi kuadrat dalam berbagai permasalahan sehari-hari dan berbagai bidang pengembangan ilmu yang lain.

Fungsi Linear atau Fungsi garis lurus adalah suatu fungsi yang variabel bebas (*independent variable*)nya paling tinggi

berpangkat satu (Assauri, 2004). Fungsi linear merupakan salah satu fungsi yang sederhana dalam matematika. Banyak aplikasi dari fungsi linear ini, seperti hubungan antara ketinggian pesawat dan suhu udara, hubungan penawaran dengan ketersediaan barang, serta hubungan antara jarak dan waktu tempuh. Dalam kegiatan belajar ini, fungsi linear dinyatakan sebagai berikut.

$$f(x) = mx + a,$$

Dikatakan linear karena grafiknya berupa garis. Grafik dari fungsi ini dapat anda gambar dengan menentukan dua nilai c yang berbeda serta menentukan pasangan titik salah satunya dengan jalan membuat tabelnya. Fungsi linear adalah suatu fungsi yang variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus. Oleh karena itu fungsi linier sering disebut dengan persamaan garis lurus (pgl) dengan bentuk umumnya sbb:

$$f: x \rightarrow mx + c \text{ atau}$$

$$f(x) = mx + c \text{ atau}$$

$$y = mx + c$$

m adalah gradien / kemiringan / kecondongan dan c adalah konstanta.

Contoh 1:

Tentukan rumus untuk fungsi linear f jika diberikan pasangan nilai seperti tabel berikut.

x	$F(x)$
-1	-1
2	8

Penyelesaian:

Karena fungsi linear, dia dapat dinyatakan sebagai $f(x) = mx + a$. Oleh karena itu, Anda akan memperoleh dua persamaan.

$$(-1) = m \cdot (-1) + a \quad \dots (1)$$

$$8 = m \cdot 1 + a \quad (2)$$

Jika persamaan (2) Anda kurangi dengan persamaan (1), akan Anda peroleh persamaan $9 = m \cdot 3$, yang memberikan penyelesaian $m = 3$. Anda substitusi nilai ini ke persamaan (2) maka Anda

peroleh persamaan $8 = 3.2 + a$, yang memberikan penyelesaian $a = 2$. Jadi, rumus untuk f sebagai berikut:

$$f(x) = 3x + 2.$$

Variabel pada fungsi linear dan juga pada fungsi-fungsi lain tidak harus berupa simbol x , tetapi dapat berupa simbol yang lain, seperti t , z , dan w . Khusus untuk variabel t , variabel ini biasanya digunakan sebagai simbol dari waktu.

Contoh 2 :

Hubungan antara waktu dan jarak yang ditempuh suatu kendaraan merupakan fungsi linear g . Lalu, diberikan pasangan nilai seperti tabel berikut.

T (dalam menit)	$g(t)$
5	200
10	400

Tentukan rumus hubungan waktu dan jarak tempuh kendaraan tersebut.

Penyelesaian

Seperti pada Contoh 1.1, karena g fungsi linear, dia dapat dinyatakan sebagai $g(t) = mt + a$. Oleh karena itu, Anda peroleh dua persamaan.

$$200 = m.5 + a$$

$$400 = m.10 + a$$

Dapat Anda periksa bahwa penyelesaian bersama dari persamaan di atas adalah $g(t) = 40t$. Jadi, hubungan waktu dan jarak tempuh kendaraan adalah $g(t) = 40t$. Pada fungsi linear bentuk, jika $f(x)$ dinyatakan sebagai y , yaitu $y = mx + a$. Persamaan terakhir ini disebut sebagai persamaan garis.

Contoh 3 :

Tentukan persamaan garis melalui titik $(1,1)$ dan $(2,0)$. Tentukan grafiknya.

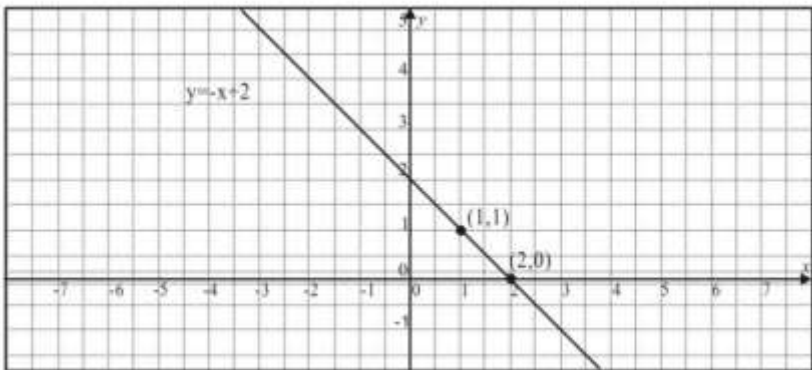
Penyelesaian

Persamaan garis sebagai $y = mx + a$. Anda akan peroleh dua persamaan berikut.

$$1 = m.1 + a$$

$$0 = m.2 + a.$$

Penyelesaian bersama dua persamaan tersebut adalah $m = -1$ dan $a = 2$. Jadi, persamaan garis yang diminta adalah $y = -x + 2$. Grafik persamaan garis diperoleh dengan menghubungkan titik-titik yang dilaluinya seperti gambar berikut ini.



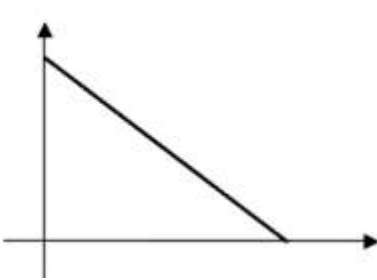
1.3 Grafik Linear

Langkah-langkah melukis grafik fungsi linier

1. Tentukan titik potong dengan sumbu x, $y = 0$ diperoleh koordinat A($x_1, 0$)
2. Tentukan titik potong dengan sumbu y, $x = 0$ diperoleh koordinat B(0, y_1)
3. Hubungkan dua titik A dan B sehingga terbentuk garis lurus

Persamaan linier juga dapat ditulis dengan simbol $y = ax + b$ (ini untuk memudahkan kita dalam memahami gambar). Jika b bernilai positif : fungsi linier digambarkan garis dari kiri

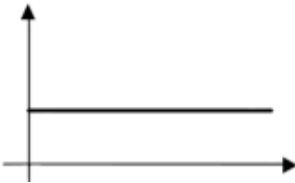
bawah ke kanan atas
 Jika b bernilai negatif : fungsi linier digambarkan garis dari kiri atas ke kanan bawah
 Jika b bernilai nol : digambarkan garis yg sejajar dengan sumbu datar x .



Kemiringan positif



Kemiringan negatif



Kemiringan 0



Kemiringan 0

Contoh 4 :

Grafik Fungsi $f(x) = x + y = 5$ $x \in \mathbb{R}$ adalah ...

Jawab:

Kita pilih beberapa harga x ,

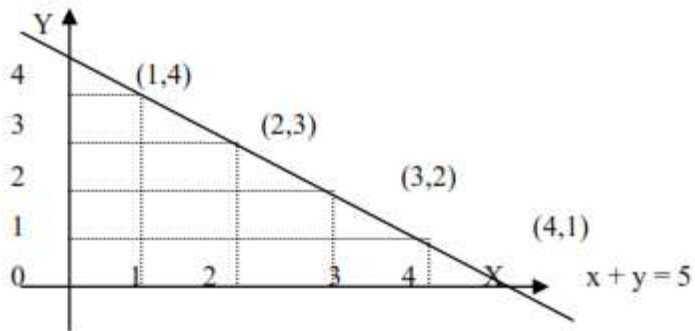
$x = 1$, maka $y = 5 - x = 5 - 1 = 4$ dan diperoleh titik $(1,4)$.

$x = 2$, maka $y = 5 - x = 5 - 2 = 3$ dan diperoleh titik $(2,3)$

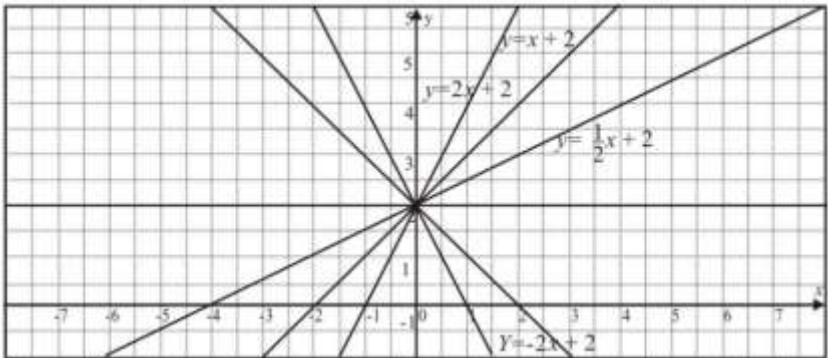
$x = 3$, maka $y = 5 - x = 5 - 3 = 2$ dan diperoleh titik $(3,2)$

$x = 4$, maka $y = 5 - x = 5 - 4 = 1$ dan diperoleh titik $(4,1)$

Untuk menggambar grafik fungsi $x + y = 5$, kita dapat membuat garis melalui titik-titik itu. Sehingga diperoleh grafik sebagai berikut:



Anda perhatikan berbagai macam grafik dari suatu persamaan garis berikut ini.



Perhatikan gambar tersebut. Gambar itu mempunyai berbagai kemiringan terhadap sumbu x . Jadi, garis yang mempunyai kemiringan disebut sebagai gradien. Anda lihat bahwa yang menentukan gradien adalah nilai dari variabel m . Anda tentunya bertanya bagaimana cara menentukan gradien garis. Jika Anda perhatikan sekali lagi gradien garis yang dilihat relatif sumbu x , terutama untuk garis dengan persamaan $y = 2$ atau ditulis sebagai $y = 0.x + 2$, Anda dapat menduganya bahwa gradien garis

dapat ditentukan dengan perbandingan panjang segmen garis pada sumbu y dengan panjang segmen garis pada sumbu x dari dua titik tertentu. Dugaan Anda memang benar. Jadi, jika Anda mempunyai dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) , Gradien garis dapat anda rumuskan sebagai berikut.

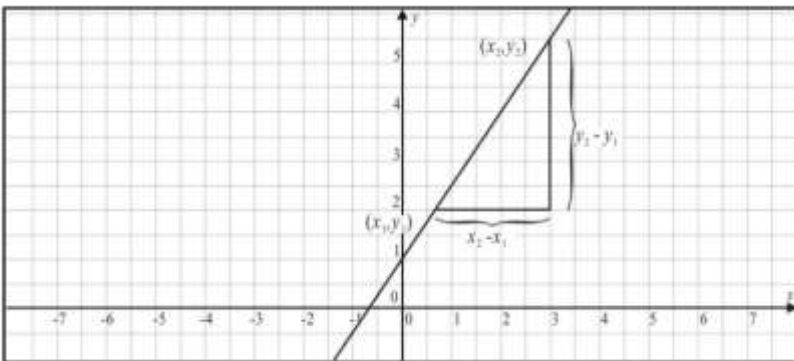
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Anda lihat bahwa pada Contoh 3, $m = -1$. Nilai ini dapat Anda peroleh dari rumus gradien garis berikut.

$$m = \frac{0 - 1}{2 - 1}$$

Perhatikan sekali lagi garis serta persamaannya. Anda akan melihat bahwa garis-garis tersebut memotong sumbu y pada satu titik. Coba Anda kaitkan kenyataan ini dengan masing-masing persamaannya. Apa yang dapat Anda simpulkan? Jadi, perpotongan garis.

dengan sumbu y merupakan nilai dari variabel a. Pada gambar di atas, $a = 2$ yang disebut sebagai intersep-y. Gambar berikut ini akan memberikan ilustrasi secara jelas tentang kemiringan suatu garis.



Contoh 5 :

Gambarlah suatu garis yang mempunyai gradien $m = 3$ dan intersep-y adalah (-3) .

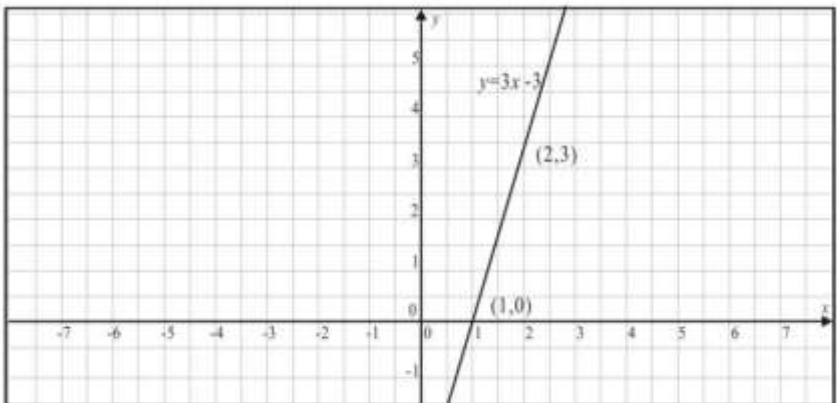
Penyelesaian

Persamaan garis yang dimaksud adalah $y = 3x - 3$. Untuk menggambar, Anda tentukan dua titik yang dilaluinya seperti berikut.

$$x = 1 \rightarrow y = 0,$$

$$x = 2 \rightarrow y = 3.$$

Jadi, dua titik yang dilaluinya adalah $(1,0)$ dan $(2,3)$. Oleh karena itu, Anda peroleh gambar seperti berikut ini.



Anda dapat memeriksa kembali bahwa gradien garis tersebut adalah:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{2 - 1} = 3.$$

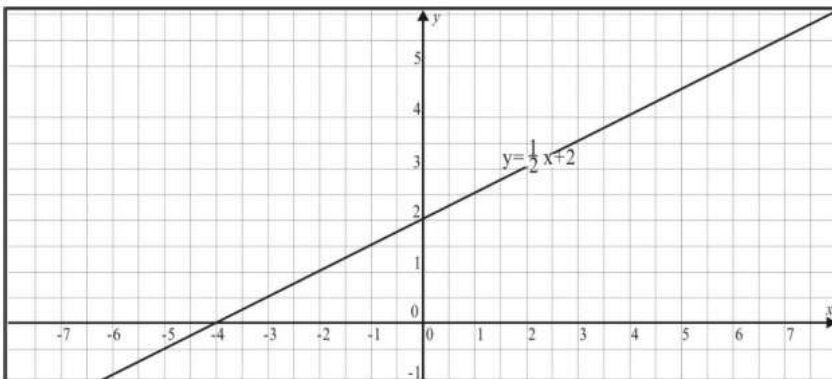
Sama dengan gradien yang diketahui, yaitu $m = 3$.

Contoh 6:

Gambarlah suatu garis yang melalui titik (2,3) dan mempunyai gradien $\frac{1}{2}$.

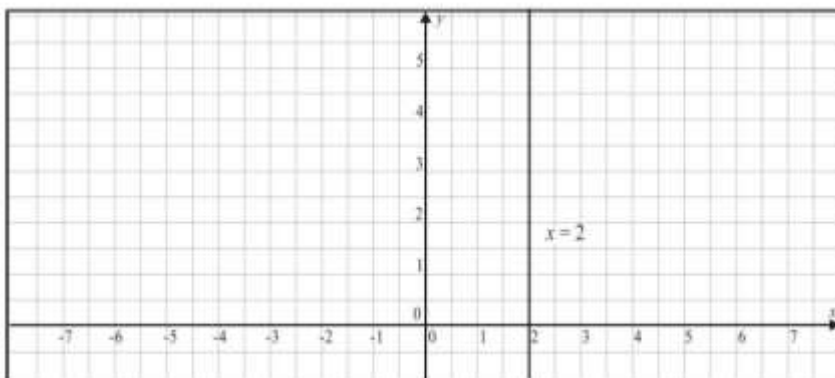
Penyelesaian

Misalnya, persamaan garis yang dimaksud adalah $y = mx + a$.
a. Karena garis mempunyai gradien $\frac{1}{2}$, persamaan garis menjadi $y = \frac{1}{2}x + a$. Berikutnya garis melalui (2,3). Maka itu, Anda peroleh persamaan $3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + a$. Oleh karena itu, $a = 2$. Jadi, persamaan garis yang melalui (2,3) dan mempunyai gradien $\frac{1}{2}$ adalah Gambar garis $y = \frac{1}{2}x + 2$. seperti berikut ini.



Karena grafik setiap fungsi linear adalah garis, mungkin Anda menduga bahwa setiap garis adalah fungsi linear. Dugaan ini tidak benar karena garis vertikal tidak merupakan grafik dari fungsi linear untuk $y = f(x)$. Sebagai contoh, grafik dari persamaan $x = 2$ adalah garis, tetapi dia bukan merupakan fungsi sehingga dia bukan merupakan fungsi linear. Anda ingat bahwa suatu fungsi mengaitkan satu nilai x tepat dengan satu nilai y , sedangkan

persamaan $x = 2$ satu nilai x mengaitkan tak hingga nilai y . Lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut ini.



Persamaan $x = 2$ dapat ditulis sebagai persamaan $x - 2 = 0$. Demikian juga persamaan garis $y = mx + a$ dapat ditulis sebagai $mx - y + a = 0$. Dua persamaan $x - 2 = 0$ dan $mx - y + a = 0$ disebut sebagai persamaan linear.

Secara umum, persamaan linear dinyatakan sebagai $Ax + Bu + C = 0$ yang A dan B tidak keduanya nol. Jika $B \neq 0$, persamaan $Ax + Bu + C = 0$ dapat Anda nyatakan sebagai fungsi linear, yaitu

$$y = \frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$= mx + a,$$

di mana $m = -\frac{A}{B}$ dan $a = -\frac{C}{B}$.

Contoh 7:

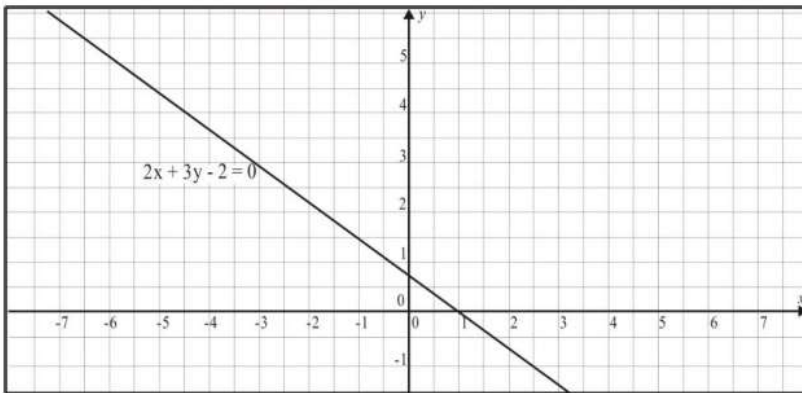
Diberikan persamaan linear $2x + 3y - 2 = 0$. Tentukan gradien, intersep y, dan gambarlah grafiknya!

Penyelesaian

Dengan menggunakan rumus sebelumnya, diperoleh gradien

$m = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{3}$ dan intersep y adalah $m = -\frac{C}{B} = \frac{2}{3}$. Grafiknya

terlihat pada gambar berikut ini.



DAFTAR PUSTAKA

- Assauri, S. 2004. *Matematika Ekonomi*. Jakarta: PT Raja Grafindo.
- Nuharini, D. 2008. *Matematika Konsep dan Aplikasi 1 untuk Kelas VII SMP*. Jakarta: Pusat Perbukuan DEPDIKNAS.
- Wagiyo. 2008. *Pegangan Belajar Matematika 1*. Jakarta: Pusat Perbukuan DEPDIKNAS.

BAB 2

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN DUA ATAU TIGA PEUBAH

Oleh Zainal Azis

Pada bab ini kita akan membahas dan mendalami materi sistem persamaan linear dua peubah dan tiga peubah yang sudah pernah dipelajari di sekolah menengah. Cara menemukan himpunan penyelesaian atau solusi dari sistem persamaan linear yang sering kita jumpai antara lain metode substitusi, metode eliminasi, metode gabungan (eliminasi dan substitusi), metode grafik, dan metode *cramer*. Mari kita perhatikan uraian materi-materi berikut ini.

2.1 Sistem Persamaan Linear

Persamaan linear adalah persamaan yang variabelnya memiliki derajat maksimum satu. Suatu persamaan linear dengan n peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta real.

Penyelesaian atau solusi dari persamaan linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ adalah urutan dari n bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ sehingga persamaan tersebut akan tepat jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ selanjutnya kita sebut himpunan penyelesaian dari persamaan linear.

Bila ada beberapa persamaan linear, kumpulan persamaan itu disebut sebagai sistem persamaan linear. Menurut (Wikipedia, 2021) menyatakan bahwa : "sistem persamaan linear adalah

sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari beberapa variabel”. Sistem persamaan linear dengan n peubah dan m persamaan linear dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}$$

”Bila kita menjumpai sebuah sistem persamaan linear, maka persis hanya satu dari tiga kemungkinan berikut yang akan dipenuhi yaitu : (1) sistem persamaan linear memiliki solusi tunggal; (2) sistem persamaan linear memiliki solusi tak hingga; (3) sistem persamaan linear tidak memiliki solusi” (Gozali, 2010).

Contoh 2 :

Perhatikan sistem persamaan linear dengan dua persamaan dan dua peubah berikut:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & = & -7 \\ -3x_1 & = & 3 \end{array}$$

Dari sistem persamaan linear diatas kita memperoleh solusi bahwa $x_1 = -1$ dan $x_2 = -2$, selanjutnya sistem persamaan linear ini kita sebut **memiliki solusi tunggal**.

Contoh 2 :

Selanjutnya, perhatikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ 6x_1 + 4x_2 & = & 14 \end{array}$$

Dari sistem persamaan linear diatas persamaan $6x_1 + 4x_2 = 14$ merupakan dua kali dari persamaan $3x_1 + 2x_2 = 7$ atau persamaan $3x_1 + 2x_2 = 7$ merupakan $\frac{1}{2}$ dari persamaan $6x_1 + 4x_2 = 14$, artinya 2 persamaan linear ini ekuivalen.

Kita akan memiliki banyak pilihan solusi dari x_1 dan x_2 yang memenuhi sistem persamaan linear ini. Jika kita memisalkan $p \in \mathbb{R}$ sebarang, maka $x_1 = \frac{7-2p}{3}$ dan $x_2 = p$ merupakan solusi dari sistem persamaan linear ini, artinya sistem persamaan linear ini kita sebut **memiliki solusi tak hingga**.

Contoh 3 :

Terakhir, perhatikan sistem persamaan linear berikut:

$$2x_1 + 3x_2 = 3$$

$$4x_1 + 6x_2 = 9$$

Dari sistem persamaan linear diatas ketika persamaan $2x_1 + 3x_2 = 3$ kita kalikan dengan 2, maka akan terbentuk sistem persamaan linear baru sebagai berikut:

$$4x_1 + 6x_2 = 6$$

$$4x_1 + 6x_2 = 9$$

Ketika kita melakukan operasi pengurangan antara persamaan yang diatas dan dibawah, maka tidak ada x_1 dan x_2 yang memenuhi dan sistem persamaan linear ini kita sebut **tidak memiliki solusi**.

Istilah selanjutnya dalam sistem persamaan linear ialah: konsisten dan tidak konsisten, dimana bila tidak memiliki penyelesaian dikatakan **tidak konsisten** dan bila ada setidaknya satu penyelesaian atau solusi, maka sistem persamaan linear tersebut dikatakan **konsisten**.

2.2 Sistem Persamaan Linear Dua Peubah

Persamaan linear dua variabel (PLDV) merupakan sebuah persamaan linear yang memiliki dua variabel (peubah), misalnya peubah x dan y . Sedangkan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) ialah sebuah sistem persamaan linear yang terdiri dari 2 atau lebih persamaan linear dua variabel. Adapun bentuk umum, sistem persamaan linear dua variabel dapat dituliskan sbb:

$$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \dots \text{persamaan (1)}$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \dots \text{persamaan (2)}$$

Nilai x_1 dan x_2 yang memenuhi kedua persamaan tersebut dinamakan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel.

Kita telah mempelajari berbagai teknik untuk menemukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) di tingkat sekolah menengah. Metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, metode gabungan (eliminasi dan substitusi), dan metode *cramer* adalah beberapa teknik untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel tersebut. Penggunaan yang lebih efektif dan efisien dari kelima metode tersebut dalam penyelesaian soal tergantung sistem persamaan linear yang diberikan, situasi masalah, dan waktu yang tersedia. Sekarang mari kita ulangi kembali mempelajari metode-metode tersebut.

2.2.1 Metode Substitusi

“Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi, yang melibatkan penukaran variabel dengan variabel yang berbeda dari persamaan lain” (Dhiya, 2022).

Contoh 4 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode substitusi :

$$2x + 2y = 8 \quad \text{persamaan (1)}$$

$$3x - 6y = -6 \quad \text{persamaan (2)}$$

Penyelesaian :

→ $2x + 2y = 8$ kita sebut sebagai persamaan (1) dan $3x - 6y = -6$ kita sebut sebagai persamaan (2).

→ Persamaan (1) akan kita lakukan manipulasi aljabar berikut:

$$2x + 2y = 8$$

$$2x = 8 - 2y$$

$$x = \frac{8-2y}{2}$$

$$x = 4 - y \quad \text{persamaan (3)}$$

→ Nilai $x = 4 - y$ diatas akan kita substitusikan ke persamaan (2), untuk menemukan nilai variabel y, berikut:

$$3x - 6y = -6$$

$$3(4 - y) - 6y = -6$$

$$12 - 3y - 6y = -6$$

$$12 - 9y = -6$$

$$-9y = -6 - 12$$

$$-9y = -18$$

$$y = \frac{-18}{-9}$$

$$y = 2 \quad \text{persamaan (4)}$$

→ Nilai $y = 2$ diatas akan kita substitusikan ke persamaan (3) yaitu $x = 4 - y$, untuk menemukan nilai variabel x, berikut:

$$x = 4 - y$$

$$x = 4 - 2$$

$$x = 2$$

→ Jadi, himpunan penyelesaian contoh 2.4 ini adalah $(x, y) = (2, 2)$.

2.2.2 Metode Eliminasi

“Metode eliminasi berfokus pada bagaimana solusi variabel x ditentukan dengan mengeliminasi variabel y , dan solusi variabel y ditentukan dengan mengeliminasi variabel x ” (Rizal, 2017).

Contoh 5 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode eliminasi :

$$2x + 2y = 8 \quad \text{persamaan (1)}$$

$$3x - 6y = -6 \quad \text{persamaan (2)}$$

Penyelesaian :

→ Langkah pertama adalah mengeliminasi variabel/peubah y :

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y = 8 & | \times 3 & 6x + 6y = 24 \\ 3x - 6y = -6 & | \times 1 & 3x - 6y = -6 + \\ \hline & & 9x \quad \quad = 18 \\ & & x \quad \quad = 2 \end{array}$$

→ Langkah kedua adalah mengeliminasi variabel/peubah x :

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y = 8 & | \times 3 & 6x + 6y = 24 \\ 3x - 6y = -6 & | \times 2 & 6x - 12y = -12 - \\ \hline & & 18y \quad = 36 \\ & & y \quad = 2 \end{array}$$

→ Jadi, himpunan penyelesaian contoh 2.5 ini adalah $(x, y) = (2, 2)$.

2.2.3 Metode Gabungan (Eliminasi dan Substitusi)

“Metode eliminasi-substitusi adalah metode untuk mendapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

linear dengan menggunakan dua metode secara simultan, yaitu metode eliminasi dan metode substitusi” (Ria, 2021).

Contoh 6 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode gabungan :

$$2x + 2y = 8 \quad \text{persamaan (1)}$$

$$3x - 6y = -6 \quad \text{persamaan (2)}$$

Penyelesaian :

→ Langkah pertama adalah mengeliminasi variabel/peubah y :

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y = 8 & \left| \begin{array}{l} \times 3 \\ \times 1 \end{array} \right| & \begin{array}{l} \cancel{6x} + 6y = 24 \\ 3x - 6y = -6 + \end{array} \\ 3x - 6y = -6 & & \\ \hline 9x & & = 18 \\ x & & = 2 \end{array}$$

→ Langkah kedua adalah mensubstitusikan nilai $x = 2$ diatas ke persamaan (1) atau (2), untuk menemukan nilai variabel y, dalam hal ini kita akan mensubstitusikan ke persamaan (2), untuk mensubstitusikan ke persamaan (1) diserahkan kepada pembaca :

$$3x - 6y = -6 \quad \text{persamaan (2)}$$

$$3(2) - 6y = -6$$

$$6 - 6y = -6$$

$$-6y = -6 - 6$$

$$-6y = -12$$

$$y = \frac{-12}{-6}$$

$$y = 2$$

→ Jadi, himpunan penyelesaian contoh 2.6 ini adalah $(x, y) = (2, 2)$

2.2.4 Metode Grafik

“Metode grafik adalah metode untuk mencari perpotongan dua persamaan linear sehingga diperoleh himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel; jika dua persamaan linear tersebut saling sejajar, maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong, sedangkan jika garisnya berpotongan, maka jumlah himpunan penyelesaiannya tak terhingga” (Souhoka, 2022).

Contoh 7 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode grafik :

$$2x + 2y = 8 \quad \text{persamaan (1)}$$

$$3x - 6y = -6 \quad \text{persamaan (2)}$$

Penyelesaian :

→ Langkah pertama adalah menentukan titik potong dengan sumbu koordinat

$2x + 2y = 8$		
x	0	4
y	4	0

Garis $2x + 2y = 8$

Titik potong dengan sumbu x di (4,0)

Titik potong dengan sumbu y di (0,4)

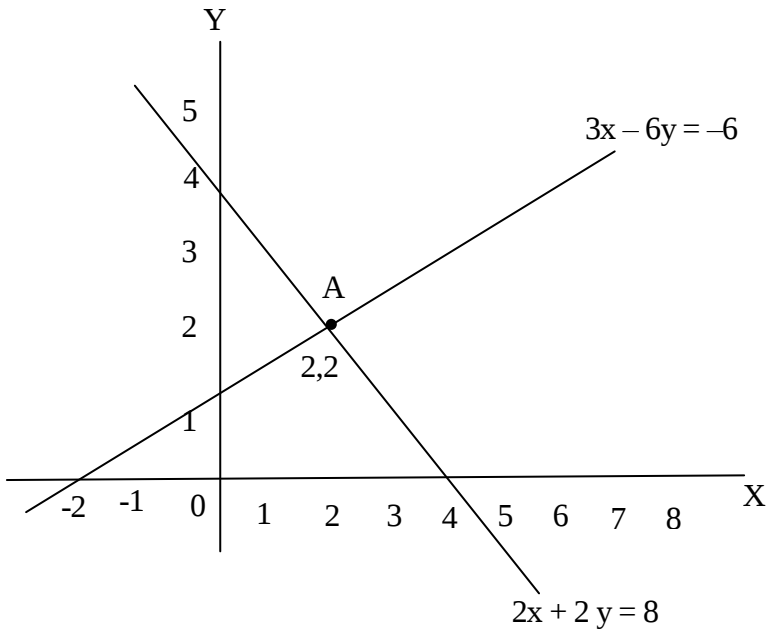
$3x - 6y = -6$		
x	0	-2
y	1	0

Garis $3x - 6y = -6$

Titik potong dengan sumbu x di (-2,0)

Titik potong dengan sumbu y di (0,1)

→ Langkah kedua buatlah grafik dari titik titik potong yang diketahui pada langkah pertama diatas:



→ Dari grafik terlihat kedua grafik berpotongan di $(2,2)$. Koordinat titik potong $(2,2)$ merupakan himpunan penyelesaian. Jadi, himpunan penyelesaian contoh 2.7 ini adalah $(x, y) = (2,2)$.

2.2.5 Metode *Cramer* (Determinan)

“Metode *Cramer* digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan m persamaan dalam n variabel, dimana dasar dari metode ini adalah matriks dan determinan, oleh karena itu, untuk menerapkan metode *Cramer*, pertama-tama kita harus memahami kedua konsep ini untuk menemukan solusi dari sistem persamaan linear” (Long, 2022).

Contoh 8 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode *Cramer* :

$$2x + 2y = 8 \quad \text{persamaan (1)}$$

$$3x - 6y = -6 \quad \text{persamaan (2)}$$

Penyelesaian :

→ Langkah pertama adalah tuliskan persamaan diatas menjadi bentuk matriks, yaitu :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

→ Tentukan matriks koefisiennya dan hitung nilai determinannya, yaitu :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \text{ dan } \text{Det}(A) = [(2) \cdot (-6)] - [(2) \cdot (3)] = -18$$

→ Kemudian hitung determinan D_x dan D_y

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} = [(8) \cdot (-6)] - [(2) \cdot (-6)] = -36$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = [(2) \cdot (-6)] - [(3) \cdot (8)] = -36$$

→ Himpunan penyelesaian untuk $x = \frac{D_x}{D_A}$ dan $y = \frac{D_y}{D_A}$

$$x = \frac{D_x}{D_A} = \frac{-36}{-18} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D_A} = \frac{-36}{-18} = 2$$

→ Jadi, himpunan penyelesaian contoh 2.8 ini adalah $(x, y) = (2, 2)$

2.3 Sistem Persamaan Linear Tiga Peubah

“Sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) adalah bentuk perluasan dari sistem persamaan linear dari dua variabel

(SPLDV), dimana sistem persamaan linear ini melibatkan tiga variabel yang berbeda” (Rada, 2022).

Menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel sangat mirip dengan sistem persamaan linear dua variabel, untuk sistem persamaan linear tiga variabel, metode substitusi dan metode eliminasi, diserahkan kepada pembaca dan akan diberikan contoh hanya dengan metode gabungan (eliminasi dan substitusi), metode *cramer* dan tambahan dengan metode eliminasi gauss.

2.3.1 Metode Gabungan (Eliminasi dan Substitusi)

“Metode eliminasi-substitusi adalah metode untuk mendapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan menggunakan dua metode secara simultan, yaitu metode eliminasi dan metode substitusi” (Ria, 2021).

Contoh 9 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode gabungan :

$$2x + 4y + 2z = 16 \quad \text{persamaan (1)}$$

$$3x + 2y + z = 10 \quad \text{persamaan (2)}$$

$$4x + 2y - 2z = 2 \quad \text{persamaan (3)}$$

Penyelesaian :

→ Langkah pertama mengeliminasi variabel z persamaan (1) dan (3):

$$\begin{array}{r} 2x + 4y + 2z = 16 \\ 4x + 2y - 2z = 2 + \\ \hline 6x + 6y = 18 \end{array}$$

Selanjutnya kita sebut persamaan (4)

- Langkah kedua mengeliminasi variabel z persamaan (2) dan (3):

$$\begin{array}{rcl}
 3x + 2y + z = 10 & \left| \begin{array}{l} x \ 2 \\ x \ 1 \end{array} \right| & \begin{array}{l} 6x + 4y + 2z = 20 \\ 4x + 2y - 2z = 2 + \end{array} \\
 4x + 2y - 2z = 2 & & \hline
 10x + 6y & & = 22
 \end{array}$$

Selanjutnya kita sebut persamaan (5)

- Langkah ketiga adalah mengeliminasi variabel y pada persamaan (4) dan (5):

$$\begin{array}{rcl}
 6x + 6y = 18 & & \\
 10x + 6y = 22 - & & \\
 \hline
 -4x & & = -4 \\
 x & & = 1
 \end{array}$$

- Langkah keempat adalah mensubstitusikan nilai $x = 1$ ke persamaan (4):

$$\begin{array}{rcl}
 6x + 6y & = & 18 & \text{persamaan (4)} \\
 6(1) + 6y & = & 18 \\
 6 + 6y & = & 18 \\
 6y & = & 18 - 6 \\
 6y & = & 12 \\
 y & = & \frac{12}{6} \\
 y & = & 2
 \end{array}$$

- Langkah terakhir adalah mensubstitusikan nilai $x = 1$ dan $y = 2$ ke persamaan (1):

$$\begin{array}{rcl}
 2x + 4y + 2z & = & 16 & \text{persamaan (1)} \\
 2(1) + 4(2) + 2z & = & 16 \\
 2 + 8 + 2z & = & 16 \\
 10 + 2z & = & 16 \\
 2z & = & 16 - 10 \\
 2z & = & 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} z & = & \frac{6}{2} \\ z & = & 3 \end{array}$$

→ Jadi, himpunan penyelesaian contoh 2.9 ini adalah $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

2.3.2 Metode *Cramer* (Determinan)

“Metode *Cramer* digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan m persamaan dalam n variabel, dimana dasar dari metode ini adalah matriks dan determinan, oleh karena itu, untuk menerapkan metode *Cramer*, pertama-tama kita harus memahami kedua konsep ini untuk menemukan solusi dari sistem persamaan linear” (Long, 2022).

Contoh 10 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode *cramer* :

$$2x + 4y + 2z = 16 \quad \text{persamaan (1)}$$

$$3x + 2y + z = 10 \quad \text{persamaan (2)}$$

$$4x + 2y - 2z = 2 \quad \text{persamaan (3)}$$

Penyelesaian :

→ Langkah pertama adalah tuliskan persamaan diatas menjadi bentuk matriks, yaitu :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ Tentukan matriks koefisien nya dan hitung nilai determinannya, yaitu : $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, dengan

menggunakan metode ekspansi kofaktor (**catatan** : bagi pembaca yang belum paham tentang ekspansi kofaktor, silahkan dipelajari terlebih dahulu, agar lebih paham), maka determinan A akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
 |D_A| &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2(-4 - 2) - 3(-8 - 4) + 4(4 - 4) \\
 &= 2(-6) - 3(-12) + 4(0) \\
 &= -12 + 36 + 0
 \end{aligned}$$

$$|D_A| = 24$$

→ Kemudian hitung determinan D_x

$$\begin{aligned}
 |D_x| &= \begin{vmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 10 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= 16 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 16(-4 - 2) - 10(-8 - 4) + 4(4 - 4) \\
 &= 16(-6) - 10(-12) + 4(0) \\
 &= -96 + 120 + 0
 \end{aligned}$$

$$|D_x| = 24$$

→ Kemudian hitung determinan D_y

$$\begin{aligned}
 |D_y| &= \begin{vmatrix} 2 & 16 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2(-20 - 2) - 3(-32 - 4) + 4(16 - 20) \\
 &= 2(-22) - 3(-36) + 4(-4) \\
 &= -44 + 108 - 16
 \end{aligned}$$

$$|D_y| = 48$$

→ Kemudian hitung determinan D_z

$$\begin{aligned}
 |D_z| &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \\
 &= 2(4 - 20) - 3(8 - 32) + 4(40 - 32) \\
 &= 2(-16) - 3(-24) + 4(8) \\
 &= -32 + 72 + 32 \\
 |D_z| &= 72
 \end{aligned}$$

→ Himpunan penyelesaian untuk $x = \frac{D_x}{D_A}$, $y = \frac{D_y}{D_A}$ dan $z = \frac{D_z}{D_A}$

$$x = \frac{D_x}{D_A} = \frac{24}{24} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D_A} = \frac{48}{24} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D_A} = \frac{72}{24} = 3$$

→ Jadi, himpunan penyelesaian contoh 2.10 ini adalah $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

2.3.3 Metode Eliminasi Gauss

Eliminasi Gaussian adalah metode yang dikembangkan dari eliminasi yang mengeliminasi atau mengurangi jumlah variabel sehingga nilai-nilai variabel bebas dapat diperoleh dan sistem persamaan linear diubah terlebih dahulu menjadi **matriks augmentasi** (*augmented matrix form*).

Contoh 11 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode eliminasi gauss:

$$2x + 4y + 2z = 16 \quad \text{persamaan (1)}$$

$$3x + 2y + z = 10 \quad \text{persamaan (2)}$$

$$4x + 2y - 2z = 2 \quad \text{persamaan (3)}$$

Penyelesaian :

→ Langkah pertama adalah tuliskan persamaan diatas menjadi bentuk matriks augmentasi nya, yaitu :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right]$$

→ Selanjutnya adalah dengan melakukan operasi baris elementer, yaitu : (1) menukar letak dua baris; (2) mengalikan suatu baris dengan skalar tak nol; dan (3) menambah atau mengurangi suatu baris dengan kelipatan baris yang lain. Tujuannya ialah agar diperoleh matriks lebih sederhana, yaitu berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right]$$

→ Baris pertama lakukan OBE yaitu: kalikan baris pertama dengan $\frac{1}{2}$, atau dapat kita tulis lebih ringkas $R_1 = \frac{1}{2} \cdot R_1$ sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right]$$

→ Baris kedua lakukan OBE yaitu: baris kedua dikurangi tiga kali baris pertama dan baris ketiga lakukan OBE yaitu : baris ketiga dikurangi empat kali baris pertama atau dapat kita tulis lebih ringkas

$R_2 = R_2 - 3 \cdot R_1$ dan $R_3 = R_3 - 4 \cdot R_1$, sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & -2 & -14 \\ 0 & -6 & -6 & -30 \end{array} \right]$$

→ Selanjutnya, baris ketiga lakukan kembali OBE, yaitu: baris ketiga dikurangi $\frac{3}{2}$ kali baris kedua, atau dapat kita tulis lebih ringkas $R_3 = R_3 - \frac{3}{2} \cdot R_2$ sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{disebut bentuk eselon baris}}$$

→ Dari bentuk diatas, kita peroleh bahwa bentuk matriks sudah menjadi lebih sederhana dan pada baris ketiga, diperoleh:

nilai $3z = 9$, sehingga $z = 3$.

→ Nilai $z = 3$, kemudian disubstitusikan ke baris kedua, yaitu:

$$-4y - 2z = -14$$

$$-4y - 2(3) = -14$$

$$-4y - 6 = -14$$

$$-4y = -14 + 6$$

$$-4y = -8$$

$$y = \frac{-8}{-4}$$

$$y = 2$$

→ Nilai $z = 3$ dan $y = 2$ substitusikan ke baris pertama, yaitu:

$$x + 2y + z = 8$$

$$x + 2(2) + 3 = 8$$

$$x + 4 + 3 = 8$$

$$x + 7 = 8$$

$$x = 8 - 7$$

$$x = 1$$

→ Jadi, himpunan penyelesaian contoh 2.11 ini adalah $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

LATIHAN

1. Tentukan nilai k agar sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} kx - y = -\frac{1}{3} \\ 3y = -6x + 1 \end{cases}$$

- Memiliki satu solusi
 - Memiliki solusi tak hingga banyak
 - Tidak memiliki solusi
2. Jika suatu fungsi $f(x) = ax + b$, $f(2) = 8$, $f(3) = 12$
- Hitunglah himpunan penyelesaian a dan b dengan menggunakan metode substitusi, metode eliminasi, metode gabungan dan metode grafik
 - Hitunglah nilai $a^2 - b^2$

3. Diketahui sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$3x - 7y + 4z = 10$$

$$-x - y - 2z = -8$$

$$-2x - 4y + 6z = 2$$

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear diatas dengan menggunakan:

- Metode *Cramer*
- Metode Eliminasi Gauss

DAFTAR PUSTAKA

- Dhiya, D. 2022. *Persamaan Linear Dua Variabel: Metode Eliminasi & Substitusi*, zenius.net. Tersedia pada: [https://www.zenius.net/blog/persamaan-linear-2-substitusi-eliminasi#:~:text=Metode substitusi merupakan salah satu,dengan variabel dari persamaan lain. \(Diakses: 6 Desember 2022\).](https://www.zenius.net/blog/persamaan-linear-2-substitusi-eliminasi#:~:text=Metode substitusi merupakan salah satu,dengan variabel dari persamaan lain. (Diakses: 6 Desember 2022).)
- Gozali, S. M. 2010. "Sistem Persamaan Linear dan Matriks," in *Pengantar Aljabar Linear*. Bandung: UPI Bandung, hal. 200.
- Long, T. L. 2022. *Aturan Cramer, Contoh Soal dan Pembahasan*, www.jagostat.com. Tersedia pada: <https://jagostat.com/aljabar-linear/aturan-cramer> (Diakses: 6 Desember 2022).
- Rada. 2022. *Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)*, <https://dosenpintar.com>. Tersedia pada: <https://dosenpintar.com/spltv/> (Diakses: 6 Desember 2022).
- Ria, G. T. 2021. *Gabungan Eliminasi dan Substitusi pada SPLDV*, <https://ayoguruberbagi.kemdikbud.go.id/>. Tersedia pada: <https://ayoguruberbagi.kemdikbud.go.id/rpp/gabungan-eliminasi-dan-substitusi-pada-spldv/> (Diakses: 6 Desember 2022).
- Rizal, F. K. 2017. *Sistem Persamaan Linear*, StudioBelajar.com. Tersedia pada: <https://www.studiobelajar.com/sistem-persamaan-linear/> (Diakses: 6 Desember 2022).
- Souhoka, V. 2022. *Metode Grafik SPLDV*, <https://www.geogebra.org/>. Tersedia pada: <https://www.geogebra.org/m/brmw5jyq> (Diakses: 6 Desember 2022).

Wikipedia. 2021. *Sistem Persamaan Linear*,
<https://id.wikipedia.org/>. Tersedia pada:
https://id.wikipedia.org/wiki/Sistem_persamaan_linear
(Diakses: 6 Desember 2022).

BAB 3

PERSAMAAN KUADRAT, FUNGSI KUADRAT DAN GRAFIKNYA

Oleh Nanang

3.1 Persamaan Kuadrat

3.1.1 Pengertian

1. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$

x sebagai peubah (variabel) dengan pangkat terbesar 2 pada suku ax^2 dan pangkat terkecil nol pada suku c (konstanta / suku tetap).

Pertanyaan:

Manakah yang berikut ini termasuk ke dalam bentuk persamaan kuadrat,

a. $5x^2 - 4x = 12$

b. $10y - 9 = y^2$

c. $\sqrt{t} + 1 = t$

d. $\frac{1}{z+1} = z - 1$

e. $y = 9 + 3x - 2x^2$

2. Akar-akar Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Penyelesaian akhir dari persamaan kuadrat disebut **akar-akar penyelesaian**, dan kumpulan dari akar penyelesaian disebut **himpunan penyelesaian** (HP). Akar penyelesaian

persamaan kuadrat umumnya diberi lambang yang sama dengan variabel persamaannya dan diberi indeks, misalnya x_1 dan x_2 (akar-akar persamaan kuadrat ini dapat juga diwakili oleh simbol seperti α , β , dan simbol lain yang didefinisikan). Misalnya: akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 8 = 0$ adalah α dan β .

3. Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat

a. Dengan cara pemfaktoran

Contoh:

Mencari nilai x dari persamaan kuadrat: $x^2 - 3x - 4 = 0$ dengan cara pemfaktoran adalah sebagai berikut.

- 1) Faktorkan menjadi bentuk $(x + \dots)(x + \dots) = 0$. Titik-titik yang harus diisi adalah: cari dua bilangan jika dikalikan hasilnya -4 , sedangkan jika dijumlahkan hasilnya -3 . Dua bilangan tersebut adalah $+1$ dan -4 .
- 2) Substitusikan bilangan $+1$ dan -4 kedalam faktor: $(x + \dots)(x + \dots) = 0$, sehingga diperoleh: $(x + 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ atau $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ atau $x_2 = 4$. Jadi, HP = $\{-1, 4\}$

Contoh:

Mencari nilai x dari persamaan kuadrat: $3x^2 - x - 2 = 0$ dengan cara pemfaktoran adalah sebagai berikut.

- 1) Kalikan antara koefisien pada suku pertama dan konstanta ($3 \times (-2)$) = -6 dan $-6 = -3 \times 2$ ternyata bila: -3 dan 2 dijumlahkan hasilnya -1 (nilai koefisien suku kedua).
- 2) Ubah suku atau koefisien x pada persamaan asal sehingga $3x^2 + (-3+2)x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 1) + 2(x - 1) = 0$ dengan menggunakan penyederhanaan bentuk distributif diperoleh: $(3x +$

$$2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \text{ atau } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{atau } x_2 = 1. \text{ Jadi, HP} = \left\{ -\frac{2}{3}, 1 \right\}.$$

b. Dengan cara rumus kuadratis (Rumus ABC)

Misalkan x_1 dan x_2 akar-akar dari persamaan kuadrat: ax^2

$$+ bx + c = 0 \text{ dirumuskan oleh: } x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh:

Mencari nilai x dari persamaan kuadrat: $x^2 - 3x - 4 = 0$ dengan cara rumus kuadratis adalah sebagai berikut.

Dari : $x^2 - 3x - 4 = 0$ diperoleh: $a = 1, b = -3, c = -4$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3+5}{2} =$$

4

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

Pertanyaan:

- 1) Bandingkan, apakah dengan menggunakan cara (1) dan cara (2) nilai akar-akar pada contoh 1 dan contoh 2 berbeda?
- 2) Dengan memperhatikan rumus kuadratis tersebut, bagaimana-kah menurutmu agar pada persamaan kuadrat dapat diperoleh akar-akar yang nyata (real)?

4. Penggunaan Diskriminan dalam Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Pada rumus kuadratis: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ agar persamaan kuadrat memiliki akar-akar real maka syarat yang harus dipenuhi adalah $a \neq 0$ dan $b^2 - 4ac \geq 0$. $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan (D) atau pembeda jenis akar.

Perhatikan contoh soal berikut dan hitunglah nilai diskriminannya:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a. $x^2 - 3x - 4 = 0$ | c. $x^2 - 2x + 4 = 0$ |
| b. $3x^2 - x - 2 = 0$ | d. $3x^2 - x + 2 = 0$ |

Jawab:

- a. $a = 1; b = -3; c = -4; D = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25$
- b. $a = 3; b = -1; c = -2; D = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25$
- c. $a = 1; b = -2; c = 4; D = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12$
- d. $a = 3; b = -1; c = 2; D = (-1)^2 - 4(3)(2) = 1 - 24 = -23$

Pertanyaan:

Dari contoh soal tersebut:

- a. Manakah yang memiliki nilai $D = 0$, $D > 0$, dan $D < 0$?
- b. Untuk $D > 0$ terdapat dua jenis nilai: (1) merupakan bilangan kuadrat dan (2) bukan merupakan bilangan kuadrat. Menurutmu, manakah jenis diskriminan yang dapat mempermudah pencarian akar melalui pemfaktoran?

3.1.2 Jenis-Jenis Akar Persamaan Kuadrat

Jenis akar-akar persamaan kuadrat tergantung pada nilai $b^2 - 4ac$ yang disebut diskriminan (D). Beberapa jenis akar persamaan kuadrat berdasarkan nilai D .

1. Jika $D > 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar real yang berbeda.

2. Jika $D = 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar real yang sama atau kembar.
3. Jika $D < 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar yang tidak real (imajiner).

3.1.3 Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Misalkan x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ terdefinisi pada himpunan bilangan real. Akar-akar persamaan kuadrat yang diperoleh dari rumus kuadratis adalah:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ dengan:}$$

$$D = b^2 - 4ac, \text{ sehingga } x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Pertanyaan:

Pada akar-akar persamaan kuadrat haruskah nilai $D \geq 0$? Apa alasannya? Apakah nilai $D < 0$ menyebabkan kedua akar tidak dapat dijumlahkan atau dikalikan? Jelaskan!

1. Jumlah akar-akar persamaan kuadrat

Menjumlahkan kedua akar persamaan kuadrat

- a. Jumlahkan kedua akar,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

- b. Sederhanakan hasil penjumlahan,

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

- c. Kesimpulan:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ rumus jumlah dua buah akar persamaan kuadrat}$$

2. Jumlah akar-akar persamaan kuadrat

Mengalikan kedua akar persamaan kuadrat,

a. Kalikan kedua akar,

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right) = \frac{-b(-b) - \sqrt{D}(\sqrt{D})}{2a(2a)} \\&= \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}\end{aligned}$$

b. Sederhanakan hasil perkalian

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

c. Kesimpulan:

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ merupakan rumus hasil kali dua buah akar persamaan kuadrat.

3.1.4 Menyusun Persamaan Kuadrat

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 maka persamaan kuadrat dapat ditentukan dengan bentuk $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

Contoh 1:

Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya -2 dan 3?

Jawab:

Misalkan $x_1 = -2$ dan $x_2 = 3$, sehingga $x^2 - (-2 + 3)x + (-2)(3) = 0$.

Jadi persamaan kuadrat yang akar-akarnya -2 dan 3 adalah $x^2 - x - 6 = 0$

Contoh 2:

Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya dua kali dari akar-akar persamaan $x^2 - 4x + 5 = 0$?

Jawab:

1. Diketahui: $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$
2. Misalkan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 5 = 0$ adalah α dan β .
3. Tentukan nilai $\alpha + \beta$ dan $\alpha \cdot \beta$
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5$$
4. Misalkan akar-akar persamaan kuadrat baru adalah: $x_1 = 2\alpha$ dan $x_2 = 2\beta$
5. Menentukan nilai dari $x_1 + x_2$ dan $x_1 \cdot x_2$
$$x_1 + x_2 = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2(4) = 8$$
$$x_1 \cdot x_2 = 2\alpha \cdot 2\beta = 4\alpha\beta = 4(5) = 20$$
6. Menentukan persamaan kuadrat baru: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$
$$x^2 - 8x + 20 = 0$$

3.1.5 Latihan 1:

1. Dengan menggunakan cara pemfaktoran carilah akar-akar real dari persamaan kuadrat:
 - a. $x^2 + 6x + 5 = 0$
 - b. $3x(x + 2) - 2(x + 2) = 0$
 - c. $12 - y = y^2$
 - d. $\frac{1}{2}t^2 - 2 = 0$
2. Gunakan rumus ABC untuk menentukan penyelesaian dari persamaan kuadrat berikut.
 - a. $x^2 - 10x = -16$
 - b. $p^2 + \sqrt{2}p - 4 = 0$
 - c. $2y^2 + 5ay - 3a^2 = 0$
 - d. $1 - 4z + 4z^2 = 0$

3. Tentukanlah akar-akar penyelesaian dari persamaan berikut:
 - a. $4x^2 + 3x - 22 = 0$
 - b. $\frac{2}{x-1} = x - 2$
 - c. $16(y - 4) = y^2$
 - d. $\sqrt{x} = x - 6$
 - e. $3z(z + 1) - 18 = 0$
 - f. $a^2x^2 - b^2 = 0$
 - g. $9p^2 + 12p + 4 = 0$
 - h. $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$
 - i. $8 - \frac{1}{2}q^2 = 0$
 - j. $(2x - 3)^2 - (2x - 3) - 2 = 0$
4. Salah satu akar dari persamaan kuadrat $(a + 2)x^2 + ax - 26 = 0$ adalah 2. Tentukanlah nilai a yang mungkin!
5. Dengan menggunakan rumus kuadratis dan $x_1 < x_2$, tentukanlah rumus dari $x_1 - x_2$!
6. Diketahui a dan b adalah akar-akar dari $x^2 - 4x + 6 = 0$, tentukanlah nilai:

a. $a + b$	c. $a^2 + b^2$
b. $a.b$	d. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
7. Tentukanlah persamaan kuadrat jika diketahui akar-akarnya:

a. 4 dan -4	c. 0 dan 5
b. $-\frac{1}{2}$ dan 2	d. $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{8}$
8. Jika α dan β akar-akar dari $2x^2 - 6x + 4 = 0$, tentukanlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $(\alpha + 3)$ dan $(\beta + 3)$!

9. Dari persamaan-persamaan kuadrat berikut, tentukanlah jumlah dan hasil kali akar-akarnya.
- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a. $x^2 - 7x + 6 = 0$ | c. $2x(x - 10) = 0$ |
| b. $4x^2 - 9 = 0$ | d. $(3x - 2)(x - 3) = 0$ |
10. Jika p dan q adalah akar-akar dari $2x^2 - 3x + 6 = 0$, maka tentukanlah:
- | | |
|--------------------------------|---------------------|
| a. $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ | c. $p^3 + q^3$ |
| b. $p^2q + pq^2$ | d. $(p - 2)(q - 2)$ |
11. Diketahui jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - ax + 2b = 0$ adalah 6 dan -4 . Tentukanlah $a + b$.
12. Diketahui persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai akar-akar setengah dari akar-akar persamaan $x^2 - 4x - 12 = 0$. Tentukanlah nilai $a^2 + b^2 + c^2$.
13. Jika α dan β akar-akar dari persamaan $x^2 + 2x - 8 = 0$, maka tentukanlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ dan $(1 - \alpha)(1 - \beta)$!

3.2 Fungsi Kuadrat

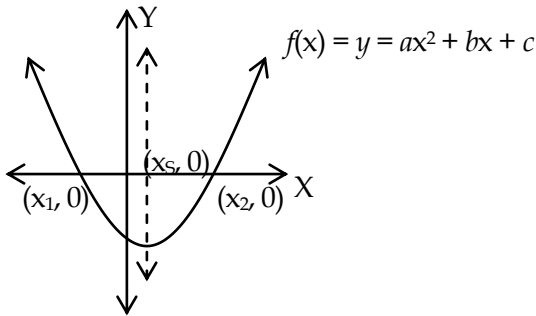
3.2.1 Pengertian

1. Bentuk Umum Fungsi Kuadrat

$f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$ merupakan fungsi berderajat dua, sedangkan $f(x) = ax^2 + bx + c$ disebut *persamaan fungsi kuadrat*.

2. Sumbu Simetri dan Titik Balik Fungsi Kuadrat

Perhatikan sketsa grafik fungsi kuadrat berikut:



- a. Jika $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ dan $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ maka $x_s = -\frac{b}{2a}$
- b. Nilai balik fungsi adalah $Y_{\min} = -\frac{D}{4a}$, untuk $a > 0$
- c. Cara menentukan koordinat titik baliknya, yaitu:
 $(x_s, Y_{\min}) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

Langkah Kerja :

- 1) Menentukan persamaan sumbu simetri.
- 2) Tentukan bahwa $x_s - x_1 = x_2 - x_s$ (sifat sumbu simetri).
- 3) Lakukan langkah selanjutnya dengan proses aljabar kedua buah ruas ditambah dengan $x_s + x_1$
- 4) Langkah terakhir kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$ dan gantilah nilai-nilai x_1 dan x_2 oleh: $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ dan $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$
- 5) Menentukan nilai balik fungsi kuadrat.
- 6) Tentukan nilai pada sumbu simetri.
- 7) Substitusikan nilai sumbu simetri pada persamaan fungsi $y = ax^2 + bx + c$.
- 8) Lakukan penyederhanaan bentuk persamaannya.

- 9) Koordinat titik balik merupakan pasangan antara x_s dan $Y_{\min}$ atau $(x_s, Y_{\min})$.

Contoh:

Tentukan persamaan sumbu simetri dan koordinat titik balik dari fungsi kuadrat: $f(x) = x^2 - 3x - 4$

Jawab:

Misalkan $f(x) = y = x^2 - 4x - 5$; $a = 1$, $b = -4$, $c = -5$

Persamaan sumbu simetri: $x_s = -\frac{-4}{2(1)} = \frac{-4}{2} = -2$

Nilai balik fungsi $y = -\frac{(-4)^2 - 4(1)(-5)}{4(1)} = \frac{16+20}{4} = 9$

Jadi, koodinat titik baliknya: $(-2, 9)$.

3.2.2 Karakteristik Grafik Fungsi Kuadrat

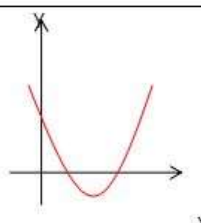
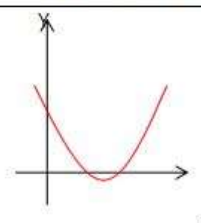
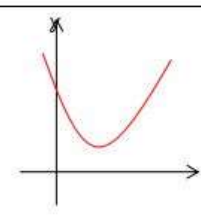
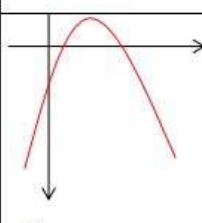
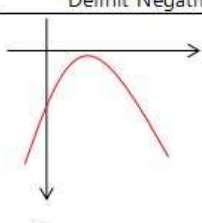
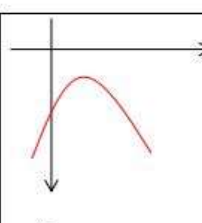
Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$. Dari bentuk aljabar tersebut, grafik fungsi kuadrat dapat diilustrasikan sebagai bentuk lintasan lengkung atau parabola dengan karakteristik sebagai berikut.

1. Jika $a > 0$, maka parabola terbuka ke atas.
2. Jika $a < 0$, maka parabola terbuka ke bawah.
3. Jika $D < 0$, maka parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu x .
4. Jika $D = 0$, maka parabola menyinggung sumbu x .
5. Jika $D > 0$, maka parabola memotong sumbu x di dua titik.

Berdasarkan keadaan kurva fungsi kuadrat tidak memotong atau menyinggung sumbu X maka fungsi kuadrat memiliki dua buah batas tertentu (definit), yaitu:

1. Definit positif jika kurva seluruhnya berada di atas sumbu X
2. Definit negatif jika kurva seluruhnya berada di bawah sumbu X

3. Beberapa kedudukan grafik fungsi kuadrat adalah sebagai berikut.

Definit Positif		
 $D > 0$, $a > 0$, memotong sumbu x di dua titik, terbuka ke atas	 $D = 0$, $a > 0$, menyinggung sumbu x di satu titik, terbuka ke atas	 $D < 0$, $a > 0$, tidak mengenai sumbu x, terbuka ke atas
Definit Negatif		
 $D > 0$, $a < 0$, memotong sumbu x di dua titik, terbuka ke bawah	 $D = 0$, $a < 0$, menyinggung sumbu x di satu titik, terbuka ke bawah	 $D > 0$, $a < 0$, tidak mengenai sumbu x, terbuka ke bawah

Pertanyaan:

1. Apakah perbedaan dari persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat?
2. Dapatkah kamu menuliskan/menyebutkan syarat-syarat agar fungsi kuadrat memiliki definit positif atau definit negatif?
3. Dapatkah kamu menuliskan rumus persamaan fungsi kuadrat yang lain, bila diketahui:
 - a. Melalui titik balik dan sebuah titik sembarang
 - b. Melalui titik potong pada sumbu X dan sebuah titik sembarang

3.2.3 Latihan 2:

1. Sebutkan koordinat titik potong pada sumbu-sumbu koordinat, persamaan sumbu simetri, jenis fungsi, dan koordinat titik balik dari:

a. $y = x^2 - 9$

c. $y = (x + 3)(x - 7)$

b. $y = 2x^2 - 8x$

d. $y = x^2 + 4x + 5$

2. Manakah dari persamaan-persamaan fungsi berikut yang memotong, menyinggung, dan tidak memotong/menyinggung sumbu X:

a. $y = 4 - 4x - 3x^2$

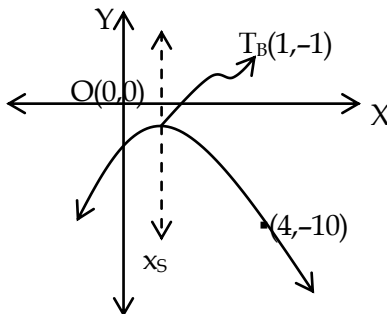
c. $y = (x + 1)^2 - 16$

b. $y = 4x^2 - 12x + 9$

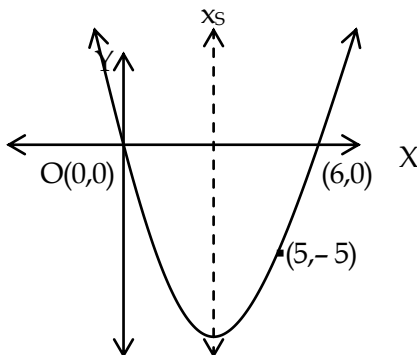
d. $y = x^2 + 4$

3. Tentukan persamaan grafik fungsi untuk gambar berikut:

a.



b.



4. Sepotong kawat dengan panjang 10 m akan dibuat menjadi sebuah bangun segi empat. Tentukan ukuran panjang dan lebar agar diperoleh luas bangun sebesar-besarnya!
5. Diketahui persamaan fungsi kuadrat $y = 15 - 2x - x^2$
Tentukanlah:
 - a) Titik potong kurva pada masing-masing sumbu koordinat
 - b) Persamaan sumbu simetri
 - c) Koordinat titik balik fungsi
 - d) Pengganti x yang mungkin jika nilai fungsi sama dengan 12
6. Tentukan persamaan kuadrat yang memiliki persamaan sumbu simetri $x_s = 3$ dan nilai fungsi minimum sama dengan 5.
7. Tentukan persamaan kuadrat dalam x jika diketahui $f(-1) = f(7) = 15$ dan nilai minimum fungsi sama dengan -1 .
8. Buatlah sketsa grafik fungsi kuadrat dari $y = x^2 - 6x - 7$ pada kertas millimeter blok.
9. Jika α dan β merupakan akar-akar dari persamaan $x^2 - px + 2p = 0$, tentukanlah nilai minimum dari $\alpha^2 + \beta^2$.

3.2.4 Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat

Perhatikan contoh penguraian persamaan kuadrat berikut untuk menentukan akar-akar persamaannya.

$$\text{Misalnya } x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 + \left(\left(-\frac{4}{2}\right)^2\right) + 12 = \left(\left(-\frac{4}{2}\right)^2\right) + 12$$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4 + 12 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x - 2 + 2 = \pm\sqrt{16} + 2 \Leftrightarrow x = \pm 4 + 2$ sehingga diperoleh dua buah akar dalam x , yaitu: $x_1 = -2$ dan $x_2 = 6$. Teknik penguraian persamaan kuadrat seperti contoh diatas disebut *melengkapkan kuadrat*.

Pertanyaan:

Bagaimanakah mengubah bentuk persamaan kuadrat ke dalam bentuk melengkapkan kuadrat jika koefisien pada variabel pangkat dua lebih dari 1?

Jawabannya:

1. Misalkan persamaan kuadrat dalam bentuk umum: $ax^2 + bx + c = 0$

2. Ubah bentuk persamaan menjadi: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

3. Tambahkan kedua ruas dengan suku-suku: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{c}{a}\right)$

4. Sederhanakan bentuk:

- a. Pada ruas kiri ubah menjadi pangkat dua dari dua buah suku;

- b. Pada ruas kanan diubah menjadi: $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

- c. Jadi persamaan kuadrat akhir adalah:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (\text{bentuk terakhir inilah yang melahirkan rumus kuadratis/rumus abc})$$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat $3x^2 - 2x - 8 = 0$

Jawab:

$$\left(x + \frac{-2}{2(3)}\right)^2 = \frac{(-2)^2 - 4(3)(-8)}{4(3)^2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4 + 96}{36}$$
$$x - \frac{1}{3} = \pm \sqrt{\frac{100}{36}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{10}{6} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \pm \frac{10}{6} = \frac{2}{6} \pm \frac{10}{6}$$

sehingga $x_1 = \frac{12}{6} = 2$ dan $x_2 = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$, jadi HP = $\{-\frac{4}{3}, 2\}$

3.2.5 Bentuk Fungsi Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat

Telah diketahui bahwa persamaan fungsi kuadrat dirumuskan oleh:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$ atau $y = ax^2 + bx + c$.

Pertanyaan:

- Bagaimanakah persamaan fungsi kuadrat dapat diubah ke dalam bentuk melengkapkan kuadrat?
- Bagaimanakah menentukan persamaan sumbu simetri, koordinat titik balik, dan definit kurva pada grafik fungsi kuadrat dihubungkan dengan bentuk melengkapkan kuadrat?

Jawaban:

Pada ruas kanan yang memuat suku-suku $ax^2 + bx + c$ diubah bentuknya seperti berikut:

- $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$
- $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \frac{c}{a}\right)$

- c. $\alpha(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 + (-\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}) = \alpha(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2) + \alpha(-\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}$
- d. $\alpha(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2) + \alpha(-\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = \alpha(x + \frac{b}{2a})^2 + \alpha(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a})$
- e. $\alpha(x + \frac{b}{2a})^2 + \alpha(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = \alpha(x + \frac{b}{2a})^2 + (-\frac{b^2}{4a} + c)$
- f. $\alpha(x + \frac{b}{2a})^2 + (-\frac{b^2}{4a} + c) = \alpha(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$
- g. Jadi, persamaan fungsi kuadrat berubah bentuk menjadi:
- h. $f(x) = y = \alpha(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{D}{-4a}$

Contoh:

Diketahui persamaan kurva sebuah fungsi adalah $y = -4 + 5x - 2x^2$

1. Tentukan persamaan sumbu simetri dari fungsi tersebut
2. Tentukan koordinat titik puncak
3. Periksa apakah kurva bersifat definit positif atau negatif

Jawab:

Diketahui: $a = -2$, $b = 5$, $c = -4$

1. Persamaan sumbu simetri $x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2(-2)} = \frac{5}{4}$
2. Nilai fungsi pada titik balik $y_{ekstrim} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} \Leftrightarrow y_{ekstrim} = \frac{(5)^2 - 4(-2)(-4)}{-4(-2)} \Leftrightarrow$

Jadi, koordinat titik balik $(x_e, y_e) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{-4a}\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{-7}{8}\right)$

3. Kurva bersifat definit positif (kurva maksimum) jika memiliki ciri-ciri: koefisien variabel pangkat tertinggi ($a > 0$) dan diskriminan ($D < 0$), sedangkan definit negatif (kurva minimum) jika $a < 0$ dan $D < 0$. Karena $a = -2 < 0$ dan $D = 5^2 - 4(-2)(-4) < 0$, maka fungsi tersebut bersifat definit negatif.

Keterangan:

1. Kurva selalu berada di atas sumbu X dapat disebut definit positif: ($a > 0, D < 0$).
2. Kurva selalu berada di atas sumbu X dapat disebut definit negatif: ($a < 0, D < 0$)

3.2.6 Persamaan Fungsi Kuadrat yang Kurvanya Melalui Tiga Titik Tak Segaris

Dari persamaan fungsi kuadrat $f(x) = y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ dapat diubah bentuk persamaannya menjadi:

1. $f(x) = y = \alpha (x - x_1)(x - x_2) \dots$ rumus ini digunakan bila kurva melalui titik potong pada sumbu X dan sebuah titik sembarang.
2. $f(x) = y = \alpha (x + x_e)^2 + y_e \dots$ rumus ini digunakan bila kurva melalui titik balik dan sebuah titik sembarang

Pertanyaan:

Bagaimanakah menyelesaikan persoalan; menentukan persamaan fungsi kuadrat yang melalui tiga buah titik sembarang tak segaris?

Jawabannya:

1. Tentukan persamaan bentuk umum fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$.
2. Substitusikan koordinat ketiga titik yang diketahui pada persamaan fungsi kuadrat.

3. Gunakan metode eliminasi/substitusi/eliminasi-substitusi/ determinasi/matriks (metode bebas memilih pada bagian yang telah dipelajari) untuk menyelesaikan persoalan linear dengan tiga peubah/variabel a , b , dan c .
4. Substitusikan nilai a , b , dan c pada persamaan fungsi asal $y = ax^2 + bx + c$

Contoh:

Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang melalui tiga buah titik: A(-1, 6), B(0, 3), dan C(2, 3)

Jawab:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$(-1, 6) \Rightarrow 6 = a(-1)^2 + b(-1) + c \Leftrightarrow a - b + c = 6 \quad (\text{pers.1})$$

$$(0, 3) \Rightarrow 3 = a(0)^2 + b(0) + c \Leftrightarrow c = 3 \quad (\text{pers.2})$$

$$(2, 3) \Rightarrow 3 = a(2)^2 + b(2) + c \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 3 \quad (\text{pers.3})$$

Dengan menggunakan metode eliminasi-substitusi diperoleh:

$$a = \dots, b = \dots, \text{ dan } c = \dots$$

3.2.7 Latihan 3:

1. Ubahlah bentuk persamaan dan fungsi kuadrat berikut dalam bentuk melengkapi kuadrat.
 - a. $x^2 - 4x - 32 = 0$
 - b. $y = 2x^2 - 8x + 6$
2. Dengan melengkapi kuadrat carilah himpunan penyelesaian dari persamaan-persamaan berikut:
 - a. $4x^2 - x - 5 = 0$
 - b. $x(6 - x) = -16$
3. Tentukanlah persamaan sumbu simetri, nilai balik fungsi, dan koordinat titik balik dari fungsi:

- a. $y = 2 - 3(x - 1)^2$
 - b. $y = 4x^2 - 12x + 9$
4. Tentukanlah persamaan-persamaan fungsi kuadrat jika diketahui melalui tiga buah titik sembarang.
- a. P(5,0), Q(6,12), dan R(-1,12)
 - b. S(-3,-15), T(1,9), dan U(0,12)
5. Ubahlah bentuk persamaan dan fungsi kuadrat berikut dalam bentuk melengkapi kuadrat.
- a. $x^2 - 2x - 63 = 0$
 - b. $y = 2x^2 + 6x - 8$
6. Dengan melengkapi kuadrat carilah himpunan penyelesaian dari persamaan-persamaan berikut:
- a. $4x^2 - x - 18 = 0$
 - b. $x(8 - x) = 15$
7. Tentukanlah persamaan sumbu simetri, nilai balik fungsi, dan koordinat titik balik dari fungsi:
- a. $y = 4 - 3(x + 1)^2$
 - b. $y = 9x^2 - 12x + 4$
8. Tentukanlah persamaan-persamaan fungsi kuadrat jika diketahui melalui tiga buah titik sembarang.
- a. P(1,-12), Q(3, -8), dan R(5,12)
 - b. S(-2,1), T(1,4), dan U(3,-4)

3.3 Aplikasi Fungsi Kuadrat

3.3.1 Pengertian

Persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat mempunyai peranan penting terhadap ilmu-ilmu lain misalnya pada ilmu fisika dengan **Teori Gerak Peluru** (mekanika) dan ilmu ekonomi dengan **Teori Produksi** (ekonometri).

Pertanyaan:

1. Dua bilangan jika ditambahkan sama dengan x tetapi jika dikalikan sama dengan y . Buatlah model matematika dari informasi tersebut!
2. Sebuah peluru ditembakkan dengan kecepatan awal v_0 m/det, dengan sudut elevasi α dari atas tanah yang mendatar. Jika gesekan antara peluru dan udara diabaikan sedangkan percepatan gravitasi g m/det², maka berapakah ketinggian maksimum peluru dari atas tanah, dan berapa lama waktu yang dibutuhkan saat dilepas sampai jatuh ke tanah?
3. Di atas sebidang tanah akan dibangun sebuah gudang yang dapat menampung barang sebanyak-banyaknya. Haruskah bentuk bangun tersebut beralas persegi?

Contoh 1:

Sebuah peluru ditembakkan dengan ketentuan:

Kecepatan awal $v_0 = 40$ m/det; sudut elevasi/kemiringan $\alpha = 60^\circ$, percepatan gravitasi $g = 10$ m/det².

1. Waktu yang diperlukan saat peluru ditembakkan sampai pada ketinggian maksimum.
2. Ketinggian maksimum peluru dari atas tanah

Jawab:

$$a = -\frac{1}{2}g, b = v_{0y} = v_0 \sin \alpha, c = 0$$

$$a. \quad t = \frac{-\frac{v_0 \sin \alpha}{2(-1/2g)}}{\frac{v_0 \sin \alpha}{g}} \Leftrightarrow t = \frac{\dots \times \sin \dots^0}{\dots} = \dots \times \dots = \dots \dots \text{det}$$

$$b. \quad h(t) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Leftrightarrow h(t) = \frac{(\dots)^2 \times (\sin \dots^0)^2}{2 \times \dots} = \dots \times (\dots)^2 = \dots \dots m$$

Contoh 2:

Diketahui jumlah dua buah bilangan sama dengan 8. Berapakah nilai-nilai bilangan itu agar hasil kalinya maksimum?

Jawab:

1. Buatlah model matematika dari persoalan dengan menggunakan pemisalan pada bagian variabelnya misalnya p dan q.

2. $p + q = 8 \Leftrightarrow p = 8 - q$ dan p. q maksimum.

Misalkan $L = p \cdot q \Leftrightarrow L = (8 - q)q \Leftrightarrow L = \dots - \dots$ (fungsi dalam q).

3. Tentukan nilai pembuat fungsi menjadi maksimum $\left(q = -\frac{b}{2a}\right)$
 $q = -\frac{\dots}{2(\dots)} = \dots$

4. Nilai $q = \dots$ substitusikan pada persamaan $p = 8 - q$ diperoleh $p = \dots$

5. Substitusikan nilai-nilai p dan q pada $L = p \cdot q$ sehingga $L = \dots \times \dots = \dots$

3.3.2 Latihan 4:

1. Dua buah bilangan jika dijumlahkan hasilnya sama dengan 30 tetapi jika dikalikan satu sama lain hasilnya sama dengan 300. Tentukanlah nilai bilangan-bilangan itu!

2. Selambar karton berbentuk persegi panjang akan dibuat menjadi sebuah kotak tanpa tutup dengan cara membuang bagian pojok berukuran $2 \times 2 \text{ cm}^2$. Ukuran panjang karton 4

- cm lebih panjang dari ukuran lebarnya. Tentukan ukuran panjang dan lebar karton tersebut jika volume kotak sama dengan 900 cm^3 !
3. Sebuah bilangan terdiri atas dua angka. Besar angka pertama bilangan itu sama dengan dua kali angka keduanya dan hasil kali kedua bilangan itu sama dengan 18, tentukanlah bilangan yang dimaksud!
 4. Sebuah roket diluncurkan mengikuti lintasan parabola. Tinggi lintasan (dalam meter) setelah t detik dinyatakan oleh persamaan:

$$h(t) = 60t - 5t^2.$$
 - a. Setelah berapa detik roket itu mencapai ketinggian maksimum?
 - b. Berapakah ketinggian maksimum roket dari atas tanah?
 5. Jika $x > 0$ dan $y > 0$, maka tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem-sistem persamaan berikut:
 - a. $2x + y = 40$; $xy = 150$
 - b. $3x - 4y = 16$; $xy = 60$
 6. Sebuah bilangan nilainya dua kali lebih besar dari bilangan lainnya, dan jika dijumlahkan besarnya sama dengan 40. Tentukan nilai maksimum dari perkalian kedua bilangan itu!
 7. Keliling suatu persegi panjang sama dengan 80 cm. Jika luas persegi panjang sama dengan 375 cm^2 , maka tentukan ukuran panjang dan lebar persegi panjang tersebut!
 8. Diketahui fungsi permintaan adalah $P = 100 - 2Q$. Tentukan pendapatan maksimum R jika $R = P \times Q$!
 9. Diketahui biaya produksi Q lusin gelas adalah $C = \frac{1}{4} Q^2 - 40Q + 35$. Harga jual Q lusin gelas adalah $P = 65Q - \frac{3}{4} Q^2$ (dalam ratusan ribu rupiah). Untuk mendapatkan keuntungan yang maksimum, berapakah lusinkah gelas yang harus diproduksi?
 10. Keliling persegi Panjang 256 cm. Tentukan luas maksimum dari persegipanjang tersebut!

DAFTAR PUSTAKA

- Alpha C. Chiang. 1983. *Dasar-Dasar Matematika Ekonomi*. Jakarta: Erlangga.
<https://www.goodreads.com/book/show/23391847-dasar-dasar-matematika-ekonomi>
<https://sumberbelajar.seamolec.org/Media/Dokumen/59c1c6b6865eacac04e3cd2a/046f84d55d9b9ab7c3322bf7780aaba5.pdf>
<https://rumuspintar.com/fungsi-kuadrat/>
<https://kumparan.com/kabar-harian/fungsi-kuadrat-pengertian-bentuk-umum-hingga-contoh-soalnya-1xPnnlhToQC/1>
Supomo, T. 2007. *Panduan UNAS Matematika SMA IPA*. Yogyakarta: Pustaka Widyatama.

BAB 4

PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Oleh Noviyanti

4.1 Pengertian Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat merupakan suatu pernyataan terbuka yang memuat variabel dengan pangkat positif dan memiliki pangkat tertinggi dua (Grace, 2021). Pertidaksamaan biasa dihubungkan dengan tanda “lebih dari ($>$)”, “lebih dari atau sama dengan ($\geq$)”, “kurang dari ($<$)”, atau “kurang dari sama dengan ($\leq$)” Solusi dari suatu pertidaksamaan kuadrat adalah himpunan penyelesaian.

4.2 Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat dalam variabel x adalah sebagai berikut:

1. $ax^2 + bx + c > 0$
2. $ax^2 + bx + c < 0$
3. $ax^2 + bx + c \geq 0$
4. $ax^2 + bx + c \leq 0$

Dimana: $a \neq 0$ dan $a, b, c \in \mathbb{R}$

Keterangan:

- a, b adalah koefisien
- c adalah konstanta
- x adalah variabel

4.3 Sifat-Sifat Pertidaksamaan Kuadrat

4.3.1 Sifat Aditif

Apabila pertidaksamaan dikedua ruas dijumlahkan dengan bilangan yang sama, maka pertidaksamaan baru diperoleh dengan arah pertidaksamaan yang sama, yang ekuivalen dengan pertidaksamaan pertama.

Contoh:

Pertidaksamaan $x^2 + 5x + 4 < 0$ ditambah dengan 5 maka hasil yang diperoleh adalah

$$x^2 + 5x + 4 + 5 < 0 + 5$$

$$x^2 + 5x + 9 < 5$$

4.3.2 Sifat Multiplikatif

- Apabila suatu pertidaksamaan dikedua ruas dikalikan dengan bilangan positif, maka menghasilkan pertidaksamaan baru dengan tanda pertidaksamaan yang sama dengan pertidaksamaan pertama.

Contoh :

$$6x^2 - 4x + 1 \geq 0 \text{ dikali } 3$$

maka hasilnya adalah

$$18x^2 - 12x + 3 \geq 0$$

- Apabila dari pertidaksamaan dikedua ruas dikalikan dengan bilangan negatif, maka menghasilkan pertidaksamaan baru dengan arah kebalikan dari pertidaksamaan semula, yang ekuivalen dengan pertidaksamaan pertama.

Contoh :

$$-3x^2 - 4x - 2 \geq 0 \text{ dikali } (-2), \text{ maka hasilnya adalah}$$

$$6x^2 + 8x + 4 \geq 0$$

4.4 Langkah Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat

Langkah-langkah dalam menyelesaikan pertidaksamaan kuadra adalah sebagai berikut (Ma'rufi & Pasandaran. 2019):

- Ruas sebelah kanan harus nol
- Menentukan nilai nol dari ruas kiri
- Membuat garis bilangan
- Menentukan daerah positif dan daerah negatif
 Apabila $a > 0$ maka daerah (+) (-) (+)
 Apabila $a < 0$ maka daerah (-) (+) (-)
- Menentukan daerah penyelesaian
 Apabila tanda pertidaksamaan $>$ arsir daerah positif (+)
 Apabila tanda pertidaksamaan $<$ arsir daerah negatif (-)

4.5 Tabel Himpunan Penyelesaian Garis Bilangan

Tabel cara membaca himpunan penyelesaian dari garis bilangan yang diberikan secara umum (Sukino. 2016).

Garis Bilangan	Himpunan Penyelesaian
	$\{x a \leq x \leq b, x \in R\}$
	$\{x a \leq x < b, x \in R\}$
	$\{x a < x \leq b, x \in R\}$
	$\{x a < x < b, x \in R\}$
	$\{x x \geq a, x \in R\}$
	$\{x x > a, x \in R\}$
	$\{x x \leq a, x \in R\}$

Garis Bilangan	Himpunan Penyelesaian
	$\{x x < a, x \in R\}$

4.6 Contoh Penyelesaian Pertidaksamaan

Selesaikan pertidaksamaan $15 - 7x \leq 2x^2$! (Grace, 2019)

Penyelesaian :

Langkah 1 : nol kan ruas kanan

$$2x^2 - 7x + 15 \geq 0$$

_____ : -1 (Jika dibagi bilangan negatif tanda pertidaksamaan berkebalikan)

$$(2x - 3)(x + 5) \geq 0$$

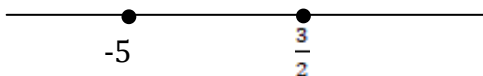
Langkah 2 : harga pembuat nol

$$(2x - 3)(x + 5) \geq 0$$

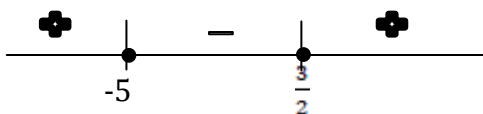
$$2x - 3 = 0 \text{ atau } x + 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = -5$$

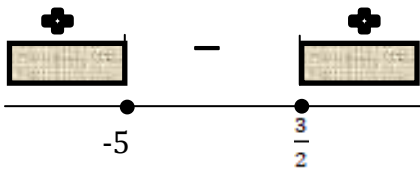
Langkah 3 : membuat garis bilangan



Langkah 4 : menentukan daerah positif (+) dan negatif (-)



Langkah 5 : menentukan daerah penyelesaian



$$Hp = \left\{ x \mid x \leq -5 \text{ atau } x \geq \frac{3}{2} \right\}$$

4.7 Contoh Soal Beserta Penyelesaiannya

Contoh 1

Selesaikan pertidaksamaan dari $x^2 + 6x + 5 > 0$

Penyelesaian :

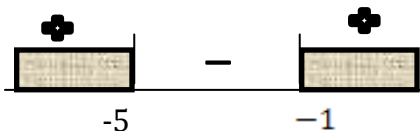
$$x^2 + 6x + 5 > 0$$

$$(x + 5)(x + 1) = 0$$

$$x + 5 = 0 \text{ atau } x + 1 = 0$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = -1$$



$$HP = \{x \mid x < -5 \text{ atau } x > -1\}$$

Contoh 2

Selesaikan pertidaksamaan $-x^2 + 10x - 9 > 0$

Penyelesaian :

Cara 1: Mencari akar dengan faktorisasi

$$-x^2 + 10x - 9 > 0$$

$$\text{—————} : -1$$

$$-x^2 + 10x - 9 < 0$$

$$-x^2 + 10x - 9 = 0$$

$$(x - 1)(x - 9) = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ atau } x - 9 = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 9$$

Cara 2: Mencari akar dengan rumus

$$-x^2 + 10x - 9 = 0$$

$$-x^2 + 10x - 9 < 0$$

$$a = -1, \quad b = 10, \quad c = -9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{-2}$$

$$x = \frac{-10 \pm 8}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-10 + 8}{-2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_1 = \frac{-10 - 8}{-2}$$

$$x_1 = 9$$

Menentukan daerah positif (+) dan negatif (-)

Menentukan daerah positif (+) dan negatif (-)



$$HP = \{x \mid 1 < x < 9\}$$

Contoh 3

Kebun Pak Hong berbentuk persegi panjang dengan lebar 8 meter kurangnya dari panjangnya. Apabila luas kebun Pak Hong tersebut minimal 180 m^2 , berapa panjang dan lebar kebun Pak Hong?

Penyelesaian :

Misalkan panjang kebun Pak Hong = x meter berarti lebar kebun Pak Hong = $x - 8$ meter.

Luas kebun Pak Hong = $(x - 8)$ minimal 80 m^2 .

Model matematikanya berupa pertidaksamaan:

$$(x - 8) \geq 180$$

$$x^2 - 8x \geq 180$$

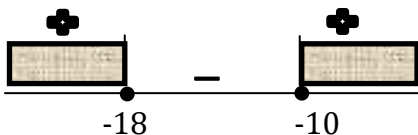
$$x^2 - 8x - 180 \geq 0$$

$$(x + 10)(x - 18) \geq 0$$

$$x + 10 = 0 \vee x - 18 = 0$$

$$x_1 = -10 \quad x_2 = 18$$

Daerah penyelesaiannya yaitu:



$$\text{HP} = \{x | x \leq -10 \text{ atau } x \geq 18\}$$

Karena x panjang kebun berarti x harus bernilai positif sehingga himpunan penyelesaiannya adalah $\{x | x \geq 18\}$. Jadi panjang kebun Pak Hong minimal atau paling sedikit 18 meter dan lebarnya minimal $(18 - 8)$ meter atau 10 meter (Rahayu & Shufa, 2019).

Contoh 4

Selesaikan pertidaksamaan $2x^2 + 8 \geq 8x$! (Setyowati & Bayu, 2021)

Penyelesaian :

$$2x^2 + 8 \geq 8x$$

$$2x^2 - 8x + 8 \geq 0$$

: 2

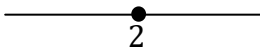
$$x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x - 2)(x - 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ atau } x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2$$

Buat garis bilangan yang memuat akar 2



Karena akarnya kembar, setelah dibuat garis bilangan dilakukan pengecekan daerah positif (+) dan daerah negatif (-).

Misal $x = 3$

$$x^2 - 4x + 4 = 3^2 - 4.3 + 4$$

$$= 9 - 12 + 4$$

$$= 1$$

$$\geq 0$$

Hal ini berarti daerah sebelah kanan 2 merupakan daerah positif (+)

Misal $x = 1$

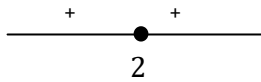
$$x^2 - 4x + 4 = 1^2 - 4.1 + 4$$

$$= 1 - 4 + 4$$

$$= 1$$

$$= \geq 0$$

Hal ini berarti daerah sebelah kiri 2 merupakan daerah positif (+)



Menentukan daerah penyelesaian



$$HP = \{x \mid x \in R\}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Grace, Mayla. 2021. *Pertidaksamaan Kuadrat dan Fungsi Rasional dan Grafiknya*
- Ma'rufi & Pasandaran, Rio Fabrika. 2019. *Aljabar Elementer*. Makasar: Nas Media Pustaka
- Rahayu, R., & Shufa, N. K. 2019. *Konsep Matematika Untuk Perguruan Tinggi*. Kudus: Badan Penerbit Universitas Muria Kudus
- Setyowati, Dewi & Bayu, Muhammad Kurnia Satya. 2021. *Modul Digital Aplikasi Matematika Pertidaksamaan Kuadrat*. FKIP. Universitas Muria Kudus

BAB 5

PERSAMAAN IRRASIONAL, FUNGSI IRRASIONAL DAN GRAFIKNYA

Oleh Suvriadi Panggabean

“Matematika memiliki bilangan yang beragam jenisnya, salah satunya yaitu bilangan irasional” (Rahmah, 2022). Kita tidak pernah lepas dari matematika dalam kegiatan sehari-hari. Namun, kebanyakan orang tidak menyadari bahwa apa yang mereka lakukan adalah bagian dari matematika. Kegiatan seperti berhitung dan penjumlahan merupakan salah satu bidang matematika yang paling mendasar. Terkadang permasalahan yang kita hadapi, dapat diselesaikan dengan menggunakan prinsip-prinsip persamaan irrasional. Pada bab ini kita akan membahas persamaan irrasional, fungsi irrasional dan grafik fungsi irrasional.

5.1 Persamaan Irrasional

Persamaan Irrasional adalah persamaan yang memuat bilangan irrasional. Bilangan irrasional ialah bilangan yang bukan rasional. Bilangan irrasional lebih rincinya merupakan suatu bilangan yang tidak bisa diubah ke dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b merupakan bilangan bulat, bisa juga diartikan sebagai salah satu atau keduanya a dan b bukan merupakan bilangan bulat, sehingga bukan termasuk bilangan rasional an perlu dicatat bahwa bukan berarti semua bilangan yang bukan rasional adalah bilangan irrasional, karena bisa saja sebagai bilangan imajiner” (KoMa, 2022).

Menurut (Ridwan, 2021) menyatakan bahwa : “ciri-ciri bilangan irrasional adalah: (1) Tidak bisa ditulis dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat serta $b \neq 0$; (2) Apabila diubah dalam bentuk pecahan, angka di belakang koma tidak terbatas dan tidak bisa habis; dan (3) Dalam bentuk pecahan desimal, angka dibelakang koma juga tidak memiliki pola dan pengulangan angka”.

“Persamaan irrasional disebut juga sebagai persamaan yang memuat variabel atau peubahnya berada dalam tanda akar” (Sukardi, 2022). Secara umum persamaan irrasional berbentuk $\sqrt{f(x)} = g(x)$ atau $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, dimana $f(x), g(x) \geq 0$, dikarenakan jika $f(x), g(x) < 0$, maka bukan lagi irrasional, melainkan imajiner.

Perhatikan beberapa contoh persamaan irrasional berikut ini:

1. $\sqrt{4x + 8} = 2x + 2$
2. $2x - 2 = \sqrt{2x + 5}$
3. $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x^2 - 1}$
4. $\sqrt[3]{x + 4} = \sqrt{x + 5}$
5. $2 + x\sqrt{5} = \sqrt{5 - 2x}$

Perhatikan beberapa contoh **bukan** persamaan irrasional walaupun mengandung tanda akar berikut ini:

1. $3x - 5 = \sqrt{7}$
2. $x\sqrt{5} = 5 - \sqrt{5}$
3. $1 - 2x\sqrt{3} = 5x\sqrt{3}$

Contoh bukan persamaan irrasional diatas menunjukkan bahwa variabel (peubah)nya tidak berada dalam tanda akar, jadi tidak selamanya bentuk akar adalah irrasional, diperlukan ketelitian.

Dengan memperhatikan beberapa contoh diatas, diharapkan pembaca dapat membedakan mana yang termasuk persamaan irrasional dan bukan irrasional. Pada persamaan irrasional, tanda akar tidak dapat dihilangkan begitu saja, namun dapat dihilangkan dengan melakukan pengkuadratan pada kedua ruas.

Menurut (Edumatik, 2020) mengatakan bahwa: “persamaan irrasional dapat ditemukan himpunan penyelesaiannya dengan cara sebagai berikut: (1) syarat terdefinisi yaitu dibawah tanda akar ≥ 0 ; (2) kuadratkan kedua ruas; (3) Hitung nilai variabel yang ingin diselesaikan dan tuliskan himpunan penyelesaiannya”.

Menurut (Panjaitan, 2022) menyatakan bahwa: “persamaan irrasional memiliki beberapa bentuk umum” sebagai berikut:

1. Bentuk $\sqrt{f(x)} = c$, dengan $c \geq 0$ dan syarat $f(x) \geq 0$
2. Bentuk $\sqrt{f(x)} = g(x)$, dengan syarat $f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0$
3. Bentuk $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, dengan syarat $f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0$

Agar semakin paham, pembaca akan diberikan beberapa contoh dan penyelesaian terkait bentuk umum persamaan irrasional diatas, sebagai berikut:

Contoh 5.1

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $\sqrt{x-2} = 3$

Penyelesaian:

$\sqrt{x-2} = 3$ adalah bentuk persamaan irrasional no. 1 diatas

$\sqrt{f(x)} = c$, dengan $c \geq 0$ dan syarat $f(x) \geq 0$

1. Syarat terdefinisi:

$$f(x) \geq 0$$

$$x - 2 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

2. Kuadratkan kedua ruas:

$$\sqrt{x-2} = 3$$

$$(\sqrt{x-2})^2 = 3^2$$

$$x-2 = 9$$

$$x = 11$$

3. Jadi, himpunan penyelesaian contoh 5.1 ini adalah $x = 11$.

Contoh 5.2

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan

$$\sqrt{x-3} = -x+5$$

Penyelesaian:

$\sqrt{3-x} = -x+5$ adalah bentuk persamaan irrasional no. 2 diatas

$$\sqrt{f(x)} = g(x), \text{ dengan syarat } f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0$$

1. Syarat terdefinisi:

$$f(x) \geq 0$$

$$x-3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$g(x) \geq 0$$

$$-x+5 \geq 0$$

$$-x \geq -5 \text{ (kali } (-) \text{ kedua ruas, tanda dibalik)}$$

$$x \leq 5$$

$$f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0 = 3 \leq x \leq 5$$

2. Kuadratkan kedua ruas:

$$(\sqrt{x-3})^2 = (-x+5)^2$$

$$x-3 = x^2-10x+25 \text{ (susun x di ruas kiri)}$$

$$x^2-10x+25 = x-3$$

$$x^2-11x+28 = 0$$

$$(x - 4)(x - 7) = 0$$

$$x = 4 \text{ (memenuhi syarat no.1 diatas)}$$

$$x = 7 \text{ (tidak memenuhi syarat no.1 diatas)}$$

3. Jadi himpunan penyelesaian contoh 5.2 ini adalah $x = 4$.

Contoh 5.3

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan

$$\sqrt{7x - 2} = \sqrt{5 - 3x}$$

Penyelesaian:

$\sqrt{7x - 2} = \sqrt{5 - 3x}$ adalah bentuk persamaan irrasional no. 3

diatas $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, dengan syarat $f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0$

1. Syarat terdefinisi:

$$f(x) \geq 0$$

$$7x - 2 \geq 0$$

$$7x \geq 2$$

$$x \geq \frac{2}{7}$$

$$g(x) \geq 0$$

$$5 - 3x \geq 0$$

$$-3x \geq -5$$

$$x \leq \frac{5}{3}$$

$$f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0 = \frac{2}{7} \leq x \leq \frac{5}{3}$$

2. Kuadratkan kedua ruas:

$$(\sqrt{7x - 2})^2 = (\sqrt{5 - 3x})^2$$

$$7x - 2 = 5 - 3x \text{ (susun x di ruas kiri)}$$

$$7x + 3x = 5 + 2$$

$$10x = 7$$

$$x = \frac{7}{10} \text{ (memenuhi syarat no.1 diatas)}$$

3. Jadi himpunan penyelesaian contoh 5.3 ini adalah $x = \frac{7}{10}$.

5.2 Fungsi Irrasional

Fungsi irasional adalah fungsi yang domainnya berada di bawah simbol akar atau variabel bebasnya berada di bawah simbol akar. Fungsi irasional juga dapat didefinisikan sebagai fungsi yang memetakan sekumpulan bilangan real non-negatif ke dirinya sendiri, sehingga fungsi irasional memiliki kondisi bahwa fungsi tersebut didefinisikan ketika nilai akar kuadratnya non-negatif.

Bentuk umum fungsi irasional adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \sqrt{ax + b}, \text{ dengan syarat } f(x) \geq 0, a, b \in \mathbb{R}.$$

Perhatikan beberapa contoh fungsi irasional berikut ini:

1. $f(x) = \sqrt{2x + 4}$
2. $f(x) = \sqrt{2x + 5} - 2x + 2$
3. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 2}$

Contoh 5.4

Tentukan domain dan range dari fungsi irasional : $f(x) = \sqrt{2x + 4}$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan dan menemukan domain contoh soal diatas maka kita akan menggunakan syarat tanda dibawah akar lebih besar sama dengan 0.

$$f(x) \geq 0$$

$$2x + 4 \geq 0$$

$$2x \geq -4$$

$$x \geq -2$$

Dengan demikian daerah asal (domain) dari $f(x) = \sqrt{2x + 4}$ terdefinisi pada $\{x \geq -2, x \in \mathbb{R}\}$.

Untuk menyelesaikan dan menentukan range contoh soal diatas, maka kita akan mengambil nilai domain $x \geq -2$ disubstitusikan ke fungsi $f(x) = \sqrt{2x+4}$, maka untuk nilai $x = -2$, akan diperoleh:

$$f(x) = \sqrt{2(-2) + 4}$$

$$f(x) = \sqrt{-4 + 4}$$

$$f(x) = \sqrt{0} = 0$$

Dengan demikian daerah hasil (range) dari $f(x) = \sqrt{2x+4}$ akan terdefinisi pada $\{f(x) \geq 0, f(x) \in \mathbb{R}\}$.

5.3 Grafik Fungsi Irrasional

Pada dasarnya, menggambar grafik fungsi irrasional sama dengan menggambar grafik fungsi linear, atau fungsi lainnya. Ketika kita menggambar grafik fungsi irrasional, kita mengetahui kondisi bahwa persamaan simbol akar harus positif atau nol atau tidak boleh negatif. Hal ini memungkinkan kita untuk menentukan titik-titik mana pada sumbu x yang memenuhi kondisi grafik fungsi.

Adapun, langkah-langkah menggambar sketsa grafik fungsi irrasional:

- Menentukan syarat dibawah akar
- Mengkuadratkan kedua ruas dari persamaan yang diberikan
- Persamaan yang diperoleh diubah dalam bentuk $x = f(y)$
- Mengambil titik uji pada sumbu y
- Setelah memperoleh titik-titik (x, y) gambarkan sketsa grafiknya

Contoh 5.5

Gambarlah grafik fungsi irrasional dari : $f(x) = \sqrt{x-2}$

Penyelesaian:

- Menentukan syarat dibawah akar
$$x - 2 \geq 0$$
- Mengkuadratkan kedua ruas dari persamaan yang diberikan
$$f(x) = y = \sqrt{x-2}$$
$$(y)^2 = (\sqrt{x-2})^2$$
$$y^2 = x - 2$$
- Persamaan yang diperoleh diubah dalam bentuk $x = f(y)$
$$y^2 = x - 2$$
$$x = y^2 + 2$$
- Mengambil titik uji pada sumbu y

Jika $y = 0$, maka $x = 0^2 + 2 = 0 + 2 = 2$

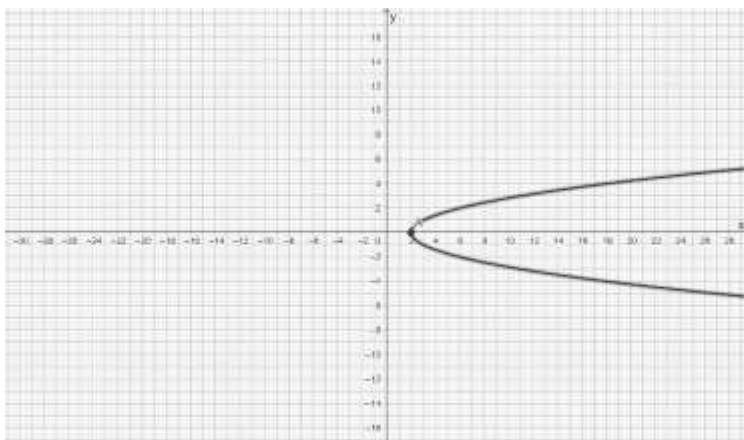
Jika $y = 1$, maka $x = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

Jika $y = -1$, maka $x = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

Jika $y = 2$, maka $x = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

Jika $y = -2$, maka $x = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

Titik yang diperoleh : $(2,0), (3,1), (3,-1), (6,2), (6,-2)$
- Setelah memperoleh titik-titik (x,y) gambarkan sketsa grafiknya



Sumber : <https://www.geogebra.org/classic>

LATIHAN

1. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan irrasional berikut:
 - d. $\sqrt{x-4} + x = 16$
 - e. $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4} = 4$
 - f. $\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + 2x^2 - 3x = 1$
 - g. $\sqrt{x^2 - 16} = x + 4$
 - h. $3\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x^2 + 6x + 5$
2. Tentukan domain dan range dari fungsi irrasional berikut:
 - c. $f(x) = \sqrt{x-2}$
 - d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$
 - e. $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$
3. Gambarkanlah fungsi irrasional berikut:
 - a. $f(x) = \sqrt{x-2}$

b. $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

DAFTAR PUSTAKA

- Edumatik. 2020. *Persamaan dan Pertidaksamaan Irasional*, <https://edumatik.net/>. Tersedia pada: <https://edumatik.net/persamaan-dan-pertidaksamaan-irasional/> (Diakses: 6 Desember 2022).
- KoMa. 2022. *Bilangan Rasional dan Irrasional*, <https://www.konsep-matematika.com/>. Tersedia pada: <https://www.konsep-matematika.com/2015/07/bilangan-rasional-dan-irrasional.html> (Diakses: 6 Desember 2022).
- Panjaitan, R. 2022. *Persamaan dan Pertidaksamaan Irasional*, <https://www.catatanmatematika.com/>. Tersedia pada: <https://www.catatanmatematika.com/2021/08/materi-persamaan-dan-pertidaksamaan-irasional.html> (Diakses: 6 Desember 2022).
- Rada. 2022. *Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)*, <https://dosenpintar.com>. Tersedia pada: <https://dosenpintar.com/spltv/> (Diakses: 6 Desember 2022).
- Rahmah, A. 2022. *Bilangan Irasional: Pengertian, Sifat, dan Contohnya*, <https://www.detik.com/edu/detikpedia>. Tersedia pada: <https://www.detik.com/edu/detikpedia/d-6006548/bilangan-irasional-pengertian-sifat-dan-contohnya> (Diakses: 6 Desember 2022).
- Ridwan, A. 2021. *Cara Membuktikan Bilangan Rasional atau Irasional dengan Benar*, <https://mamikos.com/>. Tersedia pada: https://mamikos.com/info/cara-membuktikan-bilangan-rasional-pljr/#Ciri-Ciri_Bilangan_Irasional (Diakses: 6 Desember 2022).

Sukardi. 2022. *Soal dan Pembahasan – Persamaan Irasional (Bentuk Akar)*, <https://mathcyber1997.com/>. Tersedia pada: <https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-persamaan-irasional-bentuk-akar/> (Diakses: 6 Desember 2022).

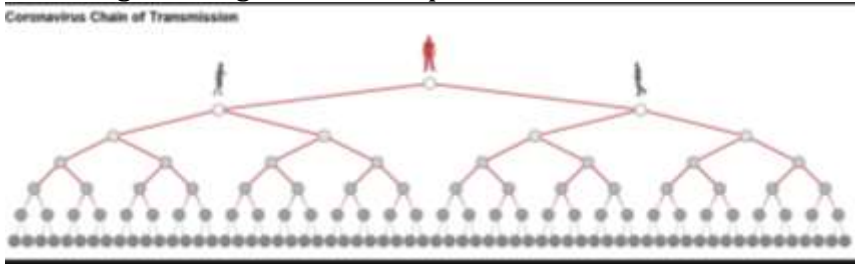
BAB 6

PERSAMAAN EKSPONEN, FUNGSI EKSPONEN, DAN GRAFIKNYA

Oleh Agung Prasetyo

6.1 Pendahuluan

Pernahkah anda mengamati bagaimana perilaku perubahan banyaknya pasien yang terjangkit virus korona (Covid-19)? Meski tidak persis, mayoritas ilmuwan termasuk matematikawan berusaha untuk memodelkan banyaknya pasien sekaligus untuk memprediksi jumlah pasien di masa mendatang. Gambar 6.1 berikut mengilustrasikan bagaimana virus korona menyebar dari satu orang ke orang lain secara cepat.



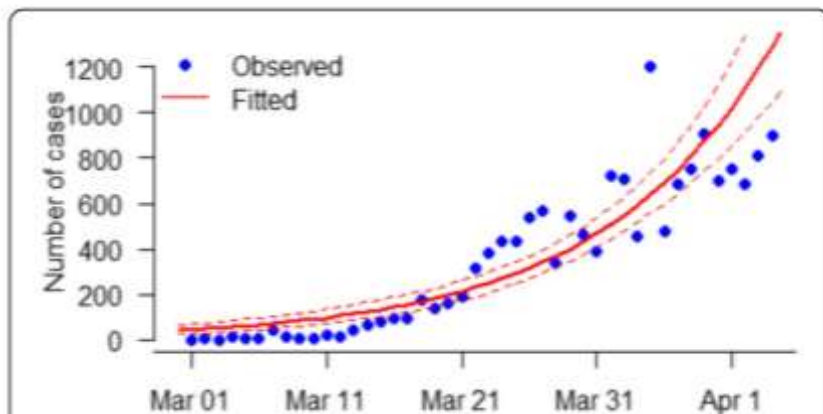
Gambar 6.1 : Rantai penyebaran virus korona

(Sumber:

<https://static01.nyt.com/images/2021/05/13/learning/CoronavirusTransmissionGraph2LN/CoronavirusTransmissionGraph2LN-jumbo.png?quality=75&auto=webp>)

Bila diperhatikan, pertumbuhan kasus baru sangat cepat dan sebanding dengan banyaknya jumlah kasus itu sendiri. Sederhananya jumlah kasus mengikuti barisan bilangan $1, 2, 4, 8, \dots, 2^n$. Pola pertumbuhan seperti inilah yang disebut

sebagai pertumbuhan eksponensial. Representasi pertumbuhan eksponensial dapat dilihat dalam gambar 6.2, yang mengilustrasikan pertumbuhan kasus harian virus korona di Afrika.



Gambar 6.2 : Kasus harian virus korona di Afrika

(Sumber: Musa, S.S., Zhao, S., Wang, M.H. et al. Estimation of exponential growth rate and basic reproduction number of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) in Africa. *Infect Dis Poverty* 9, 96 (2020). <https://doi.org/10.1186/s40249-020-00718-y>)

Perubahan banyaknya pasien yang terjangkit virus korona dari hari ke hari terus meningkat mulai dari 0 kasus pada 1 Maret dan mencapai 800 kasus pada 1 April. Meskipun banyaknya jumlah kasus tidak benar-benar mengikuti aturan eksponen, namun cukup mendekati grafik fungsi eksponen (Perhatikan kurva berwarna merah). Pada sub bab selanjutnya, kita akan mengenal lebih jauh mengenai definisi, sifat, dan grafik dari suatu fungsi eksponen.

6.2 Fungsi Eksponen

Untuk setiap bilangan real a positif, ada sebuah fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ dimana $f(x) = a^x$, fungsi semacam ini disebut sebagai fungsi eksponen. Sebagai contoh kita dapat mengambil $a = 2$ untuk memperoleh $f(x) = 2^x$, selain itu bilangan e (euler) juga dapat membentuk fungsi eksponen $g(x) = e^{2x}$. Dalam fungsi eksponen, bilangan a disebut sebagai basis. Perlu dicatat bahwa dalam hal ini basis dari fungsi eksponen haruslah bilangan positif. Karena fungsi eksponen merupakan suatu fungsi, maka sifat-sifat fungsi juga berlaku dalam fungsi eksponen, berikut disajikan beberapa aturan khusus dalam fungsi eksponen:

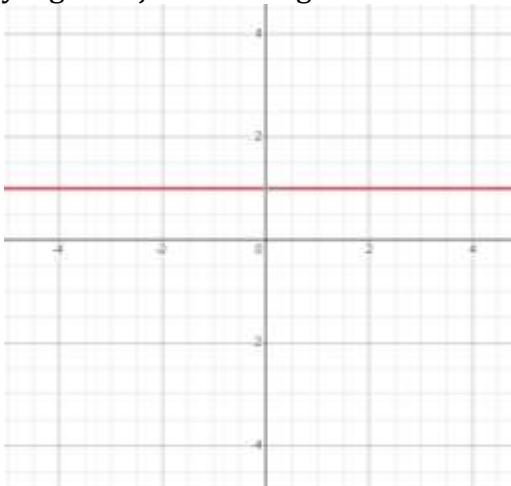
1. Jika n bilangan asli, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kali}}$ sebanyak n buah perkalian a , untuk melengkapi definisi $a^0 = 1$.
2. Jika m, n bilangan asli, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
3. Bila x bilangan real, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. Jika x, y bilangan real, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ dan $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ serta $(a^x)^y = a^{xy}$

Perlu diperhatikan bahwa $(a^m)^n \neq a^{mn}$, sebagai contoh penyangkal kita dapat melihat bahwa $(2^3)^2 = 8^2 = 64$ sedangkan kita juga mempunyai $2^{3^2} = 2^9 = 512$, sehingga diperoleh $(2^3)^2 \neq 2^{3^2}$. Selanjutnya, untuk memeriksa pemahaman kalian mengenai fungsi eksponen, coba selidiki manakah dari fungsi berikut yang merupakan fungsi eksponen dan mana yang bukan!

1. $f(x) = 2x^3$
2. $g(x) = (\ln x)^{2x+1}$
3. $h(x) = |x|^x - x^{|x|}$

6.3 Grafik Fungsi Eksponen

Pada bagian sebelumnya kita telah mengenal dengan baik definisi dan sifat-sifat yang dimiliki oleh suatu fungsi eksponen. Selanjutnya kita tahu bahwa suatu fungsi dapat direpresentasikan dalam sistem koordinat kartesius, dimana sumbu-x menyatakan domain (pra-peta) dari fungsi sedangkan sumbu-y menyatakan kodomainnya. Adapun himpunan titik-titik dengan koordinat (x, y) yang memenuhi fungsi eksponen merupakan representasi grafik dari fungsi eksponen. Grafik fungsi eksponen berupa kurva yang naik/turun secara bertahap dan relatif cepat. Perlu dicatat bahwa kurva dapat berupa garis lurus maupun garis lengkung, adapun dalam hal ini garis lurus selanjutnya hanya disebut sebagai garis saja. Bila basis dari fungsi eksponen adalah 1 yaitu $f(x) = 1^x$ jelas bahwa untuk setiap x, y bilangan real $f(x) = f(y)$, ini menunjukkan bahwa grafik fungsi f merupakan garis lurus, sebagaimana yang ditunjukkan oleh gambar 6.3.



Gambar 6.3 : Grafik fungsi $g(x) = 1^x$

(Sumber : <https://www.desmos.com/calculator?lang=id>)

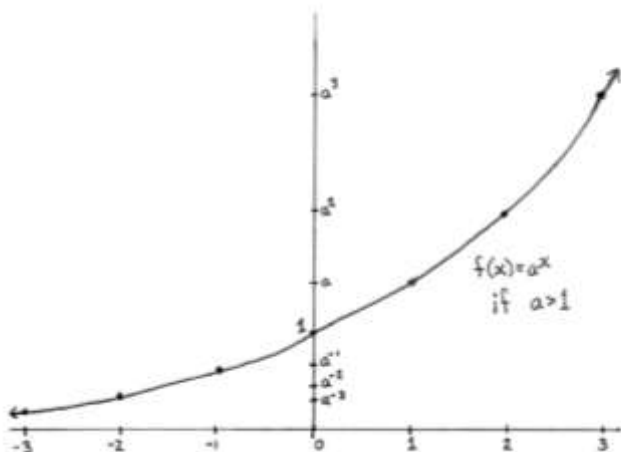
Lebih lanjut, diberikan $g(x) = a^x$ dengan nilai basis lebih dari satu maka berlaku "semakin kecil nilai x maka nilai $g(x)$ semakin mendekati 0" (tetapi tidak pernah menyentuh sumbu- x). Selain itu, apabila $x = 1$ kita mempunyai $g(x) = a$, persisnya beberapa nilai $g(x)$ disajikan dalam tabel 1.

Tabel 6.1 : $g(x) = a^x, x > 1$

x	$g(x)$
...	...
2	a^2
1	a^x
0	1
-1	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
-2	$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
...	...

Sumber: dokumen pribadi

Agar lebih memahami grafik dari fungsi $g(x)$, coba perhatikan gambar 6.4 berikut.

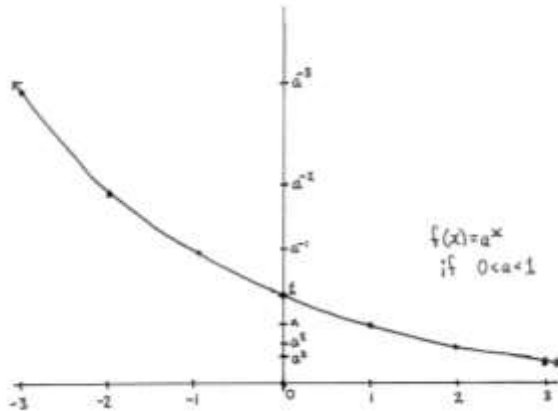


Gambar 6.4 : Grafik $g(x) = a^x, a > 1$

(Sumber : <https://www.math.utah.edu/~wortman/1050-text-ef.pdf>)

Sementara itu, apabila nilai $0 < a < 1$, maka $g(x) = a^x$ semakin kecil nilai fungsinya seiring bertambah besar nilai x nya. Sebagai contoh, perhatikan bahwa $g(1) = a^1 = a$ sementara $g(2) = a^2$, karena $0 < a < 1$ maka dapat kita misalkan $a = \frac{1}{b}, b \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku $a^2 = \frac{1}{b^2} < \frac{1}{b} = a$, dalam hal ini jelas b bukanlah 1 sehingga ketaksamaan berlaku. Secara iteratif, untuk bilangan-bilangan bulat x , kita dapat menuliskan $\dots < g(3) < g(2) < g(1) < g(0) < g(-1) < g(-2) < g(-3) < \dots$

Lebih lanjut, untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, berlaku $x_1 < x_2 \rightarrow g(x_2) < g(x_1)$. Untuk lebih memahami representasi dari grafik $g(x)$, coba perhatikan gambar 6.5 berikut.



Gambar 6.5 : Grafik $g(x) = a^x, 0 < a < 1$

(Sumber : <https://www.math.utah.edu/~wortman/1050-text-ef.pdf>)

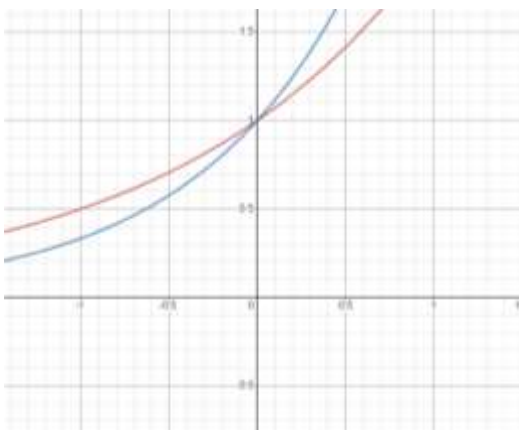
Berdasarkan beberapa grafik fungsi eksponensial tersebut, dapat diidentifikasi bahwa fungsi eksponensial merupakan fungsi satu-satu dan surjektif dengan kata lain fungsi eksponensial adalah fungsi bijektif. Fungsi satu-satu dapat ditunjukkan melalui uji garis horizontal, dimana bila ditarik sebuah garis yang sejajar sumbu-x maka $f(x)$ memotong garis tersebut tepat di satu titik. Selanjutnya, fungsi surjektif dapat dibuktikan melalui perilaku kurva $f(x)$ yang terus bergerak sepanjang sumbu-x, dengan kata lain range $f(x)$ sama dengan kodomainnya yaitu $\mathbb{R}$. Oleh karena itu, fungsi eksponensial adalah fungsi bijektif. Untuk lebih memahami grafik fungsi eksponensial cobalah untuk menelaah lebih jauh mengenai:

1. Grafik fungsi $f(x) = e^x$
2. Grafik fungsi $g(x) = \pi^x$

6.4 Persamaan Eksponen

Pada bagian sebelumnya, kita telah mengenal dengan baik mengenai konsep fungsi eksponensial beserta grafiknya. Selanjutnya, bagaimana apabila suatu fungsi eksponen berhubungan dengan fungsi eksponen lainnya? Dapatkah kita menemukan suatu input apabila dua fungsi eksponen tersebut dihubungkan dengan tanda sama dengan? Pada bagian ini, kita akan mengulas mengenai persamaan eksponen, representasinya, dan solusinya. Persamaan eksponen sederhanaanya dapat dimaknai sebagai dua fungsi eksponen yang dihubungkan dengan tanda sama dengan ($=$). Sebagai contoh, misalkan kita memiliki fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = 3^x$, maka kita dapat membentuk persamaan eksponen $f(x) = g(x)$ yang setara dengan $2^x = 3^x$, selanjutnya kita akan mencari tahu mengenai solusinya.

Sebelum membahas mengenai metode dalam menyelesaikan persamaan eksponen, coba kita perhatikan ilustrasi dari $f(x)$ dan $g(x)$ yang didefinisikan sebelumnya. Ilustrasi tersebut disajikan dalam gambar 6.6.



Gambar 6.6 : Grafik fungsi $g(x) = 1^x$

(Sumber : <https://www.desmos.com/calculator?lang=id>)

Berdasarkan gambar 6.6, dapat dilihat bahwa kedua grafik berpotongan di titik $(0,1)$, titik potong inilah yang dimaknai sebagai solusi dari persamaan $f(x) = g(x)$. Dengan kata lain, solusi dari persamaan $f(x) = g(x)$ adalah bilangan real y yang memenuhi persamaan $f(y) = g(y)$. Selanjutnya, dikarenakan grafik dari fungsi eksponen merupakan kurva lengkung (bukan garis lurus) maka mungkin saja kedua grafik berpotongan di lebih dari satu titik bahkan bisa saja di n buah titik. Untuk lebih memahami coba jawab quiz berikut!

Diberikan $p(x) = q(x)$ keduanya fungsi eksponen, berikan contoh rumus fungsinya agar:

- Kedua grafik tersebut tidak pernah berpotongan
- Kedua grafik tersebut berpotongan di satu titik
- Kedua grafik berpotongan di tak hingga titik

Berikut ini diberikan beberapa aturan dalam menyelesaikan persamaan eksponensial.

Misalkan b, p, q suatu konstanta dan $f(x), g(x), h(x)$ suatu fungsi maka,

Aturan 1: $b^p = b^q \rightarrow p = q$

Aturan 2: $b^{f(x)} = b^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)$

Aturan 3: $(h(x))^{f(x)} = (h(x))^{g(x)}$ maka kemungkinannya:

(i) $f(x) = g(x)$

(ii) $h(x) = 1$

(iii) Bila $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya fungsi yang bernilai positif maka $h(x) = 0$

(iv) Bila $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya ganjil atau keduanya genap maka $h(x) = -1$.

Untuk lebih memahami aturan-aturan tersebut, coba perhatikan beberapa contoh yang disajikan di bawah ini.

Contoh 1: Selesaikanlah persamaan $2^3 = 2^p$.

Jawab: Menurut aturan 1 dengan melihat $b = 2$, $q = 3$ maka haruslah berlaku $p = q = 3$.

Contoh 2: Selesaikanlah persamaan $3^{x-1} = 3^{2x}$

Jawab: Menurut aturan 2, $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = 2x$ maka haruslah berlaku $x - 1 = 2x$ mengakibatkan $x = -1$.

Contoh 3: Tentukan semua solusi $x^{|x|} = x^{(x^2)}$

Jawab: Menurut aturan 3 kemungkinannya adalah (i) $|x| = x^2$ menurut definisi nilai mutlak diperoleh dua kondisi yaitu :

$\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ karena x^2 selalu bernilai positif maka hanya dipenuhi oleh x tak negatif sehingga

$x = x^2 \rightarrow (x^2 - x) = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0$ didapat solusi $x = \{0, 1\}$.

Kemungkinan (ii) mengimplikasikan bahwa $x = 1$. Kemungkinan (iii) dapat diterapkan sebab $|x|$ selalu positif untuk $x \neq 0$ dan x^2 selalu positif untuk setiap nilai x , dengan demikian berlaku $h(x) = x = 0$. Kemungkinan (iv) tidak dapat diterapkan sebab x^2 maupun $|x|$ nilainya bisa negatif maupun positif. Jadi, semua solusi dari persamaan ini adalah $x = \{0, 1\}$.

Selanjutnya, untuk memperdalam pemahamanmu, coba selesaikan beberapa latihan soal berikut.

Petunjuk: carilah semua nilai x bilangan real yang memenuhi persamaan eksponensial berikut!

1. $4^x = 64$

2. $3^x = 3^{x-1}$

$$3. x^3 = x^{2x}$$

$$4. (x-1)^{x+1} = (x-1)^{x^2+2x-1}$$

$$5. (\ln x)^{|x|-x^2} = (2\ln\sqrt{x})^{2|x|-x}$$

DAFTAR PUSTAKA

<https://www.math.utah.edu/~wortman/1050-text-ef.pdf>

Musa, S.S., Zhao, S., Wang, M.H. et al. Estimation of exponential growth rate and basic reproduction number of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) in Africa. *Infect Dis Poverty* 9, 96 (2020). <https://doi.org/10.1186/s40249-020-00718-y>

<https://static01.nyt.com/images/2021/05/13/learning/CoronavirusTransmissionGraph2LN/CoronavirusTransmissionGraph2LN-jumbo.png?quality=75&auto=webp>

http://www.iesjovellanos.com/archivos/Solving_Exponential_and_Logarithmic_Equations.1385407076.pdf

BAB 7

PERSAMAAN LOGARITMA, FUNGSI LOGARITMA, DAN GRAFIKNYA

Oleh Nurul Asma

7.1 Pendahuluan

Pada bab ini akan dibahas tentang persamaan logaritma, fungsi logaritma, dan grafiknya. Pada bagian awal akan dikenalkan bagaimana bentuk logaritma melalui sifat-sifat logaritma, serta permasalahan sehari-hari seperti apa saja yang dapat diselesaikan dengan bantuan logaritma. Namun, sebelum melangkah lebih jauh ada baiknya kita berkenalan dengan logaritma. Logaritma merupakan bagian dari materi matematika peminatan. Penerapan logaritma sangat banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya dalam ilmu kimia, logaritma digunakan untuk mengukur kadar keasaman suatu larutan. Sedangkan dalam ilmu fisika, logaritma dipakai untuk menentukan taraf intensitas suatu bunyi. Lebih luas lagi, logaritma digunakan untuk mengukur besarnya skala Richter yang biasa digunakan dalam satuan skala suatu gempa. Sedangkan dalam ilmu perbankan, fungsi logaritma digunakan untuk menghitung besarnya bunga majemuk (Wijayanto). Selain itu, beberapa tahun silam Alexander Graham Bell juga menggunakan logaritma untuk menghitung skala bunyi, yang mana skala tersebut dinamakan dengan *decibel* (Ananzih and et all, 2018).

7.2 Konsep Dasar Logaritma

Pada dasarnya logaritma merupakan kebalikan dari proses pemangkatan atau pengakaran. Adapun ilustrasinya adalah sebagai berikut:

Bentuk akar	Bentuk pangkat	Bentuk logaritma
$a^y = x$	$\sqrt[y]{x} = a$	${}^a\log x = y$

Karena logaritma disebut juga sebagai invers atau kebalikan dari perpangkatan (eksponen), maka hubungannya dengan eksponen dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$${}^a\log b = c \rightarrow b = a^c$$

di mana $a > 0, a \neq 1$ dan $b > 0$

Keterangan:

a disebut basis atau bilangan pokok

b disebut numerus atau bilangan logaritma

c disebut eksponen dari basis atau hasil logaritma

7.2.1 Sifat-Sifat Logaritma

Seperti telah disebutkan sebelumnya bahwa bentuk logaritma merupakan kebalikan dari bentuk pangkat, maka sifat-sifat logaritma dapat diturunkan dari sifat-sifat bilangan berpangkat. Adapun sifat-sifat logaritma adalah sebagai berikut:

1. ${}^a\log a = 1$
2. ${}^a\log 1 = 0$
3. ${}^a\log bc = {}^a\log b + {}^a\log c$
4. ${}^a\log \frac{b}{c} = {}^a\log b - {}^a\log c$
5. ${}^a\log b^n = n {}^a\log b$
6. ${}^a\log {}^nb = ({}^a\log b)^n$
7. ${}^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$
8. Jika ${}^a\log \frac{b}{c} = p$, maka ${}^a\log \frac{c}{b} = -p$ (Sulasmono, 2009)

7.2.2 Pembuktian Sifat

Seperti yang telah dijelaskan pada bagian konsep dasar logaritma, bahwa logaritma merupakan invers atau kebalikan dari eksponen atau perpangkatan. Oleh karena itu, pada bagian ini akan ditunjukkan pembuktian dari sifat 4 sebagai berikut.

Akan dibuktikan : ${}^a\log \frac{b}{c} = {}^a\log b - {}^a\log c$

Misalkan ${}^a\log b = m$ dan ${}^a\log c = n$ dituliskan dalam bentuk eksponen, maka menjadi $b = a^m$ dan $c = a^n$

Selanjutnya ingat kembali sifat eksponen $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, maka:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{b}{c} = a^{m-n}$$

$${}^a\log \left(\frac{b}{c} \right) = m - n$$

$${}^a\log \left(\frac{b}{c} \right) = {}^a\log b - {}^a\log c$$

Terbukti (Susanto *et al.*, 2021)

7.2.3 Contoh Soal Sifat-sifat Logaritma

Dari sifat-sifat logaritma di atas, berikut merupakan contoh soal dari beberapa sifat tersebut.

$$\begin{aligned} 1. \quad {}^6\log 36 &= {}^6\log 6^2 \\ &= 2 \cdot {}^6\log 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad {}^3\log 81 - {}^3\log 9 &= {}^3\log \frac{81}{9} \\ &= {}^3\log 9 \\ &= {}^3\log 3^2 \\ &= 2 \times {}^3\log 3 \end{aligned}$$

$$= 2$$

$$\begin{aligned} 3. \quad {}^2\log 32 &= {}^2\log 4 \times 8 \\ &= {}^2\log 4 + {}^2\log 8 \\ &= {}^2\log 2^2 + {}^2\log 2^3 \\ &= (2 \times {}^2\log 2) + (3 \times {}^2\log 2) \\ &= (2 \times 1) + (3 \times 1) \\ &= 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad {}^2\log 8^6 &= 6 \times {}^2\log 8 \\ &= 6 \times {}^2\log 2^3 \\ &= 6 \times (3 \times {}^2\log 2) \\ &= 6 \times 3 \times 1 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad {}^{16}\log 4 &= \frac{1}{{}^4\log 16} \\ &= \frac{1}{{}^4\log 4^2} \\ &= \frac{1}{2 \times {}^4\log 4} \\ &= \frac{1}{2 \times 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7.3 Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma didefinisikan sebagai persamaan yang numerusnya mengandung variabel dan terkadang bilangan pokoknya juga mengandung variabel (Sutisna, 2020). Beberapa contoh persamaan logaritma dapat ditulis sebagai berikut:

1. ${}^2\log(x - 5) + {}^2\log(x - 7) = 1$
2. $\log(x - 3) + \log(x - 4) = \log(7x + 4)$
3. ${}^x\log(x + 3) + {}^x\log(x - 4) + {}^x\log 2 = {}^x\log 15$

$$4. \quad {}^{2x-5}\log(2x+1) + {}^x\log 4x = {}^{2x-5}\log(2x+4)$$

Terlihat dari contoh 1 dan 2 di atas bahwa persamaan logaritma tersebut adalah persamaan logaritma yang numerusnya mengandung variabel x . Sedangkan untuk contoh 3 dan 4 terlihat bahwa persamaan logaritma tersebut mengandung variabel x pada numerus sekaligus bilangan pokoknya.

7.3.1 Bentuk Persamaan Logaritma

Ada beberapa bentuk persamaan logaritma yang paling umum, antara lain sebagai berikut (Sutisna, 2020).

$$1. \quad {}^a\log f(x) = {}^a\log p$$

Artinya, jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log p$, maka $f(x) = p$

Dengan syarat $f(x) > 0$.

$$2. \quad {}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$$

Artinya, jika ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$, maka $f(x) = 1$

Dengan syarat $a \neq b$.

$$3. \quad {}^a\log f(x) = {}^b\log g(x)$$

Artinya, jika ${}^a\log f(x) = {}^b\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$

Dengan syarat $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya bilangan positif.

$$4. \quad {}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$$

Artinya, jika ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$

Dengan syarat $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya bilangan positif, serta $h(x) > 0$ dan $h(x) \neq 1$.

$$5. \quad A[{}^a\log x]^2 + B[{}^a\log x] + C = 0$$

Artinya, persamaan logaritma bentuk ke-5 ini adalah bentuk persamaan kuadrat, sehingga perlu mengubah

bentuknya ke dalam persamaan kuadrat untuk memperoleh solusinya, yaitu dengan memisalkan ${}^a\log x = P$.

7.3.2 Contoh Soal Persamaan Logaritma

Berdasarkan beberapa bentuk persamaan logaritma yang telah dibahas di atas, maka berikut beberapa contoh soal tentang persamaan logaritma.

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari

$${}^2\log(x^2 - 4x + 5) = 1$$

Jawab:

$$\begin{aligned} {}^2\log(x^2 - 4x + 5) &= 1 \\ {}^2\log(x^2 - 4x + 5) &= {}^2\log 2 \\ (x^2 - 4x + 5) &= 2 \\ x^2 - 4x + 5 - 2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x - 3)(x - 1) &= 0 \\ x &= 3 \text{ atau } x = 1 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{3, 1\}$.

2. Jika ${}^2\log(x^2 - 5x + 12) = {}^2\log(2x + 2)$ maka himpunan penyelesaiannya adalah ...

Jawab:

$$\begin{aligned} {}^2\log(x^2 - 5x + 12) &= {}^2\log(2x + 2) \\ (x^2 - 5x + 12) &= (2x + 2) \\ x^2 - 5x - 2x + 12 - 2 &= 0 \\ x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ (x - 5)(x - 2) &= 0 \\ x &= 5 \text{ atau } x = 2 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{5, 2\}$.

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari
 ${}^{3x-2}\log(2x+2) = {}^{3x-2}\log(x+4)$

Jawab:

$${}^{3x-2}\log(2x+2) = {}^{3x-2}\log(x+4)$$

$$2x+2 = x+4$$

$$2x - x + 2 - 4 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Substitusikan nilai $x = 2$ ke basis $3x - 2$, diperoleh $3(2) - 2 = 4$. Karena syarat $h(x) > 0$ dan $h(x) \neq 1$ keduanya terpenuhi, maka himpunan penyelesaiannya adalah $\{2\}$.

7.4 Fungsi Logaritma

Pada sub bab sebelumnya telah disebutkan bahwa logaritma adalah invers dari eksponen. Oleh karenanya, fungsi logaritma juga merupakan invers dari fungsi eksponen. Adapun definisi dari fungsi logaritma adalah sebagai berikut.

Fungsi logaritma dengan a , dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, sebagai bilangan pokok merupakan suatu fungsi yang memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$y = f(x) = {}^a\log x$$

Fungsi tersebut di atas merupakan fungsi invers dari fungsi eksponen $y = f(x) = a^x$

(Sutisna, 2020)

Ada beberapa syarat yang harus dipenuhi dari fungsi logaritma

$y = f(x) = {}^a\log x$, yaitu:

- 1) a adalah basis atau bilangan pokok untuk fungsi $f(x) = {}^a\log x$ dengan ketentuan $a > 0$ dan $a \neq 1$ ($0 < a < 1$)
- 2) Daerah asal (domain) fungsi $f(x) = {}^a\log x$ adalah $D_f = \{x | x > 0, x \in \mathbf{R}\}$
- 3) Daerah hasil (range) fungsi $f(x) = {}^a\log x$ adalah $R_f = \{y | y \in \mathbf{R}\}$
(Sutisna, 2020)

7.4.1 Contoh Soal Fungsi Logaritma

Daerah asal dari fungsi logaritma $f(x) = \frac{1}{4} \cdot {}^3\log(x^2 - 4)$ adalah ...

Jawab:

Daerah asal dari suatu fungsi logaritma ditentukan oleh numerus logaritmanya. Pada soal ini numerusnya adalah $x^2 - 4$, sehingga daerah asal dibatasi oleh syarat bahwa nilainya haruslah positif. Maka dapat dituliskan:

$$x^2 - 4 > 0$$

$$(x - 2)(x + 2) > 0$$

$$x < -2 \text{ atau } x > 2$$

Jadi, domain fungsi logaritma tersebut adalah

$$D_f = \{x \mid x < -2 \text{ atau } x > 2, \quad x \in \mathbf{R}\}$$

7.5 Grafik Fungsi Logaritma

Sebelum membahas lebih jauh tentang cara menggambar sketsa grafik fungsi logaritma, terlebih dahulu diperkenalkan apa itu grafik fungsi logaritma. Grafik fungsi logaritma dibedakan menjadi dua, yaitu fungsi logaritma $f(x) = {}^a\log x$ dengan $0 < a < 1$ merupakan fungsi monoton turun dan fungsi logaritma $f(x) = {}^a\log x$ dengan $a > 1$ merupakan fungsi monoton naik (Astawan, 2017).

Grafik fungsi logaritma dapat digambar dengan melakukan beberapa langkah sebagai berikut.

- 1) Membuat tabel bantu untuk menunjukkan hubungan antara nilai-nilai x dengan nilai-nilai $y = f(x) = {}^a\log x$. Beberapa nilai x dipilih agar memudahkan penentuan nilai y .
- 2) Titik-titik yang telah diperoleh dengan koordinat (x, y) kemudian digambarkan pada bidang kartesius untuk selanjutnya dihubungkan dengan kurva mulus.
- 3) Maka diperoleh grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^a\log x$.

7.5.1 Contoh Soal Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis

$$0 < a < 1$$

Gambarlah grafik fungsi $y = f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$, dengan $x > 0$ dan $x \in R$.

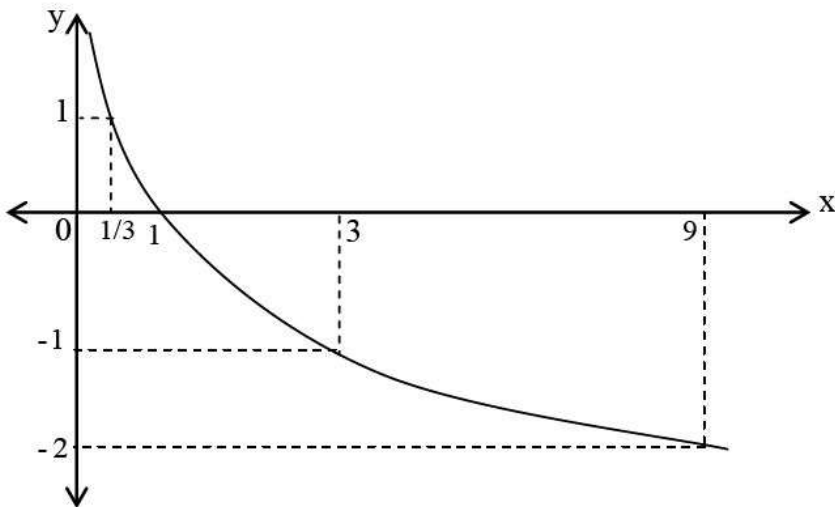
Jawab

Tabel berikut menunjukkan hubungan antara x dengan $y = f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$.

Tabel 7.1 : Hubungan antara x dan y

x	...	$\frac{1}{3}$	1	3	9	...
$y = \frac{1}{3}\log x$	...	1	0	-1	-2	...

Setiap titik-titik (x, y) yang telah diperoleh pada tabel di atas kemudian digambarkan pada bidang kartesius untuk selanjutnya dihubungkan dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik fungsi logaritma $f(x) = \frac{1}{3}\log x$ sebagai berikut.



Gambar 7.1 : Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $0 < a < 1$
(Sumber: Astawan, 2017)

Fungsi logaritma $y = f(x) = \frac{1}{3}\log x$ merupakan fungsi monoton turun, karena dari grafik yang diperoleh di atas terlihat jelas bahwa grafik tersebut turun dari arah kiri atas ke arah kanan bawah.

7.5.2 Contoh Soal Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $a > 1$

Gambarlah grafik fungsi $y = f(x) = {}^4\log x$, dengan $x > 0$ dan $x \in R$.

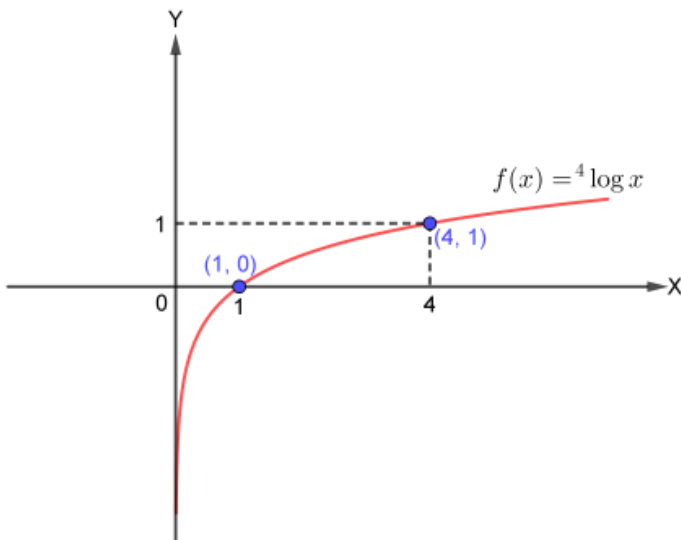
Jawab

Tabel berikut menunjukkan hubungan antara x dengan $y = f(x) = {}^4\log x$.

Tabel 7.2 : Hubungan antara x dan y

x	...	1	4	...
$y = {}^4\log x$	...	0	1	...

Setiap titik-titik (x, y) yang telah diperoleh pada tabel di atas kemudian digambarkan pada bidang kartesius untuk selanjutnya dihubungkan dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik fungsi logaritma $f(x) = {}^4\log x$ sebagai berikut.



Gambar 7.2 : Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $a > 1$

(Sumber: Sukardi, 2020)

Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^4\log x$ merupakan fungsi monoton naik, karena dari grafik yang diperoleh di atas terlihat jelas bahwa grafik tersebut naik dari arah kiri bawah ke arah kanan atas.

DAFTAR PUSTAKA

- Ananzih, A.H. and et all. 2018. 'Makalah Logaritma dan Terapannya'.
- Astawan, M. 2017. 'Grafik Fungsi Logaritma'. Available at: <https://ilmuhitung.com/grafik-fungsi-logaritma/>.
- Sukardi. 2020. 'Mathcyber1997'. Available at: <https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-fungsi-logaritma/>.
- Sulasmono, B. 2009. *Contekan Rumus Matematika Paling Lengkap untuk SMA*. Cetakan 1. Bandung: Mizan Media Utama.
- Susanto, D. et al. 2021. *Kelas X SMA Matematika Buku Guru*.
- Sutisna, E. 2020. 'Modul MAM Kelas X - KD 3.1 Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma (MAM)', p. 29.
- Wijayanto, H. (no date) *Matematika (Peminatan) XII*.

BAB 8

PERSAMAAN PANGKAT TINGGI

Oleh Syahrullah Asyari

8.1 Pendahuluan

Persamaan pangkat tinggi adalah anggota kelompok persamaan yang biasa disebut persamaan polinomial. Bentuk umum persamaan polinomial adalah:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

di mana x adalah variabel dan $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ adalah konstanta. Juga n harus bilangan bulat positif dan $a_n \neq 0$. Dengan kata lain, persamaan polinomial adalah bentuk polinomial yang disamakan dengan nol. Sedangkan, persamaan pangkat tinggi adalah persamaan polinomial berpangkat bilangan bulat positif lebih dari dua (The Higher Education Funding Council for England, 2015).

Beberapa persamaan polinomial, termasuk persamaan pangkat tinggi, memiliki nama khusus. Persamaan polinomial berpangkat satu disebut persamaan linear, seperti yang dibahas pada Bab 1. Persamaan polinomial berpangkat dua disebut persamaan kuadrat, seperti yang dibahas pada Bab 3. Persamaan polinomial berpangkat tiga disebut persamaan kubik. Persamaan polinomial berpangkat empat disebut persamaan kuartik. Persamaan polinomial berpangkat lima disebut persamaan kuintik. Persamaan polinomial berpangkat enam disebut persamaan sektik. Persamaan polinomial berpangkat tujuh disebut persamaan septik. Adapun persamaan pangkat tinggi dengan pangkat bilangan bulat positif lebih dari tujuh, sejauh ini penulis belum ketahui nama khususnya. Berikut ini adalah contoh

persamaan pangkat tinggi: $w^7 - 3w - 1 = 0$,
 $5x^6 - 3x^4 + x^2 + 7 = 0$, $x^5 + 2x^4 + 3ix^2 + 3 + 7i = 0$,
 $-7x^4 + x^2 + 9 = 0$, dan $t^3 - t + 5 = 0$.

Persamaan polinomial sebenarnya bukanlah hal baru. Secara historis, kita dapat menelusurinya sampai masa Babilonia. Senk et al (1990) menyatakan bahwa pada abad klasik, awal 2000 SM, orang Babilonia telah mengembangkan algoritma untuk memecahkan masalah menggunakan polinomial kuadrat. Berikutnya, pengembangan polinomial menjadi kubik dan kuartik dilakukan di abad modern, di mana kerja awal pengembangan polinomial tersebut dilakukan oleh bangsa Persia, Cina, dan Italia. Alhasil, pada 1535, Niccolo Tartaglia menemukan metode penyelesaian umum persamaan kubik. Tidak berselang lama setelah penemuan itu, Ludovico Ferrari menemukan metode penyelesaian umum persamaan kuartik. Selanjutnya, pada 1824, Niels Henrik Abel membuktikan bahwa tidak ada metode penyelesaian umum untuk persamaan kuintik (pangkat lima). Tidak lama setelah itu, Evariste Galois menguatkan pernyataan Abel bahwa tidak ada metode penyelesaian umum untuk persamaan kuintik.

Menariknya, pada 1797, hampir dua dekade sebelum Niels Henrik Abel membuktikan bahwa tidak ada metode penyelesaian umum untuk persamaan kuintik, Carl Gauss menawarkan bukti Teorema Dasar Aljabar. Teorema ini menyatakan bahwa setiap penyelesaian persamaan polinomial dengan koefisien kompleks adalah bilangan kompleks. Sebagai contoh, persamaan $x^5 + 2x^4 + 3ix^2 + 3 + 7i = 0$, solusinya adalah bilangan kompleks. Dengan demikian, bahasan bilangan kompleks pada Bab 13 adalah bahasan kritis agar dapat menyelesaikan persamaan pangkat tinggi. Untuk itu, sebelum membahas materi ini, pembaca sebaiknya telah memiliki pengetahuan tentang bilangan kompleks.

Namun demikian, bahasan persamaan pangkat tinggi di sini terbatas pada persamaan dengan koefisien real.

8.2 Perkalian Bentuk Polinomial

Persamaan pangkat tinggi biasanya merupakan polinomial yang kompleks. Untuk itu, dibutuhkan proses pemfaktoran bentuk polinomial. Menurut The Higher Education Funding Council for England (2015) pemfaktoran tersebut mengubah polinomial yang kompleks ke dalam bentuk hasil kali polinomial-polinomial yang lebih sederhana. Proses pemfaktoran bentuk polinomial ini dapat dilakukan secara lebih mudah, jika satu atau lebih faktornya sudah diketahui.

Agar lebih jelas, kita berikan ilustrasi. Jika ada dua polinomial dikalikan, sebut saja, $(y + 1)(3y - 2)$, maka kedua polinomial tersebut sebenarnya adalah hasil kali dari dua polinomial berpangkat satu (linear). Dengan melakukan ekspansi tanda kurung, kita peroleh $(y + 1)(3y - 2) = 3y^2 + y - 2$, yang merupakan polinomial berpangkat dua (kuadrat). Dengan demikian, secara umum, kita dapat memandang polinomial kuadrat sebagai hasil kali dua polinomial linear.

Dengan cara yang sama dengan ilustrasi di atas, jika dua polinomial dikalikan, sebut saja, $(y - 1)(y^2 + 3y - 7)$, maka kedua polinomial tersebut sebenarnya adalah hasil kali dari dua polinomial, yaitu polinomial linear dan polinomial kuadrat. Kemudian, dengan melakukan ekspansi tanda kurung, kita peroleh $(y - 1)(y^2 + 3y - 7) = y^3 + 2y^2 - 10y + 7$. Ini adalah polinomial pangkat tiga (kubik) yang merupakan hasil kali polinomial linear dan polinomial kuadrat. Dengan demikian, secara umum, kita dapat memandang polinomial kubik sebagai hasil kali polinomial linear dan polinomial kuadrat atau hasil kali dari tiga polinomial linear. Fakta ini penting dipahami agar memudahkan

kita dalam memfaktorkan persamaan pangkat tiga, pangkat empat, pangkat lima, dan seterusnya.

Contoh perkalian bentuk polinomial yang menunjukkan penerapan proses di atas adalah sebagai berikut :

Contoh 1

Faktorkanlah bentuk $p^3 - 17p^2 + 54p - 8$, di mana salah satu faktornya adalah $(p - 4)$!

Penyelesaian:

Diketahui $p - 4$ adalah sebuah faktor yang dapat kita tulis sebagai berikut.

$p^3 - 17p^2 + 54p - 8 = (p - 4) \times$ (sebuah polinomial kuadrat)
Polinomial yang belum diketahui tersebut harus polinomial kuadrat, karena bentuk di ruas kiri adalah kubik dan $p - 4$ adalah linear. Misalkan kita menulis bentuk kuadrat sebagai $ap^2 + bp + c$, di mana a , b , dan c adalah bilangan tidak diketahui yang perlu kita ketahui. Selanjutnya,

$$p^3 - 17p^2 + 54p - 8 = (p - 4)(ap^2 + bp + c)$$

Dengan menghilangkan tanda kurung pada ruas kanan dan mengumpulkan suku-suku sejenis, kita peroleh:

$$p^3 - 17p^2 + 54p - 8 = ap^3 + (b - 4a)p^2 + (c - 4b)p - 4c$$

Berikutnya, penting diingat bahwa suku sejenis adalah suku-suku yang melibatkan pangkat yang sama dari variabel p . Suku sejenis terkait dengan menyamakan koefisien, karena menyamakan koefisien berarti membandingkan koefisien tiap suku pada ruas kiri dengan suku yang bersesuaian yang ada di ruas kanan. Dengan demikian, jika kita melihat pada suku-suku p^3 yang ada di tiap ruas, kita melihat bahwa $p^3 = ap^3$ yang menyatakan bahwa a pasti 1. Dengan cara yang sama, dengan menyamakan

koefisien p^3 , kita peroleh $-17 = b - 4a$. Jika $a = 1$, kita peroleh $-17 = b - 4$, sehingga b pasti sama dengan -13 . Terakhir, menyamakan suku-suku konstanta dan kita peroleh $-8 = -4c$, sehingga $c = 2$.

Untuk mengecek hasil yang diperoleh, kita lihat koefisien x untuk memastikan apakah kedua ruas sudah sama. Sekarang, kita ketahui $a = 1$, $b = -13$, $c = 2$, sehingga bentuk polinomialnya dapat kita tulis: $p^3 - 17p^2 + 54p - 8 = (p - 4)(p^2 - 13p + 2)$.

Selanjutnya, diberikan juga cara lain yang lebih umum dari cara sebelumnya untuk memperoleh perkalian bentuk polinomial, yaitu pembagian sintetis (skema Horner). Namun, sebelum menguraikan lebih lanjut cara ini, penting diperkenalkan istilah persamaan polinomial *monic*. Persamaan polinomial *monic*, yaitu persamaan polinomial, di mana variabelnya yang berpangkat tertinggi memiliki koefisien 1. Dalam menyelesaikan persamaan pangkat tinggi, terlebih dahulu kita biasanya membagi persamaan itu dengan koefisien variabel berpangkat tertinggi agar koefisiennya menjadi 1 (Sam Houston State University, 2013).

Anggaplah ada persamaan polinomial *monic* dengan sebuah akar tertentu, sebut saja, $f(q) = q^n - a_1q^{n-1} + \dots + a_n = 0$ memiliki akar $q = \beta$. Maka, ada polinomial $q^{n-1} + b_1q^{n-2} + \dots + b_{n-1} = 0$, sedemikian sehingga $(q - \beta)(q^{n-1} + b_1q^{n-2} + \dots + b_{r-1}q^{n-r} + b_rq^{n-r-1} + \dots + b_{n-1}) = q^n + a_1q^{n-1} + \dots + a_rq^{n-r} + \dots + a_n$

Dengan membandingkan koefisien suku q^{n-r} , kita temukan bahwa $b_r - \beta b_{r-1} = a_r$, dan koefisien b_r dapat dihitung secara rekursif dari $b_r = a_r + \beta b_{r-1}$, dengan $b_0 = 1$. Tanpa kesulitan, kita peroleh:

$$b_1 = a_1 + \beta;$$

$$b_2 = a_2 + a_1\beta + \beta^2; \quad b_n = a_n + a_{n-1}\beta + \cdots + \beta^n = f(\beta) = 0.$$

Agar lebih mudah, kita dapat menggunakan skema berikut (Froberg, 1969), jika persamaannya berupa persamaan polinomial *monic*.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & \alpha & \\ & \alpha & a_1\beta + \beta^2 & & & & \\ 1 & a_1 + \beta & a_2 + a_1\beta + \beta^2 & \dots & b_n & & \end{array}$$

Pada skema di atas, tiap suku pada baris kedua diperoleh melalui perkalian dengan α dari suku sebelumnya pada baris ketiga, dan tiap suku pada baris ketiga diperoleh melalui penjumlahan dari suku-suku di atasnya. Jika β adalah akar dari persamaan polinomial itu, maka kita peroleh $b_n = 0$. Tapi, jika bukan akar dari persamaan polinomial itu, kita peroleh $b_n = f(\beta)$. Dengan demikian, skemanya dapat juga digunakan untuk komputasi nilai numerik dari suatu polinomial dengan nilai yang telah diketahui untuk variabelnya. Namun demikian, penggunaan skema ini untuk komputasi nilai numerik tersebut tidak dibahas di sini.

Contoh 2

Persamaan $k^3 - 17k^2 + 54k - 8 = 0$ memiliki tiga akar, salah satunya adalah $k = 4$. Artinya, salah satu faktor dari persamaan tersebut adalah $k - 4$. Faktor yang lain dapat kita peroleh dengan mekanisme pencabutan akar tersebut melalui skema berikut.

$$\begin{array}{rrrrr}
 1 & -17 & 54 & -8 & 4 \\
 & 4 & -52 & 8 & \\
 1 & -13 & 2 & 0 &
 \end{array}$$

Dengan proses tersebut, kita memperoleh hasil yang sama dengan proses sebelumnya: $k^2 - 13k + 2 = 0$. Artinya, $k^2 - 13k + 2$ adalah faktor yang lain dari persamaan tersebut. Dengan demikian, dapat ditulis $k^3 - 17k^2 + 54k - 8 = 0 \Leftrightarrow (k - 4)(k^2 - 13k + 2) = 0$.

8.3 Menyelesaikan Persamaan Pangkat Tinggi

Sebelum menyelesaikan persamaan pangkat tinggi, perlu diingat bahwa akar-akar suatu persamaan pangkat tinggi adalah nilai-nilai dari x yang memenuhi persamaan itu. Sebagai ilustrasi, misalkan, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, dan $x_3 = 0$ adalah akar-akar dari persamaan: $x^3 - x = 0$. Untuk memeriksa, apakah nilai-nilai x tersebut adalah akar-akar dari persamaan $x^3 - x = 0$, kita dapat mensubstitusi setiap nilai secara bergiliran ke bentuk $x^3 - x$ menjadi: $(-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$. Dengan demikian, $x_1 = -1$ adalah akar persamaan itu. Cara yang sama dapat digunakan untuk memverifikasi dengan mudah bahwa $x_2 = 1$ dan $x_3 = 0$ juga adalah akar-akar dari persamaan itu.

Selanjutnya, untuk menentukan akar-akar persamaan pangkat tinggi, perlu diketahui setidaknya empat sifat, yaitu akar-akar tak real, irrasional kuadrat, aturan tanda Descartes dan akar-akar rasional (Nielsen, 1958).

Pertama, akar-akar tak real berlaku pada pasangan sekawan, yaitu jika $a + bi$ adalah sebuah akar, maka $a - bi$ juga adalah akar.

Kedua, mengenai irrasional kuadrat, jika $a + \sqrt{b}$ adalah sebuah akar, maka $a - \sqrt{b}$ juga adalah akar.

Ketiga, banyaknya akar positif dari suatu persamaan $f(x) = 0$ dengan koefisien real tidak boleh melebihi banyaknya variasi tanda dalam polinomial $f(x)$, sedangkan jumlah akar negatif tidak boleh melebihi banyaknya variasi tanda dalam polinomial $f(-x)$. Variasi tanda terjadi, jika dua suku berurutan dalam $f(x)$ berbeda tandanya. Adapun untuk menentukan $f(-x)$, cukup dengan mengubah tanda pada suku berpangkat ganjil.

Keempat, jika sebuah bilangan rasional $\frac{b}{c}$ berada pada suku-suku terendahnya dan merupakan sebuah akar dari persamaan:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

dengan koefisien integral, maka b adalah faktor dari a_0 dan c adalah faktor dari a_n .

Untuk menyelesaikan persamaan dengan bentuk seperti itu, kita terlebih dahulu menentukan jumlah maksimum akar positif dan akar negatif. Kemudian, kita menentukan akar rasional dan mereduksi persamaan dengan memfaktorkan akar-akar rasional. Terakhir, ketika kita sudah sampai pada persamaan kuadrat, kita selesaikan persamaan itu dengan menggunakan rumus kuadrat (Nielsen, 1958).

Agar cara menyelesaikan persamaan pangkat tinggi seperti yang dikemukakan oleh Nielsen (1958) menjadi lebih jelas, maka diberikan ilustrasi sebagai berikut.

Contoh 3

Selesaikanlah persamaan: $8x^4 - 18x^3 + 2x^2 + 7x - 6 = 0$

Penyelesaian:

$$f(x): + - + + -$$

Ada tiga variasi tanda pada $f(x)$.

$$f(-x): + + + - -$$

Ada satu variasi tanda pada $f(-x)$.

Faktor $a_0 = -6$: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Faktor $a_n = 8$: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

Dengan

demikian,

$$\frac{b}{c} = \frac{a_0}{a_n}: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{3}{8}.$$

Pertama, kita coba-coba bilangan bulat, kemudian mencari:

$f(x) = 0$ dengan menggunakan pembagian sintetis. Kita peroleh:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 8 & -18 & 2 & 7 & -6 & \\ & 16 & -4 & -4 & 6 & \\ \hline 8 & -2 & -2 & 3 & 0 & \end{array} \quad 2$$

Sekarang, persamaannya sudah tereduksi ke persamaan kubik:

$$8x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = 0$$

Kita peroleh:

$$\begin{array}{r|rrrr} 8 & -2 & -2 & 3 & \\ & -6 & 6 & -3 & \\ \hline 8 & -8 & 4 & 0 & \end{array} \quad -\frac{3}{4}$$

Persamaannya kemudian tereduksi menjadi:

$$2x^2 - 2x + 1 = 0$$

Selanjutnya, dengan rumus kuadrat, diperoleh: $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$. Dengan demikian, akar-akarnya adalah $2, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$.

Contoh 4

Selesaikanlah persamaan: $6x^4 + x^3 - 26x^2 - 4x + 8 = 0$

Penyelesaian:

Ada tidak lebih dari dua akar positif dan juga tidak lebih dari dua akar negatif. Selanjutnya,

Faktor $a_0 = 8$: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

Faktor $a_n = 6$: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Dengan demikian,

$\frac{b}{c} = \frac{a_0}{a_n}$: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}$. Selanjutnya, dengan coba-coba,

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 6 & 1 & -26 & -4 & 8 & 2 \\
 & 12 & 26 & 0 & -8 & \\
 \hline
 6 & 13 & 0 & -4 & 0 & \\
 & -12 & -2 & 4 & -2 & \\
 \hline
 6 & 1 & -2 & 0 & & \\
 & 3 & 2 & \frac{1}{2} & & \\
 \hline
 6 & 4 & 0 & & &
 \end{array}$$

$$6x + 4 = 0; x = -\frac{2}{3}$$

Dengan demikian, akar-akarnya adalah: $2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$.

Bahasan lebih lanjut mengenai cara menyelesaikan persamaan pangkat tinggi adalah sebagai berikut.

8.4.1 Solusi Umum Persamaan Kubik, Jika Semua Akarnya Tidak Diketahui

Setiap persamaan polinomial melibatkan dua langkah berikut untuk mengubah polinomial ke polinomial yang lebih sederhana (Sam Houston State University, 2013).

1. Terlebih dahulu membagi persamaan dengan suku terdepan yang membuat polinomial *monic*, di mana pangkat tertinggi dari x memiliki koefisien 1. Proses ini tidak mengubah akar-akar.
2. Selanjutnya, pada $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, substitusilah $x = y - \frac{a_{n-1}}{n}$ untuk memperoleh persamaan, tanpa suku berderajat $n - 1$. Karena langkah ini dapat dibalik, maka solusi terhadap persamaan ini juga menjadi solusi untuk persamaan semula.

Dua langkah di atas berlaku pada persamaan polinomial secara umum. Dalam kaitannya dengan penyelesaian persamaan kubik, jika semua akarnya tidak diketahui, seperti yang telah dilakukan oleh Gerolamo Cardano, adalah dengan terlebih dahulu menjalankan kedua langkah di atas sebagai berikut.

1. Membuat polinomial *monic* dengan cara mengubah koefisien dari suku pertama polinomial kubik $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ menjadi 1.
2. Selanjutnya, substitusilah $x = y - \frac{a_2}{3}$ untuk memperoleh persamaan, tanpa suku berderajat dua. Ini melahirkan persamaan berbentuk $x^3 + Cx - D = 0$.

Selanjutnya, Cardano menuliskan kembali persamaan ini dalam bentuk $x^3 + Cx - D = 0$. Dia kemudian mengingatkan identitas aljabar berikut.

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3 \dots\dots\dots (1)$$

Diketahui $x^3 + Cx = D$, tetapkan bahwa:

$$ab = \frac{p}{3}, \quad a^3 - b^3 = Q, \quad \text{dan } x = a - b$$

Selesaikanlah sistem ini dengan mensubstitusi. Misalnya, kita dapat mensubstitusi a dengan $\frac{C}{3b}$ (dengan menggunakan persamaan pertama), kemudian mensubstitusi ke persamaan kedua untuk memperoleh:

$$\left(\frac{C}{3b}\right)^3 - b^3 = D$$

Mengalikan dengan b^3 , kita peroleh:

$$\left(\frac{C}{3b}\right)^3 - (b^3)^2 = Db^3$$

yang merupakan persamaan kuadrat dalam b^3 . Tuliskan kembali persamaan ini sebagai berikut.

$$(b^3)^2 + Db^3 - \left(\frac{C}{3b}\right)^3 = 0$$

sehingga,

$$b^3 = -\frac{D}{2} \pm \sqrt{\delta} \dots\dots\dots (2)$$

di mana diskriminan δ adalah

$$\delta = \left(\frac{C}{3}\right)^3 + \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

Sekarang, ada tiga solusi yang mungkin untuk persamaan (2). Kemudian, dengan menggunakan rumus Euler:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \dots\dots\dots (3)$$

kita akan menciptakan unsur

$$\theta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ingat, $\theta^3 = 1$ dan $(\theta^2)^3 = 1$, sehingga 1 , θ , dan θ^2 semuanya adalah akar kubik dari 1 .

Dengan menggunakan θ , kita dapat mengetahui bahwa sebarang bilangan real memiliki tiga akar kubik. Jika diketahui satu akar kubik, β , maka akar kubik yang lain adalah $\theta\beta$ dan $\theta^2\beta$.

Kita menggunakan ini untuk menyelesaikan persamaan (2) dengan mencabut akar kubik dari $-\frac{D}{2} \pm \sqrt{\delta}$. Kita menyebutnya sebagai satu solusi khusus β . Solusi lain untuk persamaan (2) adalah $b = \theta\beta$ dan $b = \theta^2\beta$.

Tiap solusi untuk persamaan (2) memberikan nilai untuk a , sehingga $ab = \frac{P}{3}$. Misalkan $\omega = \frac{C}{3\beta}$. Selanjutnya, $\omega - \beta$, $\omega\theta^2 - \beta\theta$, dan $\omega\theta - \beta\theta^2$ adalah semua solusi untuk persamaan kubik.

Contoh 5

Tentukan semua solusi untuk

$$x^3 - 6x = 4 \quad \dots\dots\dots (4)$$

Penyelesaian:

Di sini, $C = -6$ dan $D = 4$ dan dengan demikian, diskriminannya adalah

$$\delta = -8 + 4 = -4, \quad \text{sehingga} \quad \sqrt{\delta} = 2i. \quad \text{Oleh karena itu,} \\ b^3 = -2 \pm 2i.$$

Kita memilih tanda dan menyelesaikan persamaan kubik $b^3 = -2 + 2i$. Tulislah $-2 + 2i$ dalam bentuk polar $\sqrt{8}(e^{\frac{3\pi}{4}i})$.

Lalu, $b^3 = \sqrt{8}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ memiliki solusi khusus: $\beta = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 1 + i$.

Tetapkanlah, $\omega = \frac{-2}{\beta} = \frac{-2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i} = -\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Atau, dalam bentuk kartesius, $\omega = -1 + i$. Selanjutnya,

$x = \omega - \beta = (-1 + i) - (1 + i) = -2$ adalah satu solusi untuk persamaan kubik. Tetapi, masih ada solusi yang lain.

Jika $x_1 = \omega - \beta$ adalah solusi, maka begitupun dengan:

$$x_2 = \omega\theta^2 - \beta\theta = \sqrt{2} \left(e^{\frac{3\pi}{4}i} e^{\frac{4\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{4}i} e^{\frac{2\pi}{3}i} \right) = \sqrt{2} \left(e^{\frac{25\pi}{12}i} - e^{\frac{11\pi}{12}i} \right) = \sqrt{2} \left(e^{\frac{\pi}{12}i} - e^{\frac{-\pi}{12}i} \right)$$

dan

$$x_3 = \omega\theta - \beta\theta^2 = \sqrt{2} \left(e^{\frac{3\pi}{4}i} e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{4}i} e^{\frac{4\pi}{3}i} \right) = \sqrt{2} \left(e^{\frac{17\pi}{12}i} - e^{\frac{19\pi}{12}i} \right) = \sqrt{2} \left(e^{\frac{-7\pi}{12}i} - e^{\frac{7\pi}{12}i} \right)$$

Dengan rumus Euler, $e^{\alpha i} + e^{-\alpha i} = 2 \cos \alpha$. Sehingga, jawaban kita ekuivalen dengan:

$$x_2 = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ dan } x_3 = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

Nilai $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ tidak langsung tampak, tetapi kita dapat menentukannya dari identitas trigonometri. Karena $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, maka $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$. Dengan demikian,

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}, \quad \text{sehingga} \quad x_2 = \sqrt{8} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}.$$

Kemudian, dengan cara yang sama, kita dapat menentukan x_3 , di mana jawaban akhir yang akan diperoleh adalah: $x_2 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ dan $x_3 = -\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

Contoh 6

Selesaikanlah persamaan kubik Euler berikut.

$$x^3 - 6x = 9 \dots\dots\dots (5)$$

Penyelesaian:

Karena $(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$, kita tetapkan $3ab = -6$ dan $a^3 - b^3 = 9$.

Misalkan, $C = -6$; $D = 9$

Selanjutnya, $a = -\frac{2}{b}$; $(-\frac{2}{b})^3 - b^3 = 9$

Sehingga,

$$-8 - b^6 = 9b^3 \text{ atau } b^6 + 9b^3 + 8 = 0$$

Pandanglah ini sebagai bentuk kuadrat dalam b^3 , sehingga

$$(b^3)^2 + 9b^3 + 8 = 0 \Rightarrow (b^3 + 8)(b^3 + 1) = 0. \dots\dots\dots (6)$$

Oleh karena itu, $b^3 = -8$ atau $b^3 = -1$, sehingga, $a = 1$ dan $x = a - b = 3$.

Jika $b = -1$, maka $a = -2$ dan $x = a - b = 3$, sehingga memilih faktor lain tidak memberikan informasi baru. Kita telah memperoleh satu solusi, $x = 3$. Untuk memperoleh solusi yang lain, tetapkan $\beta = -2$ sebagai solusi untuk persamaan kubik (6), sehingga $\beta^3 = -8$ dan misalkan $\omega = 1$ adalah pilihan yang sesuai untuk α . Selanjutnya, $b = \beta\theta = -2\theta$ adalah juga solusi untuk kubik tersebut dan dalam kasus ini $a = \omega\theta^2 = \theta^2$ adalah pilihan yang sesuai untuk ω . Maka, solusi kedua adalah

$$\begin{aligned} x = a - b &= \theta^2 + 2\theta = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (-1 + \sqrt{3}i) \\ &= \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

Jika kita peroleh $a = \omega\theta$ dan $b = \beta\theta^2$, maka solusi akhirnya adalah:

$$x = a - b = \theta + 2\theta^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (-1 - \sqrt{3}i) = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{3}i)$$

Dengan demikian, kita peroleh ketiga solusi persamaan kubik:

$$3, \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3}i), \text{ dan } \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{3}i).$$

8.4.2 Solusi Persamaan Kubik, Jika Salah Satu Akarnya Diketahui

Jika salah satu akar persamaan kubik diketahui, dapat dilakukan cara pemfaktoran atau pembagian sintetis. Pada contoh berikut, ditunjukkan cara pemfaktoran.

Contoh 7

Misalkan bentuk polinomial $t^3 - 17t^2 + 54t - 8$ dilambangkan dengan $P(t)$. Periksalah apakah $t = 4$ adalah solusi dari persamaan $P(t) = 0$. Tentukanlah solusinya yang lain!

Penyelesaian:

Kita substitusi $t = 4$ ke bentuk polinomial $P(t)$:

$$P(4) = 4^3 - 17(4^2) + 54(4) - 8 = 64 - 272 + 216 - 8 = 0$$

Jadi, ketika $t = 4$, ruas kiri sama dengan nol. Dengan demikian, $t = 4$ adalah solusi dari persamaan ini. Dengan mengetahui bahwa $t = 4$ adalah akar, selanjutnya dapat kita nyatakan bahwa $(t - 4)$ pasti merupakan faktor dari $P(t)$. Oleh karena itu, $P(t)$ dapat ditulis kembali sebagai hasil kali suku linear dan suku kuadrat:

$$P(t) = t^3 - 17t^2 + 54t - 8 = (t - 4) \times (\text{polinomial kuadrat})$$

Polinomial kuadrat telah ditemukan pada tugas sebelumnya, sehingga kita menyimpulkan bahwa persamaan yang dimaksud dapat dituliskan:

$$P(t) = t^3 - 17t^2 + 54t - 8 = (t - 4)(t^2 - 13t + 2) = 0$$

Pada bentuk ini, kita mengetahui bahwa $t - 4 = 0$ atau $t^2 - 13t + 2 = 0$. Persamaan pertama memberikan hasil $t = 4$ yang sebelumnya sudah kita ketahui. Persamaan kedua harus diselesaikan dengan menggunakan salah satu dari metode-metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat yang dibahas pada bab sebelumnya. Sebagai contoh, dengan menggunakan rumus kuadrat, kita peroleh:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ dengan } a = 1, b = -13, c = 2 \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{161}}{2} = \frac{13 \pm 12.6886}{2} \end{aligned}$$

Jadi, $t_2 = 12.6886$ dan $t_3 = 0.1557$ adalah akar-akar dari $t^2 - 13t + 2$. Dengan demikian, ketiga solusi dari $P(t) = 0$ adalah $t_1 = 4$, $t_2 = 12.6886$, dan $t_3 = 0.1557$.

Contoh 8

Selesaikanlah persamaan $z^3 + 8z^2 + 16z + 3 = 0$, jika diketahui salah satu akarnya: $z = -3$!

Penyelesaian:

Diketahui $z = -3$ adalah akar yang menyatakan faktor linear dari persamaan kubik tersebut. Oleh karena itu, persamaan kubik dapat dinyatakan sebagai:

$$z^3 + 8z^2 + 16z + 3 = (z + 3)(az^2 + bz + c)$$

di mana a , b , dan c adalah konstanta. Ini dapat diperoleh dengan menjabarkan ruas kanan, sehingga diperoleh:

$$z^3 + 8z^2 + 16z + 3 = az^3 + (3a + b)z^2 + (3b + c)z + 3c$$

Berikutnya, samakan koefisien z^3 untuk memperoleh a . Dengan demikian, diperoleh: $a = 1$. Selanjutnya, samakan suku konstanta untuk memperoleh c . Dengan demikian, diperoleh: $3 = 3c$, sehingga $c = 1$. Lebih lanjut, samakan koefisien z^2 untuk memperoleh b . Dengan demikian, diperoleh: $8 = 3a + b$, sehingga $b = 5$. Akhirnya, kita memungkinkan untuk menulis persamaan itu menjadi: $(z + 3)(z^2 + 5z + 1) = 0$

Jadi, $z + 3 = 0$ atau $z^2 + 5z + 1 = 0$. Sekarang, selesaikan bentuk persamaan kuadrat dengan menggunakan salah satu dari metode-metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat yang dibahas pada bab sebelumnya. Selanjutnya, diperoleh: $z_2 = -4,7913$ dan $z_3 = -0,2087$. Dengan demikian, ketiga akar persamaan $z^3 + 8z^2 + 16z + 3$ adalah $z_1 = -3$, $z_2 = -4,7913$, dan $z_3 = -0,2087$.

8.4.3 Solusi Umum Persamaan Kubik, Jika Semua Akarnya Tidak Diketahui

Setelah del Ferro dan Tartaglia menyelesaikan persamaan kubik umum (dan hasilnya diungkap ke publik oleh Cardano), matematikawan kemudian berkonsentrasi pada persamaan pangkat empat (kuartik). Murid Cardano, Ferrari, sekitar tahun 1540 menyarankan metode umum untuk menyelesaikan persamaan kuartik, yaitu: $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ (Sam Houston State University, 2013).

Ia menuliskan kembali soal tersebut agar soal itu tampak melibatkan bentuk kuadrat: $(x^2 + k)^2 = kx^2 - lx + (k^2 - m)$. Sekarang, masukkan variabel baru y dan jabarkan $(x^2 + k + y)^2$

dengan harapan bahwa ruas kanan, $(k + 2y)x^2 - lx + (k^2 - m + 2ky + y^2) - l^2$ adalah kuadrat sempurna. Jadi, kita terlebih dahulu perlu menyelesaikan untuk y .

$$4(k + 2y)(k^2 - m + 2ky + y^2) - l^2 = 0 \dots\dots\dots (7)$$

Karena persamaan (7) adalah persamaan kubik, kita sudah ketahui bagaimana mengerjakannya. Dengan kata lain, bentuk persamaan kuartik, kita jadikan bentuk *monic*, kemudian mengubahnya menjadi persamaan yang lebih sederhana, masukkan y , dan selesaikan bentuk kubik yang sesuai untuk y . Setelah ini dilakukan, selanjutnya kita selesaikan persamaan kuadrat

$$(x^2 + k + y)^2 = (k + 2y)x^2 - lx + (k^2 - m + 2ky + y^2) \text{ untuk memperoleh } x.$$

Selain cara itu, Tehrani (2020) menyatakan bahwa persamaan kuartik yang dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f(s) = s^4 + \delta_1 s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_3 s + \delta_4 = 0 \dots\dots\dots (8)$$

di s adalah variabel, sedangkan $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, dan δ_4 adalah konstanta.

Jika $s = z - (\frac{\delta_1}{4})$, persamaan di atas dapat dinyatakan dalam z menjadi persamaan kuartik yang direduksi:

$$f(z) = z^4 + pz^2 + qz + r \dots\dots\dots (9)$$

di mana:

$$p = \delta_2 - 3\left(\frac{\delta_1^2}{8}\right)$$

$$q = \delta_3 - \left(\frac{\delta_1 \delta_2}{2}\right) + \left(\frac{\delta_1^3}{8}\right)$$

$$r = \delta_4 - \left(\frac{\delta_1 \delta_3}{4}\right) + \left(\frac{\delta_1^2 \delta_2}{16}\right) - 3\left(\frac{\delta_1^4}{256}\right)$$

Persamaan (9) dapat difaktorkan menjadi dua persamaan kuadrat seperti yang ditemukan oleh Descartes (Froberg, 1969).

Selanjutnya, Jika A_1 dan A_2 adalah dua akar persamaan kuartik ini ditulis dalam dua persamaan kuadrat, maka bentuknya adalah sebagai berikut.

$$f(z) = (z - A_1)(z - A_2)(z^2 + az + b) \\ = [z^2 - (A_1 + A_2)z + A_1A_2][z^2 + az + b]$$

Jika $A_1 + A_2 = \gamma$ dan $A_1A_2 = \lambda$, dengan membandingkan persamaan ini dengan persamaan (9), kita peroleh:

$$a = A_1 + A_2 = \gamma$$

dan

$$p = b + \lambda - \gamma^2 \dots\dots\dots (10)$$

$$q = \gamma(\lambda - b) \dots\dots\dots (11)$$

$$r = b\lambda \dots\dots\dots (12)$$

Dengan menyusun kembali persamaan (10) dan (11) dan mengkuadratkan kedua ruas, kita peroleh:

$$(p + \gamma^2)^2 = (b + \lambda)^2 \dots\dots\dots (13)$$

$$\left(\frac{q}{\gamma}\right)^2 = (\lambda - b)^2 \dots\dots\dots (14)$$

Dengan mengurangi persamaan (14) dari (13), kemudian mengganti $b\lambda$ dengan r dari persamaan (12), kita peroleh:

$$(p + \gamma^2)^2 - \left(\frac{q^2}{\gamma^2}\right) = 4r \dots\dots\dots (15)$$

Dengan mengalikan persamaan ini dengan γ^2 , kita peroleh:

$$\gamma^6 + 2p\gamma^4 + (p^2 - 4r)\gamma^2 - q^2 = 0 \dots\dots\dots (16)$$

Jika $\gamma^2 = u$, persamaan (16) dapat dituliskan kembali sebagai berikut.

$$f(t) = u^3 + \alpha_1u^2 + \alpha_2u + \alpha_3 = 0 \dots\dots\dots (17)$$

di mana, $\alpha_1 = 2p, \alpha_2 = p^2 - 4r$, dan $\alpha_3 = -q^2$.

Persamaan kubik (17) memiliki paling sedikit satu akar real u_1 . Akar tersebut dapat ditemukan dengan menggunakan metode penyelesaian persamaan kubik yang telah dibahas sebelumnya. Oleh karena itu, di sini tidak diuraikan kembali. Selanjutnya, karena $u = \gamma^2$, maka kita dapat mensubstitusi u_1 , sebuah akar real dari persamaan kubik tersebut, pada persamaan (10) menjadi:

$$p + u_1 = b + \lambda$$

dan $b = \frac{r}{\lambda}$ dari persamaan (12). Dengan demikian, $p + u_1 = \lambda + (\frac{r}{\lambda})$, sehingga:

$$\lambda^2 - (p + u_1)\lambda + r = 0 \dots\dots\dots (18)$$

yang dapat diselesaikan untuk λ .

Setelah menemukan u_1 dan $\lambda = A_1 A_2$:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \sqrt{u_1} \\ A_1 A_2 &= \lambda \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan ini dapat diselesaikan untuk A_1 dan A_2 yang merupakan dua akar persamaan (9). Akar berikutnya dari persamaan itu, A_3 dan A_4 , dapat ditemukan dengan menyelesaikan:

$$z^2 + u_1^{0,5}z + \left(\frac{r}{\lambda}\right) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

Selanjutnya, akar-akar persamaan (8) dapat ditemukan dengan mengurangkan $\frac{\delta_1}{4}$ dari nilai akar-akar $f(z)$.

8.4.4 Solusi Persamaan Kuintik

Prosedur menentukan akar-akar dari persamaan pangkat tinggi dengan pangkat bilangan bulat lima dan seterusnya adalah sebagai berikut.

$$f(x) = x^n + \delta_1 x^{n-1} + \delta_2 x^{n-2} + \delta_3 x^{n-3} + \dots + \delta_n = 0$$

di mana $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_n$ adalah konstanta. Juga, n adalah bilangan bulat positif.

Untuk menyelesaikannya, pertama-tama, tentukan $f(x)$ di $-1, 0, +1$. Jika ada akar, pisahkan dengan pemfaktoran. Selanjutnya, tentukan $f(x)$ di sekitar $|r| = 1$ (misalnya, $-1.1, -0.9, +0.9$, dan $+1.1$). Jika ada perubahan tanda pada daerah hampiran itu, gunakan iterasi berturut-turut di antara dua titik yang memberikan tanda berlawanan untuk $f(x)$ agar kita dapat memperoleh akar real dan memisahkan akar itu dengan pemfaktoran.

Lanjut, jika $\left| \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \right| < 1$, hitunglah $k_1 = (\delta_{n-1}^2 - 4\delta_{n-2}\delta_n)$. Kemudian, apakah $k_1 \geq 0$? Jika $k_1 > 0$, tentukan $f(x)$ di $r = \frac{[-\delta_{n-1} \pm s_1]}{2\delta_{n-2}}$, di mana $s_1 = [k_1]^{0.5}$. Lalu, hitunglah $f(x)$ di $x = -\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$. Jika pada dua dari titik-titik ini, $f(x)$ memiliki tanda-tanda yang berlawanan, carilah akar real di antara titik-titik itu dengan iterasi berturut-turut (Jika $k_1 = 0$, gunakanlah titik $\frac{-\delta_{n-1}}{2\delta_{n-2}}$ dan $-\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$).

Selanjutnya, jika $k_1 < 0$, carilah $f'(x)$ di $(-\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}})$ dan sebut sebagai n_1 . Selanjutnya, tentukan: $x_1 = (-\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}})$, $f(x_1) = y_1$, $x_2 = x_1 - (\frac{y_1}{n})$. Berikutnya, carilah $f(x_2)$. Lalu, jika $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ tandanya berlawanan, carilah akar real di antara kedua titik itu dengan iterasi berurutan dan pisahkan dengan pemfaktoran (Jika $k_2 = 0$, gunakan $-\delta_1$ dan $\frac{-\delta_1}{2}$ sebagai dua titik).

Lebih lanjut, jika $k_2 < 0$, carilah $f'(x)$ di $x = -\delta_1$, dan sebut sebagai n_2 , $x_3 = -\delta_1$, $f(x_3) = y_3$, dan $x_4 = x_3 - \left(\frac{y_3}{n_2}\right)$. Kemudian, hitunglah $f(x_4)$. Lalu, jika $f(x_3)$ dan $f(x_4)$ tandanya berlawanan, carilah akar real di antara x_3 dan x_4 dengan iterasi berurutan dan pisahkan dengan pemfaktoran. Jika $\left|\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right| > 1$ dan $|\delta_1| < 1$, fokus berikutnya mestinya adalah pada penentuan akar-akar di sekitar $|r| = 1^2$.

Terakhir, jika faktorisasi polinomial kuintik telah tereduksi ke kuartik, selanjutnya gunakan prosedur penyelesaian persamaan kuartik yang telah dibahas sebelumnya untuk menentukan akar-akar lain yang belum diketahui.

Contoh 9

Selesaikanlah persamaan berikut.

$$f(z) = z^5 - 8z^4 - 21z^3 + 8z^2 - 4z + 240 = 0$$

Penyelesaian:

Dari persamaan itu, $\delta_1 = -8$, $\delta_2 = -21$, $\delta_3 = 8$, $\delta_4 = -4$, $\delta_5 = 240$. Kemudian, dengan cepat dapat ditentukan bahwa polinomial tersebut tidak memiliki akar di $-1, 0, +1$.

$$\left|\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right| = \frac{240}{4} = 60. \text{ Ini berarti } \left|\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right| > 1$$

$$|\delta_1| = 8. \text{ Ini berarti } |\delta_1| > 1$$

$$k_2 = \delta_1^2 - 4\delta_2 = 8^2 - 4(-21) = 148. \text{ Ini berarti } k_2 > 0$$

$$s_2 = [k_2]^{0,5} = 12,16$$

$$\text{Batas dari suatu akar, yaitu } \frac{[-\delta_1 \pm s_2]}{2} = -2,08; 10,08$$

$$f(-2,08) = 283,23$$

$$f(10,08) = 978,12$$

$$f(-\delta_1) = f(8) = -10032$$

Iterasi berturut-turut dimulai dari titik-titik di 8 dan 10,08, sehingga diperoleh:

$r = 10$ setelah tujuh iterasi.

Dengan pefaktoran:

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{(z-10)} = z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 24$$

Untuk memperoleh akar-akar dari fungsi kuartik $f_1(z)$, kita dapat menggunakan prosedur penentuan akar-akar persamaan kuartik yang telah diuraikan di atas. Dengan demikian, $z = x - \frac{2}{4} = x - 0,5$ dan $f_1(x) = x^4 - 2,5x^2 - 23,4375$.

Akar-akar dari $f_1(x)$ ditemukan pada $x = \pm 2,5$ dan akar-akar dari $f_1(z)$ ditemukan sebagai:

$$r_2 = -2,5 - 0,5 = -3$$

$$r_3 = 2,5 - 0,5 = 2$$

Selanjutnya, dengan pefaktoran:

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{(z-2)(z+3)} = z^2 + z + 4$$

Berikutnya, menetapkan: $f_2(z) = z^2 + z + 4$, diperoleh:

$$r_4, r_5 = -0,5 \pm 1,936i$$

Oleh karena itu, diperoleh akar-akar dari persamaan kuintik tersebut, yaitu: $-3, 2, 10$ dan $(-0,5 \pm 1,936i)$.

8.4.5 Solusi Persamaan Sekstik

Sebelumnya telah dikemukakan prosedur menentukan akar-akar dari persamaan pangkat tinggi dengan pangkat bilangan bulat lebih dari empat. Artinya, cara sebelumnya juga dapat digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan sekstik, persamaan septik dan seterusnya (Tehrani, 2020). Meskipun demikian, di sini akan diberikan cara lain untuk memperkaya alternatif penentuan solusi persamaan sekstik (Kulkarni, 2008).

Misalkan persamaan sekstik,

$$x^6 + \alpha_5 x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \dots\dots\dots (20)$$

di mana $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ adalah koefisien real pada persamaan di atas. Perhatikan persamaan sekstik yang lain seperti yang ditunjukkan di bawah ini.

$$(x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0)^2 - (\gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0)^2 = 0 \dots\dots\dots (21)$$

di mana $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dan $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ adalah koefisien yang tak diketahui pada polinomial kubik dan polinomial kuadrat secara berurutan pada persamaan di atas. Penting dicatat bahwa persamaan sekstik (21) dapat dengan mudah diuraikan menjadi dua faktor sebagai berikut.

$$[x^3 + (\beta_2 - \gamma_2)x^2 + (\beta_1 - \gamma_1)x + \beta_0 - \gamma_0][x^3 + (\beta_2 + \gamma_2)x^2 + (\beta_1 + \gamma_1)x + \beta_0 + \gamma_0] = 0 \dots\dots\dots (22)$$

Oleh karena itu, jika persamaan sekstik (20) dapat direpresentasikan dalam bentuk (21), maka persamaan itu dapat difaktorkan menjadi dua faktor polinomial kubik seperti yang ditunjukkan pada (22), yang menuntun pada solusi persamaan itu. Faktor-faktor polinomial ini disamakan dengan nol untuk persamaan-persamaan kubik berikut.

$$\begin{aligned} x^3 + (\beta_2 - \gamma_2)x^2 + (\beta_1 - \gamma_1)x + \beta_0 - \gamma_0 &= 0 \\ x^3 + (\beta_2 + \gamma_2)x^2 + (\beta_1 + \gamma_1)x + \beta_0 + \gamma_0 &= 0 \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

Keenam akar persamaan sekstik (20), kemudian diperoleh dengan menyelesaikan persamaan kubik di atas. Jadi, untuk merepresentasikan persamaan sekstik (20) dalam bentuk (21), koefisien-koefisien (20) mestinya sama dengan koefisien-koefisien (21). Namun demikian, koefisien-koefisien (21) tidak tersedia secara eksplisit. Oleh karena itu, persamaan sekstik (21) sekarang diekspansi dan disusun kembali dalam bentuk pangkat x menurun seperti yang ditunjukkan di bawah ini untuk memudahkan penyamaan koefisien-koefisiennya dengan koefisien-koefisien persamaan sekstik (20).

$$x^6 + 2\beta_2 x^5 + (\beta_2^2 + 2\beta_1 - \gamma_2^2)x^4 + 2(\beta_0 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2)x^3 + [\beta_1^2 + 2\beta_0\beta_2 - (\gamma_1^2 + \gamma_0\gamma_2)]x^2 + 2(\beta_0\beta_1 - \gamma_0\gamma_1)x + \beta_0^2 - \gamma_0^2 = 0 \dots\dots\dots (24)$$

Penyamaan koefisien-koefisien (24) dengan koefisien-koefisien dari persamaan sekstik (20) menghasilkan enam persamaan berikut.

$$2\beta_2 = \alpha_5 \dots\dots\dots (25)$$

$$\beta_2^2 + 2\beta_1 - \gamma_2^2 = \alpha_4 \dots\dots\dots (26)$$

$$2(\beta_0 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2) = \alpha_3 \dots\dots\dots (27)$$

$$\beta_1^2 + 2\beta_0\beta_2 - (\gamma_1^2 + \gamma_0\gamma_2) = \alpha_2 \dots\dots\dots (28)$$

$$2(\beta_0\beta_1 - \gamma_0\gamma_1) = \alpha_1 \dots\dots\dots (29)$$

$$\beta_0^2 - \gamma_0^2 = \alpha_0 \dots\dots\dots (30)$$

Penting dicatat bahwa meskipun ada enam persamaan [(25) sampai (30)] untuk menentukan keenam koefisien yang tidak diketahui ($\beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1$, dan γ_2), semua yang tidak diketahui itu tidak dapat ditentukan, karena solusi persamaan sekstik umum tidak mungkin dalam bentuk akar. Karena tujuan kita adalah untuk menyelesaikan persamaan sekstik dalam bentuk akar, berikutnya diperkenalkan satu lagi persamaan yang disebut persamaan suplemen untuk menentukan keenam koefisien yang tidak diketahui. Persamaan suplemen yang diperkenalkan akan menentukan jenis sekstik yang dapat diselesaikan. Misalkan persamaan suplemen yang diperkenalkan adalah sebagai berikut.

$$\gamma_2 = 0 \dots\dots\dots (31)$$

Dari (25) β_2 dihitung dengan:

$$\beta_2 = \frac{\alpha_5}{2} \dots\dots\dots (32)$$

Dengan menggunakan (31) dan (32) pada persamaan (26), β_1 diperoleh sebagai:

$$\beta_1 = \left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - \left(\frac{\alpha_5^2}{2}\right) \dots\dots\dots (33)$$

Dengan menggunakan (31), (32), dan (33), nilai γ_2, β_2 , dan β_1 disubstitusi pada persamaan (27) untuk menghitung β_0 dengan:

$$\beta_0 = \left[\left(\frac{\alpha_8}{2} \right) - \left(\frac{\alpha_5^3}{16} \right) - \left(\frac{\alpha_4 \alpha_5}{4} \right) \right] \dots\dots\dots (34)$$

Dengan menggunakan (31), (32), (33), dan (34) secara berurutan, nilai $\gamma_2, \beta_2, \beta_1$, dan β_0 disubstitusi pada persamaan (28), untuk memperoleh nilai γ_1^2 , yaitu:

$$\gamma_1^2 = \left[\left(\frac{5\alpha_5^4}{64} \right) - \left(\frac{3\alpha_4 \alpha_5^2}{8} \right) + \left(\frac{\alpha_4^2}{4} \right) + \left(\frac{\alpha_8 \alpha_5}{2} \right) - \alpha_2 \right] \dots\dots (35)$$

Dari bentuk di atas, kita ketahui bahwa γ_1 memiliki dua nilai, yaitu γ_{11} dan γ_{12} , seperti yang ditunjukkan di bawah ini.

$$\gamma_{11} = \alpha_6$$

$$\gamma_{12} = -\alpha_6 \dots\dots\dots (36)$$

di mana α_6 diketahui melalui:

$$\alpha_6 = \sqrt{\left(\frac{5\alpha_5^4}{64} \right) - \left(\frac{3\alpha_4 \alpha_5^2}{8} \right) + \left(\frac{\alpha_4^2}{4} \right) + \left(\frac{\alpha_8 \alpha_5}{2} \right) - \alpha_2} \dots\dots\dots (37)$$

Dengan mengamati bentuk di atas untuk α_6 , pembaca yang penasaran mungkin bertanya-tanya apakah metode yang diajukan sudah tepat, jika α_6 adalah imajiner, yaitu jika suku di bawah tanda akar kuadrat pada (37) menjadi negatif. Tentu saja, sudah tepat seperti yang dapat dilihat nanti melalui contoh yang diberikan di akhir bahasan ini. Satu-satunya syarat pada α_6 adalah bahwa α_6 itu tak nol.

Perhatikan persamaan (29). Substitusilah nilai $\gamma_2, \beta_2, \beta_1, \beta_0$, dan γ_1 dengan menggunakan (31), (32), (33), (34), dan (36) secara berurutan pada (29), untuk menentukan γ_0 . Karena γ_1 memiliki dua nilai, yaitu γ_{11} dan γ_{12} ; γ_0 juga memiliki dua nilai, yaitu γ_{01} dan γ_{02} , seperti yang ditunjukkan di bawah ini (untuk $\alpha_6 \neq 0$).

$$\gamma_{01} = \frac{\alpha_7}{\alpha_6}$$

$$\gamma_{02} = \frac{-\alpha_7}{\alpha_6} \dots\dots\dots (38)$$

di mana α_7 diketahui melalui:

$$\alpha_7 = \left(\frac{\alpha_3\alpha_4}{4}\right) + \left(\frac{\alpha_4\alpha_5^3}{16}\right) - \left(\frac{\alpha_4^2\alpha_5}{8}\right) - \left(\frac{\alpha_3\alpha_5^2}{16}\right) - \left(\frac{\alpha_5^5}{128}\right) - \left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \dots\dots\dots (39)$$

Kita telah menentukan semua nilai yang tidak diketahui, dan mensubsitusinya pada persamaan kubik (23), sehingga kita peroleh pasangan persamaan kubik berikut ini.

$$x^3 + \beta_2x^2 + (\beta_1 - \alpha_6)x + \beta_0 - \left(\frac{\alpha_7}{\alpha_6}\right) = 0$$

$$x^3 + \beta_2x^2 + (\beta_1 + \alpha_6)x + \beta_0 + \left(\frac{\alpha_7}{\alpha_6}\right) = 0 \dots\dots\dots (40)$$

Ingat bahwa meskipun ada dua nilai, yaitu γ_0 dan γ_1 , kedua nilai ini akan menghasilkan pasangan persamaan kubik yang sama. Persamaan-persamaan ini kemudian diselesaikan dengan menggabungkan metode yang telah dibahas sebelumnya untuk memperoleh keenam akar dari persamaan sekstik yang ingin diketahui (20).

Selanjutnya, mengenai persamaan sekstik, perlu diketahui juga perilaku akar-akar pada persamaan ini. Misalkan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , dan x_6 adalah akar-akar dari persamaan sekstik. Misalkan x_1, x_2 , dan x_3 adalah akar-akar dari persamaan kubik pertama pada (40), dan x_4, x_5 , dan x_6 adalah akar-akar persamaan kubik kedua. Penting dicatat bahwa suku x^2 pada kedua persamaan kubik adalah sama. Artinya, jumlah akar-akar x_1, x_2 , dan x_3 sama dengan jumlah akar-akar x_4, x_5 , dan x_6 . Sehingga, jumlah akar-akar ini sama dengan $\frac{-\alpha_5}{2}$. Dengan demikian, relasi akar-akarnya adalah sebagai berikut.

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 \dots\dots\dots (41)$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = \frac{-\alpha_5}{2} \dots\dots\dots (42)$$

Kita ketahui bahwa persamaan sekstik yang dapat diselesaikan memiliki satu akar terikat, dan ditentukan dari lima akar lainnya melalui relasi (41).

Kemudian, mengenai syarat koefisien, karena salah satu akar persamaan sekstik (20) adalah akar terikat, maka salah satu dari koefisien-koefisiennya juga adalah koefisien terikat, dan dapat ditentukan melalui koefisien yang lain. Untuk menurunkan relasi ini (di antara koefisien-koefisiennya) perhatikan persamaan (30), dan substitusilah nilai-nilai β_0 dan γ_0 pada (30) dengan menggunakan (34) dan (38) secara berurutan. Kita peroleh bentuk berikut yang hanya memuat koefisien-koefisien dari (20).

$$\alpha_0 = \left[\left(\frac{\alpha_8}{2} \right) + \left(\frac{\alpha_5^3}{16} \right) - \left(\frac{\alpha_4 \alpha_5}{4} \right) \right]^2 - \left(\frac{\alpha_7}{\alpha_6} \right)^2 \dots\dots\dots (43)$$

Bentuk (43) adalah syarat koefisien yang harus dipenuhi, sehingga persamaan sekstik (20) dapat diselesaikan dengan cara yang disarankan di atas. Ingat bahwa koefisien, α_0 , dapat ditentukan dari koefisien-koefisien yang lain dengan menggunakan relasi (43).

Lebih lanjut, catatan tentang persamaan suplemen. Sebelumnya telah diperkenalkan satu persamaan suplemen, $\gamma_2 = 0$, untuk memudahkan penentuan apa yang belum diketahui. Persamaan suplemen yang dipilih memutuskan jenis persamaan sekstik yang dapat diselesaikan. Ingat bahwa jika kita memperkenalkan, $\gamma_0 = 0$, sebagai persamaan suplemen, maka hasil kali tiga akar-akar persamaan sekstik yang dapat diselesaikan itu sama dengan hasil kali tiga akar-akar yang lain, seperti yang ditunjukkan berikut ini.

$$x_1 x_2 x_3 = x_4 x_5 x_6$$

Bagi pembaca yang berminat, silakan selesaikan persamaan sekstik dengan menggunakan persamaan suplemen, $\gamma_0 = 0$, dan buktikan bahwa akar-akar berelasi seperti di atas.

Contoh 10

Selesaikanlah persamaan sekstik berikut.

$$z^6 - 8z^5 + 32z^4 - 78z^3 + 121z^2 - 110z + 50 = 0$$

Penyelesaian:

Langkah pertama adalah mengecek apakah koefisien-koefisien pada persamaan sekstik di atas memenuhi syarat yang ditetapkan pada bentuk (43) atau tidak. Dengan menghitung α_0 dari bentuk (43), kita peroleh $\alpha_0 = 50$, dan dengan demikian kita ketahui bahwa syarat ini terpenuhi. Dengan menggunakan (32), (33), (34), (37), dan (39), maka $\beta_2, \beta_1, \beta_0, \gamma_1$, dan γ_0 dihitung sebagai: $\beta_2 = -4$, $\beta_1 = 8$, $\beta_0 = -7$, $\gamma_1 = i$, dan $\gamma_0 = i$ secara berurutan, di mana $i = \sqrt{-1}$. Dengan menggunakan nilai-nilai ini pada (23), maka pasangan persamaan kubik yang diperoleh adalah:

$$z^3 - 4z^2 + (8 + i)z - 7 + i = 0$$

$$z^3 - 4z^2 + (8 - i)z - 7 - i = 0$$

Akar-akar persamaan kubik yang pertama pada pasangan di atas ditentukan dari metode (23), yaitu: $1 + i$, $2 + i$, dan $1 - 2i$; dan akar-akar persamaan kubik kedua, diperoleh: $1 - i$, $2 - i$, dan $1 + 2i$. Dengan demikian, keenam akar persamaan itu telah diperoleh.

LATIHAN

1. Sebuah persamaan kubik dengan 3 sebagai koefisien pangkat tertingginya memiliki tiga akar, yaitu -4 , 23 , dan 5 . Carilah persamaan kubik yang dimaksud!
2. Seseorang bingung, karena persamaan polinomial $x^3 - 25x = 0$ dianggap memiliki tiga akar kompleks, tetapi akar-akarnya adalah 0 , 5 , dan -5 yang semuanya adalah

bilangan real. Berikanlah penjelasan tentang hal yang membuat Amir bingung!

3. Berapakah banyaknya solusi kompleks dari persamaan $\pi w^3 - 3iw + \frac{1}{17} = 0$?
4. Berapakah banyaknya akar-akar yang dimiliki oleh kedua persamaan berikut.
 - a. $4ex^5 + 3ix^2 - (2 + i)x + 4 = 0$
 - b. $5x^{12} - 64x^3 + 4x^2 + 1 = 0$
5. Faktorkanlah bentuk polinomial berikut!
 - a. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, salah satu faktornya adalah $x - 1$
 - b. $x^3 - 7x - 6$, salah satu faktornya adalah $x + 2$
 - c. $x^3 - x^2 - 65x - 63$, salah satu faktornya adalah $x + 7$
 - d. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, salah satu faktornya adalah $x + 1$
 - e. $3x^3 + 7x^2 - 22x - 2$, salah satu faktornya adalah $x + 4$
 - f. $x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 31x + 20$, salah satu faktornya adalah $x + 1$
 - g. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$, salah satu faktornya adalah $x + 1$
 - h. $x^4 - 2x^3 - 24x^2$, salah satu faktornya adalah $x + 4$
 - i. $x^4 - 8x$, salah satu faktornya adalah $x - 2$
 - j. $2x^4 - 8x^2$, salah satu faktornya adalah $x + 2$
 - k. $x^4 + 4x^3 - 17x^2 + 18x + 4$, salah satu faktornya adalah $x + 2$
 - l. $x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x - 4$, salah satu faktornya adalah $x - 2$
6. Tunjukkan bahwa:
 - a. $x = 1$ adalah salah satu akar dari $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!

- b. $x = -2$ adalah salah satu akar dari $x^3 - 7x - 6 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
- c. $x = -7$ adalah salah satu akar dari $x^3 - x^2 - 65x - 63 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
- d. $x = -1$ adalah salah satu akar dari $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
- e. $x = -4$ adalah salah satu akar dari $3x^3 + 7x^2 - 22x - 2 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
- f. $x = -1$ adalah salah satu akar dari $x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 31x + 20 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
- g. $x = -1$ adalah salah satu akar dari $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
- h. $x = -4$ adalah salah satu akar dari $x^4 - 2x^3 - 24x^2 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
- i. $x = 2$ adalah salah satu akar dari $x^4 - 8x = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
- j. $x = -2$ adalah salah satu akar dari $2x^4 - 8x^2 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
- k. $x = -2$ adalah salah satu akar dari $x^4 + 4x^3 - 17x^2 + 18x + 4 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!

- l. $x = 2$ adalah salah satu akar dari $x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x - 4 = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
7. Selesaikanlah persamaan berikut!
- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
 - $x^3 - 7x - 6 = 0$
 - $x^3 - x^2 - 65x - 63 = 0$
 - $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$
 - $3x^3 + 7x^2 - 22x - 2 = 0$
 - $5x^3 + 12x^2 - 36x - 16 = 0$
 - $6x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$
 - $x^4 - 8x = 0$
 - $2x^4 - 8x^2 = 0$
 - $x^4 - 2x^3 - 24x^2 = 0$
 - $x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 31x + 20 = 0$
 - $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$
 - $x^4 + 4x^3 - 17x^2 + 18x + 4 = 0$
 - $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x + 8 = 0$
 - $6x^4 + 31x^3 + 25x^2 - 33x + 7 = 0$
 - $81x^5 - 54x^4 + 3x^2 - 2x = 0$
 - $x^5 - 8x^4 + 15x^3 + 8x^2 - 64x + 120 = 0$
 - $6x^5 + 3x^4 + 3x^2 + 5x + 6 = 0$
8. Tentukanlah a terlebih dahulu, jika diketahui bahwa -4 adalah salah satu akar dari $5x^6 - 7x^5 + 11x + a = 0$, kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!
9. Tentukanlah b terlebih dahulu, jika diketahui bahwa 3 adalah salah satu akar dari $x^7 - 10x^5 + 8x^3 + 4x^2 - 3x + b = 0$,

kemudian tentukanlah akar-akar yang lain secara aljabar!

10. Selesaikanlah persamaan berikut!

a. $(x - 3)^4(7x - 22)(x^2 - 6x + 25) = 0$

b. $x^4 + 2x^2 + 6\sqrt{10}x + 1 = 0$

c. $4x^4 - 8\sqrt{2}x^3 + 20x^2 - 12\sqrt{2}x + 9 = 0$

d. $16x^4 + 32\sqrt{3}x^3 + 104x^2 - 8\sqrt{3}x - 15 = 0$

e. $16x^4 - 32\sqrt{3}x^3 + 8x^2 - 32x + 1 = 0$

f. $4x^5 + x^3 - 5x^2 - 18x + 10 = 0$

g. $x^5 - x^4 - 21x^3 - 37x^2 - 98x - 24 = 0$

h. $x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 42x^2 + 40x = 0$

i. $x^6 - 2,5x^5 - 24x^4 + 8,5x^3 + 38x^2 + 126x - 72 = 0$

j. $x^6 - 0,8x^5 + 2,1x^4 - 1,5x^3 + 3,1x^2 + 4x - 5,1 = 0$

DAFTAR PUSTAKA

- Froberg, C-E. 1969. *Introduction to Numerical Analysis* (2nd Edition). Massachussets: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Kulkarni, R. G. 2008. Solving Sextic Equations. *Atlantic Electronic Journal of Mathematics*. 3(1): 56-60. <http://euclid.trentu.ca/aejm/V3N1/Kulkarni.V3N1.pdf>
- Nielsen, K. J. 1958. *College Mathematics: The Essentials of Algebra, Trigonometry, Analytic Geometry, Calculus*. New York: Harper & Row, Publishers, Inc.
- Sam Houston State University. 2013. *Forty Days to Mastery of Precalculus*. https://www.shsu.edu/kws006/professional/Concepts_files/SolvingCubics.pdf
- Senk, S. L., Thompson, D. R., Viktora, S. S., Rubenstein, R., Halvorson, J., Flanders, J., Jakucyn, N., Pillsbury, G., Usiskin, Z. 1990. *Advanced Algebra: The University of Chicago School Mathematics Project*. Illinois: Scott, Foresman and Company.
- Tehrani, F. T. 2020. Solution to Polynomial Equations, a New Approach. *Applied Mathematics*. 11, 53-66. DOI: 10.4236/am.2020.112006.
- The Higher Education Funding Council for England. 2015. *Helping Engineers Learn Mathematics Project*. https://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/helm_workbooks.html.

BAB 9

DALIL SISA DAN HASIL BAGI ISTIMEWA

Wanda Nugroho Yanuarto

9.1 Teorema Sisa

Teorema Sisa merupakan salah satu konsep dalam Aljabar elementer, yaitu suku banyak. Di dalam sebuah teorema yang ada di Aljabar Elementer, salah satunya adalah teorema sisa. Dalam bab ini akan dibahas bagaimana konsep pembagian sisa dalam persamaan suku banyak (Fernandes, 2019).

Jika diketahui sebuah fungsi suku banyak, yaitu $f(x)$ yang akan dibagi dengan $p(x)$ sehingga didapatkan hasil pembagian tersebut adalah suatu fungsi suku banyak yang lain, boleh diartikan sebagai fungsi $h(x)$

$$f(x) = p(x).h(x) + s$$

Diketahui bahwa s ialah konstanta

10.1.2 Pembuktian Teorema sisa

10.1.2.1. Teorema Sisa I

Diketahui $f(x)$ merupakan fungsi dengan derajat n yang akan dibagi dengan $(x - k)$ dengan sisa pembagian ialah $s = f(k)$. Dengan fungsi sisa $f(k)$ yaitu nilai dari fungsi suku banyak untuk setiap $x = k$.

Pembuktian:

$$f(x) = (x - k).h(x) + s$$

Diketahui bahwa derajat s yang nilainya lebih rendah satu derajat dari $(x - k)$, dengan demikian s adalah sebuah konstanta. Hal ini

berakibat $f(x) = (x - k).h(x) + s$ dengan setiap nilai x diubah menjadi k , sehingga didapatkan:

$$f(x) = (x - k).h(x) + s$$

$$f(k) = (k - k).h(k) + s$$

$$f(k) = 0.h(k) + s$$

$$f(k) = 0 + s$$

$$f(k) = s$$

Sehingga, $f(k) = s$, dimana s merupakan sisa pembagiannya.

Berikutnya akan disajikan contoh sebagai ilustrasi lebih detail dari teorema sisa pembagian di atas:

Diketahui sebuah fungsi suku banyak $2x^3 + 7x^2 + 5$ dengan $x - 1$. Tentukan sisa pembagian dari fungsi suku banyak tersebut di atas.

Jawab:

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Jadi sisa dari fungsi adalah $f(1)$

Diperoleh persamaan yang baru adalah di bawah ini:

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 5$$

$$f(1) = 2(1)^3 + 7(1)^2 + 5$$

$$f(1) = 2 + 7 + 5$$

$$f(1) = 14$$

Dalam membuktikan hal tersebut di atas, dapat pula menggunakan aturan pembagian secara susun, sebagai berikut:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 2x^2 + 9x + 9 \end{array} \longrightarrow \text{Hasil} \\
 x - 1 \overline{) \begin{array}{r} 2x^3 + 7x^2 + 5 \\ \underline{2x^3 - 2x^2} \\ 9x^2 + 5 \\ \underline{9x^2 - 9x} \\ 9x + 5 \\ \underline{9x - 9} \\ 14 \end{array}} \longrightarrow \text{Sisa}
 \end{array}$$

Beberapa hal lain yang dapat dilakukan di samping penggunaan metode di atas, dapat juga menggunakan metode Horner, adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 1 \\ 2 \quad 9 \quad 9 \end{array} \left| \begin{array}{r} 2 \quad 7 \quad 0 \quad 5 \\ \hline 2 \quad 9 \quad 9 \end{array} \right| \begin{array}{r} 14 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \text{Sisa} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 2 \quad 9 \quad 9 \end{array} \longrightarrow \text{Hasil}
 \end{array}$$

9.2 Teorema Faktor

Diketahui sebuah fungsi $f(x)$ merupakan fungsi suku banyak, dan $(x - k)$ adalah sebuah faktor dari fungsi $f(x)$ oleh karena itu didapatkan bahwa $f(x) = 0$.

10.1.2.1 Pembuktian

Diberikan $(x - k)$ yang merupakan sebuah faktor fungsi $f(x)$, didapatkan

$$f(x) = (x - k) \cdot h(x) \quad \dots (1)$$

Dari penjelasan di atas, didapatkan bahwa $h(x)$ merupakan fungsi dari hasil bagi, disubstitusikan ke $x = k$ ke persamaan (1), maka didapatkan

$$f(k) = (k - k) \cdot h(k) \dots (2)$$

$$f(k) = 0$$

Sehingga dibuktikan bahwa $(x - k)$ merupakan sebuah faktor fungsi $f(x)$ dengan $f(k) = 0$.

Dari pembuktian teorema di atas, dapat dijelaskan secara detail dengan menggunakan contoh berikut.

Diketahui sebuah persamaan $x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 6 = 0$, tentukan faktor dari persamaan di atas dengan menggunakan metode Horner.

Penyelesaian:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 2 & 1 & -1 & -1 & 4 & -6 \\
 & & 2 & 2 & 2 & 6 & + \\
 \hline
 -2 & 1 & 1 & 1 & 6 & 0 \\
 & & -2 & 2 & -6 & & + \\
 \hline
 & 1 & -1 & 3 & 0 & &
 \end{array}$$

Disebabkan hasil dari metode Horner yang terakhir yaitu $x^2 - x + 3$ tidak bisa difaktorkan lagi, sehingga faktor yang tersisa dari $x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 6 = 0$ adalah $(x - 2)$ dan $(x + 2)$.

9.3 Akar Rasional dari Suku Banyak

Diketahui sebuah bentuk persamaan polinomial (suku banyak) dengan x dan koefisien bilangan real, di bawah ini:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 + a_0 = 0$$

Diketahui $a \neq 0$, maka n adalah bilangan Asli dengan $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ merupakan sebuah nilai pasti (konstanta)

sebagai penentu dari nilai x dari sebuah persamaan di atas disebut sebagai akar persamaan dari suku banyak (Mahmudah, 2020).

Untuk menentukan nilai x dapat juga dicarikan penyelesaian dengan menggunakan metode Horner seperti penjelasan di atas.

Diketahui sebuah $p(x)$ merupakan sebuah fungsi polinom (suku banyak), dan $(x - h)$ merupakan sebuah faktor dan $p(x)$ merupakan sebuah akar dari persamaan $p(x) = 0$ dalam mencari akar rasional bulat persamaan banyak tersebut dapat dicari penyelesaiannya.

9.4 Definisi Akar Rasional

9.4.1 Bilangan Irasional

Diketahui $\frac{b}{c}$ merupakan sebuah bilangan Irasional merupakan pecahan suku rendah, maka persamaan suku banyak yang terjadi ialah $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$, dimana nilai $a \neq 0$.

Dengan melihat koefisien x adalah bilangan bulat, dengan " b " adalah faktor dari a_0 dan " c " merupakan sebuah faktor bilangan bulat dari a_n , jika diketahui $\frac{b}{c}$ adalah akar rasional dari persamaan suku banyak $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$, dengan nilai " b " dibatasi dengan akar sampai nilai 2, oleh karena itu $\pm 1, \pm 2$, dengan nilai " c " dibatasi dengan faktor dari 6, adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, dan ± 6 , maka akar rasional yang didapatkan ialah $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3}$.

9.4.2 Bilangan Irasional dari $p(x)$

Diketahui sebuah ketentuan persamaan $p(x) = 0$ dengan koefisien bilangan bulat yang mempunyai koefisien pangkat tertinggi yaitu 1 dan yang lainnya dalam bentuk " p " seperti dalam bentuk persamaan umum di bawah ini:

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

Sehingga untuk setiap bilangan akar rasional dari $p(x)$ merupakan sebuah bilangan bulat dan terdapat faktor dari pn , maka akar rasional yang terjadi dari persamaan $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$ adalah terbatas sampai faktor bilangan bulat 12, yaitu $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

9.4.3 Akar Bilangan Rasional Suku Banyak $p(x) = 0$

Diberikan sebuah persamaan polinom (suku banyak) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$. Dengan melihat persamaan suku banyak sebelumnya, akan dicari akar rasional suku banyak, maka yang harus dilakukan adalah memfaktorkan fungsi terlebih dahulu. Beberapa langkah yang harus dilakukan sebelum difaktorkan, yaitu:

1. Diandaikan $a_0 = 0$, sehingga satu akar dari suku banyak yang pasti yaitu bernilai 0
2. Diketahui keseluruhan koefisien suku banyak yaitu 0, sehingga salah satu akar suku banyak yang terjadi yaitu 1 suku banyak, atau $(x - 1)$.
3. Diketahui total nilai pasti (koefisien) dimana pangkatnya adalah bilangan genap, yaitu sama dengan jumlah koefisien x yang berpangkat ganjil, sehingga satu akar yang terjadi yaitu -1 , atau $(x + 1)$.
4. Diandaikan langkah 1 sampai 3 sudah tidak boleh dikerjakan, maka yang harus dilakukan adalah membagi

suku banyak dengan $x - k$ dimana nilai k merupakan faktor dari a_0 .

- Seandainya langkah ke-4 sudah tidak boleh dikerjakan, maka langkah terakhir adalah bagilah fungsi suku banyak dengan $x - m$, yaitu m adalah faktor dari $\frac{a_0}{a_n}$ (Bunga, 2021).

Sebagai perhatian, seandainya proses pengerjaan suku banyak adalah hanya satu langkah saja dan sudah dapat ditemukan akar yang besarnya adalah p , sehingga suku banyak yang dikerjakan di langkah berikutnya ialah suku banyak yang sudah terbagi dengan $x - p$ (Martinez, 2020).

Sebagai contoh adalah menentukan himpunan dari persamaan suku banyak $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$

Jawab:

- Langkah 1

Mencari jumlah koefisien dari persamaan suku banyak, yaitu $1 - 15 - 0 + 24 = 0$, sehingga didapatkan $0 = 0$.

Metode Horner

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -15 & -10 & 24 \\ & & 1 & 1 & -14 & -24 \\ \hline & 1 & 1 & -14 & -24 & 0 \end{array}$$

- Kembali ke langkah 1, jumlah koefisiennya adalah $1 + 1 - 14 - 24 = 0$, sehingga didapatkan $-36 \neq 0$
- Langkah 2, yaitu jumlah koefisien dari persamaan pangkat genap, maka $1 - 24 = -23$, sehingga bilangan ganjil ditambah dengan bilangan genap, dengan koefisien variabel pangkat bilangan ganjil, yaitu $1 - 14 = -13$
- Langkah 3, yaitu faktor dari persamaan dan nilai mutlak yang didapatkan, yaitu KPK dari 24 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$.

5. Metode Horner

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -14 & -24 \\ & & -2 & 2 & 24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & \text{sisanya} \equiv 0 \end{array}$$

Sehingga, didapatkan Himpunan penyelesaiannya adalah $\{-3, -2, 1, 4\}$, atau $\{(x - 1), (x + 2), (x + 3), (x - 4)\}$.

9.5 Kesimpulan, Implikasi, Dan Saran

9.5.1 Kesimpulan

Matematika merupakan cabang ilmu yang mendasari seluruh cabang ilmu yang ada di pendidikan. Di samping itu, dalam cabang matematika, terdapat satu sub materi yang boleh diajarkan di dunia pendidikan sekolah tinggi, salah satunya adalah Aljabar. Di dalam Aljabar tersebut juga ada satu sub materi yang bisa dikuasai, yaitu Aljabar Elementer (Wardah, Utomo and Putri, 2021). Di dalam Aljabar Elementer terdapat banyak penguasaan konsep yang harus dimiliki oleh mahasiswa. Salah satunya adalah Dalil Sisa dan Hasil Bagi Istimewa.

9.5.2 Saran

Untuk mempelajari berbagai cabang ilmu matematika, mahasiswa wajib menguasai ilmu dasar. Salah satu ilmu dasar yang harus dikuasai adalah Aljabar (Hidayati, Subanji and Sisworo, 2020). Aljabar Elementer menjadi satu dasar ilmu Aljabar yang menjadi patokan mahasiswa dalam penguasaan cabang ilmu matematika. Sehingga, pembelajaran matematika menjadi satu ilmu yang mewakili cabang ilmu lain. Penguasaan Aljabar Elementer menjadi patokan bahwa mahasiswa mampu memahami matematika secara mendasar.

DAFTAR PUSTAKA

- Bunga, T. 2021. 'Aljabar Elementer untuk Pembelajaran Matematika Sekolah Tinggi', *Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*, 4(2), pp. 11–26.
- Fernandes, H. P. 2019. 'Algebra for University Students', *Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), pp. 139–151.
- Hidayati, V. R., Subanji, S. and Sisworo, S. 2020. 'Students' Mathematical Connection Error in Solving PISA Circle Problem', *JIPM (Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika)*, 8(2), p. 76. doi: 10.25273/jipm.v8i2.5588.
- Mahmudah, R. 2020. 'Suku Banyak (Polinomial) dalam Aljabar Elementer', *Jurnal Ilmiah Program Studi Matematika STKIP Siliwangi Bandung*, 4(2), pp. 1–13.
- Martinez, U. 2020. 'How to Achieve Algebra in Mathematics Learning in University', *Journal of Curriculum and Teaching*, 3(1), pp. 11–25. Available at: <https://www.ptonline.com/articles/how-to-get-better-mfi-results>.
- Wardah, S., Utomo, D. P. and Putri, O. R. U. 2021. 'An Analysis of Errors on Mathematical Symbol as a Metaphor in Linear Programming', *Jurnal Didaktik Matematika*, 8(1), pp. 45–58. doi: 10.24815/jdm.v8i1.18304.

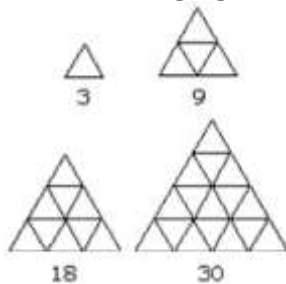
BAB 10

BARISAN BERHINGGA DAN TAK HINGGA

Oleh Novian Riskiana Dewi

10.1 Pendahuluan

Coba perhatikan gambar susunan segitiga dibawah ini :



Gambar 10.1 : Susunan segitiga

(Sumber : <https://mafia.mafiaol.com/2014/01/penerapan-barisan-bilangan-di-kehidupan.html>)

Berdasarkan Gambar 10.1 diatas merupakan susunan segitiga yang dibuat dari beberapa garis. Susunan segitiga membutuhkan garis sebanyak :

Tingkat 1 = 3 garis

Tingkat 2 = 9 garis

Tingkat 3 = 18 garis

Tingkat 4 = 30 garis, dan seterusnya

Penyusunan segitiga tersebut memiliki pola yang beraturan dari tiap tingkatnya. Pola tersebut menggunakan konsep barisan bilangan. Maka barisan bilangan yang dibentuk adalah :

3, 9, 18, 30, ...

dengan menggunakan konsep barisan bilangan, kita dapat menghitung berapa banyak garis yang dibutuhkan untuk membentuk susunan tingkat selanjutnya hingga tingkat ke- n .

10.2 Barisan

Barisan adalah suatu fungsi dengan domain bilangan asli atau beberapa himpunan bagian dari bilangan asli mulai dari 1 hingga bilangan yang lebih besar (barisan berhingga). (Safier, 2009) Barisan dinotasikan dengan $f(n) = x_n$.

$$x_n = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

dengan x_1 disebut sebagai suku ke-1, x_2 sebagai suku ke-2, x_3 sebagai suku ke-3 dan seterusnya x_n sebagai suku ke- n .

Contoh 1:

Tuliskan anggota himpunan barisan $x_n = \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}$.

Penyelesaian :

$$n = 1 \rightarrow \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \rightarrow \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$n = 3 \rightarrow \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

... ..

$$\text{Barisan } x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \right).$$

10.2.1 Barisan Berhingga

Barisan yang memiliki selisih atau beda tiap sukunya disebut dengan **barisan aritmatika**. Tiap bilangan disebut suku barisan dan dilambangkan dengan x_n . Suku pertama

dilambangkan dengan a , sedangkan selisih atau beda dilambangkan dengan b .

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = b$$

Contoh 2 :

$$\begin{array}{l} x_1 = a = 2, \\ x_2 = a + b, \\ x_3 = (a + b) + b = a + 2b, \\ x_4 = (a + 2b) + b = a + 3b, \\ \text{dan seterusnya} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2, 5, 8, 11, \dots \\ \boxed{} \\ b = 3 \end{array}$$

Berdasarkan pola diatas maka dapat diperoleh rumus umum untuk menentukan suku ke- n adalah sebagai berikut :

$$x_n = a + (n - 1)b$$

Rumus umum diatas dapat digunakan jika nilai beda yang dimiliki tetap (sama). Lalu bagaimana jika nilai bedanya tidak selalu sama, seperti pada contoh barisan berikut ini :

$$3, 9, 18, 30, \dots$$

Jika kita lihat sepintas, barisan diatas memiliki nilai beda tidak sama, namun jika kita perhatikan dengan teliti maka kita peroleh:

$$\alpha = 3, \quad 9, \quad 18, \quad 30, \dots$$

$$b = 6, \quad 9, \quad 12$$

$$c = 3 \quad 3$$



Tingkat ke-1

Tingkat ke-2

Barisan diatas merupakan barisan tingkat dua, karena nilai bedanya sama saat berada di tingkat dua.

Barisan bertingkat ada yang bertingkat satu, dua, tiga, dan selanjutnya. Pada contoh barisan diatas merupakan barisan tingkat dua. Secara umum rumus untuk menentukan suku ke- n pada barisan bertingkat dapat menggunakan rumus sebagai berikut :

$$x_n = \frac{a}{0!} + \frac{(n-1)b}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)c}{2!} + dst$$

Barisan 3, 9, 18, 30, ... dengan $a = 3, b = 6$, dan $c = 3$, maka

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{3}{0!} + \frac{(n-1)6}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)3}{2!} \\ &= 3 + 6n - 6 + \frac{3n^2 - 9n + 6}{2} \\ x_n &= \frac{3n^2 + 3n}{2} \end{aligned}$$

Maka kita dapatkan rumus barisan tersebut untuk mencari suku ke- n adalah $x_n = \frac{3n^2 + 3n}{2}$.

Latihan 1 :

1. Tentukan suku ke- n dari barisan bilangan
-9, -3, 3, 9, 15, ...
2. Tentukan suku ke-20 dari barisan bilangan 0, 2, 6, 12, ...

Penyelesaian :

1. Barisan tersebut mempunyai $a = -9, b = 6$, maka suku ke- n adalah $x_n = a + (n-1)b = -9 + (n-1)6$
 $= -9 + 6n - 6$

$$x_n = 6n - 15.$$

$$\begin{array}{rcl}
 2. \quad \alpha = 0, & 2, & 6, \quad 12 \\
 & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} \\
 b = 2, & 4, & 6 & \longrightarrow \text{Tingkat ke-1} \\
 & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} \\
 c = & 2 & 2 & \longrightarrow \text{Tingkat ke-2}
 \end{array}$$

Barisan $0, 2, 6, 12, \dots$ dengan $a = 0, b = 2$, dan $c = 2$, maka

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{0}{0!} + \frac{(n-1)2}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)2}{2!} \\
 &= 0 + 2n - 2 + \frac{(n^2 - 3n + 2)2}{2} \\
 &= 2n - 2 + n^2 - 3n + 2 \\
 x_n &= n^2 - n
 \end{aligned}$$

Untuk suku ke-20 diperoleh $x_{20} = (20)^2 - 20 = 380$.

Sedangkan barisan yang memiliki rasio tiap sukunya disebut dengan **barisan geometri**. Barisan ini dibentuk dengan cara mengkalikan suku-sukunya dengan suatu konstanta (rasio). Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut :

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \dots, \quad ar^{n-1}$$

dengan $x_1 = a, r = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \dots = \frac{x_n}{x_{n-1}}$ = rasio, sehingga untuk

mendapatkan suku ke- n pada barisan geometri sebagai berikut

$$x_n = ar^{n-1}.$$

Contoh 3 :

Tentukan suku ke-12 dari barisan geometri berikut ini $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Penyelesaian :

$$a = 1$$

$$r = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$x_{12} = (1) \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048}$$

Jadi suku ke-12 pada barisan geometri $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ adalah $\frac{1}{2048}$.

10.2.2 Barisan Tak Hingga

Sebelumnya kita sudah membahas tentang barisan aritmatika dan barisan geometri. Selanjutnya akan dibahas definisi barisan secara umum.

1. Pengertian Barisan

Suatu barisan adalah suatu fungsi yang memiliki domain himpunan bilangan asli, dapat dituliskan dengan x_n .

Contoh 4 :

Tuliskan empat suku pertama dari barisan $x_n = 2n + 1$.

Penyelesaian :

$$x_1 = a = 2(1) + 1 = 3$$

$$x_2 = 2(2) + 1 = 5$$

$$x_3 = 2(3) + 1 = 7$$

$$x_4 = 2(4) + 1 = 9$$

Maka kita peroleh barisan x_n dapat dituliskan sebagai berikut 3, 5, 7, 9,

2. Kemonotonan barisan

Suatu barisan (x_n) dikatakan monoton naik jika pada tiap sukunya berlaku aturan $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ atau

$x_n \leq x_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, dan barisan (x_n) dikatakan monoton turun jika berlaku aturan : $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$ atau $x_n \geq x_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Barisan naik dan barisan turun disebut barisan monoton.

Jika $x_n < x_{n+1}$ maka disebut barisan naik tegas, dan sebaliknya jika $x_n > x_{n+1}$ disebut barisan turun tegas.

Contoh 5 :

- Barisan Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ merupakan barisan monoton naik.
- $(2, 4, 6, 8, \dots)$ merupakan barisan naik tegas.
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ merupakan barisan turun tegas.
- $(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$ merupakan barisan monoton turun.
- $(-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots)$ barisan tidak monoton

3. Limit barisan

Misalkan x_n barisan dan $x \in \mathbb{R}$. Barisan x_n mempunyai limit x , sehingga dituliskan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N , sehingga berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$, untuk setiap $n \geq N$.

Sifat-sifat dari limit barisan dinyatakan dalam teorema sebagai berikut :

Teorema Limit :

Misalkan barisan x_n dan barisan y_n masing-masing mempunyai limit L_1 & L_2 dan k suatu konstanta, maka :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} k x_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k L_1$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L_1 \pm L_2$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L_1 \cdot L_2$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$.

Teorema Apit

Misalkan x_n, y_n , dan z_n merupakan barisan yang memenuhi syarat berikut ini :

Jika $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$.

Contoh 6 :

Tentukan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{3n^3 + n^2}$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{3n^3 + n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3 + \left(\frac{1}{n}\right)} \quad (\text{pembilang dan penyebut} \\ &\quad \text{dibagi dengan } n \text{ terbesar pada} \\ &\quad \text{penyebut}) \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \left(\frac{1}{n}\right))} \quad (\text{teorema limit e}) \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \quad (\text{teorema limit c}) \\ &= \frac{2}{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \quad (\text{teorema limit a}) \\ &= \frac{2}{3 + 0} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Contoh 7 :

Buktikan bahwa $\lim \left(\frac{\sin}{n} \right) = 0$.

Penyelesaian :

Untuk setiap bilangan asli n berlaku :

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \text{ oleh karena itu diperoleh } -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Barisan $x_n = -\frac{1}{n}, y_n = \frac{\sin n}{n}, z_n = \frac{1}{n}$ maka dengan

menggunakan **Teorema Apit** diperoleh :

$$\lim \left(-\frac{1}{n} \right) = \lim \left(\frac{\sin n}{n} \right) = \lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

Maka terbukti bahwa $\lim \left(\frac{\sin}{n} \right) = 0$.

4. Kekonvergenan barisan

Barisan x_n dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ jika terdapat nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Suatu barisan tak hingga dikatakan konvergen jika barisan tersebut mempunyai limit, sebaliknya jika tidak mempunyai limit maka barisan tersebut dikatakan divergen.

Contoh 8 :

Barisan $(x_n) = \frac{2+n^2}{1+2n^2}$ konvergen ke $\frac{1}{2}$ karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n^2}{1+2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Contoh 9 :

Barisan $x_n = (-1)^n$ merupakan barisan divergen karena

$$x_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1, & n \text{ ganjil} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Limit barisan untuk n ganjil dan n genap berbeda, maka barisan $x_n = (-1)^n$ divergen.

Latihan Soal :

1. Diketahui barisan aritmatika dengan suku ke-7 dan suku ke-10 berturut-turut adalah 25 dan 37. Tentukan suku ke-20.
2. Suatu barisan aritmatika mempunyai selisih $b = 3$. Sedangkan barisan geometri mempunyai rasio $r = 4$. Jika suku pertama barisan aritmatika sama dengan

suku pertama barisan geometri, dan suku ketiga barisan aritmatika sama dengan suku kedua barisan geometri, maka berapakah suku pertama pada barisan dan rumus suku ke- n kedua barisan tersebut?

Penyelesaian :

1. Diketahui

$$U_7 = a + 6b = 25$$

$$U_{10} = a + 9b = 37 -$$

$$\hline -3b = -12$$

$$b = 4$$

$$a = 1$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_{20} = 1 + (20 - 1)4$$

$$= 1 + 19 \cdot 4$$

$$= 77$$

Sehingga kita peroleh suku ke-20 adalah 77.

2. Suatu barisan aritmatika dengan nilai $b = 3$, yaitu

$$a, a + 3, a + 6, \dots$$

Barisan geometri dengan nilai $r = 4$, yaitu $a, 4a, 16a, \dots$

Suku awal pada kedua barisan sama yaitu a .

$$a + 6 = 4a$$

$$4a - a = 6$$

$$3a = 6$$

$$a = 2$$

Maka suku pertama pada barisan aritmatika dan barisan geometri adalah 2.

Rumus suku ke- n pada barisan aritmatika adalah

$$\begin{aligned}
 x_n &= a + (n - 1)b \\
 &= 2 + (n - 1)3 \\
 &= 2 + 3n - 3
 \end{aligned}$$

$$x_n = 3n - 1.$$

Rumus suku ke- n pada barisan geometri adalah

$$\begin{aligned}
 x_n &= ar^{n-1} \\
 &= (2)(4)^{n-1} \\
 &= (2)(2^2)^{n-1} \\
 &= (2)(2)^{2n-2} \\
 x_n &= 2^{2n-1}.
 \end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Glencoe. *Advanced Mathematical Concepts (Precalculus with Applications)*. Internet Connection. New York : Mc Graw Hill.
- Gunawan, Hendra. 2016. *Pengantar Analisis Real*. Bandung : Penerbit ITB.
- Hernadi, Julian. 2015. *Analisis Real Elementer dengan Ilustrasi Grafis & Numeris*. Yogyakarta: Erlangga.
- Ma'rufi dan Rio Fabrika. 2019. *Aljabar Elementer*. Makassar : Penerbit Nas Media Pustaka.
- Neswan, Oki. 2018. *Analisis Real Elementer*. Bandung: ITB Press
- Safier, Fred. 2009. *Precalculus (Second Edition)*. New York : Mc Graw Hill.

BAB 11

DERET BERHINGGA DAN TAK HINGGA

Oleh Lulut Alfaris

11.1 Pendahuluan

Geometri merupakan adalah cabang matematika yang bersangkutan dengan pertanyaan bentuk, ukuran, posisi relative gambar, dan sifat ruang (Alfaris, 2022). Pengenalan koordinat oleh René Descartes dan perkembangan bersamaan aljabar menandai tahap baru untuk geometri, karena tokoh geometris, seperti kurva, sekarang bisa diwakili analitis, yakni dengan fungsi dan persamaan. Hal ini memainkan peran penting dalam munculnya kalkulus pada abad ke-17. Teori perspektif menunjukkan bahwa ada lebih banyak geometri dari sekadar sifat metrik angka: perspektif adalah asal geometri proyektif. Subyek geometri diperkaya oleh studi struktur intrinsik benda geometris yang berasal dengan Euler dan Gauss dan menyebabkan penciptaan topologi dan geometri diferensial.

11.2 Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang memiliki suku tak hingga banyaknya.

Jika $X := (x_n)$ barisan di R , maka deret tak berhingga (cukup disebut deret) yang dibentuk oleh X adalah barisan $S := (s_n)$ yang didefinisikan sebagai :

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = s_1 + x_2 \cdots (= x_1 + x_2)$$

$$\cdots = \cdots$$

$$s_k = s_{k-1} + x_k \cdots (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \\ \cdots = \cdots$$

x_n disebut terms/suku dari deret, dan s_k disebut jumlah parsial (partial sum). Jika $\lim S$ ada, maka deret S dikatakan konvergen dan nilai limitnya adalah hasil dari jumlahan deret.

Jika limitnya tidak ada, maka dikatakan deret S divergen. Deret tak berhingga S yang dibangun oleh barisan $X := x_n$ Disimbolkan dengan :

$$\sum (X_n) \text{ atau } \sum X_n \text{ atau } \sum_{n=1}^{\infty} X_n$$

Contoh soal 1

Diberikan barisan $X := (r^n)_{n=0}^{\infty}$ dengan $r \in \mathbb{R}$ yang membangun deret :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

Akan ditunjukkan bahwa jika $|r| < 1$, maka deret ini konvergen ke $\frac{1}{1-r}$

Jawaban

Misalkan $s_n := 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$ untuk $n \geq 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} s_n(1-r) &= (1 + r + r^2 + \cdots + r^n) - r(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) \\ &= (1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots) - (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}) \\ &= 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n - \frac{1}{1-r} &= \frac{s_n(1-r) - 1}{1-r} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} - 1}{1-r} \\ &= \frac{-r^{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

$$\left[S_n - \frac{1}{1-r} \right] = \left[\frac{-r^{n+1}}{1-r} \right]$$

$$\leq \left[\frac{|r|^{n+1}}{1-r} \right]$$

Deret geometri tak hingga dibedakan menjadi dua bagian, yaitu deret geometri tak hingga yang konvergen dan deret geometri tak hingga yang divergen.

11.3 Deret Geometri Tak Hingga Konvergen

Konvergen artinya memusat atau tidak menyebar. Deret geometri tak hingga yang konvergen berarti deret geometri yang masih memiliki limit jumlah. Syarat deret geometri tak hingga jenis ini adalah rasio berada di antara -1 dan 1, yaitu $-1 < r < 1$ atau $|r| < 1$. Untuk jumlah tak berhingga dirumuskan sebagai berikut.

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

Contoh :

contoh:

$$8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \text{ (Deret Geometri dengan } r = \frac{1}{2} \text{)}$$

Limit jumlah deret ini bisa dihitung, jika deret diteruskan sampai dengan n tak hingga maka U_n nilainya mendekati nol.

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{8}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{8}{\frac{1}{2}} = 4$$

Adapun deret geometri tak hingga konvergen di bagi menjadi dua Yakini deret geometri dengan suku ganjil dan deret geometri dengan suku genap sehingga menjadi:

- Deret Geometri suku ganjil: $a+ar^2+ar^2+ar^6$
suku pertama =a dan $r=r^2$,

$$S_{\infty}(\text{ganjil}) = \frac{a}{1 - r^2}$$

- Deret Geometri suku genap: $a+ar^3+ar^5 + ..$
suku pertama =ar dan $r=r^2$,

$$S_{\infty}(\text{genap}) = \frac{ar}{1 - r^2}$$

11.4 Deret Geometri Tak Hingga Divergen

Deret geometri tak hingga yang divergen merupakan deret geometri tak hingga yang tidak memiliki limit jumlah. Tidak memiliki limit jumlah jika rasio lebih dari 1 atau kurang dari negatif 1. Secara simbol dapat kita tulis menjadi $r < -1$ atau $r > 1$ atau $|r| > 1$.

Karena tidak memiliki limit jumlah maka untuk menjawabnya adalah $S_{\infty} = \infty$ atau tak hingga.

contoh:

$2+4+8+16+32+\dots$ (Deret Geometri dengan $r=2$)
maka $S_{\infty} = \infty$ karena deret sampai tak hingga semakin besar sehingga penjumlahan juga besar.

11.5 Teorema the n^{th} term test

Apabila deret $\sum x_n$ konvergen, maka $\lim x_n = 0$

Pembuktian

Menggunakan definisi deret tak hingga, $\sum x_n$ konvergen apabila $\lim(s_k)$ ada. Karena $x_n = s_n - s_{n-1}$, maka $\lim(x_n) = \lim(s_n) - \lim(s_{n-1}) = 0$.

11.6 Kriteria Cauchy

Dalam ilmu matematika, barisan Cauchy merupakan barisan dari bilangan riil, bilangan kompleks, titik dalam ruang metrik, yang mana suku-sukunya mendekat dan semakin dekat satu sama lain (Gunawan, 2016). Barisan ini diambil dari nama matematikawan Prancis Augustin Louis Cauchy.

Penjelasan barisan Cauchy dalam suatu ruang selalu konvergen (menuju suatu titik dalam ruang tersebut), ruang tersebut dikatakan lengkap. Contoh ruang yang lengkap adalah bilangan riil dan bilangan kompleks.

Barisan bilangan riil atau kompleks (x_n) dikatakan Cauchy, jika memenuhi kriteria Cauchy, untuk setiap $\epsilon > 0$ ada indeks $N \in \mathbb{N}$ sehingga suku-suku setelah indeks tersebut berjarak kurang dari ϵ

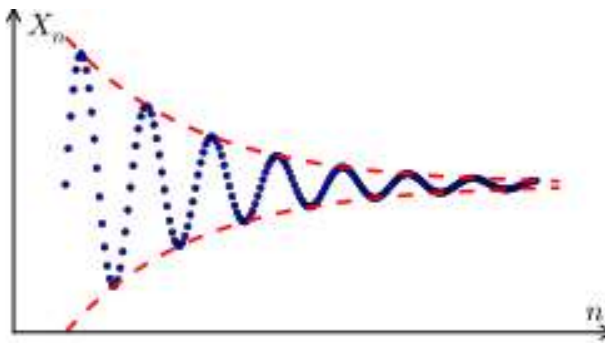
Dalam notasi berkuantor ditulis dengan

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N: |a_m - a_n| < \epsilon$$

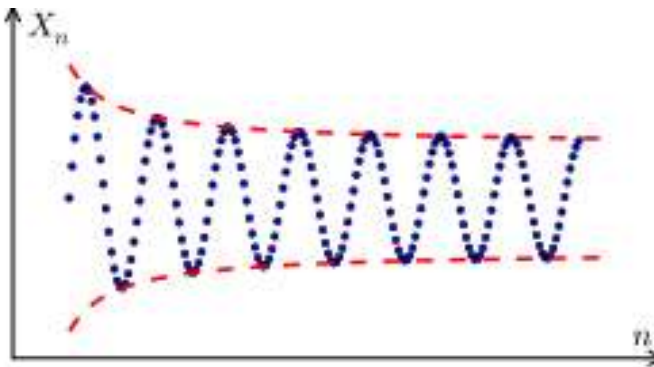
dengan $| \cdot |$ merupakan fungsi mutlak

Deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $m > n \geq M(\epsilon)$, maka

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m| < \epsilon$$



Gambar 11.1 : Jarak antar suku dari barisan semakin kecil seiring bergeraknya barisan, Barisan Cauchy.



Gambar 11.2 : Suatu barisan yang bukan barisan Cauchy. Suku dari barisan tidak saling mendekat seiring bergeraknya barisan.

DAFTAR PUSTAKA

- Gunawan, Hendra. 2009. Pengantar Analisis Real. Penerbit ITB Bandung.*
- Allfaris, Lulut. 2022. "Geometri". Konsep Dasar Matematika. Penerbit Global Eksekutif Teknologi.

BAB 12

BILANGAN KOMPLEKS

Oleh Helma Mustika

12.1 Pendahuluan

Pada awal abad ke -16, Cardan (1501-1576) menggunakan bilangan kompleks dalam memecahkan persamaan kuadrat dan kubik. Pada abad ke -18, fungsi yang memuat bilangan kompleks ditemukan oleh Euler untuk menghasilkan solusi persamaan differensial. Penyelesaian masalah matematika banyak melibatkan bilangan kompleks, sehingga banyak masalah dalam teori fungsi bernilai riil dapat dengan mudah diselesaikan dengan menggunakan bilangan kompleks.

Suatu Bilangan kompleks juga merupakan bilangan yang penerapannya terdiri atas beberapa bagian yang di antaranya adalah bilangan real dan bilangan imajiner. Bilangan kompleks di simbolkan dengan $x + iy$, dengan a dan b merupakan anggota bilangan real. Alasan mengapa bilangan ini disebut bilangan kompleks adalah karena adanya huruf “i”, dapat disebut juga sebagai simbol dari bilangan imajiner. Selain itu, bilangan tersebut juga memiliki bentuk $x + iy$, bagian “ x ” merupakan bagian bilangan real, sedangkan “ iy ” merupakan bagian dari bilangan imajiner. Untuk dapat menulis bagian real dapat juga menggunakan simbol Re dan untuk bagian imajiner dapat ditulis dengan menggunakan Im .

12.1.1 Pengertian Bilangan Kompleks

Mengapa perlu bilangan kompleks ? dengan melihat persamaan $x^2 - 1 = 0$ mempunyai penyelesaian untuk $x \in \mathbb{R}$ sedangkan persamaan $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ tidak mempunyai penyelesaian untuk $x \in \mathbb{R}$. Dengan memiliki sistem bilangan real $\mathbb{R}$ saja belum cukup memenuhi kebutuhan lain untuk menyelesaikan $x^2 + 1 = 0$. Oleh karena itu diperlukan bilangan jenis baru yang dinamakan bilangan kompleks.

Bilangan kompleks ialah suatu bilangan yang berbentuk $x + iy$ dengan a dan b adalah bilangan real dan i adalah akar kuadrat dari -1 .

Untuk notasinya bisa dinyatakan dengan huruf z dan bilangan real akan dilambangkan dengan x dan y . Sehingga, jika $z = x + iy$ dapat dinyatakan sebagai sembarang bilangan kompleks, maka x disebut bilangan real (Re) dan y merupakan imajiner (Im) dari z .

Operasi hitung pada bilangan kompleks dapat dinotasikan dengan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ akan dikatakan sama apabila $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ atau dalam bentuk pasangan berurut (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Dan untuk bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ jumlah dan hasil perkaliannya berturut-turut dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Dengan notasi himpunan untuk semua bilangan kompleks adalah $\mathbb{C}$. Jadi, $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Sehingga, jika $\text{Im}(z) = 0$ maka bilangan kompleks z akan berubah menjadi bilangan real x , dan bilangan real merupakan suatu keadaan khusus dari bilangan kompleks, sehingga $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Kemudian, Jika $\text{Re}(z) = 0$ dan $\text{Im}(z) \neq 0$. Maka z akan menjadi iy dan dinamakan bilangan imajiner murni. Dan Bilangan imajiner murni dengan $y = 1$, yaitu bilangan i dinamakan satuan imajiner.

Definisi 2.2

Bilangan Kompleks adalah pasangan terurut dari dua bilangan real x dan y yang dinyatakan dengan lambang $z = (x, y)$.

Himpunan bilangan kompleks didefinisikan sebagai

$$\mathbb{C} = \{z: z = (x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$$

12.1.2 Sifat-sifat Bilangan Kompleks

Himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan operasi tertentu yang sesuai padanya didefinisikan sebagai sistem bilangan kompleks. Sistem bilangan kompleks tersebut dinotasikan dengan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Himpunan bilangan kompleks bersama operasi penjumlahan dan juga perkalian $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bisa membentuk sebuah lapangan (field) adapun untuk sifat-sifat lapangan yang berlaku terhadap bilangan kompleks z_1, z_2 , dan z_3 adalah sebagai berikut:

- $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ Dan $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$ (Sifat Tertutup)
- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ Dan $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (sifat komutatif)
- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ Dan $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (Sifat Asosiatif)
- $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (sifat distributif)

- e. Ada $0 = 0 + i0 \in \mathbb{C}$ sehingga $z + 0 = z$ (0 elemen netral penjumlahan)
- f. Ada $1 = 1 + i0 \in \mathbb{C}$ sehingga $z \cdot 1 = z$ (1 elemen netral perkalian)
- g. Untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ada $-z = -x - iy \in \mathbb{C}$ sehingga $z + (-z) = 0$
- h. Untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ada $z^{-1} = \frac{1}{z}$ sehingga $z \cdot z^{-1} = 1$ dengan,

$$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{x + yi}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi}$$

$$z^{-1} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

Teorema 2.2

Sistem bilangan kompleks $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ merupakan suatu lapangan (*field*)

12.2 Operasi pada Bilangan Kompleks

12.2.1 Operasi Penjumlahan Bilangan Kompleks

Dengan cara menjumlahkan suku yang berkoefisien i dan menjumlahkan konstantanya. misal :

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Contoh

misalkan :

$z_1 = 3 + 2i$ dan $z_2 = 2 - 5i$, maka jumlahkanlah bilangan kompleks tersebut!

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (2 - 5i)$$

$$z_1 + z_2 = (3 + 2) + (2 - 5)i$$

$$z_1 + z_2 = 5 - 3i$$

12.2.2 Operasi Pengurangan Bilangan Kompleks

Pada pengurangan sama halnya dengan penjumlahan hanya saja dalam pengurangan kita mengurangkan konstanta dengan konstanta dan koefisien i dengan koefisien i . Sehingga berbentuk seperti berikut

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) - (c + di)$$

$$z_1 + z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Contoh

1. Misalkan $z_1 = 9 + 4i$ dan $z_2 = 2 - 6i$, maka lakukanlah operasi pengurangan pada soal tersebut .

$$z_1 - z_2 = (9 + 4i) - (2 - 6i)$$

$$z_1 - z_2 = (9 - 2) + (4 - (-6))i$$

$$z_1 + z_2 = 7 + 10i$$

2. jika $z = 1 + 3i$ dan $w = 2 + i$, maka

$$\begin{aligned} z - w &= (1 + 3i) - (2 + i) \\ &= (1 - 2) + (3i - i) \\ &= -1 + 2i \end{aligned}$$

12.2.3 Operasi Perkalian Bilangan Kompleks

Pada operasi perkalian bilangan kompleks memiliki kesamaan pada operasi perkalian yang ada pada persamaan linear satu variabel. Bentuknya adalah sebagai berikut :

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$z_1 \cdot z_2 = a \cdot c + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d)(i \cdot i)$$

Yang harus diperhatikan yaitu $(i \cdot i) = -1$. karna $i^2 = -1$, sehingga didapat :

$$z_1 \cdot z_2 = a \cdot c + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d)(i \cdot i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = a \cdot c + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d)(-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = a \cdot c + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d)$$

Contoh

Misalkan

$z_1 = 3 + 5i$ dan $z_2 = 8 - 4i$, maka lakukanlah operasi perkalian pada soal tersebut!

Diketahui:

$$z_1 = 3 + 5i$$

$$z_2 = 8 - 4i$$

$$\text{jadi, } z_1 \cdot z_2 = (3 + 5i)(8 - 4i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 8 + (3 \cdot 4i) + (8 \cdot 5i) + (5 \cdot -4)(i \cdot i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 24 + 12i + 40i - 20 - i^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = 24 + 12i + 40i - 20 - 1$$

$$z_1 \cdot z_2 = 24 + 12i + 40i + 20$$

$$z_1 \cdot z_2 = 44 + 52i$$

12.2.4 Operasi Pembagian Bilangan Kompleks

Pada pembagian bilangan kompleks memiliki sedikit perbedaan dengan persamaan linear satu variabel. Pada operasi pembagian dapat diselesaikan dengan mengalikannya dengan akar sekawan (konjugat).

contoh:

Misalkan

$z_1 = 9 + 2i$ dan $z_2 = 2 + i$, maka hasil dari $\frac{z_1}{z_2}$ yaitu !

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9 + 2i}{2 + i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9 + 2i}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{18 - 9i + 4i - 2(i^2)}{4 - 2i - 2i - (i^2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{18 - 9i + 4i - 2(-1)}{4 - 2i + 2i - (-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{20 - 5i}{5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 4 - i$$

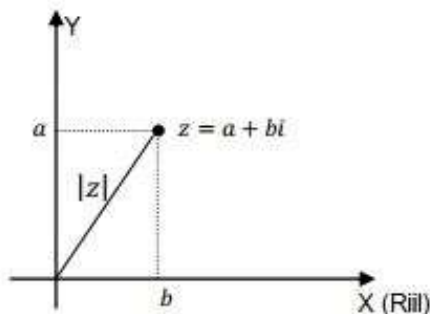
12.3 Modulus dan Bilangan Sekawan

12.3.1 Modulus

Penyajian bilangan kompleks disebut sebagai vektor yang dapat digunakan untuk pengembangan konsep suatu nilai mutlak dari sebuah bilangan real pada bilangan kompleks. Jika $z = x + iy = (x, y)$ merupakan bilangan kompleks, maka modulus atau nilai mutlak dari z dapat ditulis dengan notasi:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Perhatikan grafik berikut ini!



Sehingga $z = x + iy$ dapat didefinisikan sebagai bilangan real non-negatif dengan $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Secara geometri, arti dari modulus z atau $|z|$ yakni menyatakan sebuah jarak antara titik asal $O(0,0)$ ke titik $z = (x, y)$. Sementara itu, untuk jarak antara dua buah bilangan kompleks dengan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ dapat didefinisikan dengan:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Selanjutnya, untuk persamaan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan r adalah real positif maka untuk $|z - z_1| = r$ akan menyatakan bilangan

kompleks z yang bersesuaian dengan titik-titik pada lingkaran yang berpusat pada z_1 dengan jari-jarinya r .

12.3.2 Bilangan Sekawan

Bilangan Kompleks Sekawan dari $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan kompleks $\bar{z} = x - iy$. Secara geometri, bilangan kompleks sekawan $\bar{z} = x - iy$ dinyatakan dengan titik $(x, -y)$ dan merupakan persamaan titik (x, y) terhadap sumbu riil.

12.3.3 Sifat Modulus dan Bilangan Sekawan

- a. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- b. $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- c. $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- d. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- e. $\overline{\bar{z}} = z$
- f. $|\bar{z}| = |z|$
- g. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- h. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- i. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- j. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- k. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- l. $z \bar{z} = |z|^2$
- m. Pertidaksamaan Segitiga. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- n. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
- o. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
- p. $|z_1 - z_2| + \dots + z_n \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$

Contoh soal dan pembahasan

1. Akan dibuktikan sifat (a) :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = |(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)|$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)|$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$$

$$|z_1| \cdot |z_2| =$$

$$\sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2}$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2)}$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{Jadi, terbukti } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

2. Akan dibuktikan sifat (d) : $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \right|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{x_1x_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{x_1x_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} \right)^2 + \left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)^2}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2}{(x_2^2 + y_2^2)^2}}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2)}{(x_2^2 + y_2^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2)}}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2)}{(x_2^2 + y_2^2)}}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\text{Jadi, terbukti } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

3. Selesaikan $|-4 + 2i|$

Penyelesaian:

$$|-4 + 2i| = \sqrt{-4^2 + 2^2}$$

$$|-4 + 2i| = \sqrt{16 + 4}$$

$$|-4 + 2i| = \sqrt{20}$$

$$|-4 + 2i| = \sqrt{(2^2)5}$$

$$|-4 + 2i| = 2\sqrt{5}$$

4. Selesaikan $|3i + 4|$

Penyelesaian :

$$|3i + 4| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$|3i + 4| = \sqrt{9 + 16}$$

$$|3i + 4| = \sqrt{25}$$

$$|3i + 4| = 5$$

5. Jika $z = 3 + 4i$ maka $\bar{z} = \overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

Soal Latihan

1. Nyatakan dalam bentuk $x+iy$

a. $(2 + 3i)(-2-3i)$

b. $\frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$

2. Bilangan Kompleks manakah yang memenuhi persamaan :

a. $z = \bar{z}$ c. $z^{-1} = z$

b. $\bar{z} = -z$ d. $\bar{z} = z^{-1}$

3. Buktikan bahwa :

a. $\text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$

b. $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$

4. Tentukanlah bagian real dan bagian imajiner dari i^n dan i^{-n} untuk n bilangan asli!

5. Buktikan bahwa hasil kali dua bilangan kompleks sama dengan nol jika dan hanya jika paling sedikit satu dari dua bilangan itu adalah nol!

DAFTAR PUSTAKA

- Ansar, A., dan Muhammad, A.A. 2019. Beberapa Sifat Akar Persamaan Kuadrat Berkoeffisien Bilangan Kompleks.SAINTIFIK : jurnal.unsulbar.ac.id/saintifik, 5(1), 36-43.
- Dedy, E., dan Encum, S. 2020. Fungsi Variabel Kompleks. Jakarta Timur :PT Bumi Aksara.
- Halikin, I. dan Ubaidillah, F. 2019. 'Analisis Kompleks', (Bilangan Kompleks), pp. 1–38.
- Nuraida, Ida., 2017. Sifat lapangan pada Bilangan Kompleks. Jurnal Analisa, Vol 3, No 1. Diakses tanggal 20 November 2022, dari UIN Sunan Gunung Djati Bandung
- Thresye. 2010. Penggunaan Bentuk Smith untuk menentukan bentuk Kanonik Matriks Normal dengan Entri-entri Bilangan Kompleks. Jurnal Matematika Murni dan terapan,Vol.4 no.2 hal 30-37. Diakses tanggal 20 November 2022, dari Universitas Lambung Mangkurat.
- Tristiano, Dwi.,dkk. 2018. Penerapan Bilangan Kompleks untuk Menyelesaikan Soal-soal Geometri Datar. Jurnal Matematika dan Aplikasi deCartesiaN, Vol.7, No.1

BIODATA PENULIS



Nazariah

Dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Agama Islam, Universitas Muhammadiyah Aceh

Penulis lahir di Desa Pante Lhoksukon Aceh Utara. Pada tanggal 07 Juli 1987. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Agama Islam, Universitas Muhammadiyah Aceh. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika UIN AR RANIRY Banda Aceh pada tahun 2011 dan melanjutkan S2 pada Jurusan Magister Pendidikan Matematika UNSYIAH Banda Aceh pada tahun 2012 dan selesai pada tahun 2015. Penulis telah menulis buku “Materi Ajar Untuk Sekolah Dasar” dan telah menyelesaikan penulisan buku tentang Pengajaran yang berfokus pada bab Keterampilan Dasar Mengajar.

BIODATA PENULIS



Zainal Azis

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas
Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah
Sumatera Utara

Penulis lahir di Medan tanggal 13 Desember 1963. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 di Prodi Pendidikan Matematika, Universitas Syiah Kuala Banda Aceh, kemudian menyelesaikan pendidikan S2 di Prodi Matematika, Universitas Sumatera Utara dan pendidikan S3 di Prodi Ilmu Matematika, Universitas Sumatera Utara.

Penulis saat ini tergabung sebagai Sekretaris di Himpunan Matematika Indonesia (The Indonesian Mathematical Society) IndoMS Aceh-Sumut, periode 2020-2022 dan aktif sebagai Instruktur dan Penyelia dalam Kegiatan Pendidikan Profesi Guru (PPG) di Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara. Sebagai dosen, penulis aktif melaksanakan tridharma perguruan tinggi sesuai dengan bidang kepakaran yang dimilikinya, yaitu aljabar linear dan matriks, analisis kompleks dan matematika diskrit.

BIODATA PENULIS



Dr. H. Nanang, M.Pd.

Staf Dosen Jurusan Teknik Sipil
Institut Teknologi Garut

Penulis lahir di Bandung tanggal 1 Juli 1964. Penulis adalah dosen dpk Kopertis Wilayah VII Surabaya pada Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Jember dari tahun 1990 s.d. 2000 dan dosen LLDIKTI Wilayah IV Jawa Barat dan Banten pada Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Sipil dan Arsitektur Institut Teknologi Garut (ITG) dari Tahun 2000 s.d. sekarang.

Penulis menyelesaikan: S1 Pendidikan Matematika di IKIP Bandung (UPI) Tahun 1989, S2 Pendidikan Matematika di IKIP Surabaya (UNESA) Tahun 1999, dan S3 Pendidikan Matematika di UPI Bandung Tahun 2009.

Penulis menekuni bidang Pembelajaran Matematika. Penulis juga sebagai Tim Penilai DUPAK Kepangkatan Guru-guru di Kabupaten Garut dari tahun 2015 s.d. sekarang. Telah beberapa kali memperoleh hibah penelitian dan pengabdian pada masyarakat dari Universitas Muhammadiyah Jember, Institut Teknologi Garut, dan Ristek Dikti Kemendikbud.

BIODATA PENULIS



Noviyanti

Dosen Program Studi Sistem Informatika
Fakultas FKOM Universitas Islam Kebangsaan Indonesia

Penulis lahir di Pante Piyeu tanggal 04 November 1989. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Fakultas Ilmu Komputer Universitas Islam Kebangsaan Indonesia. Menyelesaikan pendidikan S1 pada jurusan Pendidikan Matematika Almuslim pada tahun 2012 dan melanjutkan S2 pada Jurusan Magister Pendidikan Matematika UNSYIAH Banda Aceh tahun 2012 dan selesai pada tahun 2015.

BIODATA PENULIS



Suvriadi Panggabean

Dosen Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Medan

Dilahirkan di Nias, Silimawali, 18 April 1988 dari Pasangan Ibu bernama Hotma Gultom dan Ayah bernama Muhammad Panggabean yang berprofesi sebagai Guru SD. Pendidikan SD, SMP dan SMA ditempuh di Sarulla, Kecamatan Pahae Jae, Kabupaten Tapanuli Utara. Memperoleh gelar Sarjana Pendidikan (S.Pd) dari Prodi S1 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan (UNIMED), memperoleh gelar Magister Sains (M.Si) dari Prodi S2 Matematika Universitas Sumatera Utara (USU). Akhir Desember 2021, Penulis dinyatakan lulus CPNS dan Mei 2022 SPMT sebagai Dosen CPNS di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Negeri Medan (UNIMED).

Penulis saat ini tergabung sebagai anggota bidang jurnal/publikasi di Himpunan Matematika Indonesia (The Indonesian Mathematical Society) IndoMS Aceh-Sumut. Sebagai dosen, penulis aktif melaksanakan tridharma perguruan tinggi sesuai dengan bidang keilmuan yang ditekuni. Ayah dari 2 anak ini, selain aktif sebagai dosen, juga bertugas sebagai Asesor Badan

Akreditasi Nasional Sekolah Madrasah (BAN SM) Provinsi Sumatera Utara lintas jenjang SD/MI, SLB, SMP/MTs, SMA/MA dan SMK/MAK dan Asesor Program Sekolah Penggerak (PSP) Kemdikbudristek RI.

BIODATA PENULIS



Agung Prasetyo, S.Pd.

Mahasiswa S2 Pendidikan Matematika dan *Awardee* LPDP

Di usianya yang menginjak 22 tahun, dirinya telah berhasil menerbitkan buku kolaborasi yang **ketiga**, sebelumnya ia telah berkontribusi dalam menulis buku berjudul '**filsafat pendidikan matematika**' dan '**matematika untuk PT**'. Saat ini dirinya sedang berjibaku untuk menyelesaikan tesis jenjang Magister Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Yogyakarta (UNY). Hingga saat ini dirinya tertarik untuk menekuni bidang pemecahan dan pengajuan masalah, penalaran analogi, dan filsafat. Selain menulis buku, penulis juga sering membuat konten untuk matematika, pembimbingan beasiswa LPDP, dan olimpiade. Apabila kalian tertarik untuk menelusuri karya dan goresan pemikirannya, silakan mengunjungi: Instagram @agung4131, <https://agungprasetyo4131.wordpress.com/>, dan <https://youtu.be/nxQnbKkFYNY>. Dalam hidup yang singkat ini penulis berpesan bahwa "Orang-orang pesimis terpaku pada duri dan melupakan mawarnya, sementara itu orang yang optimis melihat indahnya mawar dan melupakan durinya."

BIODATA PENULIS



Nurul Asma, S.Pd., M.Pd.

Dosen Program Studi Informatika
Fakultas Komputer dan Multimedia
Universitas Islam Kebangsaan Indonesia

Penulis lahir di Bireuen, Aceh tanggal 3 Desember 1989. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Informatika Fakultas Komputer dan Multimedia, Universitas Islam Kebangsaan Indonesia. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Syiah Kuala dan melanjutkan S2 pada kampus yang sama Jurusan Pendidikan Matematika.

BIODATA PENULIS



Syahrullah Asyari, S.Pd., M.Pd.

Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika
dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Negeri
Makassar (UNM)

Penulis lahir di Ujung Pandang tanggal 11 Desember 1986. Penulis adalah dosen tetap pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar. Penulis menyelesaikan studi S1 pada Jurusan Matematika FMIPA UNM dan melanjutkan studi S2 pada *International Master Program on Mathematics Education* (IMPoME) di Universitas Negeri Surabaya (Unesa). Penulis juga menyelesaikan studi *I'dad Lughawi* pada Program Studi Islam dan Bahasa Arab, Ma'had al-Birr Unismuh Makassar. Sekarang, penulis adalah kandidat doktor dalam bidang pendidikan matematika pada Program Studi S3 Pendidikan Matematika, Program Pascasarjana, Universitas Negeri Makassar. Penulis dapat dihubungi via email: syahrullah_math@unm.ac.id.

BIODATA PENULIS



Wanda Nugroho Yanuarto

Dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Purwokerto

Penulis lahir di Purbalingga tanggal 4 Januari 1986. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Purwokerto. Menyelesaikan pendidikan S1, S2, dan S3 pada Program Studi Pendidikan Matematika.

BIODATA PENULIS



Novian Riskiana Dewi, S.Pd., M.Si.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Tarbiyah dan Keguruan
UIN Raden Intan Lampung

Penulis lahir di Banyuwangi, 24 November 1990. Menyelesaikan pendidikan S1 lulus tahun 2013 pada Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember dan melanjutkan S2 lulus tahun 2015 pada Jurusan Matematika Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Saat ini penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, UIN Raden Intan Lampung.

BIODATA PENULIS



Lulut Alfaris, S.T., M.T.

Dosen di Program Studi Teknologi Kelautan, Politeknik Kelautan dan Perikanan Pangandaran

Penulis menyelesaikan Pendidikan di SMAN 1 Genteng Banyuwangi, selanjutnya menempuh pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Teknik Kelautan, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya . Saat ini menjadi dosen di Program Studi Teknologi Kelautan, Politeknik Kelautan dan Perikanan Pangandaran. Mata Kuliah yang Penulis ajar ialah Oseanografi serta Matematika Teknik. Buku-buku penulis yang telah terbit diantaranya: Artificial Intelligence; Riset Operasi; Filsafat Pendidikan Matematika; Konsep Dasar Matematika; Matematika untuk Perguruan Tinggi; Termodinamika: Tinjauan Teoritis dan Praktis.

BIODATA PENULIS



Helma Mustika, M.Si

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
STKIP Insan Madani Airmolek

Penulis lahir di Lirik tanggal 22 Juli 1986. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP Insan Madani Airmolek. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Andalas. Selain itu, penulis juga aktif menulis artikel pada jurnal nasional serta berperan aktif pada kegiatan PKM dosen. Penulis saat ini menjadi anggota Asosiasi Dosen PKM Indonesia (ADPI) wilayah Riau.